[고려대학교 문항정보]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	모의논술	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 1~4번	
출제 범위	교육과정 과목명	수학 I, 수학 II, 미적분, 확률과 통계, 기하
	핵심개념 및 용어	미분, 적분, 기하, 조건부확률
예상 소요 시간	80분	

2. 문항 및 제시문

문항 1. 다음 글을 읽고 물음에 답하시오. (35점)

함수 $\sigma(x)$는 다음과 같다.

$$\sigma(x)=\begin{cases} x & (x \geq 0) \\ 0 & (x<0) \end{cases}$$

1-1) $b \leq c$인 두 실수 b, c에 대하여 $g(x)=-\sigma(-x+b)+1$, $h(x)=-\sigma(x-c)+2$라 하자.

$$f(x)=\sigma(g(x))+\sigma(h(x))$$

일 때, 함수 $f(x)$가 세 점에서만 미분불가능이 되도록 하는 b와 c의 관계를 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)

1-2) 함수 $g(x)=-\sigma(-x-1)+1$에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=(x-a)(x-b)[\sigma(g(x))+\sigma(g(-x))-1]$$

이다. $f(x)$가 두 점에서만 미분불가능하고, $f(0)>0$인 순서쌍 (a,b)를 모두 구하고, 그 이유를 설명하시오. (단 a, b는 실수이다.) (15점)

1-3) 함수 $g(x)=-\sigma(-x-1)+1$에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\sigma(g(x))+\sigma(g(-x))-1$$

이다. 두 실수 a, b에 대하여 직선 $y=ax+b$가 $y=f(x)$의 그래프와 세 점에서 만나기 위한 순서쌍 (a,b)가 평면에서 차지하는 영역의 면적을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)

문항 2. 다음 글을 읽고 물음에 답하시오. (35점)

> $f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$은 다음 조건들을 만족하는 삼차 다항함수이다.
> (가) p, q, r은 정수이고 p는 0이 아니다.
> (나) $y = f(x)$의 변곡점에서 접선의 방정식은 $y = -x$이다.

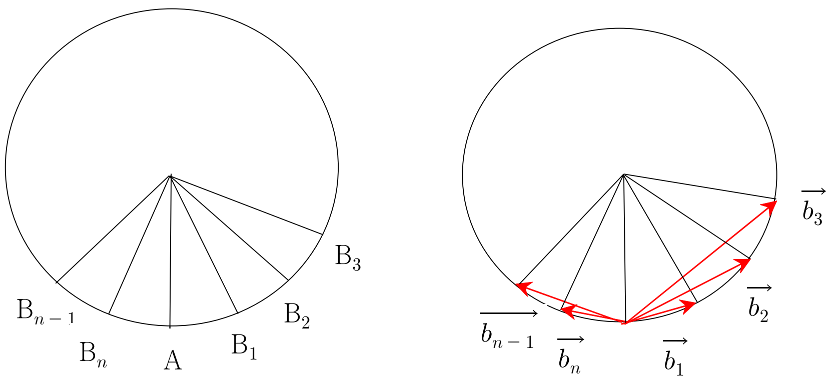
2-1) pqr이 최솟값을 가지는 $f(x)$를 모두 찾고, 그 이유를 설명하시오. (15점)

2-2) $\lim_{p \to \infty} \frac{pq}{r}$의 값을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (5점)

2-3) 점 $(-3,0)$을 지나고 곡선 $y = f(x)$에 접하는 직선이 3개가 되도록 하는 자연수 p의 값을 모두 찾고, 그 이유를 설명하시오. (15점)

문항 3. 다음 글을 읽고 물음에 답하시오. (15점)

> 그림과 같이 반경이 1인 원 위에 $\overline{AB_1} = \overline{B_1B_2} = \overline{B_2B_3} = \cdots = \overline{B_{n-1}B_n} = \overline{B_nA}$를 만족시키는 n개의 점 $B_1, B_2, \cdots, B_n$이 순서대로 놓여있다. 벡터 $\overrightarrow{b_i} = \overrightarrow{AB_i}$ $(1 \le i \le n)$라 하자.



