수학의 슈퍼파워 정병호/정병훈의
2017학년도 수능 대비 9월 평가원 모의고사 수학 가형 해설

1번

두 벡터 $\vec{a}=(2,-1)$, $\vec{b}=(1,3)$에 대하여 벡터 $\vec{a}+\vec{b}$의 모든 성분의 합은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

<해설> $\vec{a}+\vec{b}=(2,-1)+(1,3)=(3,2)$이므로, 모든 성분의 합은 $3+2=5$이다.

정답 : ⑤

2번

방정식 $3^{x+1}=27$을 만족시키는 실수 x의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

<해설> $3^{x+1}=27$의 양변의 밑이 3인 로그를 취하면, $x+1=\log_3 27=3$이다.
$\therefore\ x=2$

정답 : ②

3번

좌표공간에서 두 점 $A(1,3,-6)$, $B(7,0,3)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표가 $(a,b,0)$이다. $a+b$의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

<해설> $a=\dfrac{2\times7+1\times1}{2+1}=5$, $b=\dfrac{2\times0+1\times3}{2+1}=1$이므로, $a+b=6$이다.

정답 : ①

4번

두 사건 A와 B는 서로 배반사건이고

$$P(A)=\frac{1}{6},\ P(A\cup B)=\frac{1}{2}$$

일 때, $P(B)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

<해설> 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이므로, $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$이다.

$\frac{1}{2}=\frac{1}{6}+P(B)$이므로, $P(B)=\frac{1}{3}$이다.

정답 : ③

5번

$\cos(\alpha+\beta)=\frac{5}{7}$, $\cos\alpha\cos\beta=\frac{4}{7}$일 때, $\sin\alpha\sin\beta$의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{7}$ ② $-\frac{2}{7}$ ③ $-\frac{3}{7}$ ④ $-\frac{4}{7}$ ⑤ $-\frac{5}{7}$

<해설> $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$이다.

$\frac{5}{7}=\frac{4}{7}-\sin\alpha\sin\beta$이므로, $\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{7}$이다.

정답 : ①

6번

$\int_0^3 \frac{2}{2x+1}dx$의 값은? [3점]

① $\ln 5$ ② $\ln 6$ ③ $\ln 7$

④ $3\ln 2$ ⑤ $2\ln 3$

<해설> $\int_0^3 \frac{2}{2x+1}dx = [\ln|2x+1|]_0^3 = \ln 7$

정답 : ③

7번

$0 \le x < 2\pi$일 때, 방정식

$$2\sin^2 x + 3\cos x = 3$$

의 모든 해의 합은? [3점]

① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ $\frac{3\pi}{2}$ ④ 2π ⑤ $\frac{5\pi}{2}$

<해설> $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$를 이용한다.

$2\sin^2 x + 3\cos x = 3$에서 $2(1-\cos^2 x) + 3\cos x = 3$이다.

$2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$이므로, $(\cos x - 1)(2\cos x - 1) = 0$이다.

∴ $\cos x = 1$ 또는 $\cos x = \frac{1}{2}$

i) $\cos x = 1$일 때 $0 \le x < 2\pi$인 범위에서 $x = 0$이다.

ii) $\cos x = \frac{1}{2}$일 때 $0 \le x < 2\pi$인 범위에서 $x = \frac{\pi}{3}$ 또는 $x = \frac{5\pi}{3}$이다.

∴ 모든 해의 합은 $0 + \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} = 2\pi$이다.

정답 : ④

8번

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 3$이고, 두 벡터 $6\vec{a}+\vec{b}$와 $\vec{a}-\vec{b}$가 서로 수직일 때, $\vec{a} \cdot \vec{b}$의 값은? [3점]

① $-\frac{3}{10}$ ② $-\frac{3}{5}$ ③ $-\frac{9}{10}$ ④ $-\frac{6}{5}$ ⑤ $-\frac{3}{2}$

<해설> 두 벡터 $6\vec{a}+\vec{b}$와 $\vec{a}-\vec{b}$가 서로 수직이므로, $(6\vec{a}+\vec{b}) \cdot (\vec{a}-\vec{b}) = 0$이다.

전개하면, $6|\vec{a}|^2 - 5(\vec{a} \cdot \vec{b}) - |\vec{b}|^2 = 0$이다.

$|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 3$을 대입하면, $-5(\vec{a} \cdot \vec{b}) - 3 = 0$이다.

$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{3}{5}$

정답 : ②

9번

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(2x+1)=\left(x^2+1\right)^2$$

을 만족시킬 때, $f'(3)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

<해설> $f(2x+1)=\left(x^2+1\right)^2$의 양변을 x에 관하여 미분하면, $2f'(2x+1)=4x\left(x^2+1\right)$이다.
$x=1$을 대입하면, $2f'(3)=8$이다.
$\therefore\ f'(3)=4$

정답 : ④

10번

어느 실험실의 연구원이 어떤 식물로부터 하루동안 추출하는 호르몬의 양은 평균이 $30.2mg$, 표준편차가 $0.6mg$인 정규분포를 따른다고 한다. 어느 날 이 연구원이 하루동안 추출한 호르몬의 양이 $29.6mg$ 이상이고 $31.4mg$ 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$P(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.3830 ② 0.5328 ③ 0.6247
④ 0.7745 ⑤ 0.8185

<해설> 연구원이 어떤 식물로부터 하루동안 추출하는 호르몬의 양을 Xmg이라고 하면, X는 정규분포 $N\left(30.2,\,0.6^2\right)$을 따른다. $Z=\dfrac{X-30.2}{0.6}$이라고 하면, Z는 표준정규분포를 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore\ P(29.6\le X\le 31.4)&=P(-1\le Z\le 2)\\&=P(0\le Z\le 1)+P(0\le Z\le 2)=0.3413+0.4772=0.8185\end{aligned}$$

정답 : ⑤

11번

함수 $f(x)=\log_3 x$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3-h)}{h}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2\ln 3}$ ② $\frac{2}{3\ln 3}$ ③ $\frac{5}{6\ln 3}$

④ $\frac{1}{\ln 3}$ ⑤ $\frac{7}{6\ln 3}$

<해설> $f(x)=\log_3 x$로부터 $f'(x)=\frac{1}{x\ln 3}$이다.

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(3-h)-f(3)}{-h}$$

$$=f'(3)+f'(3)=2f'(3)=\frac{2}{3\ln 3}$$

<별해> $g(x)=f(3+x)-f(3-x)$라고 하면, $g(0)=0$이고, $g'(x)=f'(3+x)+f'(3-x)$이다.

