2025학년도 MCS 9평 대비 모의고사
정답 및 해설

공통과목 빠른 정답

번호	정답	번호	정답	번호	정답
1	②	9	④	17	9
2	②	10	③	18	15
3	①	11	①	19	2
4	⑤	12	③	20	72
5	⑤	13	⑤	21	10
6	④	14	⑤	22	25
7	④	15	③		
8	①	16	3		

선택과목 (확률과 통계) 빠른 정답

번호	정답	번호	정답	번호	정답
23	④	26	④	29	543
24	②	27	③	30	115
25	⑤	28	①		

선택과목 (미적분) 빠른 정답

번호	정답	번호	정답	번호	정답
23	③	26	⑤	29	62
24	⑤	27	③	30	20
25	③	28	②		

선택과목 (기하) 빠른 정답

번호	정답	번호	정답	번호	정답
23	⑤	26	④	29	49
24	④	27	①	30	384
25	②	28	③		

1

정답 ②

해설

$$4^{\sqrt{2}-1}\times 2^{1-2\sqrt{2}}=2^{2\sqrt{2}-2}\times 2^{1-2\sqrt{2}}=2^{-1}=\frac{1}{2}$$

2

정답 ②

해설

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=2 \Rightarrow f'(1)=2$$
$$\Rightarrow 3+a=2 \ (\because \ f'(x)=3x^2+a)$$
$$\Rightarrow a=-1$$

3

정답 ①

해설

$$\sin\theta=\frac{2}{3} \Rightarrow \cos^2\theta=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$$
$$\Rightarrow \cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{3} \ (\because \ \sin\theta+\cos\theta<0)$$
$$\Rightarrow \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

4

정답 ①

해설

$$f'(x)=2x^3-x,\ f(0)=1 \Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{2}x^2+1$$
$$\Rightarrow f(1)=1$$

5

정답 ⑤

해설

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면 수열 $\{a_n\}$의 항이 모두 양수이므로

$$r>0,\ a_1>0$$

이다. 따라서 문제의 조건에서

$$a_4-2a_2=a_3 \Rightarrow a_2(r^2-2)=a_2r$$
$$\Rightarrow r^2-r-2=0 \ (\because \ a_2\neq 0)$$
$$\Rightarrow r=2 \ (\because \ r>0)$$

이므로

$$a_{10}=a_6\times 2^4=128$$

이다.

6

정답 ④

해설

문제의 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 2이려면

함수 $y=x^3-12x+a$의 극값이 4

이면 된다. 이때

$$y'=3x^2-12 \Rightarrow y=x^3-12x+a \text{의 극값은 } a\pm16$$

임을 고려하면

$$a+16=4 \Rightarrow a=-12$$

$$a-16=4 \Rightarrow a=20$$

이다.

∴ (모든 a의 값의 합)$=-12+20=8$

7

정답 ④

해설

$$f(x)=-2\cos^2 x-\cos x+k+2 \ (\because \ \sin^2 x+\cos^2 x=1)$$

에서

$$0\le x\le\pi \Rightarrow -1\le\cos x\le 1$$

임을 고려하면 함수 $f(x)$는

$\cos x=-\frac{1}{4}$일 때 최댓값 $k+\frac{17}{8}$,

$\cos x=1$일 때 최솟값 $k-1$

을 가지므로 문제의 조건에 의해

$$\left(k+\frac{17}{8}\right)+(k-1)=2k+\frac{9}{8}=2 \Rightarrow k=\frac{7}{16}$$

을 얻는다.

8

정답 ①

해설

문제의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$f(1)=2-a$$

이고, 문제의 식의 양변을 미분하면

$$f(x)+xf'(x)=f(x)-3ax^2+4x$$

$$\Rightarrow f'(x)=-3ax+4 \ (\because \ f(x)\text{는 다항함수})$$

$$\Rightarrow f(x)=-\frac{3}{2}ax^2+4x-2+\frac{a}{2} \ (\because \ f(1)=2-a)$$

이다. 이때 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$$-\frac{3}{2}a=1 \Rightarrow a=-\frac{2}{3} \Rightarrow f(x)=x^2+4x-\frac{7}{3}$$

이다.

