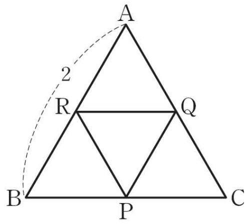
03 벡터의 뜻

기하와 벡터 교과서 Review

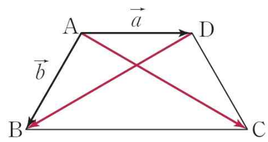
문제 1

오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC에서 세 점 P, Q, R는 각 변의 중점이다. 이때 6개의 점 A, B, C, P, Q, R 중 서로 다른 두 점을 시점과 종점으로 하는 벡터 중 서로 다른 단위벡터의 개수를 구하여라.



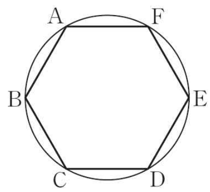
문제 2

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AD} /\!/ \overline{BC}$, $\overline{BC}=2\overline{AD}$인 사다리꼴 ABCD에서 $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$라고 할 때, $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내어라.



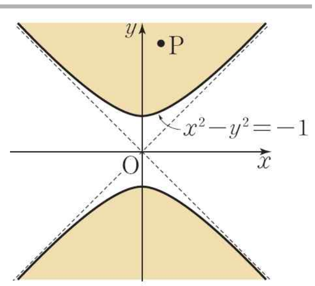
문제 3

오른쪽 그림과 같이 원에 내접하는 정육각형에서 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}|=12$일 때, 정육각형의 한 변의 길이를 구하여라.



문제 4

오른쪽 그림과 같이 색칠한 영역 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\vec{x}=\dfrac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|}$라고 하자. 이때 $\vec{x}$의 종점의 집합이 나타내는 도형의 길이를 구하여라.



03 벡터의 뜻

기하와 벡터 교과서 Review

문제 5

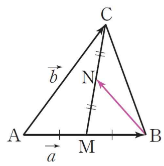
평면 위의 서로 다른 네 점 O, A, B, C에 대하여

$$\overrightarrow{OA}=2\vec{a}+\vec{b},\ \overrightarrow{OB}=\vec{a}-\vec{b},\ \overrightarrow{OC}=k\vec{a}+3\vec{b}$$

일 때, 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있도록 하는 실수 k의 값을 구하여라.
(단, 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 영벡터가 아니고 서로 평행하지 않다.)

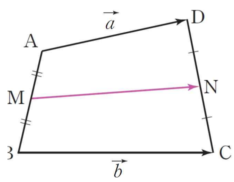
문제 6

오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABC에서 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$라 하고, $\overline{AB}$의 중점을 M, $\overline{CM}$의 중점을 N이라고 하자. 이때 벡터 $\overrightarrow{BN}$을 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내어라.



문제 7

다음 그림과 같은 사각형 ABCD에서 두 변 AB, CD의 중점을 각각 M, N이라 하고 $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$라고 할 때, 벡터 $\overrightarrow{MN}$을 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내어라.



문제 8

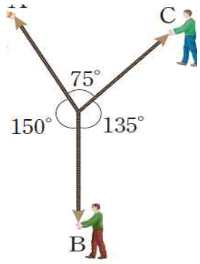
원 $(x-4)^2+y^2=2^2$ 위의 한 점 P에 대하여 원점이 O, $\overrightarrow{OQ}=\dfrac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|}$일 때, 점 Q의 자취가 나타내는 도형의 길이를 구하여라.

03 벡터의 뜻

기하와 벡터 교과서 Review

문제 9

오른쪽 그림과 같이 세 학생 A, B, C가 세 갈래로 연결된 줄의 한쪽 끝을 각각 잡아당기는 줄다리기를 하고 있다. 줄다리기를 시작하고 잠시 뒤 A와 B가 잡아당기는 두 줄이 이루는 각의 크기가 $150°$, B와 C가 잡아당기는 두 줄이 이루는 각의 크기가 $135°$, A와 C가 잡아당기는 두 줄이 이루는 각의 크기가 $75°$가 된 채로 유지되고 있다. A, B, C가 줄을 당기는 힘의 크기가 각각 a N, b N, c N이라고 할 때, a, b, c 사이의 관계식을 구하여라.