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h}=g'(0)=2f'(3)=\frac{2}{3\ln 3}$$

정답 : ②

12번

한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 하자. 두 수의 곱 ab가 6의 배수일 때, 이 두 수의 합 $a+b$가 7일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{7}{30}$ ③ $\frac{4}{15}$ ④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

<해설> 두 수의 곱 ab가 6의 배수인 경우는 다음과 같이 2가지로 나눠서 생각할 수 있다.

i) a, b 중에 적어도 하나가 6인 경우

$(1,6)$, $(2,6)$, $(3,6)$, $(4,6)$, $(5,6)$, $(6,1)$, $(6,2)$, $(6,3)$, $(6,4)$, $(6,5)$, $(6,6)$

ii) a, b 중에 하나가 3이고, 다른 하나가 2 또는 4인 경우

$(2,3)$, $(3,2)$, $(3,4)$, $(4,3)$

따라서 두 수의 곱 ab가 6의 배수인 경우의 수는 $11+4=15$이다.

이 중에 $a+b=7$인 경우는 $(1,6)$, $(3,4)$, $(4,3)$, $(6,1)$로 4가지가 있다.

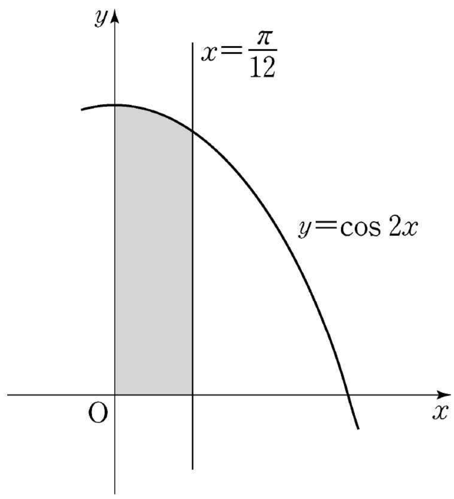
∴ 구하려는 확률은 $\frac{4}{15}$이다.

정답 : ③

13번

함수 $y=\cos 2x$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=\frac{\pi}{12}$로 둘러싸인 영역의 넓이가 직선 $y=a$에 의하여 이등분될 때, 상수 a의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2\pi}$ ② $\frac{1}{\pi}$ ③ $\frac{3}{2\pi}$ ④ $\frac{2}{\pi}$ ⑤ $\frac{5}{2\pi}$



<해설> 함수 $y=\cos 2x$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=\frac{\pi}{12}$로 둘러싸인 영역의 넓이는 $\int_0^{\frac{\pi}{12}} \cos 2x dx$이다. x축, y축 및 두 직선 $x=\frac{\pi}{12}$, $y=a$로 둘러싸인 영역의 넓이가 $\int_0^{\frac{\pi}{12}} \cos 2x dx$의 절반이 되어야 한다. 따라서 $\frac{\pi}{12}\times a=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{12}} \cos 2x dx$이다.

∴ $a=\frac{6}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{12}} \cos 2x dx=\left[\frac{3}{\pi}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{12}}=\frac{3}{2\pi}$

정답 : ③

14번

매개변수 $t(t>0)$으로 나타내어진 함수

$$x=t-\frac{2}{t},\ y=t^2+\frac{2}{t^2}$$

에서 $t=1$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은 [4점]

① $-\frac{2}{3}$ ② -1 ③ $-\frac{4}{3}$ ④ $-\frac{5}{3}$ ⑤ -2

<해설> $x=t-\frac{2}{t}$로부터 $\frac{dx}{dt}=1+\frac{2}{t^2}$이다. $y=t^2+\frac{2}{t^2}$로부터 $\frac{dy}{dt}=2t-\frac{4}{t^3}$이다.

따라서 $\frac{dy}{dx}=\frac{2t-\frac{4}{t^3}}{1+\frac{2}{t^2}}$이다.

$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=1}=-\frac{2}{3}$

정답 : ①

15번

각 자리의 수가 0이 아닌 네 자리의 자연수 중 각 자리의 수의 합이 7인 모든 자연수의 개수는? [4점]

① 11 ② 14 ③ 17 ④ 20 ⑤ 23

<해설> 자연수 k에 대하여 10^{k-1}자리의 수를 a_k라고 하면, 문제의 조건은 $a_1>0$, $a_2>0$, $a_3>0$, $a_4>0$이고, $a_1+a_2+a_3+a_4=7$을 의미한다. 이 조건을 만족하는 a_1, a_2, a_3, a_4의 순서쌍 (a_1, a_2, a_3, a_4)의 개수를 구하는 문제와 같다. 이것은 네 사람 a_1, a_2, a_3, a_4가 똑같은 빵 7개를 먹는데, 네 명 모두 적어도 하나 이상의 빵을 먹는 경우의 수를 구하는 문제와 같다.

일단 빵을 하나씩 먹고 나면, 빵이 3개 남는다. 네 사람 a_1, a_2, a_3, a_4 중에 중복을 허락하여 남은 빵 먹을 3명을 선택하면 되므로, 그 방법의 수는 ${}_4H_3={}_6C_3=20$이다.

정답 : ④

16번

직사각형 $ABCD$의 내부의 점 P가

$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{CA}$$

를 만족시킨다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{CP}$

ㄴ. $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

ㄷ. 삼각형 ADP의 넓이가 3이면 직사각형 $ABCD$의 넓이는 8이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

<해설> ㄱ. $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC}$이므로 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC}$이다.
$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}=-2\overrightarrow{PC}$가 되어 $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{CP}$이다.
∴ 참

ㄴ. 직사각형 $ABCD$의 두 대각선의 교점을 M이라고 하면, M은 두 대각선의 중점이 된다.
따라서 $\overrightarrow{PM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD})$가 성립한다. 따라서 $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}$이다.
$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{CP}$에 대입하면, $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{CP}$이다.
A를 시점으로 하는 벡터 사이의 식으로 고치면, $-\overrightarrow{AP}+(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})=2(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC})$이다.
따라서 $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$이다.
∴ 참

ㄷ. $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$로부터 P는 선분 AC를 $3:1$로 내분하는 점임을 알 수 있다. 삼각형 ADP의 넓이가 3이면 삼각형 ACD의 넓이는 4가 되어, 직사각형 $ABCD$의 넓이는 8이다.
∴ 참

정답 : ⑤

17번

1부터 n까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 n장의 카드가 있다. 이 카드 중에서 임의로 서로 다른 4장의 카드를 선택할 때, 선택한 카드 4장에 적힌 수 중 가장 큰 수를 확률변수 X라 하자. 다음은 $E(X)$를 구하는 과정이다. (단, $n \geq 4$)