$$\therefore \int_1^2 f(x)\,dx=\left[x^3+2x^2-\frac{7}{3}x\right]_1^2=6$$

9

정답 ④

해설

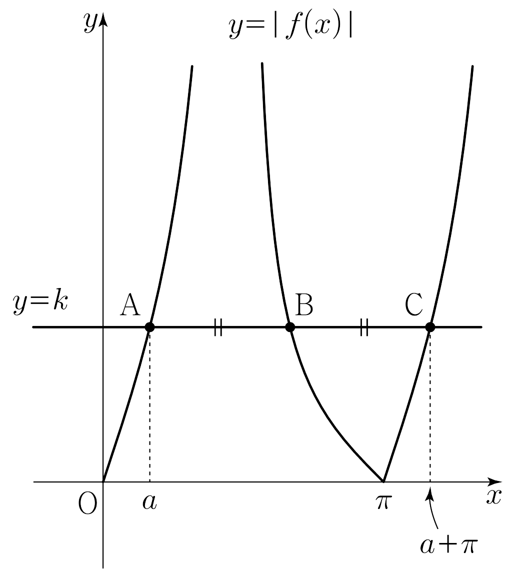
주어진 함수식에서

$$|f(x)|=\begin{cases} 3\tan x & \left(0\le x<\frac{\pi}{2},\ \pi\le x<\frac{3}{2}\pi\right) \\ -\tan x & \left(\frac{\pi}{2}<x<\pi\right) \end{cases}$$

임을 알 수 있으므로 아래 그림에서

$$\mathrm{A}(a,\ k),\ \mathrm{C}(a+\pi,\ k) \Rightarrow \mathrm{B}\left(a+\frac{\pi}{2},\ k\right)$$

임을 알 수 있다.



따라서

$$3\tan a=-\tan\left(a+\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 3\tan a-\frac{1}{\tan a}=0$$

$$\Rightarrow \tan a=\frac{\sqrt{3}}{3} \ \left(\because \ 0<a<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow k=\sqrt{3}$$

이다.

10

정답 ③

해설

$$f(x)=3f(x)-x \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{2}x$$

이므로 문제의 조건은

$$f(a)=\frac{1}{2}a=b,\ f'(a)=\frac{1}{2}$$

이고, 따라서

곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=\frac{1}{2}x$와 점 $(a,\ b)$에서 접함 ⋯ ㉠

을 알 수 있다. 이때 $y=f(x)$가 $y=b$와 점 $(0,\ b)$에서 접하므로

$$f(x)=x^2(x-a)+b$$

로 놓으면 ㉠에 의해

$$f'(a)=\frac{1}{2} \Rightarrow a=\frac{\sqrt{2}}{2},\ b=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\because \ a>0,\ \frac{1}{2}a=b\right)$$

이다.

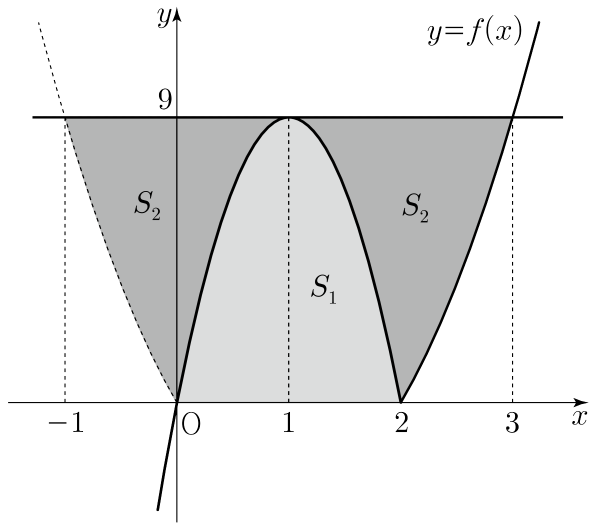
$$\therefore f(x)=x^2\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow f(\sqrt{2})=\frac{5\sqrt{2}}{4}$$

11

정답 ①

해설

함수 $y=f(x)$의 그래프는 아래 그림과 같다.



위 그림을 참고하면

$k_1=0,\ k_2=f(1)=9$

임을 알 수 있다. 이때

$3x(x-2)=9 \Rightarrow x=-1,\ 3$

이고, 곡선 $y=3x(x-2)$는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로
위 그림을 참고하면

$$S_1+2S_2=9\times\{3-(-1)\}-2\times\int_2^3 3x(x-2)dx$$
$$=36-8$$
$$=28$$

임을 알 수 있다.

