OrbiClass. 최승민.

노트북이 고장나고,

집 컴퓨터는 랜카드가

나갔습니다.

본과 나형 21번 손해설

진행하겠습니다.

가장 엄밀한 풀이라고 생각합니다.

많은 친구들도 봐주세요.

〈나형21〉

최고차항음수 $f(x)$ 사차 → $f(x) = kx(x-2)(x-3)(x-p)$

$p = ?$

가) $f(x)=0$의 실근 $x=0, 2, 3.$ ⇒ 하나 모자름... 셋 중 하나는 중근

나) $f(x)$와 $|x(x-2)(x-3)|$ 중 크지 않은 값을 $g(x)$

$g(x)$는 전체에서 미분가능.

1) $g(x)$라는 새로운 함수 설정 (약속함)

2) 크지않은 값은...? (기출에서 보듯)

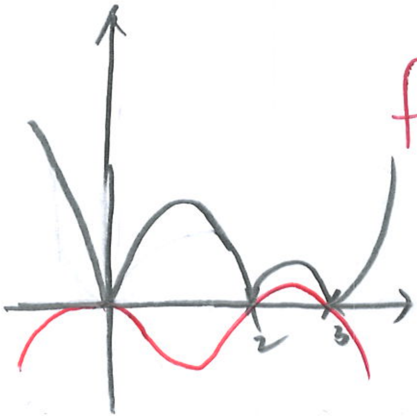
개인적으로 그래프 문과 21번들 중 역대급 난이도이다. [redacted]

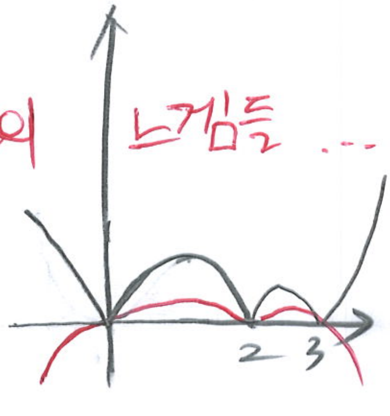
〈엄밀히 풀기엔〉

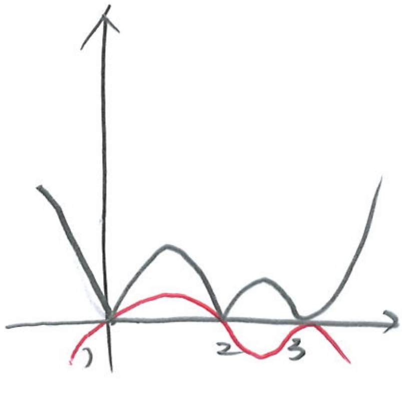
$|x(x-2)(x-3)|$을 편의상 $h(x)$라고 부르고 $f(x)$와 관계를 파악하겠다. 참고로 $f(x)$는 $x=0, 2, 3$ 만 실근이라 하여 셋 중 하나는 중근이다. $f(1)$의 최댓값을 구하라 하였으므로 일단은 그려보면서 판단하자.

① $x=0$이 중근 ② $x=2$ 중근 ③ $x=3$ 중근.

$f(x)$들의 느낌들...







① $x=0$ 중근

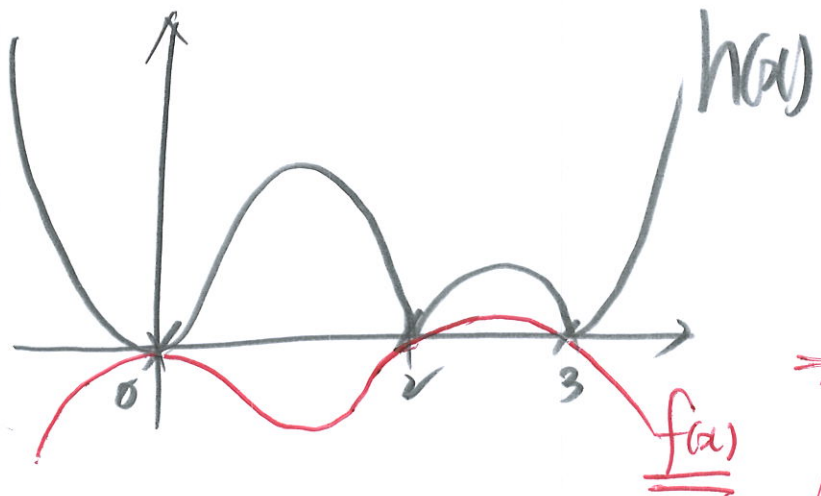
우선 $g(x)$를 다시 잘 읽어보자. $f(x)$와 $h(x)$ 중 크지 않은 값이다