> 자연수 $k(4 \leq k \leq n)$에 대하여 확률변수 X의 값이 k일 확률은 1부터 $k-1$까지의 자연수가 적혀 있는 카드 중에서 서로 다른 3장의 카드와 k가 적혀 있는 카드를 선택하는 경우의 수를 전체 경우의 수로 나누는 것이므로
>
> $$P(X=k)=\frac{\boxed{(가)}}{{}_{n}C_{4}}$$
>
> 이다. 자연수 $r(1 \leq r \leq k)$에 대하여 ${}_{k}C_{r}=\frac{k}{r}\times{}_{k-1}C_{r-1}$이므로
>
> $$k\times\boxed{(가)}=4\times\boxed{(나)}$$
>
> 이다. 그러므로
>
> $$\begin{aligned}E(X)&=\sum_{k=4}^{n}\{k\times P(X=k)\}\\&=\frac{1}{{}_{n}C_{4}}\sum_{k=4}^{n}\left\{k\times\boxed{(가)}\right\}\\&=\frac{4}{{}_{n}C_{4}}\sum_{k=4}^{n}\boxed{(나)}\end{aligned}$$
>
> 이다.
>
> $\sum_{k=4}^{n}\boxed{(나)}={}_{n+1}C_{5}$ 이므로 $E(X)=(n+1)\times\boxed{(다)}$ 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 하고, (다)에 알맞은 수를 a라 할 때, $a\times f(6)\times g(5)$의 값은? [4점]

① 40 ② 45 ③ 50 ④ 55 ⑤ 60

<해설> $P(X=k)$를 구할 때, 제시된 과정에서는 분모에 ${}_{n}C_{4}$로 되어 있어서 뽑은 카드의 순서를 구별하지 않고 있다. k가 적혀 있는 카드는 그냥 선택하면 되고, 1부터 $k-1$까지의 자연수가 적혀 있는 카드 중에서 서로 다른 3장의 카드를 선택하면 되므로, (가)에는 ${}_{k-1}C_{3}$이 적당하다.

$\therefore\ f(k)={}_{k-1}C_{3}$

$k\times{}_{k-1}C_{3}=4\times\boxed{(나)}$에서 $k\times{}_{k-1}C_{3}$은 k명의 선수 중에 주장인 대표팀 선수 1명을 선택한 후에 나머지 $k-1$명의 선수 중에 주장이 아닌 대표팀 선수 3명을 선발하는 방법의 수다. 이 방법의 수는 k명의 선수 중에 먼저 4명의 대표팀 선수를 선택한 후에 선택된 4명 중에 주장을

1명 뽑는 방법의 수와 같다. 따라서 (나)에는 ${}_kC_4$가 적당하다.

$\therefore\ g(k)={}_kC_4$

$$
\begin{aligned}
E(X)&=\frac{4}{{}_nC_4}\sum_{k=4}^{n}{}_kC_4\\
&=\frac{4}{{}_nC_4}\left\{{}_4C_4+\sum_{k=5}^{n}\left({}_{k+1}C_5-{}_kC_5\right)\right\}\\
&\quad (\because\ {}_nC_r+{}_nC_{r+1}={}_{n+1}C_{r+1}\text{로부터 } {}_nC_r={}_{n+1}C_{r+1}-{}_nC_{r+1}\text{이다.})\\
&=\frac{4}{{}_nC_4}\left\{{}_4C_4+\left({}_{n+1}C_5-{}_5C_5\right)\right\}=\frac{4\times{}_{n+1}C_5}{{}_nC_4}\\
&=\frac{4\times\dfrac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{5!}}{\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}}=\frac{4}{5}(n+1)
\end{aligned}
$$

따라서 (다)에는 $\dfrac{4}{5}$가 들어가는 것이 적당하다.

$\therefore\ a=\dfrac{4}{5}$

$\therefore\ a\times f(6)\times g(5)=\dfrac{4}{5}\times{}_5C_3\times{}_5C_4=40$

정답 : ①

18번

좌표공간에 점 $P(0,0,4)$가 있고 xy평면 위의 원 $x^2+y^2=4$ 위에 두 점 A, B가 있다. 평면 ABP의 법선벡터가 $\vec{n}=(2,-2,1)$일 때, 선분 AB의 길이는? [4점]

① $\sqrt{6}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{10}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{14}$

<해설> 평면 ABP의 방정식은 $2x-2y+z-4=0$이다. 이 평면이 xy평면과 만나는 교선의 방정식은 $2x-2y-4=0$, $z=0$이다. 즉, $y=x-2$, $z=0$이다.

결국 이 문제는 xy평면 위에서 원 $x^2+y^2=4$와 직선 $y=x-2$의 두 교점이 A, B일 때 선분 AB의 길이를 구하는 문제와 같다. 두 교점의 좌표가 $(0,-2)$, $(2,0)$이므로, 두 점 사이의 거리는 $2\sqrt{2}$이다.

<별해> 원의 중심 $O(0,0)$에서 직선 $x-y-2=0$에 내린 수선의 발을 H라고 하면 점과 직선 사이의 거리 공식에 의하여 $\overline{OH}=\dfrac{|2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$이다.
원의 반지름의 길이가 $\overline{OA}=\overline{OB}=2$이므로, 삼각형 AOH에서 피타고라스의 정리를 쓰면,
$\overline{AH}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OH}^2}=\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$이다.
$\therefore\ \overline{AB}=2\overline{AH}=2\sqrt{2}$

정답 : ②

19번

서로 다른 과일 5개를 3개의 그릇 A, B, C에 남김없이 담으려고 할 때, 그릇 A에는 과일 2개만 담는 경우의 수는? (단, 과일을 하나도 담지 않은 그릇이 있을 수 있다.) [4점]

