2017학년도 대학수학능력시험 모의평가 2회

수학 영역(나 형) 해설지

Epsilon

정답 및 해설

1) [정답] ⑤ (출제자 : 16 김동균)

[출제의도] 지수가 유리수인 수의 값을 계산할 수 있는가?

[해설]

$5\times 16^{\frac{1}{4}}=5\times (2^4)^{\frac{1}{4}}=5\times 2=10$

2) [정답] ④ (출제자 : 16 김동균)

[출제의도] 수열의 극한값을 계산할 수 있는가?

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}=4$$

3) [정답] ③ (출제자 : 15 최문영)

[출제의도] 이항분포의 표준편차를 구할 수 있는가?

[해설]

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(48,\ \frac{1}{4}\right)$을 따를 때의 표준편차를 구하면

$\sigma(X)=\sqrt{48\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}}=3$

4) [정답] ② (출제자 : 15 오민지)

[출제의도] 로그의 성질을 이용하여 계산을 할 수 있는가?

[해설]

$$\begin{aligned}\log_2 3\times\log_3 10+\log_2\frac{2}{5}&=\log_2 10+\log_2\frac{2}{5}\\&=\log_2\left(10\times\frac{2}{5}\right)=\log_2 4=2\end{aligned}$$

5) [정답] ③ (출제자 : 15 오민지)

[출제의도] 조건의 진리집합을 구할 수 있는가?

[해설]

$|x-2|<3 \ \Leftrightarrow\ -3<x-2<3$ 이므로

정수 x에 대한 조건 $-1<x<5$의 진리집합을 구하면

$P=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$이다. 따라서 P의 모든 원소의 합은 10이다.

6) [정답] ④ (출제자 : 16 송세령)

[출제의도] 등비수열의 뜻을 알고 항을 구할 수 있는가?

[해설]

첫 항을 a라고 하면

$a_2a_4=2^4\times a^2=16a^2=64$ 이므로 $a=2$이다.

따라서 $a_5=2^5=32$이다.

[별해]

$a_2a_4=64$ 이므로 등비중항의 성질에 의하여 $a_3=8$이다.

따라서 $a_5=2^2a_3=4\times 8=32$ 이다.

7) [정답] ① (출제자 : 15유정훈)

[출제의도] 함수가 주어졌을 때 함수의 극한을 구할 수 있는가?

[해설]

$\lim_{x\to -1-}f(x)$를 구해보자.

함수 $f(x)$의 $x=-1$에서의 좌극한의 값은 $x=-1$을 기준으로 왼쪽의 위로 볼록한 그래프의 개형을 봐야 하므로

$\lim_{x\to -1-}f(x)$의 값은 2이다.

다음으로 $\lim_{x\to 2+}f(x)$를 구해보자.

함수 $f(x)$의 $x=2$에서의 우극한의 값은 $x=2$를 기준으로 오른쪽의 x축과 평행한 그래프를 봐야하므로

$\lim_{x\to 2+}f(x)$의 값은 -3이다.

따라서 구하는 답은 $2+(-3)=-1$

8) [정답] ② (출제자 : 15 유정훈)

[출제의도] 배반사건의 정의를 이용하여 문제를 풀 수 있는가?

[해설]

두 사건 A와 B가 배반사건이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$을 만족한다.

두 번째 조건인 $\mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{1}{4}$를 보면

$\mathrm{P}(A\cap B)=0$ 이므로 $\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)$ 에서

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}$ 임을 알 수 있다. 따라서 $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\mathrm{P}(A)=\frac{1}{8}$ 이다.

구하는 답 $\mathrm{P}(A\cup B)$는 $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$ 와 같으므로

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$ 의 값인 $\frac{3}{8}$ 이다.

9) [정답] ⑤ (출제자 : 16 송세령)

[출제의도] 이항정리를 이용하여 다항식의 계수를 구할 수 있는가?

[해설]

$\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)^5=\sum_{r=0}^{5}{}_5\mathrm{C}_r(2x)^r\left(\frac{1}{x^2}\right)^{5-r}$ 이다.

$r=3$ 일 때 $\frac{1}{x}$ 의 계수를 구할 수 있으므로

$r=3$ 을 대입하면 ${}_5\mathrm{C}_3\times 2^3=80$ 이고,

따라서 답은 80 이다.

10) [정답] ① (출제자 : 16 이희원)

[출제의도] 시그마의 성질을 이용하여 수열의 합을 계산할 수 있는가?

[해설]

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}(a_k-2)^2&=\sum_{k=1}^{10}\left(a_k{}^2-4a_k+4\right)\\&=\sum_{k=1}^{10}a_k{}^2-4\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}4\\&=30-4\times5+40=50\end{aligned}$$

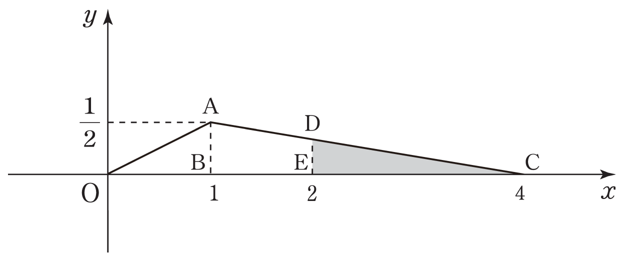
따라서 정답은 50 이다.

11) [정답] ④ (출제자 : 15 오민지)

[출제의도] 확률밀도함수를 보고 확률을 구할 수 있는가?

[해설]

확률 $\mathrm{P}(2\le X\le 4)$ 는 다음 그래프에서 색칠된 부분의 넓이를 의미한다.



$\triangle\mathrm{ABC}\sim\triangle\mathrm{DEC}$ 이고, 닮음비는 $3:2$ 이다.

선분 AB 의 길이가 $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$ 이므로 선분 DE 의 길이는 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ 이다.

넓이를 구하면 $2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$ 이다.

[별해]

$y=-\frac{1}{6}x+\frac{2}{3}$ $(1\le x\le 4)$ 이므로 함수의 그래프는 $\left(2,\ \frac{1}{3}\right)$ 을 지난다.

넓이를 구하면 $2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$ 이다.

12) [정답] ② (출제자 : 15 오민지)

[출제의도] 함수의 극한에 대한 조건을 통해 미정계수를 구할 수 있는가?

[해설]

$\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x^2+ax+3b}=6$ 에서 $6\ne0$ 이고 $\lim_{x\to3}(x^2-9)=0$ 이므로 $\lim_{x\to3}(x^2+ax+3b)=0$ 이다.

$x\to3$ 일 때 극한값이 0 이므로 $x^2+ax+3b$ 는 $x-3$ 을 인수로 갖는다.

상수항을 기준으로 인수분해하면 $x^2+ax+3b=(x-3)(x-b)$ 이다.

