06 확률분포

확률과 통계 교과서 Review

문제 1

혈압은 최고 혈압과 최저 혈압의 두 가지 수치로 나타내는데, 최고 혈압이 140 mmHg 이상이거나 최저 혈압이 90 mmHg 이상이면 고혈압이라고 한다. 어느 지역의 40대 주민의 혈압을 측정한 결과, 최고 혈압은 평균이 116 mmHg, 표준편차가 12 mmHg인 정규분포를 따른다고 한다. 이 지역의 40대 주민 중에서 최고 혈압이 고혈압의 범위에 속하는 사람은 약 몇 %인지 구하여라.

문제 2

어느 공장에서 생산되는 제품의 무게는 평균이 80 g, 표준편차가 2 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 제품의 무게가 76 g 이하이거나 84 g 이상인 것은 불량품으로 판정된다. 이 공장에서 생산된 10000개의 제품 중에서 불량품의 개수의 기댓값을 구하여라.

문제 3

어떤 시험 점수 X의 평균이 m, 표준편차가 σ일 때,

$$T=15\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)+50$$

을 표준 점수라고 한다. 시험 점수 65는 표준 점수 80으로 변환되었고, 시험 점수 60은 표준 점수 65로 변환되었을 때, 다음 물음에 답하여 보자.

(1) m과 σ를 각각 구하여라.

(2) T의 평균과 표준편차를 각각 구하여라.

(3) 지호의 시험 점수는 69이고, 선우의 표준 점수는 89라고 할 때, 누구의 성적이 더 높은지 말하여라.

문제 4

한 개의 주사위를 36번 던져서 짝수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 할 때, X의 평균, 분산, 표준편차를 각각 구하여라.

06 확률분포

확률과 통계 교과서 Review

문제 5

어느 소극장의 공연을 예약한 사람이 사전 통보 없이 오지 않을 확률이 10 %라고 한다. 이 소극장의 좌석 수가 60이고 62명이 예약하였을 때, 다음 물음에 답하여 보자.
(단, $0.9^{61}=0.0016$, $0.9^{62}=0.0015$로 계산한다.)

(1) 예약한 사람 중에서 공연을 보러 오는 사람의 수를 확률변수 X라고 할 때, X의 확률질량함수를 구하여라.

(2) 좌석이 부족하게 될 확률을 구하여라.

문제 6

어떤 종류의 음료수 캔 300개 각각에 들어 있는 내용물의 용량은 평균이 190 mL, 표준편차가 5 mL인 정규분포를 따른다고 한다. 다음 물음에 답하여라.
(1) 용량이 187 mL 이상 192 mL이하인 음료수 캔은 전체의 약 몇 %인지 구하여라.

(2) 용량이 193 mL 이상인 음료수 캔은 약 몇 개인지 구하여라.

문제 7

어느 과수원에서 생산된 포도 한 송이의 무게는 평균이 168.5 g, 표준편차가 5.5 g인 정규분포를 따른다고 한다. 포도 한 송이의 무게가 174 g 이상이면 특상품으로 분류될 때, 이 과수원에서 생산된 포도 10000송이 중 특상품으로 분류되는 송이 수의 기댓값을 구하여 보자.

문제 8

어느 고등학교 학생 1000명의 4 km 달리기 기록은 평균이 25분, 표준편차가 5분인 정규분포를 따른다고 한다. 다음 물음에 답하여라.
(1) 달리기 기록이 18분 이상 28분 이하인 학생은 전체의 약 몇 %인지 구하여라.

(2) 달리기 기록이 30분 이상인 학생은 약 몇 명인지 구하여라.

(3) 상위 25위 이내에 들기 위한 기록은 약 몇 분인지 구하여라.

06 확률분포

확률과 통계 교과서 Review

문제 9

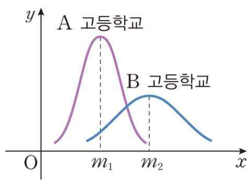
확률변수 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x)={}_{25}\mathrm{C}_x \cdot \dfrac{4^x}{5^{25}}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 25)$일 때, X의 분산 $\mathrm{V}(X)$의 값을 구하여라.

문제 10

세 수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $a=\sum_{x=0}^{8}{}_{8}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{8-x}$, $b=\sum_{x=0}^{8}x\cdot{}_{8}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{8-x}$, $c=\sum_{x=0}^{8}x^2\cdot{}_{8}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{8-x}$일 때, $100a+10b+c$의 값을 구하여라.