그리고 $g(x)$는 깔끔한 함수 (미분가능) 인셈인데,

이럴 때는 한번에 이해하면 좋고 그렇지 않다면,

$g(x)$를 임의 $f(x)$로 부려 파악해보면서

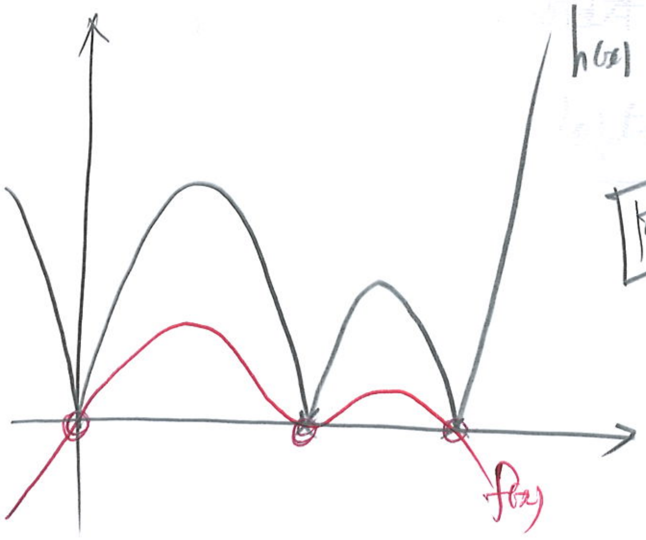
문제를 정확히 이해부터 하자.



→ 그림에서 알수 있듯이.
$g(x)$가 온전하려면,
$f(x)$가 이런느낌이면
깔끔하다.
(물론 다른수도 있다).

But, 이때 $f(1)$은 음수일수 밖에 없다..
후보로 (최댓값) 자격 미달이다... (다른 것에비해...)

⊟ $x=2$ 중근.



1단계

자! $x=2$이니

f(1)>0 확정이니

앞에 것보다는 낮다고 본다.

f(x)의 그림은 일단 왼쪽그림처럼

낮게 그린이유는

온전하게 g(x)를 그리기위함이고

대표적인 f(x)라 보면되겠다

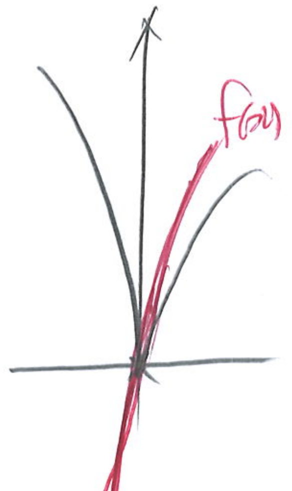
그렇다면, 우리는 f(1)을

높이기위해(최댓값) k를 조절하기 시작할 것이다.

그 첫단계로 f(0)을 높여 함수증가폭을 높이는 것인데,

조건들을 찾아보자

2단계 ―①



⇨ $x=0$ 부근에서 f(x)가

이렇게 크다면 (h(x)보다 높이...)

좋겠지만, 이런경우 g(x)는

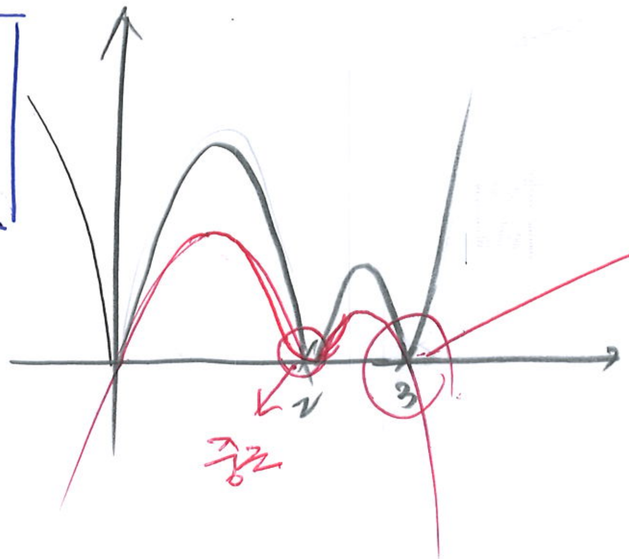
$x=0$에서 미분불가능하다

⇓

$x=0$에서 f(x) → h(x)로 변하는데 기울기가 급격히 달라진다.