$\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-b)}=\lim_{x\to3}\frac{x+3}{x-b}=\frac{6}{3-b}=6$ 이므로

$b=2$ 이다.

$x^2+ax+3b=(x-3)(x-2)=x^2-5x+6$ 이므로

$b-a=2-(-5)=7$ 이다.

13) [정답] ① (출제자 : 16 이희원)

[출제의도] 표준정규분포표를 이용하여 주어진 확률을 구할 수 있는가?

[해설]

곰인형의 무게를 확률변수 X 라 하면,

X 는 정규분포 $\mathrm{N}(80,\ 0.5^2)$ 를 따른다.

구하고자 하는 것은 $\mathrm{P}(X<79)+\mathrm{P}(X>81)$ 이다.

확률변수 X 를 표준화시키면 $Z=\frac{X-80}{0.5}$ 이다.

따라서

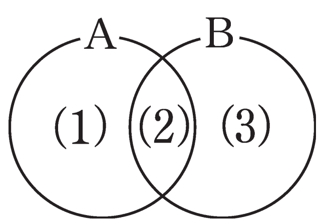
$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(X<79)+\mathrm{P}(X>81)\\&=\mathrm{P}\left(Z<\frac{79-80}{0.5}\right)+\mathrm{P}\left(Z>\frac{79-80}{0.5}\right)\\&=\mathrm{P}(Z<-2)+\mathrm{P}(Z>2)\\&=2\times\{0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le2)\}\\&=0.0456\end{aligned}$$

답은 0.0456 이다.

14) [정답] ⑤ (출제자 : 12 황성문)

[출제의도] 조건부 확률의 의미를 이해하여 문제를 풀 수 있는가?

[해설]



각 영역에 속한 학생 수를 파악해야한다.

첫 번째로 A 영화를 시청한 학생들 중에서 한 명을 뽑을 때

이 학생이 B 영화를 시청했을 확률은 $\frac{3}{8}$ 이므로 $\frac{(2)}{(1)+(2)}=\frac{3}{8}$ 이다.

따라서 (1)에 속한 학생 수를 $5n$, (2) 에 속한 학생 수를 $3n$이라 할 수 있다.

이 때, (3) 에 속한 학생 수가 50 명이고 영화감상 동아리의 학생 중 한 명을 뽑을 때, 이 학생이 A 영화와 B 영화를 모두 시청했을 확률이 $\frac{3}{10}$ 이므로 $\frac{3n}{5n+3n+50}=\frac{3}{10}$ 이다.

$24n+150=30n$

$6n=150$

$n=25$ 이므로

전체 학생 수는 $8n+50=250$ (명)이다.

15) [정답] ② (출제자 : 16 이준희)

[출제의도] 조건부 확률을 구할 수 있는가?

[해설]

첫 번째, 두 번째 꺼낸 공에 적혀있는 수를 각각 a, b라 할 때, $ab=12$ 이 되는 사건을 A라 하고, $f(a)=f(b)$ 가 되는 사건을 B라 하자.

$ab=12$ 을 만족시키는 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(1, 12)$, $(2, 6)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(6, 2)$, $(12, 1)$

이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{6}{12\times 12}=\frac{1}{24}$$

이다. 이차함수 $f(x)=x^2-7x+6$ 에 대하여

$f(a)=f(b)$ 이면 $a=b$ 또는 $a+b=7$

이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{12\times 12}=\frac{1}{72}$$

이다. 그러므로 구하는 확률 $\mathrm{P}(B|A)$는

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\frac{1}{72}}{\frac{1}{24}}=\frac{1}{3}$$

이다.

위의 식에 의해 $m=\frac{1}{24}$, $n=\frac{1}{72}$, $k=\frac{1}{3}$ 이므로 $\frac{k}{m+3n}=4$ 이다. 그러므로 답은 4 이다.

16) [정답] ⑤ (출제자 : 16 이준희)

[출제의도] 합성함수를 이해하여 함숫값을 찾을 수 있을까?

[해설]

함수 $h: X\to X$ 가 $(f\circ h)(x)=(h\circ g)(x)$ 를 만족하므로 $f(h(x))=h(g(x))$ 를 만족한다.

주어진 값을 알기 위해 x에 1 부터 대입해 보면

$x=1$ 일 때 $f(h(1))=h(g(1))$, $f(2)=h(2)$ 가 되므로 $h(2)=3$

$x=2$ 일 때 $f(h(2))=h(g(2))$, $f(3)=h(4)$ 가 되므로 $h(4)=1$

$x=4$ 일 때 $f(h(4))=h(g(4))$, $f(1)=h(3)$ 이 되므로 $h(3)=4$

따라서 $h(2)+h(3)=7$ 이다.

17) [정답] ③ (출제자 : 16 김대현)

[출제의도] 수열의 일반항을 구할 수 있는가?

[해설]

$\sqrt{n}$ 이 유리수인 경우인 경우는 n이 어떤 자연수의 제곱수인 경우밖에 없다. $1\le n\le 20$ 이면서 어떤 자연수의 제곱수는 $1^2=1$, $2^2=4$, $3^2=9$, $4^2=16$ 뿐이다. 따라서 $1\le n\le 20$ 일 때, 주어진 수열은 다음과 같이 바꿀 수 있다.

$$a_n=\begin{cases}\sqrt{n} & (n=1,\ 4,\ 9,\ 16)\\ n & (1,\ 4,\ 9,\ 16\text{을 제외한 } 20\text{ 이하의 자연수})\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{20}a_n&=(\sqrt{1}+\sqrt{4}+\sqrt{9}+\sqrt{16})+\left\{\left(\sum_{n=1}^{20}n\right)-(1+4+9+16)\right\}\\&=(1+2+3+4)+\frac{20\times 21}{2}-(1+4+9+16)\\&=10+210-30\\&=190\end{aligned}$$

18) [정답] ① (출제자 : 16 안성준)

[출제의도] 복잡한 함수의 미분가능성을 조사할 수 있는가?

[해설]

함수 $|f(x)|$ 는 $x=\pm 2$ 에서 미분가능하지 않고, 함수 $|g(x)|$ 는 $x=2$ 에서 미분가능하지 않으므로 함수 $h(x)=|f(x)|-|g(x)|$ 에서 미분가능성을 조사해야 하는 점의 x 좌표는 $x=\pm 2$ 이다.

i) $x=-2$ 에서 미분가능성을 조사해보자.

$x<-2$ 에서 $h(x)=f(x)+g(x)$ 이므로

$\lim_{t\to 0-}\frac{h(-2+t)-h(-2)}{t}=-4k+1$ 이다.

$-2<x<2$ 에서 $h(x)=-f(x)+g(x)$ 이므로

$\lim_{t\to 0+}\frac{h(-2+t)-h(-2)}{t}=4k+1$ 이다.

k는 양의 상수이므로 $4k+1\ne -4k+1$ 이다.