12

정답 ③

해설

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자. 문제의 조건에 의해

$$|a_{m+1}|=a_{m+3} \Rightarrow \begin{cases} \cdot\ d=0\text{이고 } a_{m+1}\ge 0 \\ \cdot\ d\ne 0\text{일 때, } a_{m+1}+a_{m+3}=0 \end{cases}$$

임을 알 수 있다. 이때 $d=0$이면

모든 자연수 n에 대하여 $|a_n|-a_{n+2}=0$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{m}(|a_k|-a_{k+2})=40\text{에 모순}$$

이므로 $d\ne 0$이다. 따라서

$a_{m+1}+a_{m+3}=0 \Rightarrow a_{m+2}=0$

이고, $a_{m+3}>0$이어야 하므로 $d>0$이다. 따라서

$$\begin{cases} n<m+2\text{일 때 } a_n<0, \\ n\ge m+2\text{일 때 } a_n\ge 0 \end{cases}$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{m}(|a_k|-a_{k+2})=\sum_{k=1}^{m}(-a_k-a_{k+2})$$
$$=-2\sum_{k=1}^{m}a_{k+1}\ (\because\ \text{등차중항})$$
$$=-m(a_2+a_{m+1})$$
$$=dm(m+1)\ (\because\ a_{m+2}=0)$$

이다. 문제의 조건에 의해 d가 정수이고

$dm(m+1)=40$

을 만족시키는 자연수 m이 존재해야 하므로

① $m=1,\ d=20$ 또는

② $m=4,\ d=2$

의 경우가 가능하다. 따라서

①의 경우, $a_3=0 \Rightarrow a_5=40$

②의 경우, $a_6=0 \Rightarrow a_5=-2$

이다.

∴ (모든 a_5의 값의 합)$=40-2=38$

13

정답 ⑤

해설

> 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여
> $\cos(\angle\mathrm{BDA})=$ (가) 이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=k$라 하면 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의해

$$\overline{\mathrm{AB}}=k,\ \overline{\mathrm{AD}}=2k,\ \cos(\angle\mathrm{BAD})=\frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow \overline{\mathrm{BD}}^2=k^2+(2k)^2-2\times k\times 2k\times\frac{1}{4}=4k^2$$
$$\Rightarrow \overline{\mathrm{BD}}=2k$$

이다. 따라서

$$\cos(\angle\mathrm{BDA})=\frac{(2k)^2+(2k)^2-k^2}{2\times 2k\times 2k}=\frac{7}{8}$$

이다.

$\therefore\ p=$ (가) $=\dfrac{7}{8}$

> $\angle\mathrm{BAD}=\theta$라 하면, 두 삼각형 BCD, BED는 서로 합동이므로 $\angle\mathrm{BCD}=\angle\mathrm{BED}=\pi-\theta$이다.
> 삼각형 FAB의 외접원과 선분 BD가 만나는 점 중 B가 아닌 점을 P라 하자.
> $\angle\mathrm{FPD}=\theta$이므로 $\angle\mathrm{FPD}+\angle\mathrm{FED}=\pi$이고,
> 점 P는 삼각형 FED의 외접원 위에 있다.
> $\angle\mathrm{EBD}=\angle\mathrm{CBD}=\angle\mathrm{BDA}$이므로
> $\overline{\mathrm{BF}}=$ (나) $\times\overline{\mathrm{AB}}$이고,

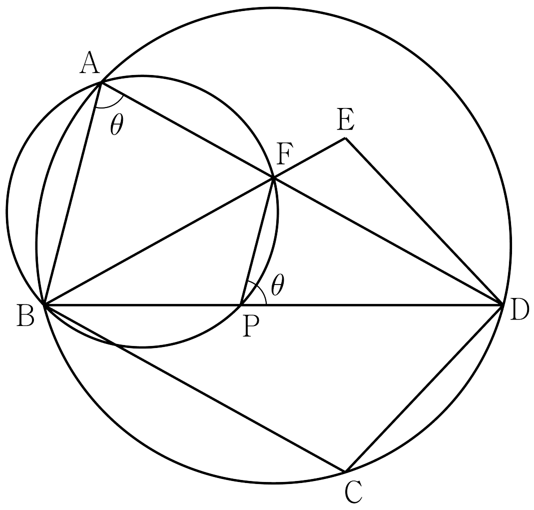
$\angle\mathrm{BDA}=\angle\mathrm{FBD}$이고, $\overline{\mathrm{BD}}=2k$이므로 삼각형 FBD에서

$$2\times\overline{\mathrm{BF}}\times\cos(\angle\mathrm{FBD})=\overline{\mathrm{BD}} \Rightarrow \overline{\mathrm{BF}}=\frac{8}{7}k$$

이다.

