이차함수 그래프 자작문제

문제

이차함수 $f(x) = x^2$와 이차함수 $g(x)$에 대하여 직선 $y = 2x + k$가 $y = f(x)$의 그래프와 만나는 서로 다른 교점의 개수를 $h(k)$, $y = 2x + k$가 $y = g(x)$의 그래프와 만나는 서로 다른 교점의 개수를 $i(k)$라 할 때 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 k에 대하여 $h(k) + i(k)$의 값이 항상 일정하다.
(나) $g(x)$의 최고차항의 계수의 절댓값은 3이다.
(다) $g(x)$의 일차항의 계수는 음수이다.
(라) $g(1) = -11$이다

$g(-3)$의 값은?

해설

주요 개념

- 이차함수와 직선의 위치관계

풀이

$m = 2$일 때, 일정한 $h(k) + i(k)$의 값을 n이라 하자. 직선과 이차함수의 그래프가 만나는 서로 다른 교점의 개수는 0, 1, 2가 될 수 있고, k 값이 변함에 따라 교점의 개수는 0, 1, 2를 모두 거치게 된다. 즉 교점의 개수가 2인 상황이 반드시 존재하므로 $2 \leq n \leq 4$이다.

i) $n = 2$
$h(k) = 2$일 때는 $i(k) = 0$, $h(k) = 1$일 때는 $i(k) = 1$, $h(k) = 0$일 때는 $i(k) = 2$여야 하므로, $f(x)$와 $g(x)$의 공통접선이 존재하고 그 기울기가 2이며, $g(x)$의 최고차항의 계수가 음수임을 알 수 있다.
따라서 $g(x) = -3x^2 + ax + b$로 두자.

또한, 판별식을 이용하여 $y = 2x + k$와 $y = f(x)$의 그래프가 접할 때의 k의 값은 -1임을 알 수 있다.
$y = 2x - 1$과 $y = g(x)$가 접하므로

$$-3x^2 + ax + b = 2x - 1$$

$$3x^2 + (2-a)x - b - 1 = 0$$

$$\begin{aligned} D &= (2-a)^2 + 12(b+1) \\ &= a^2 - 4a + 12b + 16 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$g(1) = -3 + a + b = -11$이므로 $b = -a - 8$
위 식에 대입하면

$$a^2 - 16a - 80 = 0$$

$$(a+4)(a-20) = 0$$

$a < 0$이므로 $a = -4$, $b = -4$
$g(x) = 3x^2 - 4x - 4$
$\therefore g(-3) = -27 + 12 - 4 = -19$

ii) $n = 3$
$h(k) = 2$일 때는 $i(k) = 1$, $h(k) = 1$일 때는 $i(k) = 2$, $h(k) = 0$일 때는 $i(k) = 3$여야 하지만
$0 \le i(k) \le 2$이므로 모순
iii) n =4
$h(k) = 2$일 때는 $i(k) = 2$, $h(k) = 1$일 때는 $i(k) = 3$, $h(k) = 0$일 때는 $i(k) = 4$여야 하지만
$0 \le i(k) \le 2$이므로 모순

따라서 $g(-3) = -19$이다.