문제 11

학생 수가 서로 같은 두 고등학교 A, B의 수학 점수를 확률변수 $X_1,\ X_2$라고 할 때, $X_1,\ X_2$는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(m_1,\ {\sigma_1}^2)$, $\mathrm{N}(m_2,\ {\sigma_2}^2)$을 따른다. 이때 각각의 확률밀도함수의 그래프가 오른쪽 그림과 같다고 한다. 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?



| 보 기 |

ㄱ. $\mathrm{P}(X_1 \le m_1) < \mathrm{P}(X_2 \le m_2)$
ㄴ. B 고등학교의 수학 점수의 평균이 A 고등학교의 수학 점수의 평균보다 높다.
ㄷ. A 고등학교의 수학 점수가 B 고등학교의 수학 점수보다 더 고르다.

① ㄴ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제 12

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(2,\ 2^2)$을 따를 때, 확률 $\mathrm{P}(a-3 \le X \le a+1)$이 최대가 되도록 하는 a의 값을 구하여라.

06 확률분포

확률과 통계 교과서 Review

문제 13

어느 공장에서 생산하는 나사못의 인장 강도 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르고, 인장 강도가 80보다 작은 나사못은 불량품으로 처리한다. 또, 이 공장의 능력을 평가하는 공정능력지수 G는 다음과 같다.

$$G=\frac{m-80}{3\sigma}$$

이 공장에서 생산되는 나사못 10000개당 불량품이 35개일 때, $10G$의 값을 구하여라. (단, $G>0$)

문제 14

A는 이기면 7점을 얻고, 지면 2점을 잃는 게임을 하려고 한다. A가 이길 확률이 $\frac{1}{4}$이고, 각 게임의 결과는 서로 독립이라고 할 때, 게임을 1200번 한 결과 A의 점수가 435점 이상일 확률을 구하여라. (단, 비기는 경우는 없다.)

문제 15

어느 학교 학생들을 대상으로 실시한 적성 검사 점수는 평균이 70점이고, 표준편차가 6점인 정규분포를 따른다고 한다. 이때 상위 5% 이내에 속하는 학생의 적성 검사 점수는 최소한 몇 점 이상인지 구하는 풀이 과정과 답을 써라. (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.65)=0.45$이다.)

06 확률분포

확률과 통계 교과서 Review

〈정답 및 해설〉 확률과 통계 - 6단원. 확률분포

1. [정답] 약 2%

[풀이]

$\mathrm{P}(X \geq 140)=\mathrm{P}\left(\frac{X-116}{12} \geq \frac{140-116}{12}\right)$

$=\mathrm{P}(Z \geq 2)$

$=0.5-\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 2)$

$=0.5-0.4772=0.0228$

따라서 최고 혈압이 고혈압의 범위에 속하는 사람은 약 2 %이다.

2. [정답] 456

[풀이]

제품의 무게를 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(80,\ 2^2)$을 따르므로 불량품으로 판정될 확률은

$\mathrm{P}(X \leq 76$ 또는 $X \geq 84)$

$=1-\mathrm{P}(76 \leq X \leq 84)$

$=1-\mathrm{P}\left(\frac{76-80}{2} \leq \frac{X-80}{2} \leq \frac{84-80}{2}\right)$

$=1-\mathrm{P}(-2 \leq Z \leq 2)=1-2\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 2)=1-2\times 0.4772=0.0456$

따라서 불량품의 개수의 기댓값은

$10000\times 0.0456=456$

3. [정답] (1) $m=55,\ \sigma=5$ (2) 평균 : 50, 표준편차 : 15

(3) 지호의 성적이 더 높다.

[풀이]

(1) 시험 점수 65는 표준 점수 80으로 변환되었으므로

$80=15\left(\frac{65-m}{\sigma}\right)+50,\ \frac{65-m}{\sigma}=2$

$65-m=2\sigma$ …… ㉠

시험 점수 60은 표준 점수 65로 변환되었으므로

$65=15\left(\frac{60-m}{\sigma}\right)+50,\ \frac{60-m}{\sigma}=1$

$60-m=\sigma$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $m=55,\ \sigma=5$

(2) $T=15\left(\frac{X-55}{5}\right)+50=3X-115$이므로

$\mathrm{E}(T)=\mathrm{E}(3X-115)=3\mathrm{E}(X)-115$

$=3\times 55-115=50$

$\sigma(T)=\sigma(3X-115)=|3|\sigma(X)$

$=3\times 5=15$

따라서 T의 평균은 50, 표준편차는 15이다.

(3) $T=3X-115$를 이용하여 선우의 시험 점수 X를 구하면

$X=\frac{1}{3}(89+115)=68$

따라서 지호의 성적이 더 높다.