3-1) $n = 7$일 때, 내적 $\overrightarrow{b_2} \cdot \overrightarrow{b_5}$의 값을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (6점)

3-2) 다음 극한값을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (9점)

$$\lim_{n \to \infty} \overrightarrow{b_1} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{b_i} \right)$$

문항 4. 다음 글을 읽고 물음에 답하시오. (15점)

상금 당첨 행사에서 진홍색 공 4개와 파란색 공 5개가 든 상자가 준비되어 있다. 네 번의 공을 뽑을 기회가 주어진다. 뽑은 공은 다시 상자에 넣지 않는다.

4-1) 네 번째 기회에서 진홍색 공을 뽑을 확률을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (6점)

4-2) 첫 번째 기회에서 진홍색 공을 뽑는 경우 100만 원, 네 번째 기회에서 진홍색 공을 뽑는 경우 200만 원의 상금을 준다. 상자에서 공을 네 번 뽑았을 때 얻게 되는 총상금액을 확률변수 X라고 하자. 이때 X의 기댓값을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (예를 들어, 첫 번째와 네 번째 기회 둘 다 진홍색 공을 뽑으면 상금은 300만 원이다.) (9점)

3. 출제 의도

- 주어진 조건이 의미하는 바를 정확히 이해하고 주어진 조건을 활용하여 물음에 대한 답을 논리적으로 설명할 수 있는 능력을 평가하고자 함
- 문항이 의도한 바를 정확하게 이해하고 주장에 대한 근거를 합리적으로 추론할 수 있는 능력을 평가하고자 함
- 함수의 극한, 접선의 방정식, 함수의 그래프 등을 종합적으로 활용하여 주어진 문제를 논리적으로 해결하는 능력을 평가하고자 함
- 벡터의 의미, 벡터의 내적, 삼각함수의 덧셈정리 등을 종합적으로 활용하여 주어진 문제를 논리적으로 해결하는 능력을 평가하고자 함
- 정적분과 급수 사이의 관계를 이해하고 활용하여 문제를 논리적으로 해결하는 능력을 평가하고자 함
- 확률과 기댓값의 의미를 정확히 이해하고, 확률과 기댓값을 구하는 과정을 평가하고자 함

4. 출제 근거

가) 교육과정 근거

적용 교육과정	1. 교육부 고시 제2020-236호 [별책8] "수학과 교육과정"
관련 성취기준	1. 교과명: 수학

과목명: 수학 I		관련
성취기준	(2) 삼각함수 [12수학 I 02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.	문항 3

과목명: 수학 II		관련
성취 기준	(1) 함수의 극한과 연속 [12수학 II 01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.	문항 2 2-2)
	(2) 미분 [12수학Ⅱ02-03] 미분가능성과 연속성의 관계를 이해한다. [12수학 II 02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다. [12수학 II 02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12수학 II 02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.	문항 1 문항 2 2-3)

과목명: 미적분		관련
성취 기준	(2) 미분법 [12미적 02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다. [12미적 02-04] 삼각함수의 극한을 구할 수 있다. [12미적 02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다. [12미적 02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.	문항 2 나), 2-3) 문항 3
	(3) 적분법 [12미적03-04] 정적분과 급수의 합 상이의 관계를 이해한다.	문항 3 3-2)

과목명: 확률과 통계		관련
성취 기준	(2) 확률 [12확통02-03] 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12확통03-02] 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할수 있다.	문항 4

과목명: 기하		관련
성취 기준	(2) 평면벡터 [12기하 02-01] 벡터의 뜻을 안다. [12기하 02-02] 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있다. [12기하 02-03] 위치벡터의 뜻을 알고, 평면벡터와 좌표의 대응을 이해한다. [12기하 02-04] 벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.	문항 3