문제 10

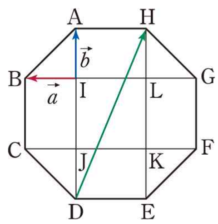
서로 평행하지 않고 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{p}$, $\vec{q}$가 있다. 다음 세 벡터

$$\vec{a}=\vec{p}+\vec{q},\quad \vec{b}=2\vec{p}-3\vec{q},\quad \vec{c}=4\vec{p}+t\vec{q}$$

에 대하여 $\vec{a}+\vec{b}$와 $\vec{b}+\vec{c}$가 서로 평행이 되도록 하는 실수 t의 값을 구하여라.

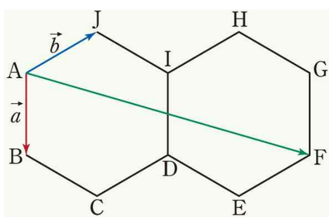
문제 11

오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인 정팔각형 ABCDEFGH에서 네 대각선 AD, HE, BG, CF의 교점을 각각 I, J, K, L이라고 하자. $\vec{a}=\overrightarrow{IB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{IA}$라고 할 때, 벡터 $\overrightarrow{DH}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내어라.



문제 12

오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 두 개의 정육각형이 한 변을 공유하며 평면 위에 놓여 있다. $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AJ}$라고 할 때, 벡터 $\overrightarrow{AF}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내어라.



03 벡터의 뜻

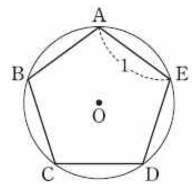
기하와 벡터 교과서 Review

문제 13

오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정오각형이 원 O에 내접할 때, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$라고 한다. 이때

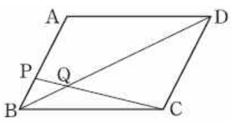
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{OA}$$

를 만족시키는 실수 k의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 써라.



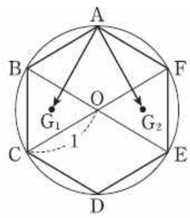
문제 14

오른쪽 평행사변형 ABCD에서 점 P는 변 AB를 $2:1$로 내분하고 점 Q는 대각선 BD를 $1:3$으로 내분한다. 이때 $\overrightarrow{QC}=k\overrightarrow{PQ}$를 만족시키는 실수 k의 값을 구하여라.



문제 15

오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원 O에 내접하는 정육각형 이 있다. 두 삼각형 OBC와 OEF의 무게중심을 각각 G_1, G_2라고 할 때, $\overrightarrow{AG_1}\cdot\overrightarrow{AG_2}$를 구하는 풀이 과정과 답을 써라.



03 벡터의 뜻

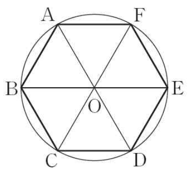
기하와 벡터 교과서 Review

〈정답 및 해설〉 기하와 벡터 – 3단원. 벡터의 뜻

1. 6

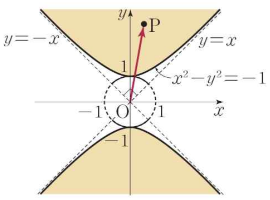
2.
$\vec{a}+2\vec{b}$

3.
정육각형 ABCDEF에서 세 대각선의 교점을 O라고 하면



$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AO}$
$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AO}$
$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AO}$ 이므로
$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}|$
$=|6\overrightarrow{AO}|=12$
$|\overrightarrow{AO}|=2$이므로 정육각형의 한 변의 길이는 2이다.

4.
$\vec{x}$의 종점을 A라고 하면 $\overrightarrow{OA}$는 $\overrightarrow{OP}$와 방향은 같고 크기가 1인 벡터이다.



쌍곡선 $x^2-y^2=-1$의 점근선의 방정식은 $y=\pm x$이므로 점A는 y축을 기준으로 $\pm\frac{\pi}{4}$만큼의 범위에서 움직인다.

따라서 구하는 도형의 길이는 $\frac{1}{2}\times 2\pi=\pi$

5.
$\overrightarrow{AB}=-\vec{a}-2\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=(k-2)\vec{a}+2\vec{b}$
세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면
$(k-2)\vec{a}+2\vec{b}=t(-\vec{a}-2\vec{b})=-t\vec{a}-2t\vec{b}$
두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 서로 평행하지 않으므로
$k-2=-t$, $2=-2t$
따라서 $t=-1$이므로 구하는 실수 k의 값은 3이다.

