

B

L

N

K



2025 BLANK 모의고사

[답지 : 해설]

● 수학 영역 ●

수학 정답

1	③	2	②	3	⑤	4	④	5	②
6	②	7	③	8	①	9	⑤	10	②
11	③	12	⑤	13	①	14	②	15	④
16	8	17	11	18	13	19	2	20	7
21	106	22	24						

미적분

				23	③	24	④	25	①
26	⑤	27	②	28	④	29	90	30	4

01.

$$\sqrt{24} \times \left(\frac{8}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{24} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} = 3 \text{이다.}$$

답: ㉓

02.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 1} - x}{6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x + 1}{6(\sqrt{x^2 + 4x + 1} + x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{12x} = \frac{1}{3}$$

답: ㉔

03.

첫째항을 a , 공비를 r 이라고 할 때 ($a > 0, r > 0$)

$$\frac{a_2 a_9}{a_3 a_6} = r^2 = 9 \Rightarrow r = 3$$

(계산할 때, r 의 차수를 더하고 뺀다는 생각으로 구하면 편하다.

$2+9-3-6=2$ 또는 $1+8-2-5=2$ 와 같이 말이다.)

$$a_1 + a_4 = a(1+r^3) = 56 \Rightarrow 28a = 56 \Rightarrow a = 2$$

따라서, $a_5 = ar^4 = 162$

답: ㉟

04.

먼저, **모든 조건들이 $x=1$ 일 때를 기준으로 서술되어 있으므로**
주어진 식에 $x=1$ 을 대입하면 $g(1)=3f(1)$ 이다. ... ㉠

이제 주어진 식의 **양변을 미분**해보자.

$$g'(x) = (3x^2 + 1)f(x) + (x^3 + x + 1)f'(x)$$

이제 $x=1$ 을 대입하면

$$g'(1) = 4f(1) + 3f'(1) = 4f(1) + 3 \text{이다.} \dots \text{㉡ } (f'(1) = 1)$$

$g(1) = g'(1)$ 이므로, ㉠과 ㉡을 연립하면

$$g(1) = 3f(1) = 4f(1) + 3 \Rightarrow f(1) = -3 \text{이다.}$$

답: ㉣

05.

$\int_0^4 f(t)dt = k$ 라고 하자.

이 때, $f(x) = kx - 3$ 이고,

$$\int_0^4 f(t)dt = \int_0^4 (kt - 3)dt = \left[\frac{1}{2}kt^2 - 3t \right]_0^4 = 8k - 12 = k$$

$$\Rightarrow k = \frac{12}{7} \text{이다.}$$

따라서, $f(7) = 7k - 3 = 9$ 이다.

답: ㉔

06.

$$6\cos^2\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + 5 = -\sin\theta + 5$$

$$\Rightarrow 6 - 6\sin^2\theta = -\sin\theta + 5$$

$$\Rightarrow 6\sin^2\theta - \sin\theta - 1 = (3\sin\theta + 1)(2\sin\theta - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \sin\theta = -\frac{1}{3} \text{ 또는 } \frac{1}{2}$$

발문에 따르면 $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$ 이므로, $\sin\theta < 0$, $\cos\theta > 0$ 이다.

$$\therefore \sin\theta = -\frac{1}{3}, \cos\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

답: ㉔

07.

$f(x)$ 를 미분하면

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}(12x^2 + 8ax + a^2) = \frac{1}{4}(6x + a)(2x + a)이다.$$

즉, $f(x)$ 는 $x = -\frac{a}{2}, -\frac{a}{6}$ 에서 극값을 갖는다.

따라서, $x = 1$ 에서 '극값'을 갖도록 하기 위한 a 는 $-2, -6$ 이다.

$a < 0$ 일 때, $-\frac{a}{6} < -\frac{a}{2}$ 이므로 (헛갈린다면, a 에 -3 같은 아무 음수나 대입해보자.),

'극대'를 갖는 지점은 $x = -\frac{a}{6}$ 이다.

(최고차항이 양수인 삼차함수에서 왼쪽 극점이 '극대'고, 오른쪽 극점이 '극소'기 때문이다.)

따라서, $x = 1$ 에서 '극대'를 갖도록 하기 위한 a 는 -6 이다.

$$\therefore f(2) = 8 + 4a + \frac{1}{2}a^2 + 1 = 3$$

답: ㉓

08.

STEP 1.

먼저 점 A, B의 x 좌표를 살펴보면,

$$\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{2}x + \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{2}x = 0 \text{을 만족하는 실근일 것이다.}$$

따라서, 이를 $\sin x + \cos x = 0$ 을 만족시키는 실근으로 간추려서 표현해보면,

$$\text{각각 } -\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi \text{이다.}$$

STEP 2.

이제 점 A, B의 실제 위치를 구해보면,

$$A\left(-\frac{\pi}{4} \times \frac{2}{\pi}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2}\right), B\left(\frac{3\pi}{4} \times \frac{2}{\pi}, \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2}\right) \Rightarrow A\left(-\frac{1}{2}, -1\right), B\left(\frac{3}{2}, 1\right) \text{이다.}$$

마침 \overline{AB} 의 중점이 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 으로 x 축 위에 있으므로, 이 점을 M이라고 하면

$$\text{삼각형의 넓이 공식을 통해 } \triangle OAB = \triangle OAM + \triangle OBM = \frac{1}{2}\overline{OM} \times (1+1) = \frac{1}{2} \text{이다.}$$

(신발끈 공식을 이용해 풀어도 좋다.)

답: ①

09.

STEP 1.

$$v(t) = t^2 + a(t), \quad a(t) = 2t + k \Rightarrow v(t) = t^2 + 2t + k$$

“그런데, 생각해 보면 가속도($a(t)$)는 속도($v(t)$)의 미분식이다.”

$$\text{따라서, } v'(t) = a(t) = 2t + 2 \Rightarrow k = 2$$

STEP 2.

발문에 따르면 시각 $t=0$ 에서 점 P의 위치가 k 이므로,

$$x(t) = \int v(t) dt = \frac{1}{3}t^3 + t^2 + kt + k = \frac{1}{3}t^3 + t^2 + 2t + 2$$

따라서, 시각 $t=2$ 에서 점 P의 위치는 $x(2) = \frac{38}{3}$ 이다.

답: ㉔

| 무엇을 변별하였는가?

- $v(t)$ 를 미분하면 $a(t)$ 가 된다는 것을 이용하여 k 의 값을 구할 수 있는가?

10.

STEP 1.

우선 주어진 조건 중, $S_2 = 0$ 임을 먼저 해석해보자.

$$S_2 = a_1 + a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = -a_1 \text{이다.} \dots \textcircled{\text{A}}$$

다음은 조건 $S_4 - S_1 = a_4 + 4a_2$ 를 살펴보자.

$$S_4 - S_1 = a_2 + a_3 + a_4 \text{이므로, 조건과 연립하면}$$

$$a_2 + a_3 + a_4 = a_4 + 4a_2 \Rightarrow a_3 = 3a_2 \text{이다.} \dots \textcircled{\text{B}}$$

이제 첫째항을 a 라고 하면,

$$a_2 = -a \text{ (}\textcircled{\text{A}}\text{ 참고), } a_3 = -3a \text{ (}\textcircled{\text{B}}\text{ 참고)이다.}$$

STEP 2.

“이제, a_1, a_2, a_3 를 전부 a 에 대해 표현할 수 있으니,

$a_2 a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ 에 $n=1$ 을 대입하여 a_1, a_2, a_3 로 이루어진 관계식으로 만들면,

이를 통해 a 를 구할 수 있겠다.”

대입해보면,

$$(a_2)^2 = a_1 + a_3 \Rightarrow a^2 + 2a = 0$$

$\therefore a = -2$ (발문에 따르면, 첫째항은 0이 아니기 때문이다.)

이제, 이를 다시 주어진 식에 대입해보면

$$a_2 a_{n+1} = a_n + a_{n+2} \Rightarrow 2a_{n+1} = a_n + a_{n+2} \text{이므로,}$$

등차중항의 원리에 의해 a_n 은 등차수열이다.

(아니면, 직접 식을 $a_{n+1} - a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$ 로 변형해봐도 된다.)

또한, $a_2 = -a_1 = 2$ 를 통해 등차수열 a_n 은 첫째항이 -2 이고 공차가 4 임을 알 수 있다.

STEP 3.

따라서, S_9 는 등차수열의 합 공식으로 풀면 될 것이다.

$$\therefore S_9 = 9a_5 = 126$$

답: ㉔

| 무엇을 변별하였는가?

- 조건들을 연립해서 a_1, a_2, a_3 을 전부 a 에 대해 표현되도록 할 수 있는가?
- 주어진 식($a_2 a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$)이 a_1, a_2, a_3 으로만 구성되도록 $n=1$ 을 대입한 뒤, 이를 토대로 첫째항(a)을 구할 수 있는가?
- 식을 변형하거나, 등차중항의 원리를 사용하여 a_n 이 등차수열임을 파악할 수 있는가?

11.

SOL1) 정적분으로 계산하기

발문에 따르면 주어진 직선과 곡선으로 둘러싸인 **면적 A와 B의 넓이가 같으므로**,

이를 정적분의 관점에서 설명해보면 **두 면적이 서로 상쇄**된다, 즉 0부터 k까지의 정적분 값은 0이라고 할 수 있다.

이를 토대로 식을 세워보면,

$$\int_0^k \left\{ \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + x - \left(-\frac{1}{8}x + \frac{5}{8} \right) \right\} dx = 0 \text{ 이다.}$$

$$\int_0^k \left\{ \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + x - \left(-\frac{1}{8}x + \frac{5}{8} \right) \right\} dx = \frac{k}{16}(k^3 - 4k^2 + 9k - 10) = 0 \text{ 이므로,}$$

이후 **조립제법**을 통해 이를 만족하는 $k=2$ 임을 알 수 있다.

SOL2) 삼차함수의 변곡점을 이용한 풀이

발문에 따르면 주어진 직선과 곡선으로 둘러싸인 **면적 A와 B의 넓이가 같고**,

주어진 곡선은 삼차함수로, **변곡점을 기준으로 대칭**이다.

“그림상 면적 A와 B가 어느정도 대칭관계를 이루는 것 같은데.. 만약 실제로 저 직선과 삼차함수 간의 **교점이 변곡점**이라면 문제가 정말 간단하게 풀릴텐데.. 한번 맞는지 살펴볼까?”