나) 자료 출처

교과서 내						
도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련 자료	재구성 여부
수학 I	권오남 외 14인	교학사	2018	97-108	문항 3	O
수학 I	황선욱 외 8인	미래엔	2018	97-106		O
수학 I	고성은 외 6인	좋은책신사고	2018	92-104		O
수학 I	홍성복 외 10인	지학사	2018	69-105		O
수학 I	류희찬 외 10인	천재교과서	2018	97-108		O
수학 I	이준열 외 9인	천재교육	2018	97-108		O
수학 II	권오남 외 14인	교학사	2018	12-41 60-62 80-99	문항 1 문항 2 2-2), 2-3)	O
수학 II	황선욱 외 8인	미래엔	2018	11-40 53-98		O
수학 II	고성은 외 6인	좋은책신사고	2018	11-41 52-59 72-90		O
수학 II	홍성복 외 10인	지학사	2018	10-40 59-61 74-93		O
수학 II	류희찬 외 10인	천재교과서	2018	12-42 52-57 67-85		O
수학 II	이준열 외 9인	천재교육	2018	10-40 53-58 73-97		O
미적분	권오남 외 14인	교학사	2018	64-76 108-119 168-172	문항 2 (나), 2-3) 문항 3 3-2)	O
미적분	황선욱 외 8인	미래엔	2018	63-69 71-76 161-164		O
미적분	고성은 외 5인	좋은책신사고	2018	58-71 97-108 150-153		O
미적분	홍성복 외 10인	지학사	2018	61-75 110-121 161-163		O
미적분	류희찬 외 9인	천재교과서	2018	68-84 124-134 177-180		O
미적분	이준열 외 7인	천재교육	2018	65-78 107-117 164-166		O

확률과통계	권오남 외 14인	교학사	2019	53-56 89-95	문항 4	O
확률과통계	황선욱 외 9인	미래엔	2019	50-53 86-91		O
확률과통계	고성은 외 5인	좋은책신사고	2019	50-53 84-90		O
확률과통계	홍성복 외 10인	지학사	2019	51-57 83-91		O
확률과통계	류희찬 외 9인	천재교과서	2019	53-58 85-92		O
확률과통계	이준열 외 7인	천재교육	2019	53-57 91-97		O
기하	권오남 외 14인	교학사	2019	12-18 62-75 82-98	문항 3	O
기하	황선욱 외 8인	미래엔	2019	11-15 69-81 87-101		O
기하	고성은 외 5인	좋은책신사고	2019	11-15 59-69 75-90		O
기하	홍성복 외 10인	지학사	2019	11-15 58-73 78-97		O
기하	류희찬 외 9인	천재교과서	2019	12-19 62-99		O
기하	이준열 외 7인	천재교육	2019	11-17 61-74 79-95		O

5. 문항 해설

- 1번 문항의 1-1), 1-2) 문항은 주어진 함수를 구하고, 주어진 함수가 특정 점에서 미분불가능이 되는 조건들을 찾는 문제임. 1-3) 문항은 주어진 함수의 그래프를 통해, 이 그래프와 한 직선이 3점에서 만나는 조건을 찾는 문제임