[다른 풀이]

(2) $\mathrm{E}(T)=\mathrm{E}\left(15\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)+50\right)=\frac{15}{\sigma}\mathrm{E}(X)-\frac{15}{\sigma}m+50=\frac{15}{\sigma}m-\frac{15}{\sigma}m+50=50$

$\sigma(T)=\sigma\left(15\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)+50\right)=\left|\frac{15}{\sigma}\right|\sigma(X)=\frac{15}{\sigma}\times\sigma=15$

4. [정답] $\mathrm{E}(X)=18$, $\mathrm{V}(X)=9$, $\sigma(X)=3$
[풀이]
확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(36,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로 X의 평균, 분산, 표준편차는
$\mathrm{E}(X)=18$, $\mathrm{V}(X)=9$, $\sigma(X)=3$

5. [정답] (1) $\mathrm{P}(X=x)={}_{62}\mathrm{C}_x(0.9)^x(0.1)^{62-x}\ (x=0,\ 1,\ \cdots,62)$
(2) 0.01142
[풀이]
(1) 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(62,\ 0.9)$를 따르므로 X의 확률질량함수는
$\mathrm{P}(X=x)={}_{62}\mathrm{C}_x(0.9)^x(0.1)^{62-x}$
$(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 62)$
(2) 예약한 62명 중에서 61명 이상 오게 되면 좌석이 부족하게 되므로 구하는 확률은
$\mathrm{P}(X\geq 61)=\mathrm{P}(X=61)+\mathrm{P}(X=62)$
$={}_{62}\mathrm{C}_{61}(0.9)^{61}(0.1)^1+{}_{62}\mathrm{C}_{62}(0.9)^{62}$
$=62\times 0.0016\times 0.1+1\times 0.0015$
$=0.01142$

6. [정답] (1) 38% (2) 82(개)
[풀이]
음료수 캔에 들어 있는 내용물의 용량을 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(190,\ 5^2)$을 따른다. 따라서 $Z=\frac{X-190}{5}$이라고 하면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
(1) $\mathrm{P}(187\leq X\leq 192)=\mathrm{P}\left(\frac{187-190}{5}\leq Z\leq \frac{192-190}{5}\right)$
$=\mathrm{P}(-0.6\leq Z\leq 0.4)$
$=\mathrm{P}(0\leq Z\leq 0.6)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 0.4)\qquad =0.2257+0.1554=0.3811$
따라서 용량이 187 mL 이상 192 mL이하인 음료수 캔은 전체의 약 38 %이다.
(2) $\mathrm{P}(X\geq 193)=\mathrm{P}\left(Z\geq \frac{193-190}{5}\right)=\mathrm{P}(Z\geq 0.6)$
$=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 0.6)$
$=0.5-0.2257=0.2743$
이때 $300\times 0.2743=82.29$이므로 용량이 193 mL 이상인 음료수 캔은 약 82개다.

7. [정답] 1587
[풀이]
포도 한 송이의 무게를 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(168.5,\ 5.5^2)$을 따른다. 임의로 택한 포도 한 송이의 무게가 174 g 이상일 확률은
$\mathrm{P}(X\geq 174)=\mathrm{P}\left(\frac{X-168.5}{5.5}\geq \frac{174-168.5}{5.5}\right)$
$=\mathrm{P}(Z\geq 1)=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)$
$=0.5-0.3413=0.1587$
한편, 포도 10000송이 중에서 한 송이의 무게가 174 g 이상인 포도의 송이 수를 확률변수 Y라고 하면 Y는 이항분포 $\mathrm{B}(10000,\ 0.1587)$을 따른다.
따라서 구하는 기댓값은
$10000\times 0.1587=1587$

8. [정답] (1) 약 64% (2) 약 159(명) (3) 약 15(분)
[풀이]
고등학교 학생의 4 km 달리기 기록을 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(25,\ 5^2)$을 따른다.
(1) $\mathrm{P}(18 \le X \le 28)$
$=\mathrm{P}\left(\frac{18-25}{5} \le \frac{X-25}{5} \le \frac{28-25}{5}\right)$
$=\mathrm{P}(-1.4 \le Z \le 0.6)$
$=\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.4)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 0.6)$
$=0.4192+0.2257$
$=0.6449$
따라서 달리기 기록이 18분 이상 28분 이하인 학생은 전체의 약 64 %이다.
(2) $\mathrm{P}(X \ge 30)=\mathrm{P}\left(\frac{X-25}{5} \ge \frac{30-25}{5}\right)$
$=\mathrm{P}(Z \ge 1)$
$=0.5-\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)$
$=0.5-0.3413=0.1587$
따라서 $1000 \times 0.1587=158.7$이므로 달리기 시간이 30분 이상인 학생은 약 159명이다.
(3) 상위 25위 이내에 들기 위한 기록을 a분이라고 하면

$$\mathrm{P}(X \le a)=\frac{25}{1000}=0.025$$
$$\mathrm{P}\left(Z \le \frac{a-25}{5}\right)=0.025$$
$$0.5-\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{25-a}{5}\right)=0.025$$

따라서

$$\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{25-a}{5}\right)=0.5-0.025$$
$$=0.475$$

그런데 $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.96)=0.475$이므로

$$\frac{25-a}{5}=1.96,\ a=15.2$$

따라서 상위 25위 이내에 들기 위한 기록은 약 15분이다.