먼저 삼차함수 $y = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + x$ 의 변곡점을 살펴보자.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4}x^2 - \frac{6}{4}x + 1 = \frac{3}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{4} \text{ 이므로, 변곡점은 } \left(1, \frac{1}{2} \right) \text{ 이다.}$$

이후, $\left(1, \frac{1}{2} \right)$ 를 직선 $y = -\frac{1}{8}x + \frac{5}{8}$ 에 대입해보면,

역시나 주어진 삼차함수와 직선 간의 **교점이 변곡점과 일치**하는 것을 알 수 있다.

그렇다면, 면적 A와 B가 서로 대칭관계를 이루기 위해서는, **변곡점의 x좌표가 $x=k$ 의 절반**이 되어야겠네.

변곡점은 $\left(1, \frac{1}{2} \right)$ 이므로, 이를 통해 $k=2$ 임을 바로 알 수 있다.

답: ③

| 무엇을 변별하였는가?

- 두 넓이가 같음을, '정적분 값이 0이 된다'로 해석하면 되는 기본적인 문항이다. (기출에 빈번히 출제되는 소재다.) 계산이 복잡하면 실수가 일어날 수 있으니 각별히 주의하자.

12.

(가) 함수 $|(x^n - 32)f(x)|$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

STEP 1.

" n 이 홀수냐 짝수냐에 따라 $x^n - 32$ 가 가지는 실근의 개수가 달라지겠군."

먼저 $n=1$ 일 때, $|(x^1 - 32)f(x)|$ 가 미분가능하기 위해서는 $f(x)$ 가 $x=32$ 에서 실근을 가져, 결과적으로 $(x^1 - 32)f(x)$ 가 중근을 갖도록 하면 된다.

"그런데, $f(x)$ 는 이차함수이므로 $x=32$ 외에도 또다른 실근이 있거나, $x=32$ 에서 중근을 가져야 할텐데..."

"만약 $f(x)$ 가 또다른 실근을 갖는다면, 결과적으로 $|(x^1 - 32)f(x)|$ 는 그 실근에서 미분불가능할 것이다."

따라서, $f(x)$ 는 이때 $x=32$ 에서 중근을 가져야한다. $f(x) = (x - 32)^2$ 이다.

$n=2$ 일 때, $|(x^2 - 32)f(x)|$ 에서 $x^2 - 32$ 가 2개의 실근($x = \pm 4\sqrt{2}$)을 가지므로, $f(x)$ 도 $x = \pm 4\sqrt{2}$ 에서 각각 실근을 가져야만 $(x^2 - 32)f(x)$ 가 $x = \pm 4\sqrt{2}$ 에서 전부 중근을 갖게 되어 미분가능할 수 있게 된다.

따라서, 이때 $f(x) = x^2 - 32$ 이다.

현재까지의 정보를 조합해보면, 핵심은 $x^n - 32$ 가 가지는 모든 실근을 $f(x)$ 에서도 똑같이 가져, 결과적으로 $(x^n - 32)f(x)$ 이 오로지 중근만을 갖도록 하는 것이다.

STEP 2.

i) n 이 홀수라면, 앞서 $n=1$ 일 때 살펴봤듯 $f(x)$ 가 $x = 32^{\frac{1}{n}}$ 에서 중근을 가져야하므로,

$$f(x) = \left(x - 32^{\frac{1}{n}}\right)^2 \text{ 이다.}$$

(나)에 따르면 $f(0) = 32^{\frac{2}{n}} = 2^{\frac{10}{n}}$ 이 정수가 되어야하므로, $n=1, 5$ 일 때 성립한다. (10의 약수 중 홀수)

ii) n 이 짝수라면, 앞서 $n=2$ 일 때 살펴봤듯 $f(x)$ 가 $x = \pm 32^{\frac{1}{n}}$ 에서 실근을 가져야하므로,

$$f(x) = \left(x - 32^{\frac{1}{n}}\right)\left(x + 32^{\frac{1}{n}}\right) = x^2 - 32^{\frac{2}{n}} \text{ 이다.}$$

마찬가지로 $f(0) = -32^{\frac{2}{n}} = -2^{\frac{10}{n}}$ 가 정수가 되어야하므로, $n = 2, 10$ 일 때 성립한다. (10의 약수 중 짝수)

따라서, 가능한 모든 n 을 살펴보면 $n = 1, 2, 5, 10$ 이다.

$$\therefore 1 + 2 + 5 + 10 = 18$$

답: ⑤

| 무엇을 변별하였는가?

- $|(x^n - 32)f(x)|$ 가 미분가능하도록 하는 $f(x)$ 가 가져야 할 실근을 n 이 홀수, 짝수인지에 따라 나눠 각각 파악할 수 있는가?
- $f(0)$ 이 정수라는 조건을 통해 n 의 값을 구할 수 있는가?

13.

STEP 1.

우선 $g'(k)=8$ 을 풀어보자.

$$g'(k) = f'(0) = 8$$

발문에 따르면 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로,
 $x = k$ 에서의 연속성과 미분가능성을 살펴보면

- 1) $f(0) = f(k) \dots \textcircled{7}$
- 2) $f'(0) = f'(k) = 8$ 이다.

이를 식으로 정리하면 다음과 같다.

$$f'(x) = 3x(x-k)+8 = 3x^2 - 3kx + 8,$$

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}kx^2 + 8x + C$$

또한, $\textcircled{7}$ 에 의해 $f(0) = f(k) \Rightarrow C = -\frac{1}{2}k^3 + 8k + C \Rightarrow k = \pm 4$ 이다. ($k \neq 0$)

STEP 2.

이제, $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하는지의 여부를 통해
 k 가 4인지, -4 인지 살펴보자.

$g(x)$ 를 살펴보면,
왼쪽구간($x \leq k$)에서는 $f(-\infty)$ 에서부터 $f(0)$ 까지,
오른쪽구간($x > k$)에서는 $f(k)$ 에서부터 $f(\infty)$ 까지 표현되어있다. ... $\textcircled{8}$

그런데, $f'(x)$ 에 대해 판별식을 써보면 $D/4 = \left(\frac{3}{2}k\right)^2 - 24 = 12 > 0$ 이므로,

$f(x)$ 에는 반드시 감소구간이 포함되어있다.

만약 $k = -4$ 라면, $\textcircled{8}$ 에서 $g(x)$ 가 각각 $f(-\infty)$ 부터 $f(0)$ 까지, $f(-4)$ 에서부터 $f(\infty)$ 까지 표현되어있으므로,
결과적으로 그 속에 반드시 감소구간이 존재할 수 밖에 없다.

따라서, $k = 4$ 이다.

($k = 4$ 일 경우, $\textcircled{8}$ 에서 $g(x)$ 가 각각 $f(-\infty)$ 부터 $f(0)$ 까지, $f(4)$ 에서부터 $f(\infty)$ 까지 표현되어있으므로,
 $f(x)$ 의 감소구간이 닫힌구간 $[0, 4]$ 속에 포함되어 있다면, $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가할 수 있다.)

따라서 $f'(x) = 3x(x-4)+8$ 이고, $g'(x) = f'(x-4)$ ($x \leq 4$)이다.

$$\therefore g'(1) = f'(-3) = 71$$

답: ①

| 무엇을 변별하였는가?

- 구간의 경계($x = k$)에서 연속성과 미분가능성을 확인하는 과정을 통해, 두 식을 세우고 연립하여 가능한 k 값의 후보군을 구할 수 있는가?
- 실수 전체의 집합에서 증가해야한다는 조건을 통해, k 의 값을 확정할 수 있는가?

14.

SOL1) 사인 / 코사인법칙을 이용한 풀이

STEP 1.

\overline{AB} , \overline{BC} 와 \overline{CD} , \overline{DA} 의 길이가 전부 주어져 있고, 두 삼각형의 넓이비 또한 주어져 있다.

“그렇다면, 이제 두 삼각형의 넓이를 각각 식으로 표현하기 위해 사인법칙을 사용해보자.”

$\angle ABC = \alpha$, $\angle ADC = \beta$ 라고 할 때,

$\triangle ABC$ 와 $\triangle ACD$ 의 넓이는 각각

$$1) \triangle ABC = \frac{1}{2} \sin \alpha \times 3 \times 3\sqrt{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2} \sin \alpha$$

$$2) \triangle ACD = \frac{1}{2} \sin \beta \times 5 \times \sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \sin \beta$$

으로 표현할 수 있다.

STEP 2.

두 넓이비가 $3 : \sqrt{2}$ 이므로, 이를 통해 $\sin \alpha$ 와 $\sin \beta$ 의 비율을 알 수 있다.

$$\triangle ABC : \triangle ACD = 3 : \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 3\triangle ACD = \sqrt{2}\triangle ABC$$

$$\Rightarrow \frac{15\sqrt{2}}{2} \sin \beta = 9\sin \alpha$$

$$\Rightarrow \sin \beta = \frac{3\sqrt{2}}{5} \sin \alpha \dots \textcircled{7}$$

STEP 3.

이제, 두 삼각형이 변 \overline{AC} 를 공유하고 있다는 점을 이용해(코사인법칙), $\sin \alpha$ 와 $\sin \beta$ 의 값을 구해보자.

$$2\cos \alpha \times \overline{AB} \times \overline{BC} = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2$$

$$2\cos \beta \times \overline{DA} \times \overline{CD} = \overline{DA}^2 + \overline{CD}^2 - \overline{AC}^2$$

$$18\sqrt{2}\cos \alpha = 27 - \overline{AC}^2$$

$$10\sqrt{2}\cos \beta = 27 - \overline{AC}^2$$

$$\Rightarrow 9\cos \alpha = 5\cos \beta$$

$$\Rightarrow 9\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = 5\sqrt{1 - \sin^2 \beta}$$

$$\Rightarrow 9\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = 5\sqrt{1 - \frac{18}{25}\sin^2 \alpha} \quad (\textcircled{7} \text{ 대입})$$

$$\Rightarrow 81 - 81\sin^2\alpha = 25 - 18\sin^2\alpha$$

$$\Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{8}{9}$$

$$\therefore \sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \sin\beta = \frac{4}{5}$$

이제 사각형 ABCD의 넓이를 식으로 표현해보면,

$$\begin{aligned}\triangle ABC + \triangle ACD &= \frac{1}{2}\sin\alpha \times 3 \times 3\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sin\beta \times 5 \times \sqrt{2} \\ &= \frac{9\sqrt{2}}{2}\sin\alpha + \frac{5\sqrt{2}}{2}\sin\beta = 6 + 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

SOL2) 삼각형의 높이를 이용한 풀이

STEP 1.