미분가능 정의 접근

2단계 -②



위와 마찬가지로

$f'(3)$은 $h'(3)$좌 보다 커야한다.

(음수개념)

2단계 ①과 ②를 정리하자면,

$$\left.\begin{array}{ll} \text{2단계 ①} & f'(0) \le h'(0)_{\text{우}} \\ \text{2단계 ②} & f'(3) \ge h'(3)_{\text{좌}} \end{array}\right\}$$ 동시 만족할 것.

연산생략 → 이것도 쉽지않다.

$f'(0) = -12k \quad h'(0)_{\text{우}} = 6$

$f'(3) = 3k \quad h'(3)_{\text{좌}} = -3.$

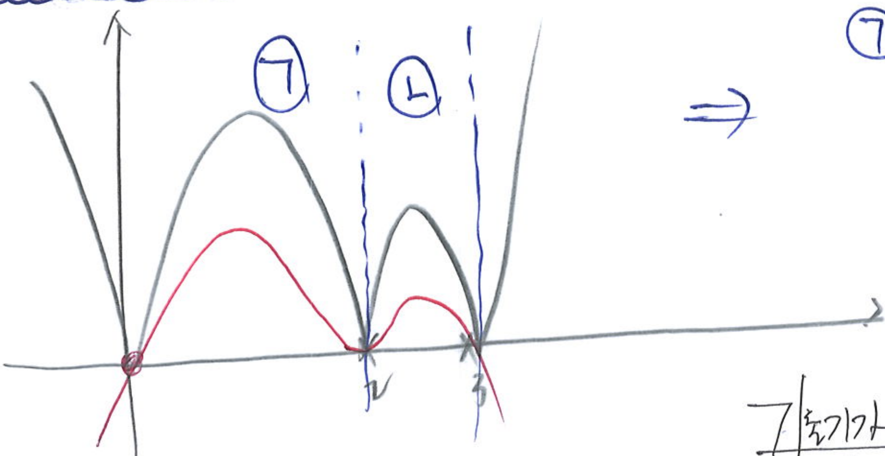
$$\left\{\begin{array}{l} k \le -\frac{1}{2} \\ k \ge -1 \end{array}\right\}$$

2단계 -③

그리고 $f(x)$와 $h(x)$는 $x=0$, $x=2$, $x=3$ 이외에 다른 값에서 실근을 가진 경우 $g(x)$는 그 값에서 미분이 불가능하다.

따라서 $h(x) \geq f(x)$를 항상 성립해야하며

$x<0$과 $x>3$은 굳이 확인하지 않아도 되어 $[0, 3]$에서만 확인하자.



⇒ ㄱ과 ㄴ으로 나누어 풀어보겠다.

※ $f(x)$와 $h(x)$가 교차하면, $g(x)$가 미분불가하다.

기울기가 같아야한다

ㄱ $(0<x<2)$

$h(x) = x(x-2)(x-3)$

$f(x) = kx(x-2)^2(x-3)$ ⇒ $h(x)-f(x) \geq 0$ 이어야한다.

$$h(x)-f(x) = x(x-2)(x-3)\{1-k(x-2)\} \geq 0$$

가 만족되어야하는데

단, x는 $0<x<2$ 에서이다.

$$\underbrace{x(x-2)(x-3)}_{+}\{-kx+2k+1\} \geq 0$$

⇓ ★★

이 다항식의 해가 0과 2사이에 있으면 안된다.

그 경우 ㄱ에서의 교점이된다.

즉, $-kx+2k+1=0$

$x=\frac{2k+1}{k}=2+\frac{1}{k}$ 가 되고,

$2+\frac{1}{k}\le 0$. 이거나 $2+\frac{1}{k}\ge 2$ 이야 되는데,

k는 음수이므로 $\frac{1}{k}\le -2$ ⇨ $-\frac{1}{2}\le k<0$

ⓑ $(2<x<3)$

$h(x)=-x(x-2)(x-3)$

$f(x)=kx(x-2)^2(x-3)$.