따라서 $x=-2$ 에서 미분가능하지 않다.

$h(x)$ 는 $x=a$ 에서만 미분가능하지 않으므로 $a=-2$ 이다.

ii) $x=2$ 에서 미분가능성을 조사해보자.

$-2<x<2$ 에서 $h(x)=-f(x)-g(x)$ 이므로

$\lim_{t\to 0-}\frac{h(2+t)-h(2)}{t}=-4k+1$ 이다.

$x>2$ 에서 $h(x)=-f(x)+g(x)$ 이므로

$\lim_{t\to 0+}\frac{h(2+t)-h(2)}{t}=4k-1$ 이다.

$h(x)$ 는 $x=-2$ 에서만 미분가능하지 않아야하므로 $x=2$ 에서 미분가능해야 한다. 따라서 $-4k+1=4k-1$ 이므로 $k=\frac{1}{4}$ 이다.

$\therefore\ k\times a^2=1$

19) [정답] ④ (출제자 : 16 김민지)

[출제의도] 등비급수의 성질을 활용하여 도형의 넓이의 극한을 구할 수 있는가?

[해설]

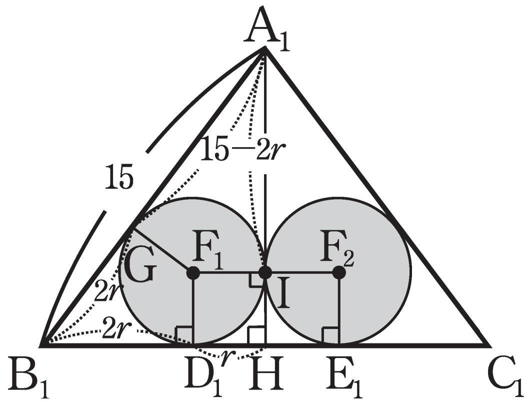


그림 R_1 에서 두 원 O_1, O_2 의 중심을 각각 F_1, F_2라 하고

원 O_1 의 반지름의 길이를 r 이라 하면 $\overline{F_1F_2}=\overline{D_1E_1}=2r$ 이고

$\overline{B_1D_1}=\overline{D_1E_1}=\overline{E_1C_1}$ 이므로 $\overline{B_1D_1}=2r$ 이다.

원 O_1 과 선분 A_1B_1이 접하는 점을 G, 점 A_1에서 선분 B_1C_1에 내린 수선의 발을 H라 하고 선분 A_1H와 원 O_1 이 접하는 점을 I라 하자.

원 O_1 은 삼각형 A_1B_1H의 내접원이므로

$\overline{B_1D_1}=\overline{B_1G}=2r$, $\overline{GA_1}=\overline{A_1I}=15-2r$, $\overline{IH}=\overline{D_1H}=r$ 이다.

삼각형 A_1B_1H에서 $\overline{B_1H}=3r$, $\overline{A_1B_1}=15$, $\overline{A_1H}=15-r$

이므로 피타고라스 정리에 의해

$15^2=(3r)^2+(15-r)^2$

$225=10r^2-30r+225$

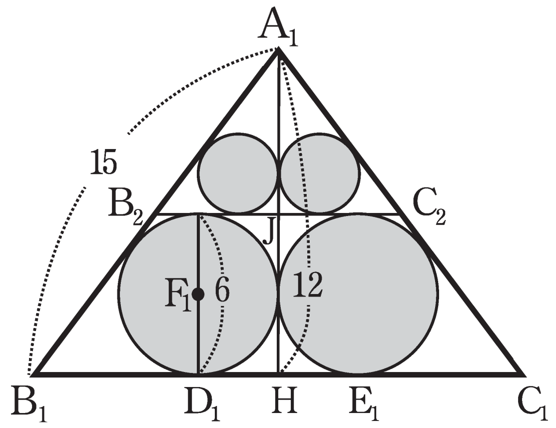
$r^2-3r=0$

$r=0$ 또는 $r=3$ 이다.

r 은 원의 반지름의 길이이므로 $r=3$ 이다.

원 O_2 는 원 O_1 과 합동이므로 넓이가 같다.

따라서 R_1 에서 색칠된 부분의 넓이는 $2\times 3^2\times\pi=18\pi$ 이다.



한편, R_2 에서 삼각형 A_1B_1H에서 $\overline{A_1H}=12$ 이고 선분 A_1H와 선분 B_2C_2가 만나는 점을 J라 하면 $\overline{JH}=6$ 이다. 그러므로

삼각형 $A_1B_1C_1$과 삼각형 $A_1B_2C_2$의 길이비는 $12:6=1:\dfrac{1}{2}$ 이고,

넓이비는 $1:\dfrac{1}{4}$ 이다.

따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{18\pi}{1-\frac{1}{4}}=\frac{18\pi}{\frac{3}{4}}=24\pi$

20) [정답] ③ (출제자 : 13 이강산)

[출제의도] 미분을 활용하여 그래프의 특징과 개형을 추론 및 분석할 수 있는가?

[해설]

ㄱ. (참) 주어진 함수를 미분하면

$f'(x)=2x^2(x-2)+2x(x-2)^2$ 이므로

정리하면 $f'(x)=4x(x-1)(x-2)$ 가 된다. 따라서 $f'(1)=0$ 이다. 또한 $f(x)$ 에 $x=1$ 을 대입한 결과에 따라 점 $(1,1)$ 을 지나면서 기울기가 0 인 접선의 방정식은 $y=1$ 이라는 상수함수이므로 $g(1)=1$ 이다.

ㄴ. (거짓) 함수 $f(x)$ 의 그래프 위의 점 $(t,f(t))$ 에서의 접선의 방정식은 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$ 이다. y 절편을 구하기 위해 x 에 0 을 대입하면 $g(t)=f(t)-tf'(t)$ 이고, 문제의 조건에 맞게 변수 t 를 x 로 바꾸고 이항하면 $f(x)-g(x)=xf'(x)$ 가 된다.

따라서 방정식 $f(x)=g(x)$ 의 실근은 방정식 $f(x)-g(x)=0$ 의 실근과 같고, 결국 $xf'(x)=0$ 의 실근과도 같다.

이 방정식의 근은 $x=0$ 또는 $f'(x)=0$ 이다.

그런데 보기 ㄱ에서 확인했듯이 함수 $y=f(x)$ 가 $x=0$, 1, 2 에서 극값을

가지므로, 이 지점에서 도함수의 값이 0 이다.

따라서 방정식 $xf'(x)=0$ 은 $x=0$ (중근), 1, 2 를 근으로 갖는다.

즉, 방정식 $f(x)=g(x)$ 의 서로 다른 실근의 개수는 3 이다.