\overline{AB} , \overline{BC} 와 \overline{CD} , \overline{DA} 의 길이가 전부 주어져 있고, 두 삼각형의 넓이비 또한 주어져 있다.

“그렇다면, 이제 두 삼각형의 넓이를 각각 식으로 표현해야 하는데..

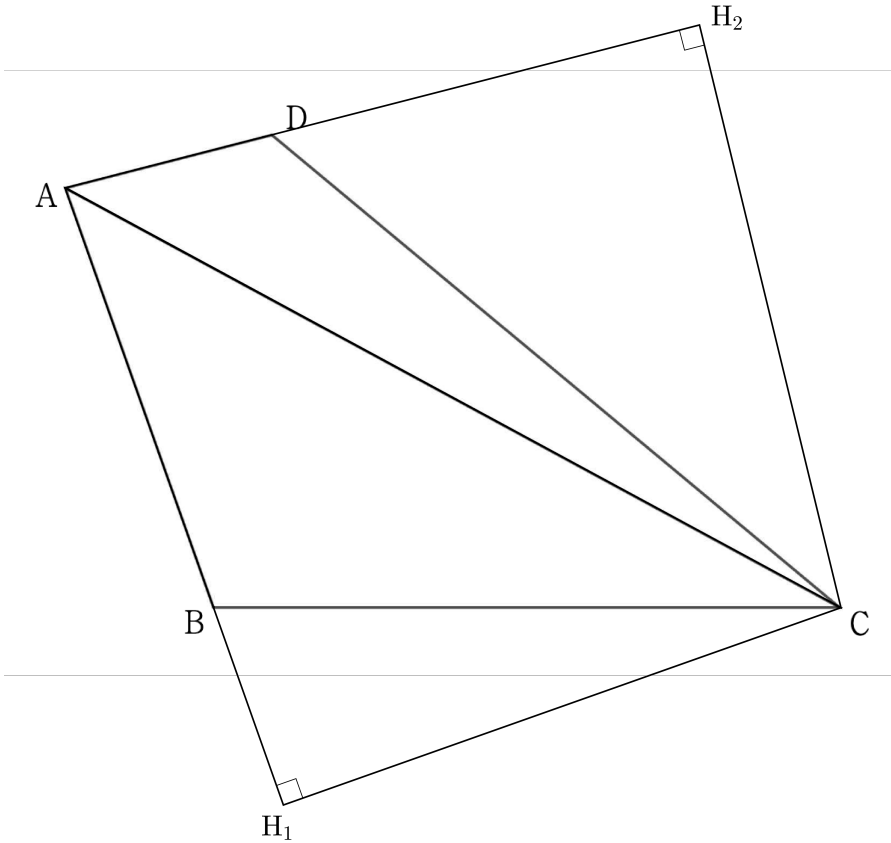
여기서 물론 사인 / 코사인법칙을 사용해도 되겠지만, 주어진 변의 길이에서 익숙한 숫자가 보인다.”

바로 $\overline{AB} = 3$ 과 $\overline{DA} = \sqrt{2}$ 이다.

STEP 2.

그렇다면, 삼각형의 넓이를 높이를 이용해 표현하는 것이 더 합리적이겠다.

점 C에서 직선 AB에 그은 수선의 발을 H_1 , 점 C에서 직선 DA에 그은 수선의 발을 H_2 라고 하자.



$\triangle ABC$ 와 $\triangle ACD$ 의 넓이는 각각

$$1) \triangle ABC = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{CH_1} = \frac{1}{2} \overline{CH_1} \times 3$$

$$2) \triangle ACD = \frac{1}{2} \times \overline{DA} \times \overline{CH_2} = \frac{1}{2} \overline{CH_2} \times \sqrt{2}$$

으로 표현할 수 있다.

두 넓이비가 $3 : \sqrt{2}$ 이므로, 이를 통해 $\overline{CH_1} = \overline{CH_2}$ 임을 알 수 있다.

STEP 3.

$\overline{CH_1} = \overline{CH_2} = h$ 라고 한다면, 이제 h 만 구하면 된다.

단순하게, 한번 $\overline{BH_1} = a$, $\overline{DH_2} = b$ 라고 해보자.

$$1) \text{ 이때, 먼저 } a^2 + h^2 = \overline{BC}^2 = 18, \quad b^2 + h^2 = \overline{CD}^2 = 25 \text{이다. 또한, } b^2 - a^2 = 7 \text{이다. } \dots \textcircled{1}$$

2) 이제, 두 삼각형 $\triangle AH_1C$, $\triangle AH_2C$ 를 살펴보자.

변 \overline{AC} 를 공유하고 있고, $\overline{CH_1} = \overline{CH_2}$ 이고, 둘 다 직각삼각형으로, 두 삼각형 $\triangle AH_1C$, $\triangle AH_2C$ 는 합동이다.

따라서, $\overline{AH_1} = \overline{AH_2} \Rightarrow 3+a = \sqrt{2}+b \Rightarrow b-a = 3-\sqrt{2}$ 인 것이다. ... ㉠

㉠을 변형하면 $b^2 - a^2 = (b+a)(b-a) = 7 = (3-\sqrt{2})(b+a) \Rightarrow b+a = 3+\sqrt{2}$... ㉡

이제, ㉠과 ㉡을 연립하면

$a = \sqrt{2}$, $b = 3$ 임을 알 수 있다.

또한, $a^2 + h^2 = 18$ 임을 이용해 $h = 4$ 임을 알 수 있다.

이제 사각형 ABCD의 넓이를 식으로 표현해보면,

$$\triangle ABC + \triangle ACD = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{2})h = 6 + 2\sqrt{2}$$

답: ④

| 무엇을 변별하였는가?

- 수선의 발(H_1, H_2)을 긋고, 높이를 이용해 삼각형의 넓이를 표현한 뒤, 이를 넓이비 조건에 대입해 두 삼각형의 넓이가 같음을 구할 수 있는가?
- 두 삼각형 $\triangle AH_1C, \triangle AH_2C$ 가 합동임을 알고, 이를 이용하여 식을 세울 수 있는가?

15.

STEP 1.

삼차함수에서 서로 수직인 두 접선이 있다는 뜻은, 일단 **감소하는 구간이 있다**는 뜻이다.

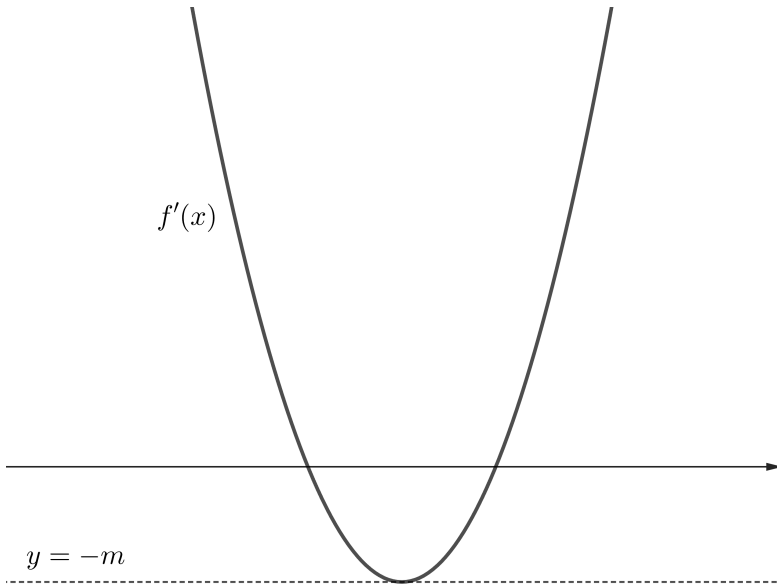
이를 통해 삼차함수의 개형을 어느정도 생각해볼 수 있다.

또한 **감소구간은 변곡점에서 가장 가파르게 감소**하고, 이 때의 기울기만이 '유일'하다.
('유일'하다는 것은, 동일한 접선의 기울기를 가지는 다른 지점이 없다는 뜻이다.)

이를 바탕으로 $g(t)$ 를 구해보자.

STEP 2.

변곡점에서 $f(x)$ 의 접선의 기울기가 $-m$ 이라고 해보자.



i) $-m \leq f'(t) < 0$ 일 때, 이에 대응하는 $f'(s)$ 의 범위는 $\frac{1}{m} < f'(s) < \infty$ 으로 $g(t) = 2$ 이다.

ii) $f'(t) = 0$ 일 때, 이에 대응하는 $f'(s)$ 는 존재할 수가 없으므로 $g(t) = 0$ 이다. ... ㉠
(대응하는 접선이 존재하기 위해서는 접선이 y 축과 평행해야 하는데, 이는 불가능하다.)

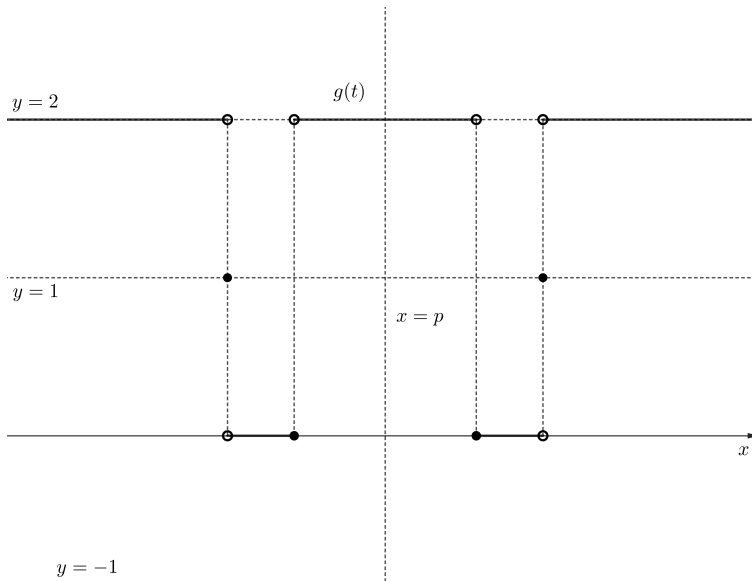
iii) $0 < f'(t) < \frac{1}{m}$ 일 때, 이에 대응하는 $f'(s)$ 의 범위는 $-\infty < f'(s) < -m$ 으로 존재하지 않으므로, $g(t) = 0$ 이다.

iv) $f'(t) = \frac{1}{m}$ 일 때, 이에 대응하는 $f'(s)$ 는 $f'(s) = -m$ 이므로 $g(t) = 1$ 이다.