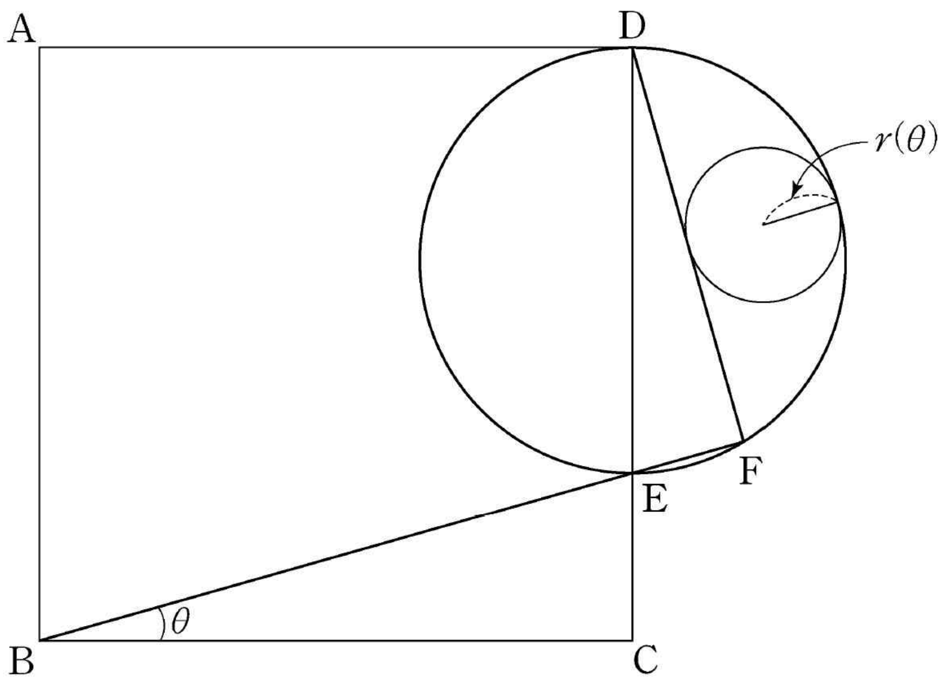
① 60 ② 65 ③ 70 ④ 75 ⑤ 80

<해설> 서로 다른 과일 5개 중에 그릇 A에 담을 과일 2개를 선택하는 방법의 수는 ${}_5C_2$가지다. 이 ${}_5C_2$가지의 경우 각각에 대하여, 나머지 3개의 과일을 B, C에 담으면 된다. 서로 다른 두 그릇 B, C 중에 나머지 3개의 과일이 들어갈 그릇을 중복을 허락하여 선택하면 된다. 이렇게 선택하는 방법의 수는 ${}_2\Pi_3$이다. 이 때, ${}_2\Pi_3$은 과일을 하나도 담지 않은 그릇이 있을 수 있는 경우까지 포함한다.
$\therefore$ 구하려는 경우의 수는 ${}_5C_2\times{}_2\Pi_3=10\times8=80$이다.

정답 : ⑤

20번

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 $ABCD$가 있다. 변 CD 위의 점 E에 대하여 선분 DE를 지름으로 하는 원과 직선 BE가 만나는 점 중 E가 아닌 점을 F라 하자. $\angle EBC=\theta$라 할 때, 점 E를 포함하지 않는 호 DF를 이등분하는 점과 선분 DF의 중점을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 하자. $\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{r(\theta)}{\frac{\pi}{4}-\theta}$의 값은? (단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$) [4점]

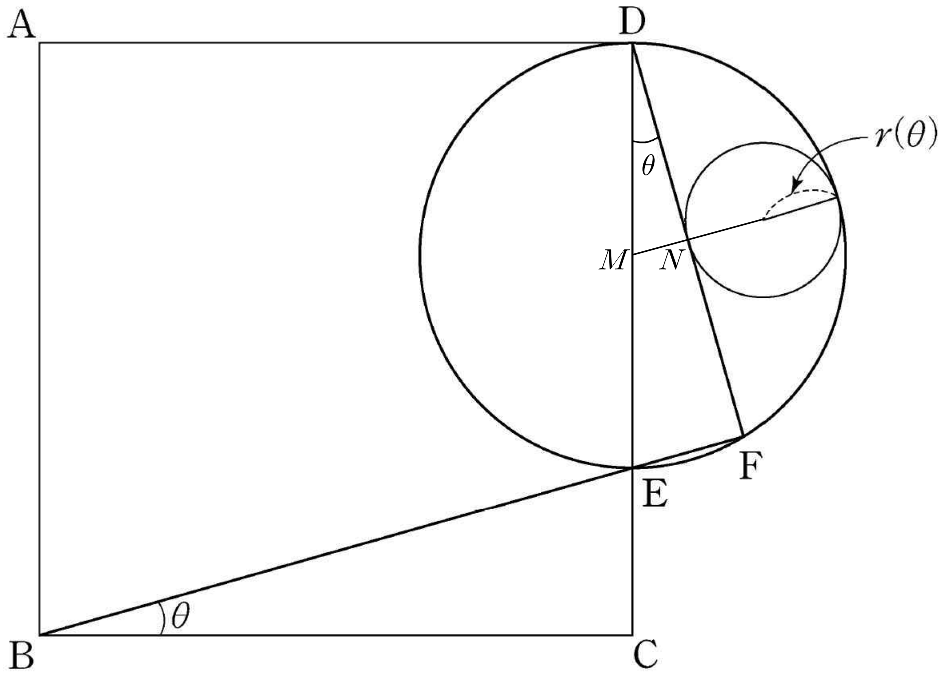


① $\frac{1}{7}(2-\sqrt{2})$　② $\frac{1}{6}(2-\sqrt{2})$　③ $\frac{1}{5}(2-\sqrt{2})$

④ $\frac{1}{4}(2-\sqrt{2})$　⑤ $\frac{1}{3}(2-\sqrt{2})$

<해설> $\overline{BC}=1$이므로, $\overline{CE}=\overline{BC}\times\tan\theta=\tan\theta$이다. 따라서 $\overline{DE}=1-\tan\theta$이다.

선분 DE의 중점을 M이라고 하면, $\overline{DM}=\frac{1}{2}(1-\tan\theta)$이고, M은 선분 DE를 지름으로 하는 원의 중심이 된다. 선분 DF의 중점을 N이라 하자.



$\angle EBC=\theta$로부터 $\angle BEC=\dfrac{\pi}{2}-\theta$, $\angle DEF=\dfrac{\pi}{2}-\theta$이다. $\angle DFE=\dfrac{\pi}{2}$이므로, $\angle EDF=\theta$가 되어,

$\sin\theta=\dfrac{\overline{MN}}{\overline{DM}}$이 성립한다. 따라서 $\overline{MN}=\dfrac{1}{2}(1-\tan\theta)\times\sin\theta$이다.

$2r(\theta)+\overline{MN}=\overline{DM}$이므로, $r(\theta)=\dfrac{1}{2}(\overline{DM}-\overline{MN})=\dfrac{1}{4}(1-\tan\theta)(1-\sin\theta)$이다.

$f(\theta)=\tan\theta$라고 하면, $f'(\theta)=\sec^2\theta$이다.

$$\therefore\ \lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{r(\theta)}{\frac{\pi}{4}-\theta}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{\frac{1}{4}(1-\tan\theta)(1-\sin\theta)}{\frac{\pi}{4}-\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{1}{4}(1-\sin\theta)\times\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{\tan\theta-\tan\frac{\pi}{4}}{\theta-\frac{\pi}{4}}$$

$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{1}{4}(1-\sin\theta)\times\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{f(\theta)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\theta-\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\times\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{4}(2-\sqrt{2})$$

<별해 - $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\dfrac{\tan\theta-\tan\frac{\pi}{4}}{\theta-\frac{\pi}{4}}$의 값을 구하는 과정>

$\tan\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\tan\theta-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\theta\tan\frac{\pi}{4}}$이므로, $\tan\theta-\tan\dfrac{\pi}{4}=(1+\tan\theta)\tan\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$이다.

$$\therefore\ \lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{\tan\theta-\tan\frac{\pi}{4}}{\theta-\frac{\pi}{4}}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{(1+\tan\theta)\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}{\theta-\frac{\pi}{4}}$$

$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}{\theta-\frac{\pi}{4}}\times\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}(1+\tan\theta)=1\times2=2$$

정답 : ④

21번

양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 양의 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)' = x^2 e^{-x^2}$

(나) $g(x) = \dfrac{4}{e^4}\displaystyle\int_1^x e^{t^2} f(t)\,dt$

$f(1) = \dfrac{1}{e}$일 때, $f(2) - g(2)$의 값은? [4점]

① $\dfrac{16}{3e^4}$ ② $\dfrac{6}{e^4}$ ③ $\dfrac{20}{3e^4}$ ④ $\dfrac{22}{3e^4}$ ⑤ $\dfrac{8}{e^4}$

<해설> $g(2) = \dfrac{4}{e^4}\displaystyle\int_1^2 e^{t^2} f(t)\,dt = \dfrac{4}{e^4}\displaystyle\int_1^2 te^{t^2} \times \dfrac{f(t)}{t}\,dt$이다.

