

05 등차수열과 등비수열

수학II 교과서 Review

문제 1

이차방정식 $3x^2 - 6x + 1 = 0$ 의 두 실근을 α, β 라고 할 때 $\frac{1}{\alpha^3}, \frac{1}{p}, \frac{1}{\beta^3}$ 이 이 순서대로 등차수열을 이루도록 하는 실수 p 의 값은?

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{9}$ ③ $\frac{1}{27}$ ④ $\frac{1}{81}$ ⑤ $\frac{1}{243}$

문제 2

삼차방정식 $x^3 - 9x^2 + 2x - k = 0$ 의 세 실근이 등차수열을 이룰 때, 상수 k 의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 써라.

문제 3

오른쪽 그림과 같이 곡선 $y = px^2 - 1 (p > 0)$ 과 직선 $y = k$ 의 교점을 각각 $P(-\alpha, k), Q(\alpha, k)$ 라 하고, 이 곡선이 x 축과 만나는 점을 각각 $A(-\beta, 0), B(\beta, 0)$ 이라고 하자. 네 수 $-\alpha, -\beta, \beta, \alpha$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루도록 하는 양수 k 의 값을 구하여라. (단, $\alpha > 0, \beta > 0$)

문제 4

다음 수열의 첫째항부터 제10항까지의 합 S_{10} 을 구하여라.

$$2 + \frac{1}{2}, 4 + \frac{1}{4}, 6 + \frac{1}{8}, 8 + \frac{1}{16}, \dots$$

문제 5

두 자리의 자연수 중에서 3의 배수 또는 5의 배수인 수의 합을 구하여라.

05 등차수열과 등비수열

수학II 교과서 Review

문제 6

-5와 15 사이에 n 개의 수를 넣어서 전체가 등차수열을 이루고 그 합이 100이 되게 하려고 한다. 자연수 n 의 값을 구하여라.

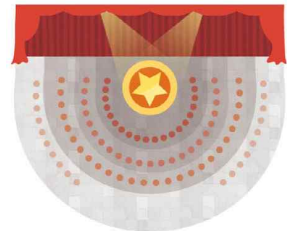
문제 7

첫째항이 -20, 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_{20}|$ 의 값은?

- ① 0 ② 17 ③ 34 ④ 170 ⑤ 324

문제 8

어느 공연장 관중석의 좌석 배열은 오른쪽 그림과 같이 원형 무대를 중심으로 반원형으로 되어 있다. 이 공연장의 좌석은 첫째 줄이 20석, 둘째 줄이 23석, 셋째 줄이 26석으로 매 줄마다 3좌석씩 늘어난다. 회원이 36명인 어느 동아리에서 이 공연장의 공연 관람을 위해 예매를 하려고 한다. 무대에 최대한 가까우면서도 모든 동아리 회원이 같은 줄에 앉을 수 있는 좌석을 예매하려고 할 때, 몇째 줄을 예매해야 하는지 구하여라. (단, 좌석 줄의 수는 충분하다.)



문제 9

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 할 때, $S_{10} = 33S_5$ 가 성립한다. $\frac{a_{16}}{a_{10}}$ 의 값을 구하여라.

05 등차수열과 등비수열

수학II 교과서 Review

문제 10

이차방정식 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, α, β 의 등차중항과 등비중항을 두 근으로 하는 x^2 항의 계수가 1인 이차방정식을 구하여라.

문제 11

등비수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항이 양수이고 $a_3 \times a_9 = 9$ 일 때, 첫째항부터 제11항까지의 곱 $a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_{10} \times a_{11}$ 의 값은?

- ① 3^8 ② 3^9 ③ 3^{10} ④ 3^{11} ⑤ 3^{12}

문제 12

두 곡선 $y = 3x^3 + 2x^2 - 6x - k$, $y = -5x^2 + x$ 가 서로 다른 세 점에서 만나고 교점의 x 좌표가 등비수열을 이룰 때, 실수 k 의 값을 구하면?

문제 13

첫째항부터 제5항까지의 합이 2, 첫째항부터 제10항까지의 합이 14인 등비수열의 첫째항부터 제15항까지의 합을 구하여라. (단, 공비는 실수)

05 등차수열과 등비수열

수학II 교과서 Review

문제 14

2 이상의 자연수 n 에 대하여 x^n 을 $x^2 - 4$ 로 나눈 나머지를 $a_n x + b_n$ 이라고 할 때,

$$2(a_2 + a_3 + \dots + a_{2014}) + (b_2 + b_3 + \dots + b_{2014})$$
의 값을 구하여라.

문제 15

철민이는 올해 7월 초에 노트북을 할부로 구입한 후 7월부터 매일 말에 9만 원씩 20 회에 걸쳐 갚기로 하였다. 월 이율이 2%이고 1개월마다의 복리로 계산할 때, 구입 시에 노트북의 값을 일시불로 치른다면 얼마를 지불해야 하는지 구하여라. (단, $1.02^{20} = 1.5$ 로 계산한다.)