(변곡점에서 접선의 기울기는 '유일'하기 때문이다.)

v) $f'(t) > \frac{1}{m}$ 라면, 이에 대응하는 $f'(s)$ 의 범위는 $-m < f'(s) < 0$ 으로 $g(t) = 2$ 이다. ... ㉞

그래프를 그려보면 다음과 같다.



STEP 3.

"이제 위 그래프를 이용해 $f'(t) = g(t)$ 의 실근의 개수가 6이 되도록 해보자."

삼차함수의 변곡점의 x 좌표를 p 라 하면,
 $f'(x)$ 또한 $x = p$ 를 기준으로 선대칭이다.

이때 $f'(t) = g(t)$ 의 실근의 개수가 6이라는 것은,
 대칭축을 기준으로 **왼쪽 구간에 3개의 실근**($f'(t) = g(t)$)이 있다는 것과 같다.

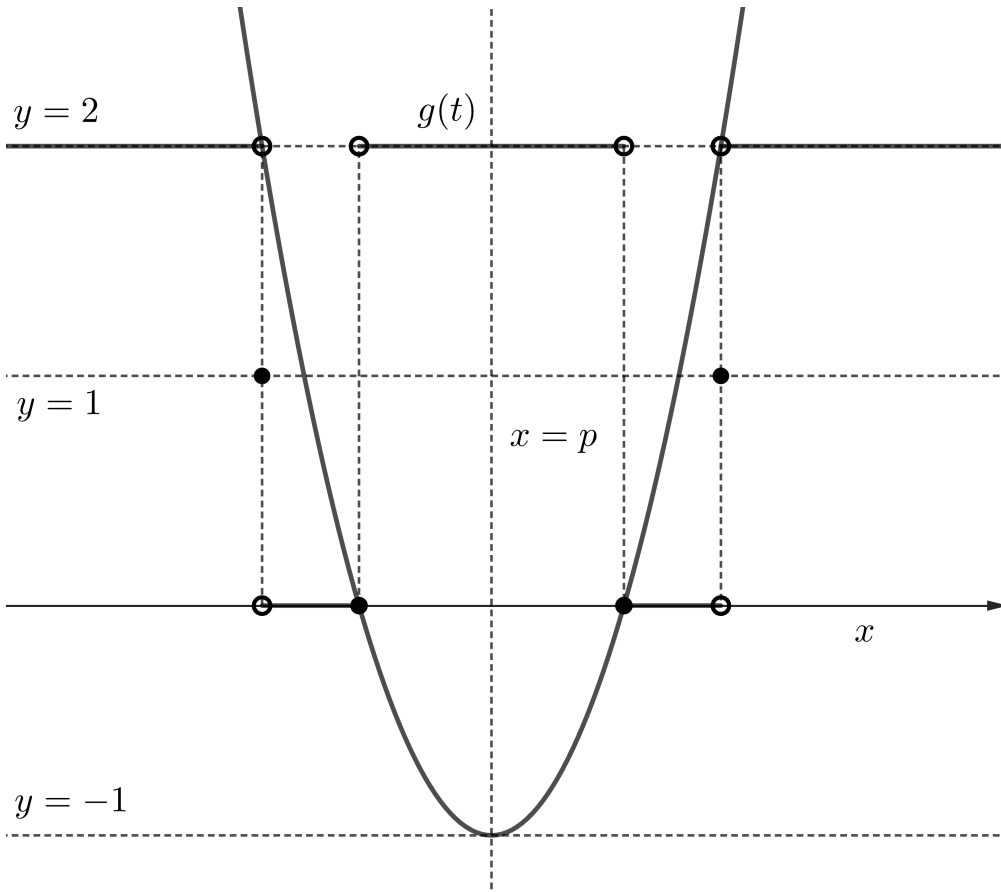
㉞을 살펴보면 $f'(t) = 0$ 일 때 $g(t) = 0$ 이므로 이 지점에서는 무조건 근을 가질 것이고,

왼쪽 구간에서 3개의 근을 갖기 위해서는 $g(t) = 1$ 일 때 $f'(t) = 1$ 이 되면 된다.
 (즉, $f'(t) = 1$ 과 수직을 이루는 접선이 변곡점에서의 접선이면 된다.)

이 때 $f'(t) = 1 \Rightarrow f'(s) = -1$ 이므로, 변곡점에서 접선의 기울기가 -1 이 되어야한다.
 (즉, 앞서 변곡점에서 접선의 기울기를 $-m$ 으로 설정했으므로, $m = 1$ 이다.) ... ㉞

따라서 삼차함수를 다음과 같이 설정할 수 있다.

$$f(x) = (x - p)^3 - (x - p) + k$$



STEP 4.

이제 남은 조건 중 일부인 $f(0) = f(2)$ 를 세웠던 식에 대입하면,
 $-p^3 + p + k = (2-p)^3 - (2-p) + k \Rightarrow p = 1$ 이다.

“마지막으로 p 가 결정되었으니, 남은 미지수는 k 뿐이다.

이는 남은 조건인 $f(0) = f(2) = g(0) + g(2) \Rightarrow k = g(0) + g(2)$ 를 통해 구할 수 있겠다.”

$f'(x) = 3(x-1)^2 - (x-1)$ 이므로, $f'(0) = f'(2) = 2$ 이고,
 ㉠, ㉡에 따라 $f'(0) = f'(2) = 2 \Rightarrow g(0) = g(2) = 2$ 이므로,

$k = g(0) + g(2) \Rightarrow k = 4$ 이다.

이에 따라

$f(x) = (x-1)^3 - (x-1) + 4$ 이므로,
 $f(6) = 125 - 5 + 4 = 124$

답: ㉣

| 무엇을 변별하였는가?

- $f'(t)$ 에서 t 에 따라 대응하는 $f'(s)$ 의 값이 $f'(x)$ 의 **치역** $[-m, \infty)$ **속에 포함되어** 있는지, **변곡점에서의 접선의 기울기와 같은지** 등을 기준으로 $g(t)$ 의 **개형을 파악**할 수 있는가?
- $g(t)$ 의 개형을 그린 후, $f'(t)$ 와 $g(t)$ 의 교점이 6개가 되기 위해서는 **$f'(t)=1$ 일 때 $g(t)=1$ 이 되어야 함**을 직관적으로 파악할 수 있는가?
- 삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이고, 변곡점에서 접선의 기울기가 -1 이 되어야 함을 이용하여 **$f(x)$ 를 $x^3 - x$ 의 평행이동식**으로 표현할 수 있는가?

16.

“지수 / 로그 계산 문제다. 진수조건 먼저 써놓고, 밑을 통일시키자.”

$$\log_3(x-3) = \log_9(4x-7) = \frac{1}{2}\log_3(4x-7) = \log_3\sqrt{4x-7} \quad (x > 3)$$

$$\begin{aligned} x-3 &= \sqrt{4x-7} \Rightarrow (x-3)^2 = 4x-7 \\ \Rightarrow (x-8)(x-2) &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore x=8 \quad (x > 3)$$

답: 8

17.

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

$$\therefore f'(0) = 11$$

답: 11

18.

$$\sum_{n=1}^9 a_n = A, \quad \sum_{n=1}^9 b_n = B \text{라 하자.}$$

이때,

$$1) A + 2B = 24 \quad \cdots \textcircled{7}$$

$$2) 4A - B = 15 \quad \cdots \textcircled{8}$$

이므로,

두 식을 연립해보자. (A, B 를 각각 구해도 되고, $\textcircled{7} - \textcircled{8} = 3(B - A)$ 임을 이용해 바로 답을 구해도 좋다.)

$$3(B - A) = 9 \Rightarrow \sum_{n=1}^9 b_n - \sum_{n=1}^9 a_n = 3$$

발문에 따르면 $b_{10} - a_{10} = 10$ 이므로,

$$\sum_{n=1}^{10} (b_n - a_n) = \sum_{n=1}^9 (b_n - a_n) + b_{10} - a_{10} = 13 \text{이다.}$$

답: 13

19.

$x < a$ 구간에서 $\frac{2}{x-3}$ 이 연속이 되기 위해선 $a \leq 3$ 이어야한다. ... ㉠

또한 구간의 경계($x = a$)에서 연속이 되어야 하므로,

$$\frac{2}{a-3} = a-4 \Rightarrow (a-3)(a-4) = 2$$

$$\Rightarrow a^2 - 7a + 10 = 0$$

$$\therefore a = 2, 5$$

㉠을 고려하면, $a = 2$ 이다.

답: 2

20.

a, b 는 전부 자연수다. 자연수 조건은 일단 체크해 놓자.

문제에서 핵심으로 준 조건은 $y = f(x)$ 가 모든 사분면을 지난다는 조건이다.

STEP 1.

일단, 상황에 따라 $f(x)$ 가 몇몇 사분면을 지날지 따져 보자.

$a - 16 \times 2^{x-b}$ 는 $x \rightarrow \infty$ 에서 음의 무한으로 발산하므로 무조건 4사분면을 지난다.

$a - \log_2(8b - 8x)$ 는 $x \rightarrow -\infty$ 에서 음의 무한으로 발산하므로 무조건 3사분면을 지난다.

그렇다면, 1, 2사분면에 초점을 두고 문제를 풀어보자.

STEP 2.

구간의 경계($x = b - 2$)를 살펴보면 연속이고, 이때 최댓값 $a - 4$ 를 갖는다.

여기서 최댓값 $a - 4$ 가 양수라면 $f(x)$ 는 1, 2사분면 중 적어도 하나를 지날 것이고, 만약 $x = 0$ 에서 함숫값이 양수라면 $f(x)$ 는 확정적으로 1, 2사분면을 지날 것이다.