여기서 te^{t^2}을 적분하고, $\dfrac{f(t)}{t}$를 미분하는 부분적분을 한다.

$$g(2) = \frac{4}{e^4}\int_1^2 te^{t^2} \times \frac{f(t)}{t}\,dt$$

$$= \frac{4}{e^4}\left\{\left[\frac{1}{2}e^{t^2} \times \frac{f(t)}{t}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}e^{t^2} \times \left(\frac{f(t)}{t}\right)' dt\right\}$$

$$= \frac{4}{e^4}\left\{\frac{1}{4}e^4 f(2) - \frac{1}{2}ef(1) - \int_1^2 \frac{1}{2}e^{t^2} \times \left(t^2 e^{-t^2}\right)dt\right\}$$

$$= f(2) - \frac{2}{e^4} - \frac{4}{e^4}\int_1^2 \frac{1}{2}t^2\,dt$$

$$= f(2) - \frac{2}{e^4} - \frac{4}{e^4}\left[\frac{1}{6}t^3\right]_1^2$$

$$= f(2) - \frac{20}{3e^4}$$

$\therefore\ f(2) - g(2) = \dfrac{20}{3e^4}$

정답 : ③

22번

${}_7C_2$의 값을 구하시오. [3점]

<해설> ${}_7C_2 = \frac{{}_7P_2}{2} = \frac{7\times 6}{2} = 21$

정답 : 21

23번

곡선 $y=\log_2(x+5)$의 점근선이 직선 $x=k$이다. k^2의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [3점]

<해설> 로그함수의 진수가 0이 되는 자취가 점근선이다.
$x+5=0$으로부터 $x=-5$이다.
$\therefore$ $k=-5$이므로, $k^2=25$이다.

정답 : 25

24번

흰 공 2개, 빨간 공 4개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 2개의 공이 모두 흰 공일 확률이 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

<해설> 주머니에서 서로 다른 6개의 공 중에 임의로 서로 다른 2개의 공을 선택하여 만든 조합들의 집합을 표본공간 S라고 하면, $n(S)={}_6C_2=15$이고, 집합 S의 각각의 원소는 선택될 가능성이 같은 정도로 기대된다. 이 때, 2개의 공이 모두 흰 공인 사건을 A라고 하면, A의 원소는 흰 공 2개 중에 2개를 뽑는 경우를 나타내므로 $n(A)={}_2C_2=1$이다.
$\therefore$ $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{1}{15}$
$\therefore$ $p=15,\ q=1$이므로, $p+q=16$이다.

정답 : 16

25번

좌표평면에서 초점이 F인 포물선 $x^2=4y$ 위의 점 A가 $\overline{AF}=10$을 만족시킨다. 점 $B(0,-1)$에 대하여 $\overline{AB}=a$일 때, a^2의 값을 구하시오. [3점]

<해설> $A(c,d)$라 하자. $c^2=4d$이므로, $4d\geq0$가 되어, $d\geq0$이다.
포물선 $x^2=4y$의 준선의 방정식은 $y=-1$이다. $\overline{AF}=10$으로부터 A에서 준선까지 이르는 거리가 10이 되어, $|d+1|=10$이다. 따라서 $d=9$이다. ($\because$ $d\geq0$)

$$\therefore\ a^2=\overline{AB}^2=(c-0)^2+(d+1)^2$$
$$=4d+(d+1)^2=4\times9+10^2=136$$

정답 : 136

26번

함수 $f(x)=2x+\sin x$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(4\pi,2\pi)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

<해설> $f(2\pi)=4\pi$이므로, $g(4\pi)=2\pi$이다.
또, $f(x)=2x+\sin x$에서 $f'(x)=2+\cos x$이다.

$$\therefore\ g'(4\pi)=\lim_{x\to4\pi}\frac{g(x)-g(4\pi)}{x-4\pi}$$
$$=\lim_{t\to2\pi}\frac{t-2\pi}{f(t)-f(2\pi)}$$
($\because$ $g(x)=t$로 치환하면, $x=f(t)$이다. $x\to4\pi$일 때 $t\to2\pi$이다.)
$$=\frac{1}{f'(2\pi)}=\frac{1}{3}$$

$\therefore$ $p=3$, $q=1$이므로, $p+q=4$이다.

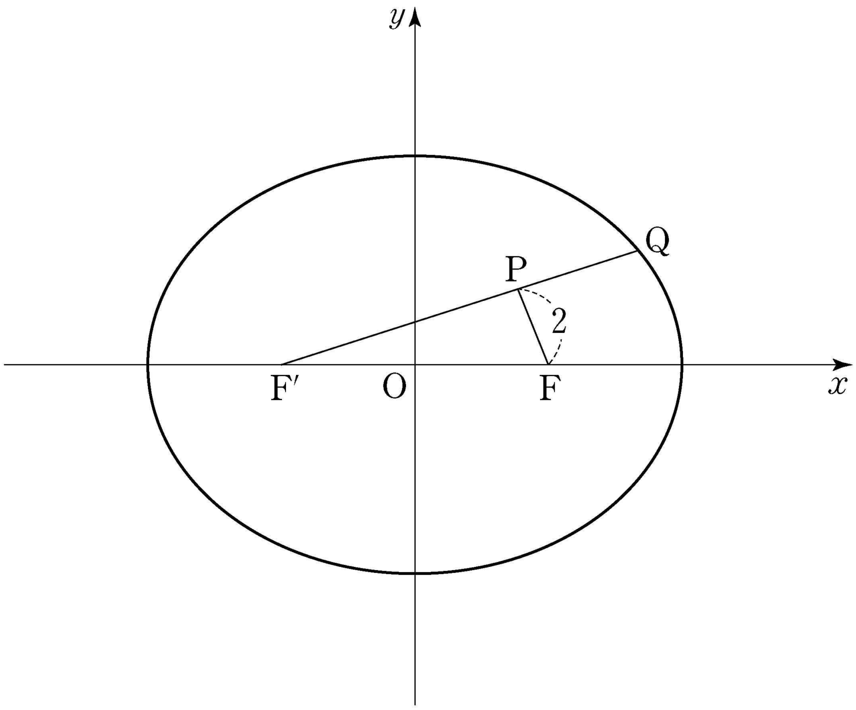
정답 : 4

27번

그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$의 두 초점은 F, F'이고, 제 1사분면에 있는 두 점 P, Q는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{PF}=2$
(나) 점 Q는 직선 PF'과 타원의 교점이다.