- 2번 문항은 주어진 조건들을 만족하는 3차 다항식의 계수들 사이의 관계를 유추하고, 주어진 문항을 해결하는 문제임

- 3번 문항은 주어진 조건에 해당하는 두 벡터의 내적을 구하고, 정적분과 급수 사이의 관계를 이용하는 문제임

- 4번 문항은 이산확률변수의 기댓값(평균)을 구하는 문제임

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준
1-1	• 주어진 $b \le c$에 대해 함수 $f(x)$를 정확히 구하고, 함수 $f(x)$가 세 점에서 미분불가능이 되도록 하는 b와 c의 관계가 $b=c$임을 보이고, 그 과정과 이유를 논리적으로 설명하면 좋은 점수를 부여함
1-2	• 주어진 두 실수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$를 정확히 구한다. 좌미분과 우미분을 통해 함수 $f(x)$가 두 점에서만 미분가능하고, $f(0)>0$이 되는 순서쌍 (a,b)를 정확히 구한다. 그 과정과 이유를 논리적으로 설명하면 좋은 점수를 부여함
1-3	• 주어진 함수 $f(x)$를 정확히 구하고, 두 실수 a, b에 대하여 직선 $y=ax+b$가 $y=f(x)$의 그래프와 세 점에서 만나기 위한 순서쌍 (a,b)가 평면에서 차지하는 영역을 찾고 그 면적을 구하면 좋은 점수를 부여함
2-1	• 조건 (가), (나)를 만족하는 삼차 다항식 $f(x)=x^3+px^2+qx+r$에서 $p=3k,\ q=3k^2-1$, $r=k^3$, k는 0이 아닌 정수임을 보이고, pqr이 최소가 되게 하는 $k=\pm 1$ 임을 보인다. 이를 통해 $f(x)\ =\ x^3+3x^2+2x+1$과 $f(x)\ =\ x^3-3x^2+2x-1$임을 보인다. 그 과정과 이유를 논리적으로 설명하면 좋은 점수를 부여함
2-2	• 문항 2-1)에서 구한 p,q,r의 관계($p=3k,\ q=3k^2-1$, $r=k^3$, k는 0이 아닌 정수)를 활용하여 극한값 $\lim_{p\to\infty}\frac{pq}{r}\ =\ \lim_{k\to\infty}\frac{3k\times(3k^2-1)}{k^3}\ =\ 9$을 구하면 좋은 점수를 부여함.
2-3	• 자연수 k가 있어서, $f(x)=x^3+3kx^2+(3k^2-1)x+k^3$이다. 점 $(-3,0)$을 지나고 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선이 3개가 되도록 하는 자연수 $p=3k$의 값이 $p=3$임을 보이고, 그 과정이 논리적이면 좋은 점수를 부여함
3-1	• 내적의 정의를 활용하여 주어진 조건에 해당하는 두 벡터의 내적을 정확히 구하고, 그 과정이 논리적이면 좋은 점수를 부여함
3-2	• 조건에 맞는 각 벡터를 구하고, 내적의 정의를 활용하여 주어진 조건에 해당하는 두 벡터의 내적을 정확히 구한다. 정적분과 급수 사이의 관계 등을 이용하여 주어진 급수의 값을 구한다. 그 과정이 논리적이면 좋은 점수를 부여함
4-1	• 확률의 개념을 정확히 이해하고, 주어진 확률을 정확히 구하면 좋은 점수를 부여함
4-2	• 이산확률변수의 기댓값(평균)을 구하는 문제임. 답을 구하는 과정이 논리적이면 좋은 점수를 부여함

7. 예시 답안 혹은 정답

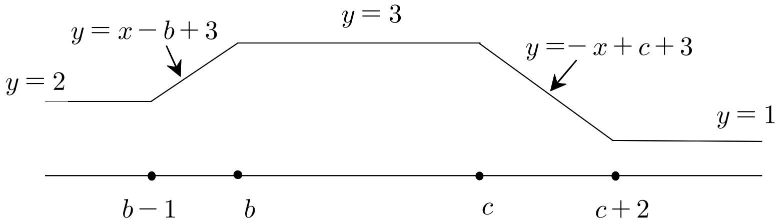
하위 문항	예시 답안

1-1

$$\sigma(g(x))=\begin{cases}1 & (x \geq b)\\ x-b+1 & (b-1 \leq x < b)\\ 0 & (x < b-1)\end{cases},\quad \sigma(h(x))=\begin{cases}0 & (x \geq c+2)\\ -x+c+2 & (c \leq x < c+2)\\ 2 & (x < c)\end{cases},$$

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x \geq c+2)\\ -x+c+3 & (c \leq x < c+2)\\ 3 & (b \leq x < c)\\ x-b+3 & (b-1 \leq x < b)\\ 2 & (x < b-1)\end{cases}$$

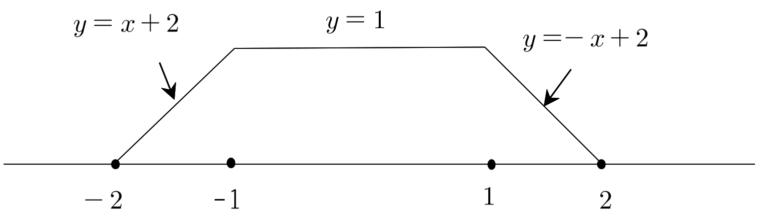
따라서 $b=c$일 때 세 점에서만 미분불가능하다.