$b - 2$ 의 값에 따라 $x = 0$ 가 왼쪽 구간($x \leq b - 2$)에 포함되어 있을지 오른쪽 구간($x > b - 2$)에 포함되어 있을지가 결정되므로, 이를 기준으로 경우를 나누어 따져 보자.

i) $b = 1$ 일 때,

$$f(0) = a - 16 \times 2^{-b} = a - 8 > 0 \Rightarrow a > 8$$

(a, b) 로 가능한 값 중 $a + b$ 가 최소인 경우는 $(9, 1)$ 이다. (a 가 최소)

ii) $b \geq 2$ 일 때,

$$f(0) = a - \log_2 8b = a - 3 - \log_2 b > 0 \Rightarrow a > 3 + \log_2 b$$

(a, b) 로 가능한 값 중 $a + b$ 가 최소인 경우는 $(5, 2)$ 이다.

(b 가 커질수록 가능한 a 의 최솟값도 같이 커지므로, a, b 가 모두 최소)

두 가지 경우 중, $a + b$ 가 최소인 경우는 $(5, 2)$ 이고,

이 때 $a + b = 7$ 이다.

답: 7

| 무엇을 변별하였는가?

- $f(x)$ 가 연속함수임을 알고, $f(0)$ 이 양수가 되어야 $f(x)$ 가 1, 2사분면을 모두 지날 수 있음을 파악할 수 있는가?

21.

$$(가) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)\{g(x)h(x)\}^2}{\{F(x)\}^2} = 9$$

(나) 모든 실수 x 에 대하여 $G(x) - H(x) = 2x$ 이다.

STEP 1.

“우선 (가)에서 극한식이 수렴한다는 점을 이용하여, 다항식의 차수를 추론할 수 있겠다.”

$f(x)$ 의 차수를 a , $g(x)$ 의 차수를 b , $h(x)$ 의 차수를 c 라고 하자.

이 때, $F(x)$ 의 차수는 $a+1$ 일 것이다.

따라서, (가)의 극한식이 수렴한다는 것을 이용하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)\{g(x)h(x)\}^2}{\{F(x)\}^2} = 9 \Rightarrow a + 2(b+c) = 2(a+1) \text{ 이라고 할 수 있다.}$$

$$\therefore a + 2(b+c) = 2(a+1) \Rightarrow a = 2b + 2c - 2 \dots \textcircled{1}$$

STEP 2.

“이제, $f(x) = x^a + \dots$ 라고 한다면 $F(x) = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + \dots$ 이므로,

$f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 의 최고차항의 계수가 전부 1이고 $F(x)$ 의 최고차항의 계수가 $\frac{1}{a+1}$ 임을 이용하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)\{g(x)h(x)\}^2}{\{F(x)\}^2} = \frac{1 \times (1 \times 1)^2}{\left(\frac{1}{a+1}\right)^2} = (a+1)^2 = 9 \Rightarrow a = 2 \text{임을 알 수 있다.}$$

따라서, $f(x)$ 는 이차함수($a=2$)이다.

STEP 3.

“다음으로 (나)를 살펴보자. $g(x)$ 와 $h(x)$ 가 다항함수라고 하였으므로, $G(x)$ 와 $H(x)$ 는 적어도 이차함수 이상의 차수를 가지고 있을 것이다.”

“그런데 $G(x) - H(x) = 2x$ 이므로,

이를 통해 $G(x)$ 와 $H(x)$ 는 차수가 같다($b=c$)는 것을 알 수 있다.”

①을 다시 살펴보면, ($a=2$, $b=c$ 대입)

$$a = 2b + 2c - 2 \Rightarrow b = c = 1 \text{임을 알 수 있다.}$$

따라서, $g(x)$, $h(x)$ 는 전부 일차함수($b=c=1$)이다.

STEP 4.

“결국 우리는 $g(h(100))$ 을 구해야하니, 이제 $g(x)$ 와 $h(x)$ 의 식을 구해보자.”

$g(x) = x + p$, $h(x) = x + q$ 라고 하자.

이 때, $G(x) = \frac{1}{2}x^2 + px + C_1$, $H(x) = \frac{1}{2}x^2 + qx + C_2$ 이다.

이를 (나)에 대입해보면,

$$G(x) - H(x) = (p - q)x = 2x$$

$$\Rightarrow p - q = 2 \text{이다.}$$

또한, $g(h(0)) = g(q) = p + q = 6$

$$\Rightarrow p + q = 6 \text{이다.}$$

두 식을 연립하면, $p = 4$, $q = 2$ 이다.

따라서, $g(h(100)) = 100 + p + q = 106$ 이다.

답: 106

| 무엇을 변별하였는가?

- 조건 (가)를 통해 다항식의 차수를 추론할 수 있는가?
(여기서, 다항식의 차수를 미지수로 설정하는 것이 가장 편하다.)

22.

a_1 은 정수이고, a_n 의 범위에 따라 점화식이 주어져 있다.

그리고, $|\overline{AP} - \overline{BP}|$ 가 최댓값을 갖도록 하는 'x축 위의 점 P'가 존재한다는 조건을 곁고 있다.

언뜻 보면 해석이 잘 안 되는 조건이다. 문제에서 직관적으로 조건을 파악할 수 없을 때에는, 역시 대입해보면서 상황을 파악해야 한다. 결국 이 조건을 어떻게든 해석하면 문제가 풀릴 것이란 확신을 갖고 있어야 한다.

STEP 1.

a_n 으로 가능한 정수들을 넣어보면서 무슨 소리인지 파악해 보자.

점화식의 왼쪽 부분($a_{n+1} = 2 + a_n$)을 살펴보면, 1보다 작은 경우에는 2씩 증가할 것이다.

i) 짝수 상태로 밑에서부터 올라올 경우, ... $-2 \rightarrow 0 \rightarrow 2 \rightarrow 2 \rightarrow 2 \dots$ 와 같이 2가 반복된다. ... ㉠

ii) 홀수 상태로 밑에서부터 올라올 경우, ... $-3 \rightarrow -1 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow -2 \rightarrow 0 \rightarrow 2 \dots$ 와 같이 2가 반복된다. ... ㉡

이 외에도 위에서부터 아래로 내려오는 경우($a_{n+1} = 6 - 2a_n$)도 살펴보자.

그런데, 귀납적으로 일일이 따져볼 것 없이, a_1 이 3보다 크면 결국 $a_2 \leq 0$ 인 짝수가 되어 ㉠의 절차를 밟게 될 것이고, $a_1 = 1, 2$ 일 때에도 무난하게 ㉠ 또는 ㉡의 절차를 똑같이 밟게 될 것이다.

결국 첫째항과는 무관하게 언젠가는 2가 무한반복하게 된다.

(또한, 여기서 첫째항을 제외한 나머지 항들이 5 이상의 값을 가질 수 없다는 사실까지 알아놓으면 좋다.) ... ㉢

STEP 2.

이제 수열의 대략적인 추이는 파악했으나,

아직 우리는 $|\overline{AP} - \overline{BP}|$ 가 최댓값을 갖도록 하는 점 P가 존재한다는 조건이 무엇인지 해석하지 못했다.

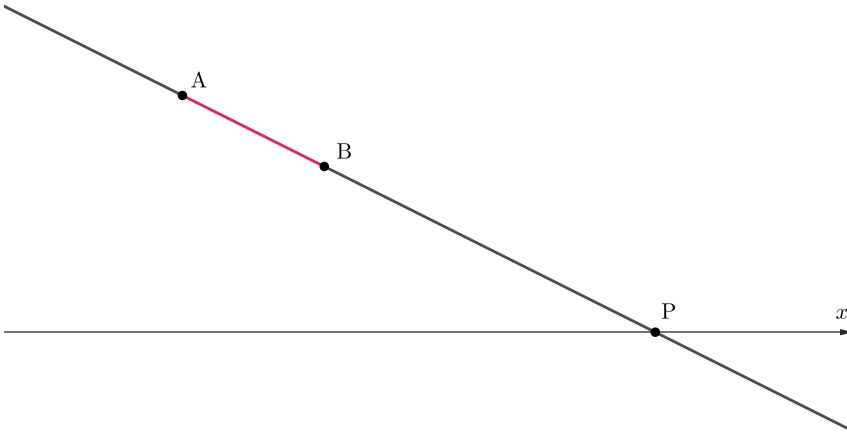
일단, $|\overline{AP} - \overline{BP}|$ 가 최솟값을 갖도록 하는 점 P는 확실히 알 것 같다. 바로 \overline{AB} 의 중점이다.

이를 염두해둔 채로, 점 P를 임의의 위치에 찍어보면서, \overline{AP} 와 \overline{BP} 의 추이를 계속 살펴보자.

그러다보면, 결국 직선 AB 위에, 그러나 선분 \overline{AB} 밖에 점 P가 존재할 때,

$|\overline{AP} - \overline{BP}|$ 가 최댓값을 가질 것이다.

(이 때, $|\overline{AP} - \overline{BP}| = \overline{AB}$ 이다.)



STEP 3.

그렇다면, 대부분의 경우 점 A나 B가 아닌 x 축 위에 점 P가 존재할 수 있을 것이고, 우리는 그러한 점 P가 존재할 수 없는 경우를 살펴보는 것이 더 빠를 것이다.

(대부분의 경우 직선 AB는 x 축을 통과하며, 점 A, B의 y 좌표는 절댓값으로 이루어져 있기에 항상 x 축 혹은 그보다 더 위에 존재하기 때문이다.)

생각해보면, 아래와 같은 두 가지 경우가 있다.

- i) 직선 AB가 x 축과 평행할 때 (x 축과 완전히 일치할 때 제외, 그러나 주어진 점화식의 특성상 그럴 경우는 없다.)
- ii) 점 A 또는 B가 x 축 위에 있을 때

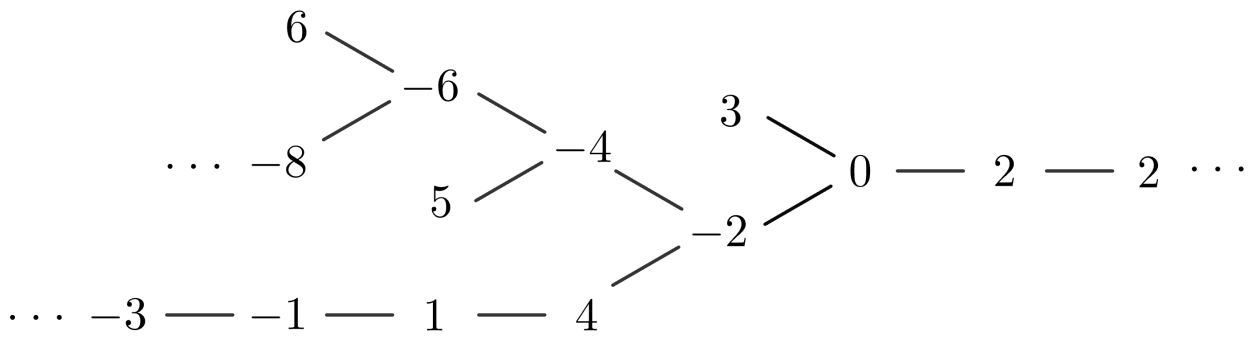
하나씩 살펴보자.