삼각형 PFQ의 둘레의 길이와 삼각형 $PF'F$의 둘레의 길이의 합을 구하시오. [4점]



<해설> $\sqrt{36-27}=3$이므로, $F(3,0)$, $F'(-3,0)$이다. 따라서 $\overline{FF'}=6$이다.
또, 타원의 장축의 길이는 $2\times\sqrt{36}=12$이므로, $\overline{FQ}+\overline{F'Q}=12$이다.
$\therefore$ (삼각형 PFQ의 둘레의 길이)+(삼각형 $PF'F$의 둘레의 길이)

$$=\left(\overline{PF}+\overline{FQ}+\overline{PQ}\right)+\left(\overline{PF}+\overline{FF'}+\overline{PF'}\right)$$
$$=2\overline{PF}+\overline{FF'}+\left(\overline{PF'}+\overline{PQ}\right)+\overline{FQ}$$
$$=2\overline{PF}+\overline{FF'}+\overline{F'Q}+\overline{FQ}$$
$$=2\times2+6+12=22$$

정답 : 22

28번

어느 고등학교에서 대중교통을 이용하여 등교하는 학생의 비율을 알아보기 위하여 이 고등학교 학생 중 n명을 임의추출하여 조사한 결과 50%의 학생이 대중교통을 이용하여 등교하는 것으로 나타났다. 이 결과를 이용하여 구한 이 고등학교 전체 학생 중에서 대중교통을 이용하여 등교하는 학생의 비율 p에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $a \le p \le b$이다. $b-a=0.14$일 때, n의 값을 구하시오. (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(|Z| \le 1.96)=0.95$로 계산한다.) [4점]

<해설> 표본의 크기가 n이고, 표본비율이 $\hat{p}=0.5$이다.
대중교통을 이용하여 등교하는 학생의 비율 p에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\hat{p}-1.96\times\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \le p \le \hat{p}+1.96\times\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

이다. $a=\hat{p}-1.96\times\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, $b=\hat{p}+1.96\times\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ 이므로,

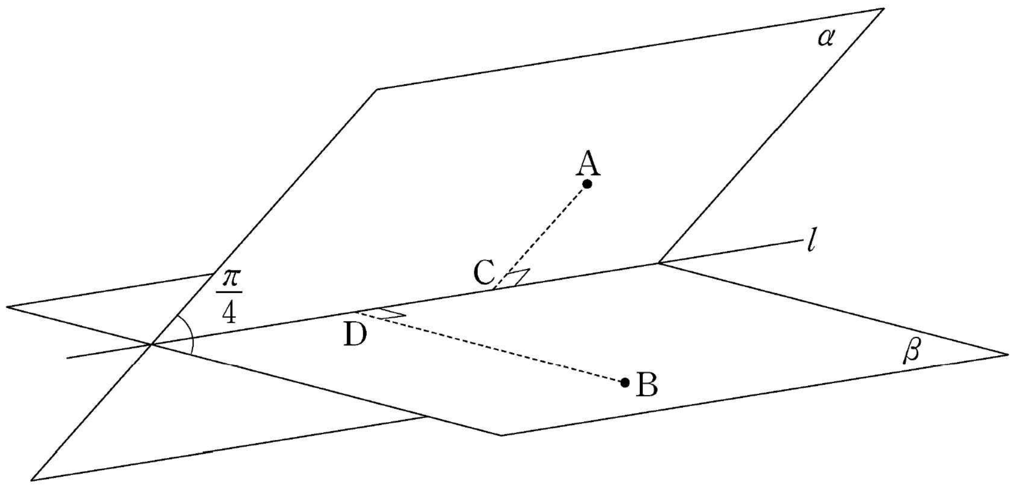
$b-a=2\times1.96\times\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}=0.14$이다. $\hat{p}=0.5$를 대입하면, $\frac{1.96}{\sqrt{n}}=0.14$이다.

$\sqrt{n}=14$이므로, $n=196$이다.

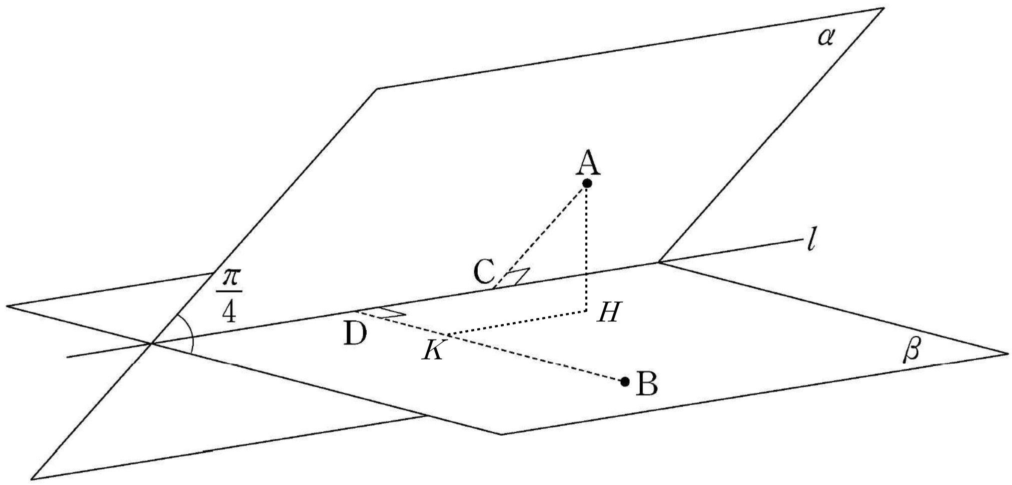
정답 : 196

29번

그림과 같이 직선 l을 교선으로 하고 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$인 두 평면 α와 β가 있고, 평면 α 위의 점 A와 평면 β 위의 점 B가 있다. 두 점 A, B에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{AB}=2$, $\overline{AD}=\sqrt{3}$ 이고 직선 AB와 평면 β가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$일 때, 사면체 $ABCD$의 부피는 $a+b\sqrt{2}$ 이다. $36(a+b)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.) [4점]



<해설> 점 A에서 평면 β에 내린 수선의 발을 H라 하고, H에서 직선 BD에 내린 수선의 발을 K라고 하자.



직선 AB와 평면 β가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$이므로, $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}}$가 되어, $\overline{AH}=2\sin\frac{\pi}{6}=1$이다.

또, $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\overline{BH}}{\overline{AB}}$가 되어, $\overline{BH}=2\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$ 이다.