ㄷ. (참) 보기 ㄴ을 통해 방정식 $f(x)=g(x)$ 가 $x=0$ (중근), 1, 2 를 실근으로 가진다는 것을 알았다. 방정식과 함수의 관계에 의해서

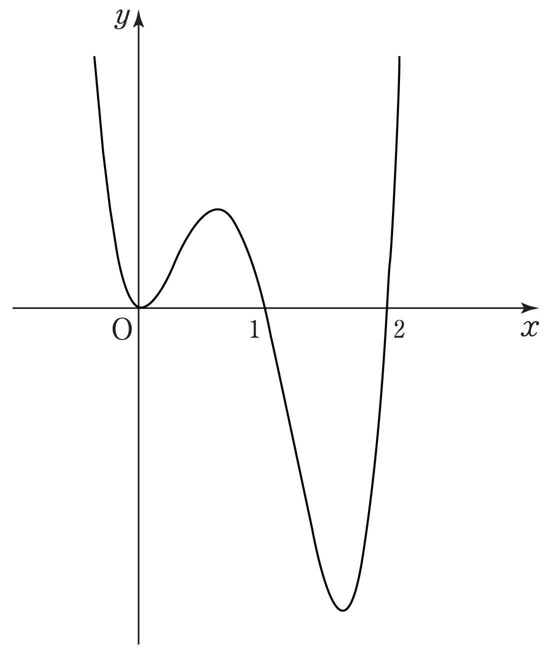
함수 $y=f(x)-g(x)$ 의 그래프의 특징은 0, 1, 2 를 x 절편으로 갖고 $x=0$ 에서 x 축에 접하는 사차함수의 개형이라는 사실을 알 수 있다.

추가적으로 $f'(x)$ 는 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수이므로,

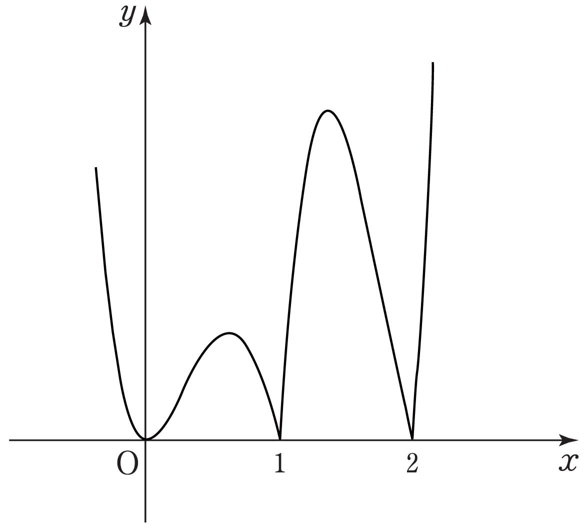
함수 $y=f(x)-g(x)$ 는 $f(x)-g(x)=xf'(x)$ 로부터 최고차항의 계수가

양수인 사차함수임을 알 수 있다.

따라서 함수 $y=f(x)-g(x)$ 의 그래프 개형은 아래 그림과 같다.



이 그래프에서 x축 아랫부분을 접어 올리면 함수 $y=|f(x)-g(x)|$ 의 그래프가 되는데 아래 그림과 같이 뾰족한 점이 $x=1$과 $x=2$에서 생기기 때문에 미분가능하지 않은 점의 개수는 2이다.



21) [정답] ④　　(출제자 : 16 김동균)

[출제의도] ① 주어진 식으로부터 함수의 특징을 파악할 수 있는가?
② 부등식으로 표현된 함수의 개형을 추론할 수 있는가?

[해설]

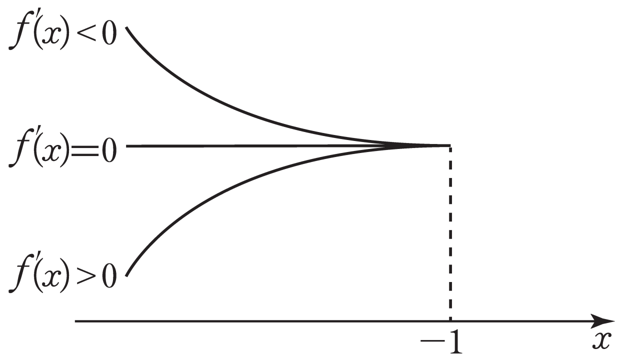
(가) 조건에서 $-1 \le x \le 1$에 대하여 $f(x)$는 $f(0)=0$, $f(-x)=-f(x)$ 이다. 즉, $f(x)$는 기함수(홀함수)이고, $(0, 0)$을 지난다. 또, (가)조건에서 $-1 \le x \le 1$에서 주어진 함수 $f(x)$를 미분하면 $f'(x)=3ax^2-3a=3a(x-1)(x+1)$ 이다.
따라서 $f(x)$는 $-1 \le x \le 1$에서 $x=-1$, $x=1$에서 극값을 갖는 삼차함수의 그래프의 일부이다. (아직 a의 부호를 알 수 없으므로 어디서 극대이고 극소인지 아직 알 수 없다.)
(나)조건에서
$-1<f(x)<1$일 때, $f'(x)\le 0$이고 - (1)
$f(x)<-1$, $f(x)>1$일 때, $f'(x)\ge 0$이다. - (2)
임을 알 수 있다.
$f(0)=0$이므로 $f'(0)=-3a\le 0$ 이다. $a\ne 0$이므로 $a>0$이다.
따라서 $f(x)$는 $-1 \le x \le 1$에서 $x=-1$에서 극대이고 $x=1$에서 극소인 삼차함수의 그래프의 일부이다. 이제 $-1 \le x \le 1$에 대한 $f(x)$의 그래프의 개형을 파악했으므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)$의 개형을 파악해보자.

$f(x)$의 도함수가 함숫값이 -1, 1인 경우 달라지고 $x=-1$, $x=1$에서 $f(x)$의 개형이 바뀐다. 그래서 $f(-1)>1$, $f(-1)=1$, $f(-1)<1$의 경우 각각 $f(x)$의 개형을 파악해보자.

i) $f(-1)>1$ 인 경우
$f'(x)=3a(x-1)(x+1)$ 이고 $a>0$이므로
$x<-1$에서 $f'(x)>0$이다. 따라서 $f(-1)>1$ 인 경우는 불가능하다.

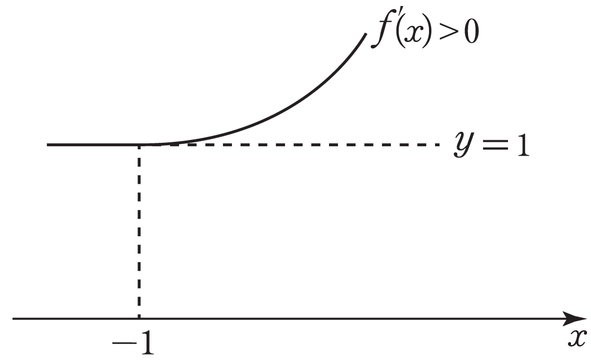
ii) $f(-1)=1$ 인 경우
(나)조건에서 $f(x)$의 값이 -1, 1을 경계로 도함수의 부호가 변하므로 함숫값이 -1인 경우와 함숫값이 1인 경우를 생각하자.