- i) 직선 AB가 x 축과 평행할 때, $|a_k| = |a_{k+1}|$ 이다.
바로 떠오르는 경우가 있다. 바로 2가 무한반복되는 경우이다.

그리고, 부호는 반대지만 절댓값이 같은 경우 또한 이에 포함된다.
이 경우를 미리 살펴보자면, $-1 \rightarrow 1, 6 \rightarrow -6$ 정도가 있겠다.

- ii) 점 A 또는 B가 x 축 위에 있을 때, $a_k = 0$ 또는 $a_{k+1} = 0$ 이다.
이는 ㉠에서 찾아볼 수 있다.

2가 무한반복되기 직전에는 필연적으로 0이 있으므로,
0에서부터 역추적을 진행해보자.
(㉠을 염두에 둔 채로 역추적을 진행하면 훨씬 수월하다.)



따라서 $a_1 = -3, -8$ 인 경우에 조건을 만족함을 알 수 있다.

답: 24

| 무엇을 변별하였는가?

- 귀납적인 나열을 통해 어떠한 경우에서든 **결국은 2가 무한반복한다는 사실**을 파악할 수 있는가?
- **점 P가 직선 AB 위에, 그러나 선분 \overline{AB} 밖에 존재할 때 $|\overline{AP} - \overline{BP}|$ 가 최댓값을 가질 것이라는 사실**을 파악하고, 조금 더 나아가 점 P가 x 축 위에 **존재할 수 없는 경우**를 파악할 수 있는가?
- 2 또는 0에서부터 실수 없이 **역추적**하여, 문제의 조건을 만족하는 경우들을 찾아낼 수 있는가?

23.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{6x} - 1}{e^{4x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{6x} - 1}{6x} \times \frac{4x}{e^{4x} - 1} \times \frac{6x}{4x} = \frac{3}{2}$$

(실전에서는, $e^x - 1$ 꼴을 외워두고 바로 $e^{6x} - 1 \Rightarrow 6x$, $e^{4x} - 1 \Rightarrow 4x$ 로 치환할 수 있도록 하자.)

답: ③

24.

$a_n = pm + q$ 라 하자. (단, d, k 는 상수이다.)

$$\text{이때, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{pm+q} + p(n+1) + q}{4^n - (pm+q)} = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{pm+q}}{4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{(p-2)n+q} = 2^{\frac{3}{2}}$$

따라서 이 극한값이 수렴하기 위해서는 $p = 2$, $q = \frac{3}{2}$ 가 되어야한다.

$$\therefore a_1 = p + q = \frac{7}{2}$$

답: ㉔

25.

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)f(x)dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sin(x)\cos(x)f(x)dx \\ &= 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\sin(x)e^{\sin x} dx \end{aligned}$$

“여기서 $\cos x$ 는 $\sin x$ 의 미분식이므로, $\sin x = t$ 로 치환하면 식이 깔끔하게 정리될 것 같다.”

$$\begin{aligned} \text{이때, } & 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\sin(x)e^{\sin x} dx \\ &= 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 t e^t dt = 2 \left[(t-1)e^t \right]_{\frac{1}{2}}^1 = e^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

답: ①

26.

$$y = \sqrt{\tan^2 t + 1} = \sqrt{\sec^2 t} = |\sec t|$$

$$\Rightarrow \sec t \left(0 < |t| < \frac{\pi}{2} \right), -\sec t \left(\frac{\pi}{2} < |t| < \pi \right) \dots \textcircled{7}$$

(우리는 $|k|$ 의 최솟값, 즉 최대한 0과 가장 가까운 k 를 구하는 것이고, 객관식 선지도 전부 π 미만으로 되어있으므로 $0 < |t| < \pi$ 만을 살펴보는 것이다.)

$$\text{" } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\pm \sec k \tan k}{-\sin k} = \frac{\pm \sin k}{-\sin k \cos^2 k} = 4 \text{이므로,}$$

$$\textcircled{7} \text{을 참고하면 } \frac{\pi}{2} < |k| < \pi \text{를 만족시켜야 } \frac{dy}{dx} = \frac{-\sin k}{-\sin k \cos^2 k} = 4 \text{가 될 수 있겠다."}$$

또한, 이 때 $\cos k = -\frac{1}{2}$ 이므로, 실수 $|k|$ 의 최솟값은 $\frac{2}{3}\pi$ 이다.

답: ㉟

27.

“ $f(t) > 0, f'(t) > 0$ 이라면, $f(t)$ ($t > 0$)은 증가함수겠다.”

또한, (나)를 살펴보면, 직선과 점 사이의 거리를 묻고 있다.

“오랜만에 꺼내보는 개념이네. **점과 직선 사이의 거리 공식**을 이용해야겠다.”

$$\frac{|2f'(t) + f(t)f'(t) + f(t)|}{\sqrt{\{f'(t)\}^2 + 1}} = f(t) \dots \textcircled{1}$$

이때, 우리가 구해야하는 $f(x)$ 의 길이를 공식으로 표현하면 아래와 같다.

$$\int_1^6 \sqrt{1 + \{f'(t)\}^2} dt$$

①을 주어진 공식꼴로 맞추어 계산해보자.

$$\begin{aligned} \int_1^6 \sqrt{1 + \{f'(t)\}^2} dt &= \int_1^6 \frac{2f'(t) + f(t)f'(t) + f(t)}{f(t)} dt = \int_1^6 \left(\frac{2f'(t)}{f(t)} + f'(t) + 1 \right) dt \\ &= [2\ln f(t) + f(t) + t]_1^6 \end{aligned}$$

이때, $f(1) = 2, f(6) = 8$ 이므로

대입하면

$$\int_1^6 \sqrt{1 + \{f'(t)\}^2} dt = 4\ln 2 + 11 \text{이다.}$$

답: ②

28.

" $g(x)$ 의 도함수를 구간별 함수로 쫓네.

해석해보면 $g'(x)$ 는 오른쪽 구간($x \geq t$)에서 $f(x)$ 이고,

$x = t$ 를 기점으로 그 왼쪽 구간($x < t$)에서부터는 $x = t$ 에서 $f(x)$ 의 접선일 것이다."

$f(x)$ 의 개형을 파악하기 위해 이를 미분해보면 다음과 같다.

$$f'(x) = a + \frac{2x}{x^2 + \frac{1}{4}} = a + \frac{8x}{4x^2 + 1}$$

" $f'(x)$ 의 개형은 기함수 $y = \frac{8x}{4x^2 + 1}$ 를 a 만큼 평행이동시킨 그래프네..?"

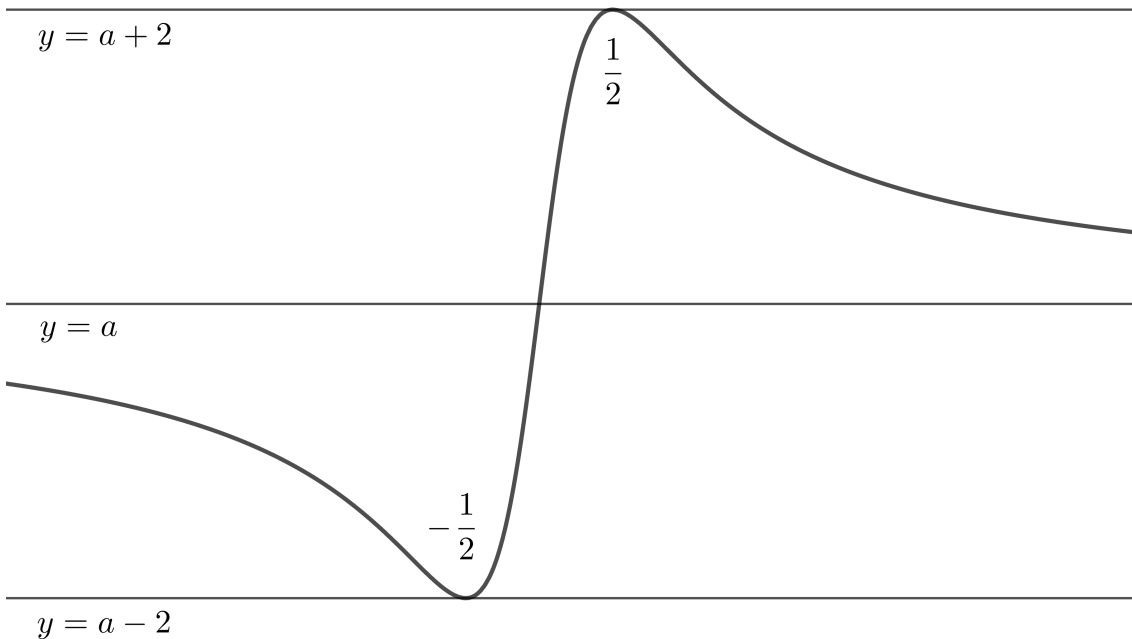
$g(x)$ 의 최솟값이 존재하지 않으려면,

$g'(x)$ 에서 $(-) \rightarrow (+)$ 로의 부호변화가 없어야 한다.

(여기까지 생각했다면, 더 이상 $g(x)$ 에 대해서는 생각할 필요가 없다. 이제 $g'(x)$ 를 파악하는 것에 집중하도록 하자.)

"아직까지 실수 t 의 개수가 1개라는 조건은 잘 와닿지가 않네...

먼저 $f'(x)$ 의 개형을 살펴보자."