9. [정답] 4
[풀이]

$$\mathrm{P}(X=x)={}_{25}\mathrm{C}_x \cdot \frac{4^x}{5^{25}}={}_{25}\mathrm{C}_x\left(\frac{4}{5}\right)^x\left(\frac{1}{5}\right)^{25-x}$$
$$(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 25)$$

이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(25,\ \frac{4}{5}\right)$를 따른다. 따라서

$$\mathrm{V}(X)=25 \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{5}=4$$

10. [정답] 158
[풀이]
확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(8,\ \frac{1}{2}\right)$을 따를 때, X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_8\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{8-x}$$
$$(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 8)$$

$$a=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^8=1$$

$$b=\mathrm{E}(X)=8\times\frac{1}{2}=4$$

$$c=\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2$$

$$=8\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+4^2=18$$

따라서

$$100a+10b+c=100+40+18=158$$

11. [정답] ④
[풀이]
ㄱ. $\mathrm{P}(X_1\le m_1)=\mathrm{P}(X_2\le m_2)=0.5$ (거짓)
ㄴ. $m_1<m_2$이므로 B 고등학교의 평균이 A 고등학교보다 높다. (참)
ㄷ. A 고등학교의 곡선이 B 고등학교보다 높고 뾰족하므로 ${\sigma_1}^2<{\sigma_2}^2$이다. 따라서 A 고등학교의 수학 점수가 B 고등학교의 수학점수보다 더 고르다. (참)
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

12. [정답] 3
[풀이]

$$\mathrm{P}(a-3\le X\le a+1)$$
$$=\mathrm{P}\left(\frac{a-5}{2}\le Z\le\frac{a-1}{2}\right)$$

이것이 최대가 되려면 $\frac{a-5}{2}$와 $\frac{a-1}{2}$이 직선 $Z=0$에 대하여 대칭이어야 한다.

즉, $\frac{a-5}{2}=-\frac{a-1}{2}$이므로 $a=3$

13. [정답] 9
[풀이]
$G=\frac{m-80}{3\sigma}$이므로 $m=80+3G\sigma$

$$\mathrm{P}(X<80)=\frac{35}{10000}=0.0035\text{이고}$$

$$\mathrm{P}(X<80)=\mathrm{P}\left(\frac{X-m}{\sigma}<\frac{80-(80+3G\sigma)}{\sigma}\right)$$

$=\mathrm{P}(Z<-3G)$
$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 3G)$
이므로 $0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 3G)=0.0035$

$$\mathrm{P}(0\le Z\le 3G)=0.4965$$

그런데 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2.7)=0.4965$이므로

$$3G=2.7,\ G=0.9$$

따라서 $10G=10\times0.9=9$이다.

14. [정답] $\frac{3}{5}$

[풀이]

A가 이긴 횟수를 X라고 하면, A가 진 횟수는

$1200-X$이므로 점수가 435점 이상이려면

$$7X-2(1200-X)\geq 435$$

$$9X\geq 2835, \qquad X\geq 315$$

이때 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(1200,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=1200\cdot\frac{1}{4}=300$$

$$\sigma(X)=\sqrt{1200\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}=15$$

즉 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(300,\ 15^2)$을 따르므로 확률변수 $Z=\frac{X-300}{15}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. 따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(X\geq 315)=\mathrm{P}(Z\geq 1)=\mathrm{P}(Z\geq 0)-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)$$

$=0.5-0.3413=0.1587$

15. [정답] 79.9점

[풀이]

적성 검사 점수를 X점이라고 하면, 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(70,\ 6^2)$을 따르므로 확률변수 $Z=\frac{X-70}{6}$은 표준정규분포

$\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

구하는 적성 검사 점수를 a점이라고 하면

$\mathrm{P}(X\geq a)\leq 0.05$이므로 $\quad \mathrm{P}\left(Z\geq\frac{a-70}{6}\right)\leq 0.05$

$$\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{a-70}{6}\right)\geq 0.45$$

이때 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.65)=0.45$이므로

$$\frac{a-70}{6}\geq 1.65, \qquad a-70\geq 9.9, \qquad a\geq 79.9$$

따라서 최소한 79.9점 이상이다.