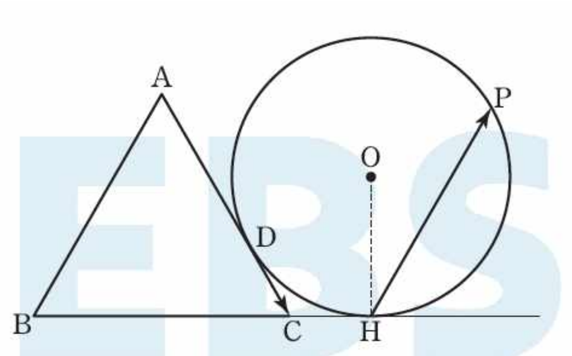
1번문제 답 3번 2번문제 답 80

1. ebs 수능완성 실전모의 2회 20번

그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정삼각형 ABC와 중심이 O인 원이 있다. 선분 AC를 2:1로 내분하는 점을 D라 하자. 중심이 O인 원은 직선 AC와 점 D에서 접하고, 직선 BC와 점 H에서 접할 때, 원 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{HP}$의 최댓값은? [4점]



① $3\sqrt{3}-\frac{5}{2}$ ② $3\sqrt{3}-\frac{7}{2}$ ③ $3\sqrt{3}-\frac{9}{2}$ ④ $4\sqrt{3}-\frac{7}{2}$ ⑤ $4\sqrt{3}-\frac{9}{2}$

일단, $\overrightarrow{AC}$는 고정이고, $\overrightarrow{HP}$는 원 위를 움직이므로 크기, 방향 모두 고정되어 있지 않습니다.

따라서 $\overrightarrow{HP}=\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OP}$ 로 분해합니다. (원의 중심 이용)

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{HP} = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{HO}+\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{OP}$ **입니다.**

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{HO} = |\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{HO}|\cos\theta_1$**이며,** $|\overrightarrow{HO}|$**의 크기를 구해야 합니다.**

점 D를 지나는 직선은 원의 접선이므로 $\angle ODC$는 직각이며, $\overline{OD}=\overline{OH}$(반지름), $\overline{OC}$는 공통, $\angle ODC=\angle OHC$ (직각) 삼각형 ODC와 OHC는 합동!

$\angle DCH=120^\circ$ **인데, 합동이니까 이등분 돼서,** $\angle OCH=60^\circ$ **이다.**

$\overline{DC}=1$**이므로(**$\overline{AC}$ **2:1 내분점) 특수각 이용하면,** $\overline{HO}=\sqrt{3}$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{HO} = |\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{HO}|\cos\theta_1$ **->** $3\times\sqrt{3}\times\cos\frac{5}{6}\pi$

(두 벡터가 이루는 각 θ_1은 시점 H를 점 A로 이동하여 구합니다.)

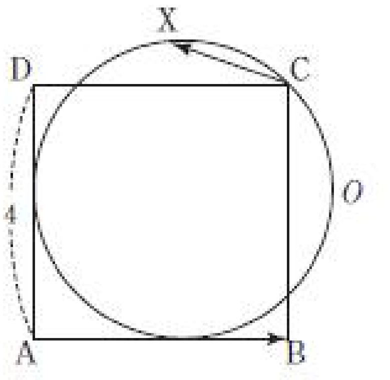
$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{OP} = |\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{OP}|\cos\theta_2$ -> $3 \times \sqrt{3} \times \cos\theta_2$

-> but 내적의 최대를 묻고 있으므로 평행일 때 가장 내적의 값이 커진다. $\cos\theta_2 = 1$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{HO} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{OP} = 3\sqrt{3} - \frac{9}{2}$ **답 3번**

2. 2015 B형 사관학교 29번

한 변의 길이가 4인 정사각형 $ABCD$에서 변 AB와 변 AD에 모두 접하고 점 C를 지나는 원을 O라 하자. 원 O 위를 움직이는 점 X에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CX}$의 내적 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CX}$의 최댓값은 $a - b\sqrt{2}$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (4점) (단, a와 b는 자연수이다.)



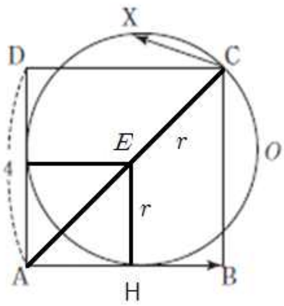
2번 문제 해설

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CX}$의 최댓값은 구하기 위해, 두 벡터를 관찰해보니, $\overrightarrow{AB}$는 크기 방향 모두 고정이며, $\overrightarrow{CX}$는 크기와 방향이 모두 고정되어 있지 않습니다.

$\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EX}$로 (원의 중심을 E 라고 할 때,) 분해합니다.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CX} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EX}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EX}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CE} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CE}|\cos\theta_1$ **를 구하기 위해 원의 반지름의 크기를 구해야 한다.**



$\overline{AC}$는 정사각형의 대각선이므로 $\angle EAH = 45^{\circ}$이며, $\overline{AE} = \sqrt{2}\,r$ $\sqrt{2}\,r + r = 4\sqrt{2}$이고 계산하면, $r = 8 - 4\sqrt{2}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CE} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CE}|\cos\theta_1$ -> $4 \times r \times \cos\frac{5\pi}{4}$

($\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{CE}$가 이루는 각은 $\overrightarrow{CE}$의 시점을 A로 오게 이동하면 $\frac{5\pi}{4}$)

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EX} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{EX}|\cos\theta_2$ -> $4 \times r \times \cos 0$ -> 두 벡터가 평행일 때 내적이 최대가 된다.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EX} = 48 - 32\sqrt{2}$

$a = 48, b = 32 \ \therefore a + b = 80$

답 80