$y=f(x)$의 그래프

1-2

$h(x)=\sigma(g(x))+\sigma(g(-x))-1$라 두면 $h(x)=\begin{cases}0 & (x \geq 2)\\ -x+2 & (1 \leq x < 2)\\ 1 & (-1 \leq x < 1)\\ x+2 & (-2 \leq x < -1)\\ 0 & (x < -2)\end{cases}$ 이고,



$y=h(x)$의 그래프

f의 미분가능한 점에서 $f'(x)=(x-a)(x-b)h'(x)+(2x-a-b)h(x)$이다. 즉,

$$f'(x)=\begin{cases}0 & (x > 2)\\ (2x-a-b))(-x+2)+(x-a)(x-b)(-1) & (1 < x < 2)\\ 2x-a-b & (-1 < x < 1)\\ (2x-a-b)(x+2)+(x-a)(x-b) & (-2 < x < -1)\\ 0 & (x < -2)\end{cases}$$

하위 문항	예시 답안
1-2	함수 $f(x)=(x-a)(x-b)h(x)$는 $x=-2,\,-1,\,1,\,2,$ 네 점에서 미분불가능 할 수 있다. (1) $f(x)$의 $x=-2$에서의 좌미분은 0, 우미분은 $(-2-a)(-2-b)$ 이므로, $f(x)$가 $x=-2$에서 미분가능할 조건은 : $a=-2$ 혹은 $b=-2$ 이다. (2) $f(x)$의 $x=-1$에서의 좌미분은 $(-2-a-b)+(-1-a)(-1-b)$, 우미분은 $-2-a-b$ 이므로, $f(x)$가 $x=-1$에서 미분가능할 조건은 : $a=-1$ 혹은 $b=-1$ 이다. (3) $f(x)$의 $x=1$에서의 좌미분은 $2-a-b$, 우미분은 $2-a-b-(1-a)(1-b)$ 이므로, $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능할 조건 : $a=1$ 혹은 $b=1$ 이다. (4) $f(x)$의 $x=2$에서의 좌미분은 $-(2-a)(2-b)$, 우미분은 0 이므로,$f(x)$가 $x=2$에서 미분가능할 조건은 : $a=2$ 혹은 $b=2$ 이다. $f(x)$가 두 점에서만 미분 불가능하기 위해서는 (a,b)가 위의 (1), (2), (3), (4) 식 중에서 두 개만 만족해야 하고, 따라서 다음과 같아야 한다. $(a,b)=(1,-1),(1,-2),(1,2),(-1,1),(-1,-2),(-1,2),$ $(-2,-1),(-2,1),(-2,2),(2,-2),(2,-1),(2,1).$ 이 중에 $f(0)=ab>0$인 (a,b)는 $\underline{(a,b)=(1,2),\,(-1,-2),\,(-2,-1),\,(2,1)}$ 이다.
1-3	$h(x)=f(x)-ax-b$라고 하면, $h(x)=\begin{cases}-ax-b & (x\geq 2)\\ -(a+1)x+2-b & (1\leq x<2)\\ -ax-b+1 & (-1\leq x<1)\\ (1-a)x+2-b & (-2\leq x<-1)\\ -ax-b & (x<-2)\end{cases}$ 이고, $h(x)$의 그래프가 x축과 세 점에서 만나면 된다. ▶우선 $a=0$인 경우, x축과 두 번 만나거나 무한히 많은 점에서 만남으로 $a>0$ 혹은 $a<0$이어야 한다. ▶$a>0$인 경우, 구간 $x<-2$ 그리고 $x>-1$에서 $h(x)$는 감소함으로, $h(x)$의 그래프가 x축과 세 번 만나기 위해서는, $h(-2)<0$, $h(-1)>0$이어야 한다. 즉, $b<a+1$, $b>2a$이어야 한다. ▶$a<0$인 경우, 구간 $x<1$ 그리고 $x>2$에서 $h(x)$는 증가함으로, $h(x)$의 그래프가 x축과 세 번 만나기 위해서는, $h(1)>0$, $h(2)<0$이어야 한다. 즉, $b<-a+1$, $b>-2a$이어야 한다. **따라서, (a,b)가 차지하는 영역의 면적은 1이다.**