$x<-1$인 경우 $f'(x)$의 부호에 따른 $f(x)$의 그래프는 아래 그림과 같다.



$f'(x)>0$ 이면 $f(x)<1$ 이므로 (1)에 의해 불가능하다.
$f'(x)<0$ 이면 $f(x)>1$ 이므로 (2)에 의해 불가능하다.
따라서 $x<-1$인 경우 $f'(x)=0$ 즉, 상수함수가 된다.

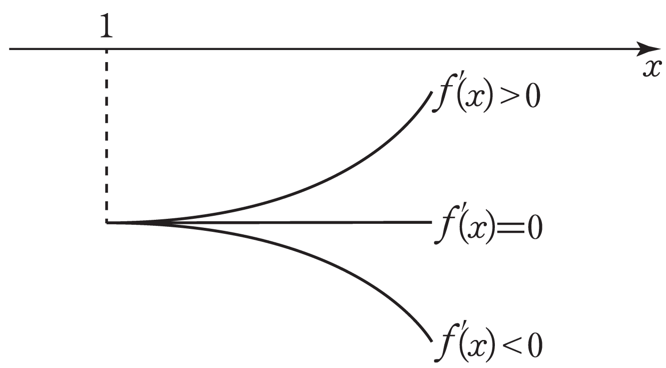
$x>-1$인 경우, $f'(x)>0$ 이면 아래 그림처럼 $f(x)\ge 1$ 이 된다.



그런데, $f(0)=0$ 인데 $f(x)=0$ 이 될 수 없으므로 $f'(x)>0$ 이 아님을 알 수 있다. 즉, $f'(x)\le 0$ 이다. 즉, $f(x)$는 증가하지 않으므로 $f(x)$의 값은 1보다 커질 수 없다.
그리고 $x<-1$에서 $f(x)=1$이고 $x>-1$에서 1보다 크지 않으므로 $f(x)\le 1$ 임을 알 수 있다.

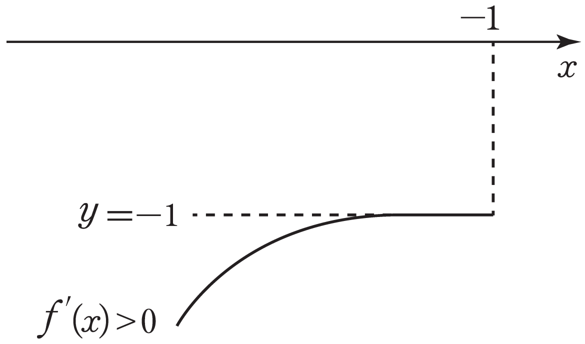
그 다음 함숫값이 -1인 경우를 관찰해보자.
$-1 \le x \le 1$에서 $f(x)$는 기함수이므로
$f(1)=-f(-1)=-1$ 이다.

$x>1$인 경우 $f'(x)$의 부호에 따른 $f(x)$의 그래프는 아래 그림과 같다.



$f'(x)>0$ 이면 $f(x)>-1$ 이므로 (1)에 의해 불가능하다.
$f'(x)<0$ 이면 $f(x)<-1$ 이므로 (2)에 의해 불가능하다.
따라서 $x>1$인 경우 $f'(x)=0$ 즉, 상수함수가 된다.

$x<1$ 인 경우, $f'(x)>0$ 이면 아래 그림처럼 $f(x)\leq -1$ 이 된다.



그런데, $f(0)=0$ 인데 $f(x)=0$ 이 될 수 없으므로 $f'(x)>0$ 이 아님을 알 수 있다. 즉, $f'(x)\leq 0$ 이다. 즉, $f(x)$ 는 증가하지 않으므로 $f(x)$ 의 값은 -1 보다 작아질 수 없다.
그리고 $x<1$ 에서 $f(x)=1$ 이고 $x>1$ 에서 -1 보다 작지 않으므로 $f(x)\geq -1$ 임을 알 수 있다.
$-1\leq x\leq 1$ 에서 $f(x)=ax^3-3ax$ 이므로
$f(-1)=-a+3a=2a=1$ 에서 $a=\frac{1}{2}$ 이므로
$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x\ (-1\leq x\leq 1)$ 이다.
(나)조건에 의해

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x<-1)\\ \frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x & (-1\leq x\leq 1)\\ -1 & (x>1)\end{cases}$$ 이다.

$f(x)$ 는 모든 실수 x 에 대해 기함수(홀함수)임을 알 수 있다.
그러면 구하고자하는 값 $\int_{-2}^{2}|f(x)|\,dx=2\int_{0}^{2}|f(x)|\,dx$ 이고,
$x\geq 0$ 에서 $f(x)\geq 0$ 이므로 $|f(x)|=-f(x)$ 이다.

$$\begin{aligned}\int_0^2|f(x)|\,dx&=\int_0^2-f(x)\,dx=\int_0^1\left(-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x\right)dx+\int_1^2 1\,dx\\&=\left[-\frac{1}{8}x^4+\frac{3}{4}x^2\right]_0^1+[x]_1^2\\&=\frac{5}{8}+1=\frac{13}{8}\end{aligned}$$

이므로

$$\int_{-2}^{2}|f(x)|\,dx=2\int_0^2|f(x)|\,dx=\frac{13}{4}$$

이다.

iii) $f(-1)<1$ 인 경우
$\int_{-2}^{2}|f(x)|\,dx$ 의 최댓값을 구하는 것은 $f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x=-2$, $x=2$ 로 둘러싸인 넓이의 최댓값을 구하는 것과 같다.
$x=-1$, $x=1$ 에서 $f(x)$ 의 개형이 바뀌므로

$$\int_{-2}^{2}|f(x)|\,dx=\int_{-2}^{-1}|f(x)|\,dx+\int_{-1}^{1}|f(x)|\,dx+\int_{1}^{2}|f(x)|\,dx$$

로 나누어 생각하자.
우선, $\int_{-2}^{-1}|f(x)|\,dx$ 에 대해 생각해보면
(나)조건에서 $f(x)\leq 1$ 이고
$-1\leq f(x)\leq 1$ 에서 $f'(x)<0$ 임을 이용하면 $f(0)=0$ 이므로
$x<0$ 에서 $f(x)\geq 0$ 이다. 즉, $-2\leq x\leq -1$ 에서
$0\leq f(x)\leq 1$ 이다.