문제 16

2014년 초 어느 아파트의 가격은 2억 원이고, 전년도에 비해 매년 4%씩 상승한다고 한다. 철수가 이 아파트를 사기로 계획하고, 2014년 초에 a 원을 예금하고 다음 해부터 2023년까지 매년 초에 전년도보다 10% 적은 금액을 은행에 예금하기로 하였다. 철수가 10년 동안 예금한 금액의 2024년 초 원리합계와 그때의 아파트 가격이 같기 위한 a 의 값을 구하여라. (단, 예금의 연이율은 4% 복리이며, $\left(\frac{0.9}{1.04}\right)^{10} = 0.2$ 로 계산한다.)

문제 17

이달 초에 50만 원짜리 캠핑 용품을 구입하는 데 계약금 5만 원을 내고, 나머지는 이달 말부터 매달 일정한 금액을 12개월에 걸쳐 갚기로 하였다. 매달 얼마씩 갚아야 하는지 구하여라. (단, 월이율 1%의 복리, $1.01^{12} = 1.13$ 으로 계산하여 십의 자리에서 버림한다.)

05 등차수열과 등비수열

수학II 교과서 Review

〈정답 및 해설〉

1. ④
2. 삼차방정식 $x^3 - 9x^2 + 2x - k = 0$ 의 세 실근을 $a-d, a, a+d$ 라고 하면
 $x^3 - 9x^2 + 2x - k = (x - (a-d))(x-a)(x - (a+d))$
 $= x^3 - \{(a-d) + a + (a+d)\}x^2 + \{(a-d)a + a(a+d) + (a-d)(a+d)\}x - (a-d)a(a+d)$
 항등식의 성질을 이용하여 양변의 계수를 비교하면
 $(a-d) + a + (a+d) = 9 \quad \dots \textcircled{A}$
 $(a-d)a + a(a+d) + (a-d)(a+d) = 2 \quad \dots \textcircled{B}$
 $(a-d)a(a+d) = k \quad \dots \textcircled{C}$
 \textcircled{A} 에서 $3a = 9, a = 3$
 $a = 3$ 을 \textcircled{B} 에 대입하면
 $(3-d) \cdot 3 + 3(3+d) + (3-d)(3+d) = 2$
 $d^2 = 25, d = \pm 5$
 따라서 $a = 3$ 과 $d = 5$ 또는 $d = -5$ 를 \textcircled{C} 에 대입하면
 $k = -2 \cdot 3 \cdot 8 = -48$
3. 8
4. $111 - \frac{1}{2^{10}}$
5. 3의 배수의 합은
 $12 + 15 + \dots + 99 = 1665$
 5의 배수의 합은
 $10 + 15 + \dots + 95 = 945$
 15의 배수의 합은
 $15 + 30 + \dots + 90 = 315$
 따라서 구하는 합은
 $1665 + 945 - 315 = 2295$
6. 18
7. ⑤
8. 일곱째 줄
9. 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면
 $S_{10} = 33S_5$ 에서
 $\frac{a(1-r^{10})}{1-r} = \frac{33a(1-r^5)}{1-r}$
 $\frac{a(1+r^5)(1-r^5)}{1-r} = \frac{33a(1-r^5)}{1-r}$
 $1+r^5 = 33$ 이므로 $r^5 = 32, r = 2$
 따라서 $\frac{a_{16}}{a_{10}} = \frac{a \times r^{15}}{a \times r^9} = r^6 = 2^6 = 64$
10. 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = 1$ 이므로 두 수 α, β 의 등차중항과 등비중항은
 $\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{3}{2}, \pm \sqrt{\alpha\beta} = \pm \sqrt{1} = \pm 1$
 따라서 구하는 이차방정식은
 $x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = 0$ 또는 $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = 0$
11. ④
 수열 $\{a_n\}$ 이 등비수열이므로 등비중항을 이용하면
 $a_6^2 = a_5 \times a_7 = a_4 \times a_8 = a_3 \times a_9$
 $= a_2 \times a_{10} = a_1 \times a_{11} = 9$
 모든 항이 양수이므로 $a_6 = 3$
 따라서 $a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_{10} \times a_{11} = (3^2)^5 \times 3 = 3^{11}$

