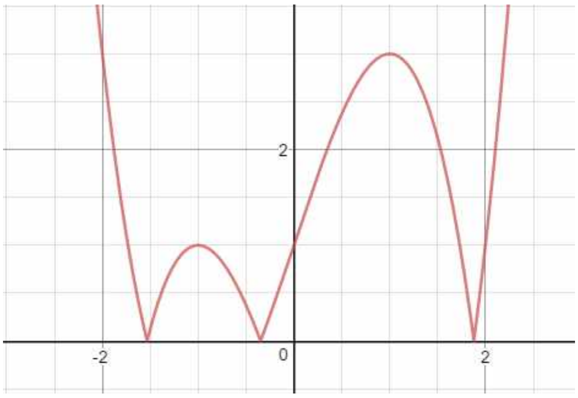
1. 2010 가형 수능 24번

삼차함수 $f(x)=x^3-3x-1$이 있다. 실수 $t(t\geq-1)$에 대하여 $-1\leq x\leq t$에서 $|f(x)|$의 최댓값을 $g(t)$라고 하자.

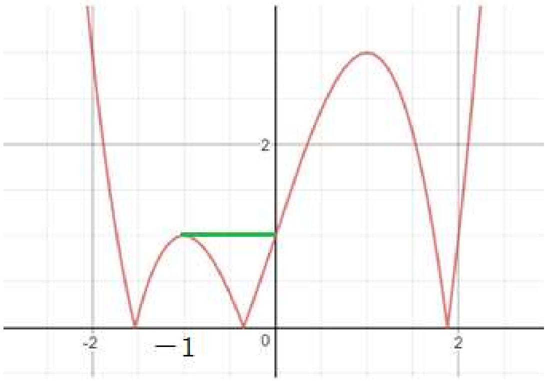
$\int_{-1}^{1}g(t)dt=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) (4점)

$y=|f(x)|$의 그래프입니다. $-1\leq x\leq t$ 에서 $t(t\geq-1)$에 따른 최댓값 $g(t)$를 구하라고 했습니다.



$f(x)=x^3-3x-1$를 미분하면 $f'(x)=3x^2-3$이고, $x=-1$ 에서 극솟값 -1을 갖고, $x=1$에서 극댓값 3을 가집니다.

그런데 절댓값 때문에 함수를 접어 올렸기 때문에 $x=-1$에서 $|f(-1)|=1$을 가집니다.



이제 t에 따라 최댓값 $g(t)$가 어떻게 변하는 지 볼게요.
범위가 $-1 \le x \le t$이므로 $t=-1$부터 t가 커짐에 따라 살펴보면 됩니다.
$t=-1$에서 0까지는 최댓값이 $|f(-1)|=1$입니다. but $t=0$까지 최댓값은 1을 유지하다가 $t=0$을 지나가면서 빨간 곡선의 함숫값 $f(t)$이 더 크네요.

t의 범위	최댓값 $g(t)$
$t=-1$	1
$-1<t<0$	1
$t>0$	$\lvert f(t)\rvert=-f(t)$ (원래 음수이므로 절댓값 빠져나올 때 음수가 붙는다.)

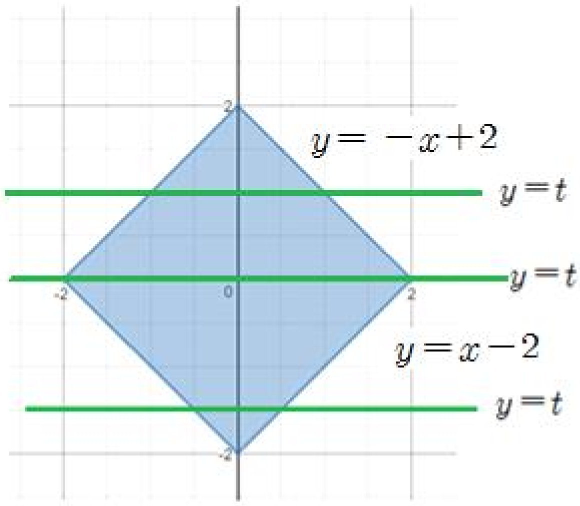
문제에서 $\int_{-1}^{1} g(t)dt$를 구하라고 했는데 여기서 함수가 바뀌므로, 적분 구간이 나뉘는 것에 조심해야 합니다.

$$\int_{-1}^{1} g(t)dt=\int_{-1}^{0} 1dt + \int_{0}^{1} -f(t)dt=\int_{-1}^{0} 1dt+\int_{0}^{1} -x^3+3x+1dt$$

계산하면 $\frac{13}{4}$이고 답은 17입니다.

2. ebs 수능완성 실모 1회 29번

좌표평면 위에서 $|x|+|y| \le 2$를 만족시키는 점 (x, y)가 나타내는 영역을 D라 하자. $-2 < t < 2$인 실수 t에 대하여 영역 D가 직선 $y=t$에 의하여 잘려진 두 영역 중 넓이가 크지 않은 영역의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $90\int_{-1}^{1} S(t)dt$의 값을 구하시오. [4점]



$-2 < t < 2$인 실수 t에 대해 $y=t$에 의하여 잘린 두 영역의 넓이를 봐야겠네요.

t가 제일 작을 때부터 $t=2$까지 점점 위로 올라간다고 생각해보면 됩니다.

$y=t$가 x축 아래에 위치할 때는 $y=t$아래에 위치한 넓이가 작습니다. $y=t$가 x축과 같아지면 잘려진 두 영역의 넓이는 같구요.

$y=t$가 x축 위로 올라가면 잘려진 영역의 위쪽의 넓이가 작습니다.

$-2 < t < 0$에서 넓이 $S(t)$를 구하기 위해 x, y의 좌표를 구하면 됩니다.

$y=x-2$와 $y=t$가 만나는 교점을 찾으면 $x=2+t$이고 마름모니까 좌우대칭이어서 밑변의 길이는 $2(t+2)$ 높이는 $(t+2)$

$0 \le t < 2$에서 $y=-x+2$와 $y=t$가 만나는 교점은 $x=2-t$,

밑변은 $2(2-t)$ 높이는 $2-t$

t의 범위	넓이 $S(t)$
$-2 < t < 0$	$(t+2)^2$
$0 \le t < 2$	$(2-t)^2$

$$\int_{-1}^{1} S(t)dt = \int_{-1}^{0} (t+2)^2 dt + \int_{0}^{1} (2-t)^2 dt = \frac{14}{3}$$

$90\int_{-1}^{1} S(t)dt$를 구하라고 했으므로 $\frac{14}{3} \times 90 = 420$

답은 420입니다.