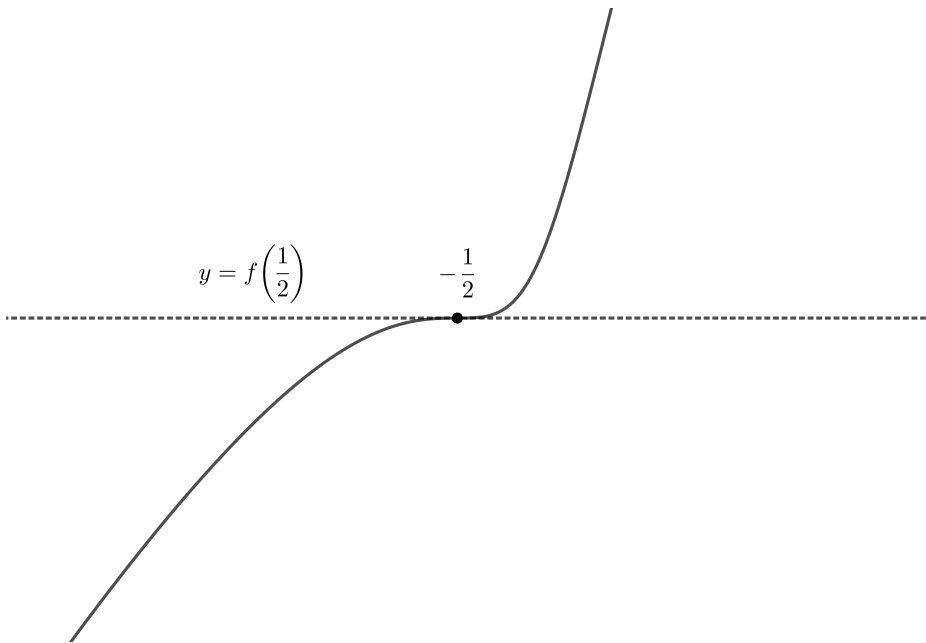


"일반적인 개형에서 최솟값을 갖지 않도록 하는 실수 t 의 개수는 없거나, 셀 수 없이 많거나 둘 중 하나일테니, 특수한 곳을 기점으로 $f'(x)$ 의 개형을 살펴봐야겠다."

- i) $a=2$ 인 경우
- ii) $a=0$ 인 경우
- iii) $a=-2$ 인 경우

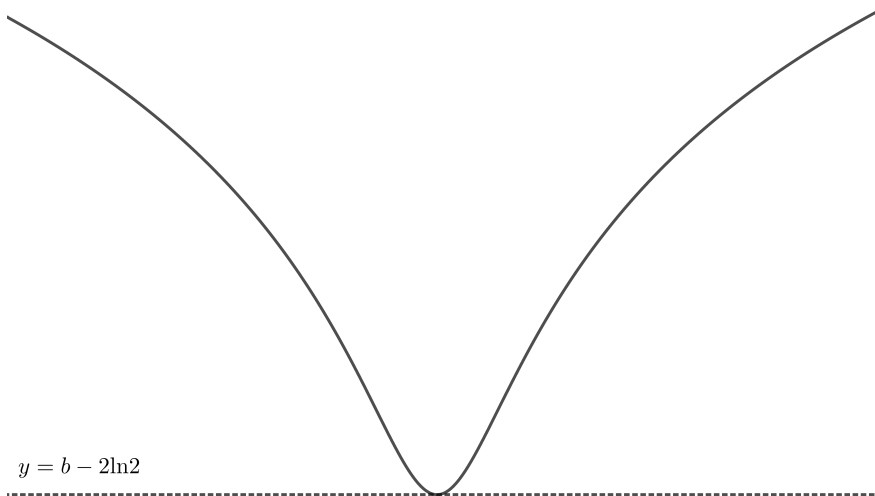
위 세가지 경우를 살펴보자.

- i) $a=2$ 인 경우, $f(x)$ 는 **증가함수**일 것이고, 최솟값이 존재하지 않기 위해서는 $g'(x)$ 의 구간별 함수에서 접선으로 갈아타는 순간이 $f(x)$ 의 접선의 기울기가 0인 순간, 즉 $x=-\frac{1}{2}$ 이 되어야겠다.
(그 이외에서는 $(-)\rightarrow(+)$ 인 순간이 반드시 존재할 수 밖에 없다.)



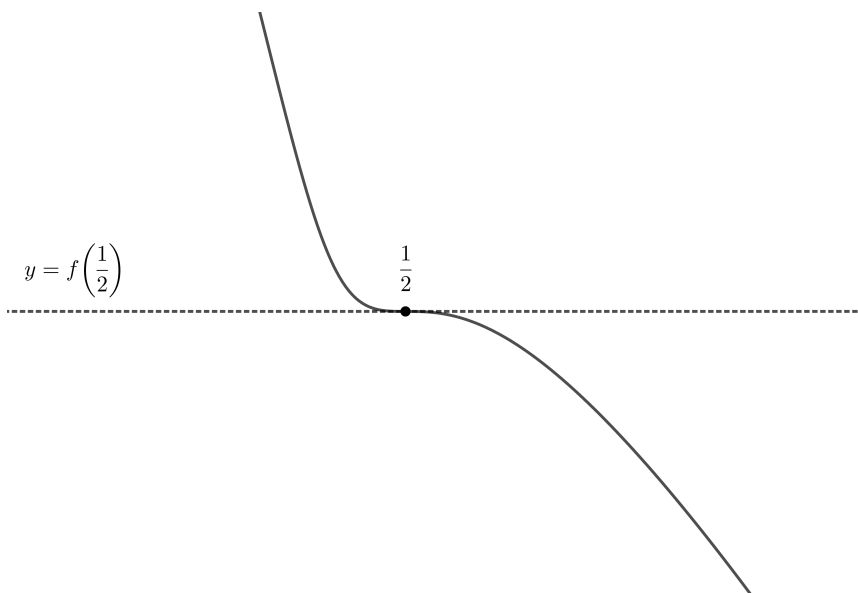
또 다른 케이스들을 살펴보자.

ii) $a=0$ 인 경우, $f(x)$ 의 개형은 다음과 같다.



이 경우에는, 최솟값이 존재하지 않도록 하는 t 가 1개가 되기는 힘들어보인다.
 b 의 값에 따라 셀 수 없이 많거나, 없거나 중 하나가 될 것 같다.

iii) $a=-2$ 인 경우, $f(x)$ 는 **감소함수**이고, 접선을 어디에 그어도 최솟값은 항상 존재하지 않는다.
 (즉, (+) \rightarrow (-)인 순간밖에 존재하지 않는다.)



따라서 $a=2$ 이고, 이때 가능한 t 는 $-\frac{1}{2}$ 뿐이다.

그러나, 최종적으로 (-) \rightarrow (+) 부호변화가 존재하지 않기 위해서는 $f\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$ 가 되어야하고,

이를 계산하면 $-1+b+\ln\left(\frac{1}{2}\right) > 0 \Rightarrow b \geq 2$ 임을 알 수 있다.

종합하면 $a=2, b \geq 2$ 일 때 문제의 조건이 성립하므로 $a+b$ 의 최솟값은 4이다.

답: ④

| 무엇을 변별하였는가?

- $f'(x)$ 의 개형은 기함수 $y = \frac{8x}{4x^2+1}$ 를 a 만큼 평행이동시킨 그래프임을 알고,

$g'(x)$ 에서 $(-) \rightarrow (+)$ 로의 부호변화의 존재여부에 초점을 맞춰 문제의 상황을 파악할 수 있는가?

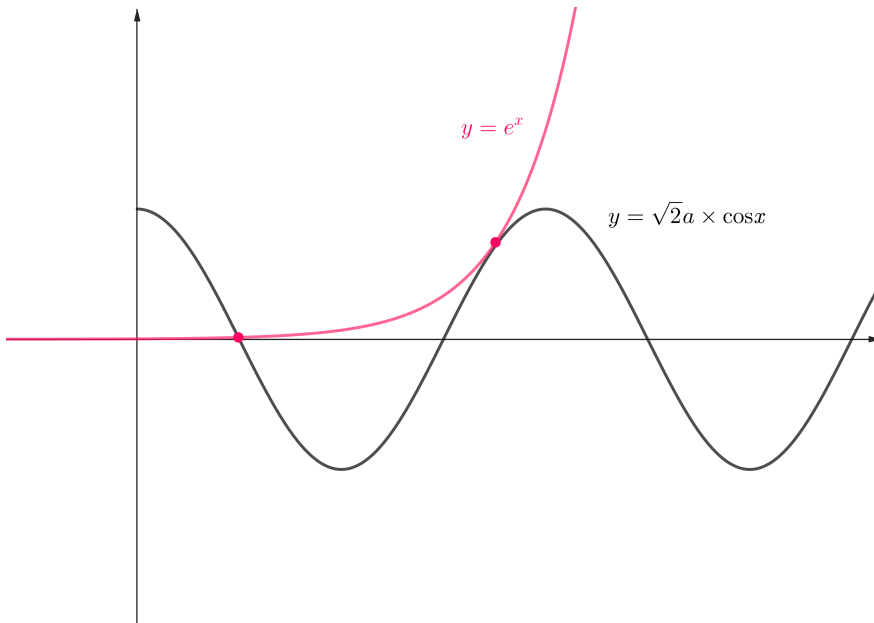
- 실수 t 의 개수가 1이 되어야한다는 조건을 염두에 둔 채로 (문제를 풀다보면 종종 잊어버린다.),

일반적인 상황에서는 실수 t 의 개수가 유한할 수 없음을 알고, 특수한 상황($a = -2, 0, 2$)를 위주로 상황을 살펴볼 수 있는가?

29.

“일단, $y = e^x$ 와 $y = \sqrt{2}a \times \cos x$ 를 그려놓고, $y = \sqrt{2}a \times \cos x$ 를 **위로 점점 당겨보면서** 교점의 개수가 짝수가 될 때를 판단해보자.” (a 를 점점 키워보는 것이다.)

“역시나, $y = e^x$ 와 $y = \sqrt{2}a \times \cos x$ 가 **접할 때** 양의 실근의 개수가 짝수가 되는 것을 알 수 있네. 그렇다면, 두 그래프가 접한다는 사실을 바탕으로 관계식을 뽑아내자.”
(문제의 특성상, 어느정도 접할 때 짝수가 될 것이라고 예상하고 들어가는 것이 좋다.)



$$e^x = \sqrt{2}a \times \cos x$$

$$e^x = -\sqrt{2}a \times \sin x$$

두 식을 연립하면, $\sin x + \cos x = 0$ 을 만족하는 x 값 중에서,
 $\sin x < 0, \cos x > 0$ 을 만족시키는 x 가 존재할 때 양의 실근의 개수가 짝수가 될 것이다.