두 평면 α와 β가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이므로, $\tan\frac{\pi}{4}=\frac{\overline{AH}}{\overline{CH}}$가 되어,

$\overline{CH}=\overline{AH}\times\cot\frac{\pi}{4}=1$이다. 따라서 $\overline{DK}=1$이다.

또, $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\overline{AH}}{\overline{AC}}$가 되어, $\overline{AC}=\overline{AH}\times\mathrm{cosec}\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$ 이다.

삼각형 ACD에서 피타고라스의 정리를 쓰면, $\overline{CD}=\sqrt{\overline{AD}^2-\overline{AC}^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}=1$이다.
따라서 $\overline{HK}=1$이다.

삼각형 BHK에서 피타고라스의 정리를 쓰면, $\overline{BK}=\sqrt{\overline{BH}^2-\overline{HK}^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-1^2}=\sqrt{2}$ 이다.
따라서 $\overline{BD}=\overline{BK}+\overline{DK}=\sqrt{2}+1$이다.

$\therefore\ a+b\sqrt{2}=\dfrac{1}{3}\times$(삼각형 BCD의 넓이)$\times\overline{AH}$

$$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{CD}\right)\times\overline{AH}$$

$$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times(\sqrt{2}+1)\times1\right)\times1$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\sqrt{2}$$

$\therefore\ a=\dfrac{1}{6},\ b=\dfrac{1}{6}$이므로, $36(a+b)=12$이다.

정답 : 12

30번

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x)=|2\sin(x+2|x|)+1|$$

에 대하여 함수 $h(x)=f(g(x))$는 실수 전체의 집합에서 이계도함수 $h''(x)$를 갖고, $h''(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. $f'(3)$의 값을 구하시오. [4점]

<해설> $f(x)$는 다항함수이므로, $f(x)$의 이계도함수 $f''(x)$는 연속이다.
$x\geq0$일 때 $g(x)=|2\sin3x+1|$이고, $x\leq0$일 때 $g(x)=|-2\sin x+1|$이다.
두 함수 $|2\sin3x+1|$, $|-2\sin x+1|$는 함숫값이 0이 되는 점에서만 미분불능이고, 그 외의 모든 점에서는 $|2\sin3x+1|$와 $|-2\sin x+1|$도 이계도함수가 연속이다. 따라서 $x=0$인 점과 $g(x)=0$인 x의 값에서만 이계도함수 $h''(x)$가 연속이 되기 위한 조건을 따지면 된다.

먼저 $x=0$일 때를 생각하자.

i) $0\leq x<\dfrac{\pi}{6}$일 때 $g(x)=2\sin3x+1$이므로, $h(x)=f(2\sin3x+1)$이다.

$0<x<\dfrac{\pi}{6}$인 범위에서는 $h'(x)=f'(2\sin3x+1)\times6\cos3x$ …… Ⓐ이고,

$h''(x)=f''(2\sin3x+1)\times(6\cos3x)^2+f'(2\sin3x+1)\times(-18\sin3x)$ …… Ⓑ이다.

$$\lim_{x\to0+}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{f(2\sin3x+1)-f(1)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0+}\frac{f(2\sin3x+1)-f(1)}{2\sin3x}\times\frac{\sin3x}{3x}\times6=6f'(1)$$이다.

ii) $-\frac{\pi}{6}<x\le0$일 때 $g(x)=-2\sin x+1$이므로, $h(x)=f(-2\sin x+1)$이다.

$-\frac{\pi}{6}<x<0$인 범위에서는 $h'(x)=f'(-2\sin x+1)\times(-2\cos x)$ …… ⓒ이고,

$h''(x)=f''(-2\sin x+1)\times(-2\cos x)^2+f'(-2\sin x+1)\times(2\sin x)$ …… ⓓ이다.

$$\lim_{x\to0-}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{f(-2\sin x+1)-f(1)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0-}\frac{f(-2\sin x+1)-f(1)}{-2\sin x}\times\frac{\sin x}{x}\times(-2)=-2f'(1)$$이다.

i), ii)의 결과를 종합하여 생각하자. 우선 $h(x)$가 $x=0$에서 미분가능하기 위해서는

$\lim_{x\to0-}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{h(x)-h(0)}{x}$가 성립해야 한다. 따라서 $6f'(1)=-2f'(1)$이 되어,

$f'(1)=0$이고, $h'(0)=0$이다.

또, $h''(0)$의 값이 존재하기 위해서는 $\lim_{x\to0-}\frac{h'(x)-h'(0)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{h'(x)-h'(0)}{x}$가 성립해야 한다.

$h'(0)=0$과 ⓐ, ⓒ의 결과를 대입하여 쓰면,

$\lim_{x\to0-}\frac{f'(-2\sin x+1)\times(-2\cos x)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{f'(2\sin3x+1)\times6\cos3x}{x}$이다. $f'(1)=0$이므로,

$$\lim_{x\to0-}\frac{\{f'(-2\sin x+1)-f'(1)\}\times(-2\cos x)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{\{f'(2\sin3x+1)-f'(1)\}\times6\cos3x}{x}$$

$$\lim_{x\to0-}\frac{f'(-2\sin x+1)-f'(1)}{-2\sin x}\times\frac{\sin x}{x}\times(4\cos x)$$

$$=\lim_{x\to0+}\frac{f'(2\sin3x+1)-f'(1)}{2\sin3x}\times\frac{\sin3x}{3x}\times36\cos3x$$

가 되어, $4f''(1)=36f''(1)$이다. 따라서 $f''(1)=0$이고, 이 때, $h''(0)=0$이다.

ⓑ, ⓓ에서

$$\lim_{x\to0+}h''(x)=\lim_{x\to0+}\{f''(2\sin3x+1)\times(6\cos3x)^2+f'(2\sin3x+1)\times(-18\sin3x)\}$$

$$=36f''(1)-18f'(1)=0$$

$$\lim_{x\to0-}h''(x)=\lim_{x\to0-}\{f''(-2\sin x+1)\times(-2\cos x)^2+f'(-2\sin x+1)\times(2\sin x)\}$$

$$=4f''(1)+2f'(1)=0$$

이므로, $h''(x)$는 $x=0$에서 연속이다. 여기까지 내용을 정리하면, $h''(x)$는 $x=0$에서 연속이기 위한 필요충분조건은 $f'(1)=0$, $f''(1)=0$이다.

이제 $g(x)=0$이 되는 점들을 생각해보자. $x=\alpha$에서 $g(\alpha)=0$을 만족한다고 하자.
(단, α는 상수)
$\alpha>0$인 경우 $p(x)=2\sin 3x+1$라고 할 때, $g(x)=|p(x)|$이고, $g(\alpha)=0$으로부터 $p(\alpha)=0$이다. 이때, $2\sin 3\alpha+1=0$이므로, $\sin 3\alpha=-\dfrac{1}{2}$이다. $p'(x)=6\cos 3x$이므로, $p'(\alpha)\neq 0$이다.
$\alpha<0$인 경우 $p(x)=-2\sin x+1$라고 할 때, $g(x)=|p(x)|$이고, $g(\alpha)=0$으로부터 $p(\alpha)=0$이다. 이때, $-2\sin\alpha+1=0$이므로, $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$이다. $p'(x)=-2\cos x$이므로, $p'(\alpha)\neq 0$이다.