12. 주어진 두 곡선의 교점의 x 좌표는 방정식
 $3x^3 + 2x^2 - 6x - k = -5x^2 + x$, 즉 $3x^3 + 7x^2 - 7x - k = 0$ 의 세 실근이다. ▶ 20%
 $3x^3 + 7x^2 - 7x - k = 0$ 의 양변을 3으로 나누면
 $x^3 + \frac{7}{3}x^2 - \frac{7}{3}x - \frac{k}{3} = 0$
 이 방정식의 세 실근을 a, ar, ar^2 이라고 하면
 $x^3 + \frac{7}{3}x^2 - \frac{7}{3}x - \frac{k}{3} = (x-a)(x-ar)(x-ar^2)$
 $= x^3 - (a+ar+ar^2)x^2 + (a \cdot ar + ar \cdot ar^2 + ar^2 \cdot a)x - a \cdot ar \cdot ar^2$
 항등식의 성질을 이용하여 양변의 계수를 비교하면
 $a + ar + ar^2 = -\frac{7}{3} \quad \dots \textcircled{A}$
 $a \cdot ar + ar \cdot ar^2 + ar^2 \cdot a = -\frac{7}{3}$
 $ar(a + ar + ar^2) = -\frac{7}{3} \quad \dots \textcircled{B}$
 $a \cdot ar \cdot ar^2 = \frac{k}{3} \quad \dots \textcircled{C}$
 \textcircled{A} 을 \textcircled{B} 에 대입하면
 $ar = 1$ ▶ 60%
 \textcircled{C} 에서 $(ar)^3 = \frac{k}{3}$ 이므로
 $1^3 = \frac{k}{3}, k = 3$ ▶ 20%
13. 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면
 $S_5 = \frac{a(1-r^5)}{1-r} = 2$
 $S_{10} = \frac{a(1-r^{10})}{1-r} = \frac{a(1-r^5)(1+r^5)}{1-r} = 14$
 즉, $r^5 = 6$
 따라서 첫째항부터 제15항까지의 합 S_{15} 는
 $S_{15} = \frac{a(1-r^{15})}{1-r}$
 $= \frac{a(1-r^5)}{1-r} \cdot \{1+r^5+(r^5)^2\}$
 $= 86$
14. x^n 을 $x^2 - 4$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$ 라고 하면
 $x^n = (x^2 - 4)Q(x) + a_nx + b_n$
 $x = 2$ 를 대입하면
 $2^n = 2a_n + b_n$
 따라서 $2a_n + b_n = 2^n$ 이므로
 $2(a_2 + a_3 + \dots + a_{2014}) + (b_2 + b_3 + \dots + b_{2014})$
 $= (2a_2 + b_2) + (2a_3 + b_3) + \dots + (2a_{2014} + b_{2014})$
 $= 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2014}$
 $= 4(2^{2013} - 1)$
15. 구입 시에 일시불로 지불할 금액을 a 만 원이라고 하면
 a 만 원의 20개월 후의 원리합계는
 $a \times 1.02^{20} = 1.5a$ (만 원)
 매월 말에 9만 원씩 갚는 금액의 20개월 후의 원리합계는
 $9 + 9 \times 1.02 + \dots + 9 \times 1.02^{19}$
 $= \frac{9(1.02^{20} - 1)}{1.02 - 1}$
 $= 225$ (만 원)
 $1.5a = 225$ 에서 $a = 150$
 따라서 150만 원을 지불해야 한다.

05 등차수열과 등비수열

수학II 교과서 Review

16. 2024년 초 아파트의 가격은 $2 \times 10^8 \times 1.04^{10}$ (원)
 신혼부부가 10년 동안 예금한 금액의 2024년 초의 원리합계는

$$\begin{aligned} & (a \times 1.04^{10}) + (a \times 0.9 \times 1.04^9) + \\ & \dots + (a \times 0.9^8 \times 1.04^2) + (a \times 0.9^9 \times 1.04) \\ &= \frac{a \times 1.04^{10} \times \left\{ 1 - \left(\frac{0.9}{1.04} \right)^{10} \right\}}{1 - \frac{0.9}{1.04}} \\ &= a \times 1.04^{10} \times \frac{208}{35} \text{ (원)} \end{aligned}$$

$$2 \times 10^8 \times 1.04^{10} = a \times 1.04^{10} \times \frac{208}{35} \text{ 이므로}$$

$$a = \frac{35}{104} \times 10^8$$

17. 45만 원의 12개월 후의 원리합계는

$$450000(1 + 0.01)^{12} \dots\dots \textcircled{A}$$

이달 말부터 a 원씩 갚는다고 하면 12개월 후의 적립금의 원리합계는

$$\begin{aligned} & a + a \times 1.01 + a \times 1.01^2 + \dots + a \times 1.01^{11} \\ &= \frac{a(1.01^{12} - 1)}{1.01 - 1} \dots\dots \textcircled{B} \end{aligned}$$

\textcircled{A} 과 \textcircled{B} 이 같아야 하므로

$$\frac{a(1.01^{12} - 1)}{1.01 - 1} = 450000 \times 1.01^{12}$$

$$\frac{a(1.13 - 1)}{1.01 - 1} = 450000 \times 1.13$$

$$13a = 508500$$

$$a = 39115.38 \dots$$

따라서 매달 39100원씩 갚아야 한다.