(e^x 는 항상 양수이므로, $-\sqrt{2}a \times \sin x > 0, \sqrt{2}a \times \cos x > 0 \Rightarrow \sin x < 0, \cos x > 0$ 을 만족시켜야한다.)

먼저, 닫힌구간 $[0, 2\pi]$ 내에서 위 조건을 만족시키는 x 의 값을 살펴보면 $\frac{7}{4}\pi$ 이고,

이때 $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 이므로,

$$e^x = \sqrt{2}a \times \cos x \Rightarrow e^{\frac{7}{4}\pi} = a \text{이다.}$$

또한, 이는 각 주기마다 반복되므로, a_n 은 다음과 같이 일반화될 수 있다.

$$a_n = e^{\frac{7}{4}\pi + 2(n-1)\pi} \quad (\text{단, } n \text{은 자연수})$$

“아, 역시 a_n 이 등비수열이구나..! 그렇다면 $\frac{1}{a_n}$ 도 공비가 $\frac{1}{e^{2\pi}}$ 인 등비수열이고, 이를 이용해 급수를 계산할 수 있겠네.”

따라서, 급수를 계산하면
$$\frac{\frac{1}{e^{\frac{7}{4}\pi}}}{1 - \frac{1}{e^{2\pi}}} = \frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{e^{2\pi} - 1}$$
이다.

$$\therefore p = 2, q = \frac{1}{4}$$

따라서, $40(p+q) = 90$ 이다.

답: 90

| 무엇을 변별하였는가?

- $y = e^x$ 와 $y = \sqrt{2}a \times \cos x$ 가 **접할 때** 양의 실근의 개수가 짝수가 되는 것을 파악할 수 있는가?
- 접한다는 사실을 이용해 두 식 $e^x = \sqrt{2}a \times \cos x$, $e^x = -\sqrt{2}a \times \sin x$ 을 연립한 뒤 **가능한 a_n 의 값들을 일반화**시키고, 이를 이용해 a_n 이 등비수열임을 확인할 수 있는가?

30.

STEP 1.

" $\int_2^x g(t)dt \leq 0 \leq \int_4^x g(t)dt$ 에서 x 가 공통적으로 포함되어 있네."

이를 분리해서 본다면, 아래와 같을 것이다.

$$\int_0^x g(t)dt - \int_0^2 g(t)dt \leq 0 \leq \int_0^x g(t)dt - \int_0^4 g(t)dt$$

이를 $\int_0^x g(t)dt$ 를 기준으로 정리해주면, 아래와 같다.

$$\int_0^4 g(t)dt \leq \int_0^x g(t)dt \leq \int_0^2 g(t)dt$$

$\int_0^x g(t)dt = G(x)$ 라고 한다면, $G(4) \leq G(x) \leq G(2)$ 이므로

$G(x)$ 가 $x=4$ 에서 최솟값, $x=2$ 에서 최댓값을 갖는다고 할 수 있다.

그렇다는 것은, $g(x)$ 를 놓고 보았을 때 $x=2$ 에서 (+) \rightarrow (-)로 부호가 바뀌고, $x=4$ 에서 (-) \rightarrow (+)로 부호가 바뀐다는 뜻이다.

STEP 2.

그런데, 우리는 k 의 '최댓값'을 구해야하므로,

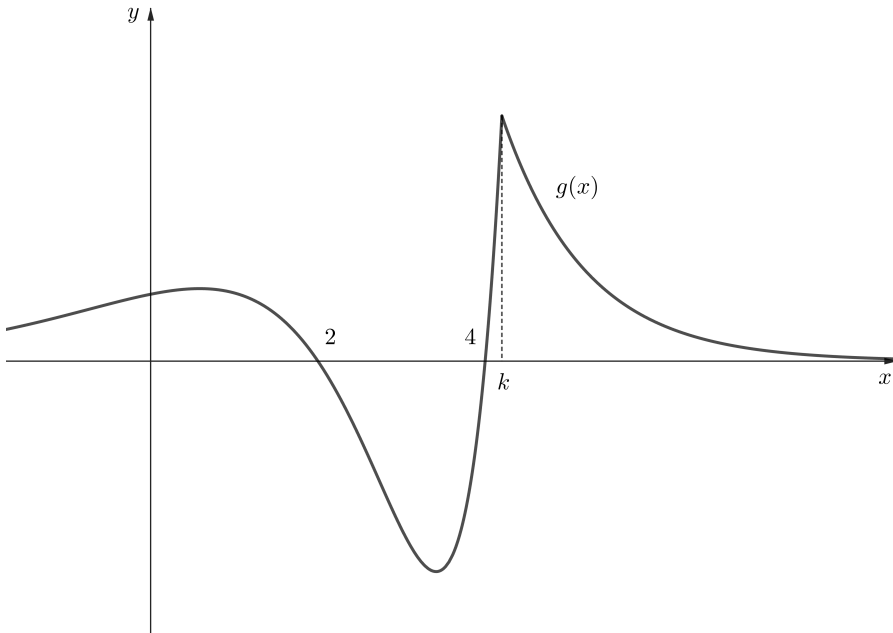
"일단 $x=k$ 가 $x=4$ 보다 오른쪽에 위치할 수 있는지, 즉 $k > 4$ 가 될 수 있는지 먼저 판단해봐야겠다."

만약 $k > 4$ 라면, $x=2, 4$ 는 전부 왼쪽 구간($x < k$)에 위치하고,

이 때 $g(x) = f(x)e^x$ ($x < k$)의 부호가 바뀌기 위해서는 $f(x)$ 의 부호가 바뀌어야 하므로 $x=2, 4$ 는 각각 $f(x)$ 의 두 실근일 것이다.

따라서, $f(x) = (x-2)(x-4)$, $g(x) = (x-2)(x-4)e^x$ ($x < k$)이고,

이에 따라 $g(x)$ 의 그래프는 다음과 같이 그려질 것이다.



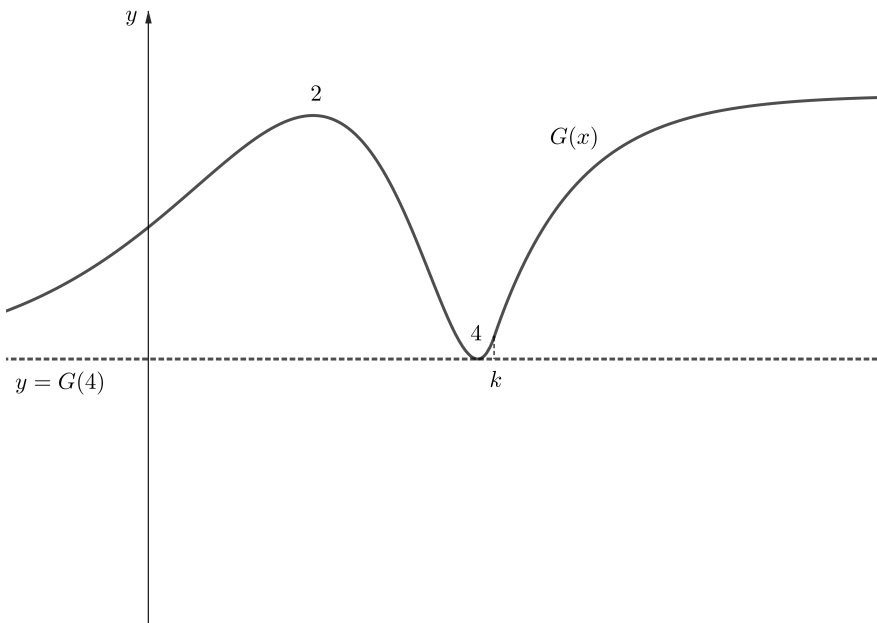
이를 토대로 $G(x)$ 의 그래프까지 그려보자.

먼저, $g(x) = (x-2)(x-4)e^x = (x-6x+8)e^x$ ($x < k$)를 적분하면

$$G(x) = (x-4)^2 e^x + C \quad (x < k) \text{이다.}$$

(앞서 $\int_0^x g(t)dt = G(x)$ 이라고 정의하였기 때문에 적분상수 C 를 구할 수는 있으나, 그다지 유의미하지 않다.)

또한, $y = f(k)e^{2k-x}$ 를 적분하면 $y = -f(k)e^{2k-x} + C$ 이므로,
 $G(x)$ 를 그려보면 아래와 같을 것이다.



STEP 3.

그런데, 위 그래프를 살펴보면 $G(x)$ 의 최댓값이 $G(2)$ 가 되기 위해서는 $G(2) \geq \lim_{x \rightarrow \infty} G(x)$ 를 만족시켜야 한다.

여기서,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} G(x) &= \int_k^{\infty} f(k)e^{2k-x} dx + G(k) = (k^2 - 6k + 8)e^k + (k^2 - 8k + 16)e^k + C \\ &= 2(k^2 - 7k + 12)e^k + C \text{이고, } G(2) = 4e^2 + C \text{이므로,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(2) \geq \lim_{x \rightarrow \infty} G(x) &\Rightarrow 4e^2 \geq 2(k^2 - 7k + 12)e^k \\ \Rightarrow 2e^2 &\geq (k^2 - 7k + 12)e^k \end{aligned}$$

따라서, $(M^2 - 7M + 12)e^M = 2e^2$ 이다.

$$\therefore p = 2, q = 2$$

따라서, $p + q = 4$ 이다.

답: 4

| 무엇을 변별하였는가?

- 주어진 식을 $\int_0^x g(t)dt$ 를 기준으로 변형하여,

$G(x)$ 가 $x=4$ 에서 최솟값, $x=2$ 에서 최댓값을 가져야 함을 파악할 수 있는가?

- $k > 4$ 일 경우, $x=2$, 4가 이차함수 $f(x)$ 의 두 실근이 됨을 파악하고, 이를 통해 $g(x)$ 와 $G(x)$ 의 개형을 파악할 수 있는가?

- $G(x)$ 의 최댓값이 $G(2)$ 가 되기 위해서는 $G(2)$ 가 $\lim_{x \rightarrow \infty} G(x)$ 보다 큰 값을 가져야 함을 알고, 이를 통해 k 의 최댓값(정확히는, k 가 최댓값일 때 $(M^2 - 7M + 12)e^M$ 의 값)을 구할 수 있는가?