다음의 두 경우를 생각해보자.
i) $\alpha-\dfrac{\pi}{6}<x\le\alpha$일 때 $g(x)=p(x)$, $\alpha\le x<\alpha+\dfrac{\pi}{6}$일 때 $g(x)=-p(x)$인 경우

$\alpha-\dfrac{\pi}{6}<x<\alpha$일 때 $h(x)=f(p(x))$이므로, $h'(x)=f'(p(x))p'(x)$,

$h''(x)=f''(p(x))\{p'(x)\}^2+f'(p(x))p''(x)$이다.

$\alpha<x<\alpha+\dfrac{\pi}{6}$일 때 $h(x)=f(-p(x))$이므로, $h'(x)=-f'(-p(x))p'(x)$,

$h''(x)=f''(-p(x))\{p'(x)\}^2-f'(-p(x))p''(x)$이다.

$$\lim_{x\to\alpha-}\frac{h(x)-h(\alpha)}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha-}\frac{f(p(x))-f(p(\alpha))}{x-\alpha}=f'(p(\alpha))p'(\alpha)$$
$$\lim_{x\to\alpha+}\frac{h(x)-h(\alpha)}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha+}\frac{f(-p(x))-f(-p(\alpha))}{x-\alpha}=-f'(-p(\alpha))p'(\alpha)$$

ii) $\alpha-\dfrac{\pi}{6}<x\le\alpha$일 때 $g(x)=-p(x)$, $\alpha\le x<\alpha+\dfrac{\pi}{6}$일 때 $g(x)=p(x)$인 경우

$\alpha-\dfrac{\pi}{6}<x<\alpha$일 때 $h(x)=f(-p(x))$이므로, $h'(x)=-f'(-p(x))p'(x)$,

$h''(x)=f''(-p(x))\{p'(x)\}^2-f'(-p(x))p''(x)$이다.

$\alpha<x<\alpha+\dfrac{\pi}{6}$일 때 $h(x)=f(p(x))$이므로, $h'(x)=f'(p(x))p'(x)$,

$h''(x)=f''(p(x))\{p'(x)\}^2+f'(p(x))p''(x)$이다.

$$\lim_{x\to\alpha-}\frac{h(x)-h(\alpha)}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha-}\frac{f(p(x))-f(p(\alpha))}{x-\alpha}=f'(p(\alpha))p'(\alpha)$$
$$\lim_{x\to\alpha+}\frac{h(x)-h(\alpha)}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha+}\frac{f(-p(x))-f(-p(\alpha))}{x-\alpha}=-f'(-p(\alpha))p'(\alpha)$$

$h(x)$가 $x=\alpha$에서 미분가능하기 위해서는 $\displaystyle\lim_{x\to\alpha-}\frac{h(x)-h(\alpha)}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha+}\frac{h(x)-h(\alpha)}{x-\alpha}$를 만족해야 한다.

따라서 i), ii)의 경우 모두 $f'(p(\alpha))p'(\alpha)=-f'(-p(\alpha))p'(\alpha)$가 성립한다. 여기에 $p(\alpha)=0$을 대입하고, $\dfrac{1}{p'(\alpha)}$를 곱하면, $f'(0)=-f'(0)$이 되어, $f'(0)=0$이다. 이 때, $h'(\alpha)=0$이다.

$h'(x)$가 $x=\alpha$에서 미분가능하기 위해서는 $\displaystyle\lim_{x\to\alpha-}\frac{h'(x)-h'(\alpha)}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha+}\frac{h'(x)-h'(\alpha)}{x-\alpha}$를 만족해야 한다. 따라서 i), ii)의 경우 모두 $\displaystyle\lim_{x\to\alpha}\frac{f'(p(x))p'(x)-h'(\alpha)}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha}\frac{-f'(-p(x))p'(x)-h'(\alpha)}{x-\alpha}$가 성립하면 된다.

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f'(p(x))p'(x)-h'(\alpha)}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha}\frac{f'(p(x))p'(x)}{x-\alpha}$$
$$=\lim_{x\to\alpha}\frac{\{f'(p(x))-f'(p(\alpha))\}p'(x)}{p(x)-p(\alpha)}\times\frac{p(x)-p(\alpha)}{x-\alpha}$$
($\because$ $p(\alpha)=0$이고, $f'(0)=0$이다.)
$$=f''(p(\alpha))\{p'(\alpha)\}^2=f''(0)\{p'(\alpha)\}^2$$
$$\lim_{x\to\alpha}\frac{-f'(-p(x))p'(x)-h'(\alpha)}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha}\frac{-f'(-p(x))p'(x)}{x-\alpha}$$
$$=\lim_{x\to\alpha}\frac{\{f'(-p(x))-f'(-p(\alpha))\}p'(x)}{-p(x)-\{-p(\alpha)\}}\times\frac{p(x)-p(\alpha)}{x-\alpha}$$
($\because$ $p(\alpha)=0$이고, $f'(0)=0$이다.)
$$=f''(-p(\alpha))\{p'(\alpha)\}^2=f''(0)\{p'(\alpha)\}^2$$

따라서 $h''(\alpha)=f''(0)\{p'(\alpha)\}^2$가 된다. 이 때, $p(\alpha)=0$이고, $f'(0)=0$임을 고려하면,
$$\lim_{x\to\alpha}\{f''(p(x))\{p'(x)\}^2+f'(p(x))p''(x)\}=f''(p(\alpha))\{p'(\alpha)\}^2+f'(p(\alpha))p''(\alpha)=f''(0)\{p'(\alpha)\}^2$$
$$\lim_{x\to\alpha}\{f''(-p(x))\{p'(x)\}^2-f'(-p(x))p''(x)\}$$
$$=f''(-p(\alpha))\{p'(\alpha)\}^2-f'(-p(\alpha))p''(\alpha)=f''(0)\{p'(\alpha)\}^2$$
가 되어, $h''(x)$는 $x=\alpha$에서 연속이다.

따라서 $h''(x)$는 $x=\alpha$에서 연속이기 위한 필요충분조건은 $f'(0)=0$이다.

지금까지 내용을 종합하면, 사차함수 $f(x)$는 $f'(0)=0$, $f'(1)=0$, $f''(1)=0$을 만족한다. $f'(x)$는 $x(x-1)^2$을 인수로 가져야 한다. 문제에서 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이라고 했으므로,
삼차함수 $f'(x)$의 최고차항의 계수는 4이다.
$\therefore$ $f'(x)=4x(x-1)^2$이므로, $f'(3)=48$이다.

정답 : 48