따라서 $f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x=-2$, $x=-1$ 로 둘러싸인 넓이를 ii)의 경우와 비교하면
ii)의 경우에서 $-2\leq x\leq -1$, $0\leq y\leq 1$ 인
직사각형 모양의 영역의 넓이가 최대로 iii)의 경우 $\int_{-2}^{-1}|f(x)|\,dx$ 의 값이 직사각형의 넓이보다 작음을 알 수 있다.
즉, $\int_{-2}^{-1}|f(x)|\,dx$ 는
iii)의 경우보다 ii)의 경우가 항상 더 크다.
같은 방법으로 $\int_{1}^{2}|f(x)|\,dx$ 의 값은 iii)의 경우보다 ii)의 경우가 항상 더 크다.
그리고 $\int_{-1}^{1}|f(x)|\,dx$ 의 경우, $-1\leq x\leq 1$ 에서
$f(x)=ax^3-3ax$ 이고, 기함수이므로

$$\int_{-1}^{1}|f(x)|\,dx=2\int_{-1}^{0}(ax^3-3ax)\,dx=2\left[\frac{a}{4}x^4-\frac{3a}{2}x^2\right]_{-1}^{0}=\frac{5}{2}a$$

이므로 a 가 클수록 값이 커진다.
$f(-1)=2a$ 에서 $f(-1)$ 이 클수록
a 값이 커진다. 즉, $f(-1)$ 의 값이 클수록 $\int_{-1}^{1}|f(x)|\,dx$ 의 값이 커진다.
그러므로 ii)의 경우가 iii)의 경우보다 더 크다는 것을 알 수 있다.
따라서 i)의 경우는 불가능하고 ii), iii)를 비교해보면 ii)가 더 크므로 $\int_{-2}^{2}|f(x)|\,dx$ 의 최댓값은 ii)의 경우로 $\frac{13}{4}$ 이다.

22) [정답] 21 (출제자 : 15 최문영)
[출제의도] 조합의 값을 구할 수 있는가?

[해설]

$${}_7\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_2=\frac{7\times 6}{2\times 1}=21$$

23) [정답] 10 (출제자 : 15 최문영)
[출제의도] 정적분을 계산할 수 있는가?

[해설]

$$\int_1^2(4x^3-8x+7)\,dx=[x^4-4x^2+7x]_1^2=10$$

24) [정답] 14 (출제자 : 16 김동균)
[출제의도] 역함수의 정의를 이용하여 주어진 값을 구할 수 있는가?

[해설]
$f^{-1}(5)=3$ 에서 $f(3)=5$ 이므로 $f(x)$ 에 $x=3$ 을 대입하면
$(-3)\times 3+k=5$
$k=14$ 이다.

25) [정답] 8 (출제자 : 16 송세령)

[출제의도] 확률변수 X에 대응하는 확률을 구하고 평균을 계산할 수 있는가?

[해설]

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이다.

$X=0$일 때, 확률은 $\frac{{}_4C_0 \times {}_3C_2}{{}_7C_2}=\frac{3}{21}=\frac{1}{7}$ 이다.

$X=1$일 때, 확률은 $\frac{{}_4C_1 \times {}_3C_1}{{}_7C_2}=\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$ 이다.

$X=2$일 때, 확률은 $\frac{{}_4C_2 \times {}_3C_0}{{}_7C_2}=\frac{6}{21}=\frac{2}{7}$ 이다.

$E(X)$의 값은 $0\times\frac{1}{7}+1\times\frac{4}{7}+2\times\frac{2}{7}=\frac{8}{7}$ 이다.

따라서 $E(7X)=7E(X)=8$ 이 답이다.

26) [정답] 20 (출제자 : 15 이상민)

[출제의도] 중복조합을 이용하여 주어진 값을 구할 수 있는가?

[해설]

$(x+y+z)^2$의 값은 10보다 작은 제곱수이므로

가능한 $x+y+z$의 값은 0, 1, 2, 3이다.

경우를 나누어서 세어보면

$x+y+z=0$ 일 경우 $w=10$이므로 ${}_3H_0=1$

$x+y+z=1$ 일 경우 $w=9$이므로 ${}_3H_1=3$

$x+y+z=2$ 일 경우 $w=6$이므로 ${}_3H_2=6$

$x+y+z=3$ 일 경우 $w=1$이므로 ${}_3H_3=10$

따라서 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는 20인 것을 알 수 있다.

27) [정답] 24 (출제자 : 16 이희원)

[출제의도] 주어진 조건을 통해 부분집합의 개수를 구할 수 있는가?

[해설]

$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$

$B=\{1, 2, 3, 6\}$

집합 X의 원소 중에서는 짝수가 3개만 있어야하고,

$B\cap X=B$이므로 $B\subset X$이다.

$2\in B$, $6\in B$이므로 $2\in X$, $6\in X$이고,

X가 포함할 하나의 짝수만 정해주면 된다.

남은 짝수는 4, 8, 10이므로 3개의 경우의 수가 있다.

남은 짝수 중 선택한 짝수를 k라 하면,

집합 X는 1, 2, 3, 6, k를 포함하고 나머지 2개의 짝수를 포함하지 않는 U의 부분집합의 개수는 $2^{10-5-2}=2^3=8$(개)이다.

또한 k가 될 수 있는 숫자가 3개이므로 3을 곱해주면

$8\times3=24$ 이다.

28) [정답] 16 (출제자 : 13 오인수)

[출제의도] 정적분과 급수를 이용하여 주어진 식을 변형하고, 주어진 식의 최솟값을 구할 수 있는가?

[해설]

① 주어진 식 $\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n^4}\sum_{k=1}^{n}(2n+ak)^3$ 을 변형하면,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n^4}\sum_{k=1}^{n}(2n+ak)^3=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{ak}{n}\right)^3 \text{ 이다.}$$

② 급수 $\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{ak}{n}\right)^3$ 을 정적분으로 변형하면,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{ak}{n}\right)^3=\int_2^{2+a}x^3\,dx \text{ 이다.}$$

③ $\int_2^{2+a}x^3\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_2^{2+a}=\frac{1}{4}(2+a)^4-4$ 이므로

$\int_2^{2+a}x^3\,dx$는 $a=-2$일 때, 최솟값을 갖는다.

④ 따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n^4}\sum_{k=1}^{n}(2n+ak)^3$ 의 최솟값 m은 -4이므로 $m^2=16$

[별해] (②까지 동일합니다.)

③ $f(a)=\int_2^{2+a}x^3\,dx$ 라 하면, $f'(a)=(2+a)^3$ 이고,

$f'(a)$는 $a=-2$의 좌우에서 부호가 $(-)$에서 $(+)$로 바뀌므로

$f(a)$는 $a=-2$에서 극솟값을 갖는다.

④ $f(a)$는 $a=-2$에서만 극솟값을 가지므로

$f(a)$의 최솟값은 $f(-2)=\int_2^0 x^3\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_2^0=-4$ 이다.