⇨ $h(x)-f(x)\ge 0$. 이어야 한다

$h(x)-f(x)=x(x-2)(x-3)\{-1-k(x-2)\}\ge 0$ 이 만족되어야 한다.

단, x는 $2<x<3$ 에서다.

이 역시, $-1-k(x-2)=0$

$\frac{2k-1}{k}=x$ 라는 새로운 해가

$2<x<3$ 에서 존재하면 안된다.

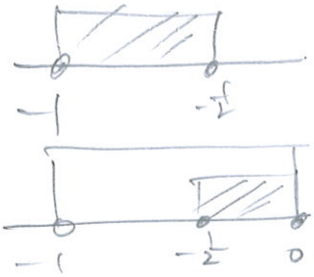
$2-\frac{1}{k}\le 2$ or $2-\frac{1}{k}\ge 3$ 인데 k는 음수이므로

$-1\ge\frac{1}{k}$ ∴ $0>k\ge -1$ 가 된다.

옳은 k조건을 정리해보자

그런데 ①, ② $\Rightarrow$ $-1 \le k \le -\frac{1}{2}$

그런데 ③-㉠, -㉡ $\Rightarrow$ $-\frac{1}{2} \le k < 0$, $-1 \le k < 0$



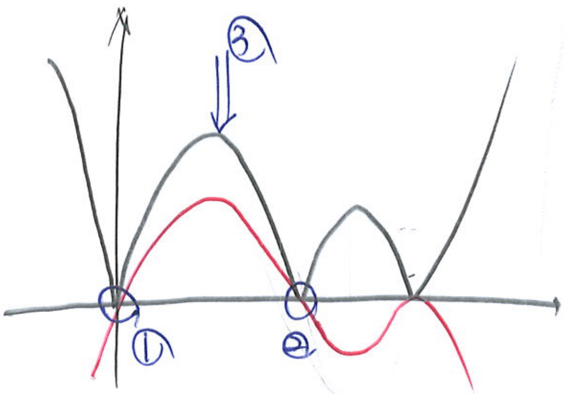
$$k = -\frac{1}{2}$$

$$f(x) = kx(x-2)^2(x-3)$$

$$f(1) = -2k$$

$\therefore$ 최댓값 "1"

라스트 // $x=3$이 중근.



이건 좀 깔끔

그냥 왼쪽 그림처럼

① $f'(0) \le h'_{좌}(0)$

② $f(x) \le h(x)$ $(0<x<2)$

③ $f'(2) \ge h'(2)$ $(좌)$

(음수기울기)

① $f'(0) = -18k$ $h'_{좌}(0) = 6$ ⇨ $-18k \le 6$

$k \ge -\frac{1}{3}$

② $h(x) \ge f(x)$

$x(x-2)(x-3) - kx(x-2)(x-3)^2 \ge 0$

$x(x-2)(x-3)\{1-k(x-3)\} \ge 0$

⇓

여기서 근이 $[0,2]$ 존재 X

∴ $-kx+3k+1=0$

$x = \frac{3k+1}{k} = 3+\frac{1}{k} < 0$ $3+\frac{1}{k} > 2$

$\frac{1}{k} < -3$ 이나 $\frac{1}{k} > -1$ 이고,

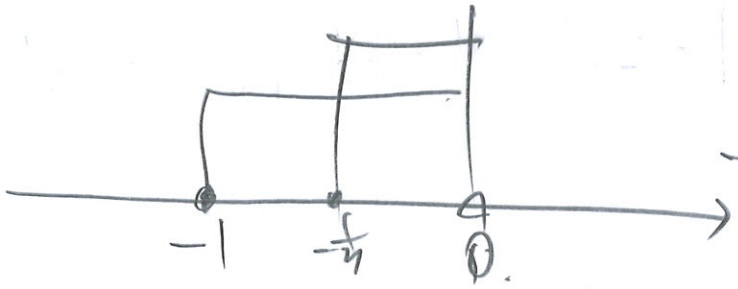
$-\frac{1}{3} \le k$, $k \le -1$.

③ $f(2) = 2k$ $h(2) = -2$.

$2k \ge -2$.

$k \ge -1$

$\therefore$



$-\frac{1}{3} \le k < 0$

$f(x) = kx(x-2)(x-3)^2$

$f(1) = -4k$

$\frac{4}{3} \ge -4k$.

$\therefore \frac{4}{3}$

매우 엄밀한 풀이였다. 껄껄껄