하위 문항	예시 답안
1-1	변곡점의 x좌표를 α라고 하면, $f''(\alpha)=6\alpha+2p=0$이므로 $\alpha=-\frac{p}{3}$이다. 변곡점 $(\alpha, f(\alpha))$에서의 접선이 $y=-x$이므로 $f(\alpha)=-\alpha$와 $f'(\alpha)=-1$을 만족한다. 즉, $$f(\alpha)=-\frac{p^3}{27}+p\times\frac{p^2}{9}+q\times\left(-\frac{p}{3}\right)+r=\frac{p}{3}\text{ 이고}$$ $$f'(\alpha)=3\times\frac{p^2}{9}+2p\times\left(-\frac{p}{3}\right)+q=-1\text{이다.}$$ 따라서, $2p^3-9pq+27r=9p$이고 $-p^2+3q=-3$이다. 두 번째 식에서, $p^2=3(q+1)$이므로 $p=3k$ (k는 0이 아닌 정수)라고 놓을 수 있다. 그러면, $q=3k^2-1$이 성립한다. 이제 첫 번째 식에서, $54k^3-27k(3k^2-1)+27r=27k$가 얻어지므로, $r=k^3$이다. 따라서, $(p,q,r)=(3k, 3k^2-1, k^3)$인 0이 아닌 정수 k가 존재한다. $pqr=3k^4(3k^2-1)$이므로 $k=\pm1$일 때 $pqr=6$을 최솟값으로 가진다. 이때, $(p,q,r)=(3,2,1)$과 $(p,q,r)=(-3,2,-1)$이므로 **$f(x)=x^3+3x^2+2x+1$과 $f(x)=x^3-3x^2+2x-1$이 답이다.**
1-2	$\lim\limits_{p\to\infty}\frac{pq}{r}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{3k\times(3k^2-1)}{k^3}=9$
1-3	자연수 k가 있어서, $f(x)=x^3+3kx^2+(3k^2-1)x+k^3$이다. $(-3,0)$을 지나고 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선이 곡선에 접하는 점을 $(t,f(t))$라고 놓자. 그러면, 접선의 방정식은 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$이고 $-f(t)=f'(t)(-3-t)$를 만족한다. 따라서, $$g(t)=(t+3)f'(t)-f(t)=2t^3+(3k+9)t^2+18kt+(9k^2-3-k^3)$$ 가 0이 되는 서로 다른 실수 t가 세 개 존재하는 조건을 찾으면 된다. $g'(t)=6t^2+(6k+18)t+18k=6(t+3)(t+k)$이므로 $g(-3)$과 $g(-k)$의 부호가 다르면 된다. $g(-3)=-(k^3-9k^2+27k-24)=-(k-3)^3-3$는 $k=1$이면 양수이고 $k\geq2$이면 음수이다. $g(-k)=-2k^3+(3k+9)k^2-18k^2+(9k^2-3-k^3)=-3$이므로 항상 음수이다. **따라서, $k=1$이고 $p=3k=3$이다.**