6.
$\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$이므로

$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MC}=-\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

따라서 $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MB}$

$=-\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

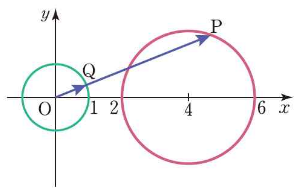
7.
$\overrightarrow{AB}=\vec{c}$라고 하면

$$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$$
$$=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$$

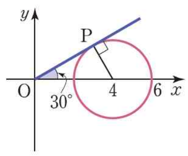
따라서 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}$

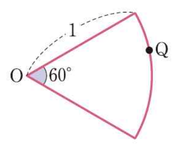
$$=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN})-\overrightarrow{AM}$$
$$=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$
$$=\vec{a}+\frac{1}{2}(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-\frac{1}{2}\vec{c}$$
$$=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$$

8. $\overrightarrow{OQ}=\dfrac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|}$ 는 $\overrightarrow{OP}$ 방향으로의 단위벡터를 의미한다.



따라서 점 Q는 단위원에서 움직이는 점이고 아래 왼쪽 그림과 같이 점 P가 접점일 때, $\overrightarrow{OP}$가 x축과 이루는 각의 크기가 30° 이므로 $\overrightarrow{OP}$가 x축과 이루는 각의 크기 θ는 $-30^\circ\le\theta\le30^\circ$를 만족한다.

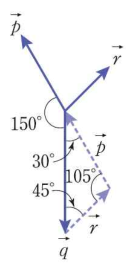




위의 오른쪽 그림과 같이 점 Q는 중심각의 크기가 60° 인 8. 부채꼴의 호 위를 움직이므로 구하는 도형의 길이는

$2\pi\times\frac{1}{6}=\frac{\pi}{3}$

9.
. A, B, C 세 학생이 줄을 잡아당기는 힘을 나타내는 벡터를 각각 $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$라고 하면



$\vec{p}+\vec{q}+\vec{r}=\vec{0}$
세 벡터는 오른쪽 그림과 같이 나타낼 수 있다.
즉,

$b=a\cos30^\circ+c\cos45^\circ$

이므로

$b=\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{\sqrt{2}}{2}c$

03 벡터의 뜻

기하와 벡터 교과서 Review

10.

$\vec{a}+\vec{b}=3\vec{p}-2\vec{q}$, $\vec{b}+\vec{c}=6\vec{p}+(t-3)\vec{q}$이다.

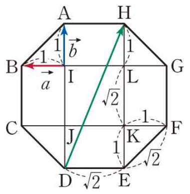
$\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{b}+\vec{c}$가 서로 평행하므로 어떤 실수 k에 대하여

$k(\vec{a}+\vec{b})=\vec{b}+\vec{c}$가 성립한다.

따라서 $k=2$이고 $t-3=-4$에서 $t=-1$

11. 다음 그림에서

$\overrightarrow{DE}=-\sqrt{2}\vec{a}$, $\overrightarrow{EH}=(2+\sqrt{2})\vec{b}$



따라서

$\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EH}$

$=-\sqrt{2}\vec{a}+(2+\sqrt{2})\vec{b}$

답 $-\sqrt{2}\vec{a}+(2+\sqrt{2})\vec{b}$

12. $\overrightarrow{AF}=3\vec{a}+4\vec{b}$

13. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$

$=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$

$+(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OA})$

$=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}-4\overrightarrow{OA}$

이때 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$에서

$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=-\overrightarrow{OA}$

이므로

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=-5\overrightarrow{OA}$

$k=-5$

14. $\overrightarrow{QC}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BQ}$

$=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BQ}$

$=4\overrightarrow{BQ}-3\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BQ}$

$=3(\overrightarrow{BQ}-\overrightarrow{BP})$

$=3\overrightarrow{PQ}$

$k=\mathbf{3}$

15. $\overline{AG_1}$과 $\overline{BO}$의 교점을 M이라고 하면

$\overline{AM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

이므로

$\overline{MG_1}=\dfrac{1}{3}\overline{AM}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

$|\overrightarrow{AG_1}|=\overline{AM}+\overline{MG_1}$

$=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

같은 방법으로 하면

$|\overrightarrow{AG_2}|=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$\angle G_1AG_2=\dfrac{\pi}{3}$이므로

$\overrightarrow{AG_1}\cdot\overrightarrow{AG_2}=|\overrightarrow{AG_1}||\overrightarrow{AG_2}|\cos\dfrac{\pi}{3}$

$=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{2}{3}$