⑤ 따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n^4}\sum_{k=1}^{n}(2n+ak)^3$ 의 최솟값 m은 -4이므로 $m^2=16$

29) [정답] 12 (출제자 : 15 최봉규)

[출제의도] 주어진 곡선의 평행이동과 대칭성을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

함수 $f(x)$가 삼차함수 이므로 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 라고 둘 수 있다.

(가) 조건에 의해서 $b=0$, $d=0$이다. $f(x)=ax^3+cx$

$f(1)=f(1-p)$ 이므로 $a+c=a(1-p)^3+c(1-p)$

$0=-3ap+3ap^2-ap^3-cp$, $p\neq0$이므로

$0=3a-3ap+ap^2+c$ …①

$f(3)=f(3-p)$ 이므로 $27a+3c=a(3-p)^3+c(3-p)$

$0=-27ap+9ap^2-ap^3-cp$, $p\neq0$이므로

$0=27a-9ap+ap^2+c$ …②

①−②에 의해서 $0=-24a+6ap$

$f(x)$가 삼차함수이므로 $a\neq0$, $p=4$

$p=4$를 ①에 대입하면 $0=7a+c$, $c=-7a$

따라서 $f(x)=ax^3-7ax$ 이다.

$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{3} f(x)\,dx$

(가) 조건에 의해서 $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$ 이다.

$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx - \int_{1}^{3} f(x-4)\,dx = \int_{1}^{3} f(x)\,dx - \int_{-3}^{-1} f(x)\,dx = 8$

(가) 조건에 의해서

$\int_{-3}^{-1} f(x)\,dx = -\int_{1}^{3} f(x)\,dx$ …([증명] 참고), 즉 $\int_{1}^{3} f(x)\,dx = 4$

$\int_{1}^{3}(ax^3-7ax)\,dx = a\int_{1}^{3}(x^3-7x)\,dx = a\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{7}{2}x^2\right]_1^3 = 4$

$a = -\frac{1}{2}$ 이므로 $f(x) = -\frac{1}{2}x^3+\frac{7}{2}x$, $f(2)=3$

$\therefore\ p \times f(2) = 4 \times 3 = 12$

[증명]

(가) 조건에 의하여

$\int_{-3}^{3} f(x)\,dx = 0$, $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$

$$\int_{-3}^{3} f(x)\,dx = \int_{-3}^{-1} f(x)\,dx + \int_{-1}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{3} f(x)\,dx$$
$$= \int_{-3}^{-1} f(x)\,dx + \int_{1}^{3} f(x)\,dx = 0$$

$\therefore\ \int_{-3}^{-1} f(x)\,dx = -\int_{1}^{3} f(x)\,dx$

[별해]

$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{3} f(x)\,dx$

(가) 조건에 의해서 $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$ 이다.

$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx - \int_{1}^{3} f(x-p)\,dx = \int_{1}^{3} \{f(x)-f(x-p)\}\,dx$

$h(x) = f(x)-f(x-p)$ 라고 하면,

(나) 조건에 의해 $h(1)=0$, $h(3)=0$ 이다.

함수 $f(x-p)$ 는 함수 $f(x)$ 를 x 축의 양의 방향으로 p 만큼 평행이동한 함수이므로 $f(x-p)$ 의 심차항의 계수와 $f(x)$ 의 삼차항의 계수가 같다.

따라서 $h(x)$ 는 1과 3을 근으로 갖는 이차 이하의 다항함수이다.

$h(x)$ 는 근을 2개 가지므로 일차함수가 될 수 없으며 만약 상수함수라고 하면 $h(x)=0$ 이다. 하지만 이것은 $\int_{1}^{3} h(x)\,dx = 0$ 이므로 모순이다.

즉, $h(x) = k(x-1)(x-3)$ 라고 둘 수 있다.

$\int_{1}^{3} k(x-1)(x-3)\,dx = -\frac{k}{6}(3-1)^3 = 8$, $k = -6$

$h(x) = -6(x-1)(x-3)$, $f(x)-f(x-p) = -6(x-1)(x-3)$

(가) 조건에 의하면 $f(0)=0$ 이라는 조건을 알고 있으므로

$x=0$ 대입하면 $f(0)-f(-p) = -18$, $-f(-p) = -18$,

$f(p) = -18$

$x=p$ 대입하면 $f(p)-f(0) = -6(p-1)(p-3)$

정리하면 $p^2-4p=0$, p 는 0이 아닌 상수이므로 $p=4$

$f(x)-f(x-4) = -6(x-1)(x-3)$

$x=2$ 를 $f(x)$ 에 대입하면 $f(2)-f(-2)=6$,

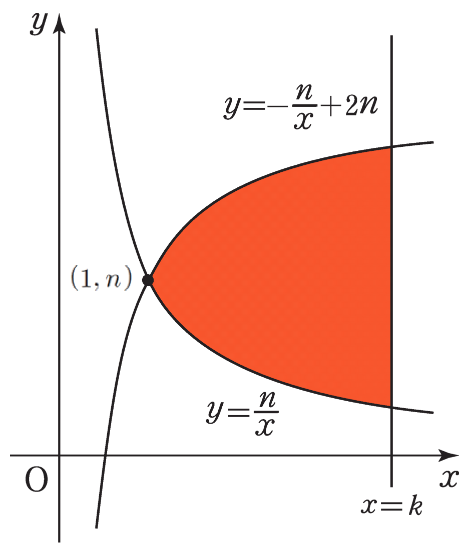
$f(-2) = -f(2)$ 이므로 $f(2)=3$ 이다.

$p \times f(2) = 4 \times 3 = 12$

30) [정답] 127 (출제자 : 11 양종현)/(컬러로 보세요!!)

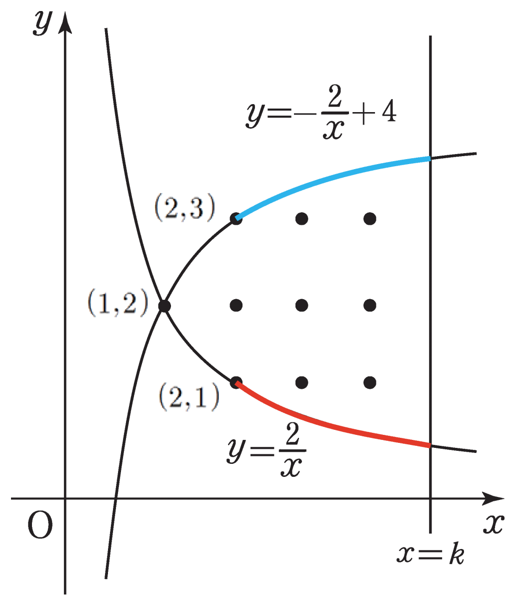
[출제의도] 대칭성을 활용하여 유리함수의 그래프의 개형을 쉽게 파악할 수 있는가?