하위 문항	예시 답안
3-1	$\lvert\overrightarrow{b_i}\rvert = 2\sin\frac{\pi i}{n+1}$ 이고 두 벡터 $\overrightarrow{b_i}$, $\overrightarrow{b_j}$ 의 사잇각은 $\lvert\frac{\pi(i-j)}{n+1}\rvert$ 이다. 따라서 $\vec{b_i} \bullet \vec{b_j} = (2\sin\frac{\pi}{n+1}i)(2\sin\frac{\pi}{n+1}j)\cos\frac{\pi}{n+1}(i-j)$ $= (2\sin\frac{\pi}{n+1}i)(2\sin\frac{\pi}{n+1}j)\left(\cos\frac{\pi}{n+1}i\ \cos\frac{\pi}{n+1}j + \sin\frac{\pi}{n+1}i\ \sin\frac{\pi}{n+1}j\right)$ 이다. 따라서, $n=7$일 때, $\vec{b_2} \bullet \vec{b_5} = (2\sin\frac{\pi}{4})(2\sin\frac{5\pi}{8})\cos\frac{3\pi}{8}$ $= (2\sin\frac{\pi}{4})(2\cos\frac{\pi}{8})\ \sin\frac{\pi}{8}$ $=(2\sin\frac{\pi}{4})\sin\frac{\pi}{4}$ $=1$ 을 얻는다.
3-2	3-1)에서 얻어진 공식 $\vec{b_1} \bullet \vec{b_i} = (2\sin\frac{\pi}{n+1})(2\sin\frac{\pi i}{n+1})\left(\cos\frac{\pi}{n+1}\ \cos\frac{\pi i}{n+1} + \sin\frac{\pi}{n+1}\sin\frac{\pi i}{n+1}\right)$ 로 부터 $\overrightarrow{b_1} \bullet \left(\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{b_i}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n}(\sin\frac{2\pi}{n+1})\sin\frac{2\pi i}{n+1}\right) + 4\left(\sum_{i=1}^{n}(\sin\frac{\pi}{n+1})^2(\sin\frac{\pi i}{n+1})^2\right)$ 를 얻는다. 따라서 $\lim_{n\to\infty}\overrightarrow{b_1} \bullet \left(\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{b_i}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}(\sin\frac{2\pi}{n+1})\sin\frac{2\pi i}{n+1}\right) + 4\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}(\sin\frac{\pi}{n+1})^2(\sin\frac{\pi i}{n+1})^2\right)$ 이다. 여기서, $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}(\sin\frac{2\pi}{n+1})\sin\frac{2\pi i}{n+1}\right) = \left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{2\pi}{n+1}}{\frac{1}{n+1}}\right)\right)\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\sin\frac{2\pi i}{n+1}\right)\frac{1}{n+1}\right)$ $= 2\pi\int_0^1 \sin 2\pi x\, dx = 0$ 이다. 또한 $\left(\sum_{i=1}^{n}(\sin\frac{\pi}{n+1})^2(\sin\frac{\pi i}{n+1})^2\right) \le n(\sin\frac{\pi}{n+1})^2$ 로 부터 $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}(\sin\frac{\pi}{n+1})^2(\sin\frac{\pi i}{n+1})^2\right)=0$ 을 얻는다. 따라서, $\lim_{n\to\infty}\overrightarrow{b_1} \bullet \left(\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{b_i}\right)=0$ 이다.

하위 문항	예시 답안
4-1	$\frac{\text{네 번째 기회에서 진홍색 공을 뽑는 경우의 수}}{\text{전체 경우의 수}}$ 는 다음과 같이 계산할 수 있다. $$\frac{8\times7\times6\times4}{9\times8\times7\times6}=\frac{4}{9}$$
4-2	$\mathrm{E}[X]=100\mathrm{P}(X=100)+200\mathrm{P}(X=200)+300\mathrm{P}(X=300)$, 여기서 $\mathrm{P}\{X=100\}=\mathrm{P}\{\text{첫 번째 진홍색 공, 네 번째 파란색 공}\}=\frac{4\times7\times6\times5}{9\times8\times7\times6}=\frac{20}{72}$, $\mathrm{P}\{X=200\}=\mathrm{P}\{\text{첫 번째 파란색 공, 네 번째 진홍색 공}\}=\frac{5\times7\times6\times4}{9\times8\times7\times6}=\frac{20}{72}$, $\mathrm{P}\{X=300\}=\mathrm{P}\{\text{첫 번째 진홍색 공, 네 번째 진홍색 공}\}=\frac{4\times7\times6\times3}{9\times8\times7\times6}=\frac{12}{72}$. 따라서, $\mathrm{E}[X]=100\frac{20}{72}+200\frac{20}{72}+300\frac{12}{72}=\frac{400}{3}$.