[해설]



문제에서 구해야할 것은 위 그림에서 빨간색으로 칠해진 영역의 내부 또는 그 경계에 포함되는 x 좌표와 y 좌표 모두 자연수인 점의 개수가 20 이상이 되도록 하는 자연수 k 의 최솟값이다. 여기서 $(1, n)$ 은 항상 두 곡선의 교점이라는 것을 고려해야 한다. 또한 두 곡선은 $y=n$ 에 대해 대칭이다.

i) $n=2$ 일 때



둘러싸인 부분의 내부 또는 그 경계에 포함되는 x 좌표와 y 좌표가 모두 자연수인 점의 개수를 각각 구해보자.

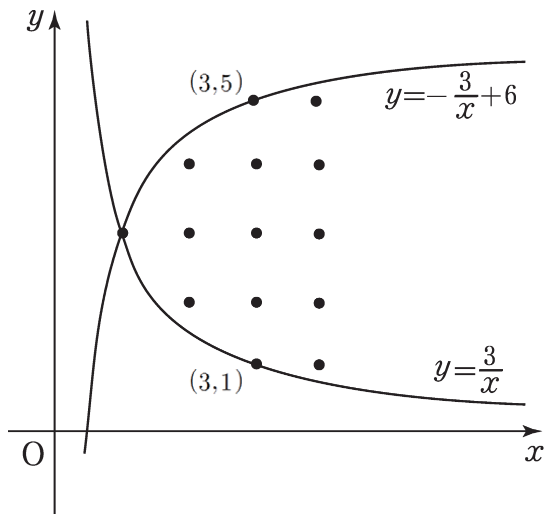
$x=1$ 일 때는 1개, $x=2$ 일 때는 3개다.

$x=3$ 이후로는 점근선 $y=0$ 과 $y=1$ 사이에 다른 격자점이 생길 수 없으므로 모두 3개다. 즉, 곡선의 빨간색 부분에는 다른 격자점이 생길 수 없다. $y=2$ 에 대해 대칭인 것을 생각해보면 파란색 곡선 위에서도 다른 격자점을 생길 수 없다. 따라서 $(2, 1)$ 이후로 격자점의 개수는 공차가 3인 등차수열이 된다. 모든 격자점의 개수가 20 이상이 되는 k 는 8 일 때이다.

($\because$ $1+3+3+3+3+3+3+3 \geq 20$)

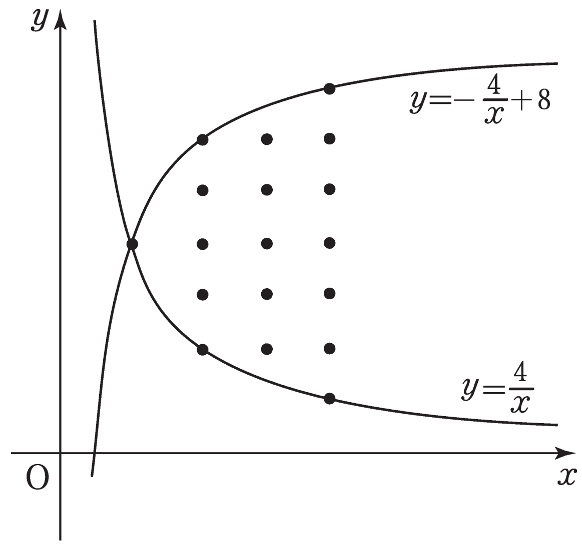
즉, $f(2)=8$ 이다.

ii) $n=3$ 일 때



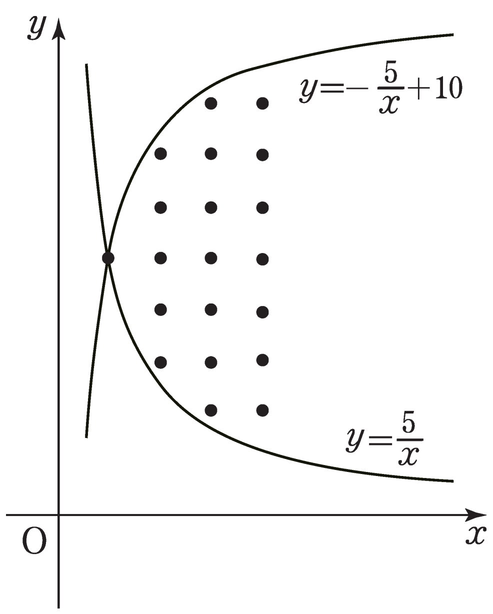
같은 방법으로 $y=1$ 이 되는 가장 작은 자연수는 $x=3$ 이다. 이후로 격자점의 개수는 등차수열이 된다. $1+3+5+5+5+5 \geq 20$ 이므로 $f(3)=6$ 이다.

iii) $n=4$ 일 때



같은 방법으로 $1+5+5+7+7 \geq 20$ 로부터 $f(4)=5$ 이다.

iv) $n=5$ 일 때



$1+5+7+7 \geq 20$ 이므로 $f(5)=4$ 이다.
격자점의 합의 규칙을 $n=2$ 일 때부터 $n=5$ 일 때까지 나열해보면
$n=2$ 일 때, $1+3+3+3+3+3+3+3 \geq 20$
$n=3$ 일 때, $1+3+5+5+5+5 \geq 20$
$n=4$ 일 때, $1+5+5+7+7 \geq 20$
$n=5$ 일 때, $1+5+7+7 \geq 20$
이고 $x=2$ 에서의 격자점의 개수는 $3, 3, 5, 5, \cdots$ 의 규칙을 보이고 있다.
비슷한 방법으로
$n=6$ 일 때, $1+7+9+9 \geq 20$ 이므로 $f(6)=4$
$n=7$ 일 때, $1+7+9+9 \geq 20$ 이므로 $f(7)=4$
$n=8$ 일 때, $1+9+11 \geq 20$ 이므로 $f(8)=3$
이다. 사실 $f(a)=3$ 인 경우부터는 직접 셀 필요가 없다. $f(a)=2$ 가 되는 최소의 자연수 a 는 $1+19 \geq 20$ 이 되는 $a=18$ 이기 때문이다. 또한 $n=18$ 이전까지는 모두 $f(n)=3$ 일수밖에 없다. (왜냐하면 $f(n)$ 은 단조감소함수이기 때문이다.)
마지막으로 $n \geq 18$ 에서 $f(n)=2$ 임은 자명하다. 왜냐하면 $(1, n)$ 은 항상 교점이기 때문에 $f(n)=1$ 이 되는 자연수 n 은 존재하지 않는다. 즉, $x=1$ 일 때 격자점의 개수가 20 이 되는 자연수 n 은 존재하지 않는다.

따라서
$\sum_{n=2}^{50} f(n)=8+6+5+(4+4+4)+(3\times 10)+(2\times 33)=127$ 이다.