$\therefore\ q=$ (나) $=\dfrac{8}{7}$

> 삼각형 FBP에서 사인법칙에 의하여
> $$\frac{\overline{\mathrm{BF}}}{\sin(\angle\mathrm{BPF})}=\frac{\overline{\mathrm{PF}}}{\sin(\angle\mathrm{FBP})}$$
> 이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=\boxed{(다)}$ 이다.



한편, 위 그림을 참고하면 $\angle\mathrm{FPB}=\pi-\theta$이므로 삼각형 FBP에서 사인법칙에 의해

$$\frac{\overline{\mathrm{BF}}}{\sin(\angle\mathrm{BPF})}=\frac{\overline{\mathrm{PF}}}{\sin(\angle\mathrm{FBP})}$$

$$\Rightarrow \frac{8k}{7\sin\theta}=\frac{8}{7\sin(\angle\mathrm{FBP})}$$

$$\Rightarrow k=\frac{\sin\theta}{\sin(\angle\mathrm{FBP})}=\frac{\sqrt{15}}{4}\times\frac{8}{\sqrt{15}}=2$$

이다.

$\therefore\ r=\boxed{(다)}=2$

$\therefore\ p\times q\times r=\frac{7}{8}\times\frac{8}{7}\times 2=2$

[참고]
이 문제는

[2025 수능특강 67페이지 2번 문제] -[24008-0123]

의 연계문항입니다. 같이 풀어보세요!

14

정답 ⑤

해설

함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$의 치역은

$g(x)\neq 0$인 모든 x에 대하여 $\frac{f(x)}{g(x)}$ $\cdots$ ㉠

이고, 함수 $\lim\limits_{t\to x}\frac{f(t)}{g(t)}$의 치역은

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ g(x)\neq 0\text{인 모든 }x\text{에 대하여 }\frac{f(x)}{g(x)}\\ \bullet\ f(x)=g(x)=0\text{인 어떤 }x\text{에 대하여 }\lim\limits_{t\to x}\frac{f(t)}{g(t)}\end{array}\right\}\cdots(\bigstar)$$

이므로, ㉠과 문제의 조건을 고려하면

$0\not\in A\ \Rightarrow f(x)=0$일 때 $g(x)=0$

임을 알 수 있다. 따라서

$g(x)=x(x-2)(x^2+ax+b)$ (단, a, b는 실수)

로 놓으면 ㉠의 집합은

$\frac{f(t)}{g(t)}=\frac{(t-2)^2}{t^2+at+b}$ (단, $t\neq 0$, 2이고 $t^2+at+b\neq 0$)

임을 알 수 있고, (★)에 의해

집합 $B-A$의 원소는 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(t)}{g(t)}=\frac{4}{b}$, $\lim\limits_{t\to 2}\frac{f(t)}{g(t)}=0$

$\Rightarrow b=1$ ($\because$ 문제의 조건)

임을 알 수 있다.

또한

$B-A=\{0,4\}\ \Rightarrow A$는 0, 4를 원소로 갖지 않음

이므로

$\frac{f(t)}{g(t)}=4\ \Rightarrow 3t^2+4(a+1)t=0$

을 만족시키는 t가 0, 2뿐이어야 한다. 따라서

$12+8(a+1)=0$ 또는 $a=-1\ \Rightarrow a=-\frac{5}{2}$ 또는 $a=-1$

임을 알 수 있다.

$\therefore\ g(x)=x(x-2)\left(x^2-\frac{5}{2}x+1\right)$ 또는 $x(x-2)(x^2-x+1)$

$\therefore\ \alpha+\beta=160$

15

정답 ③

해설

(가) 조건에 의해

$a_2=4a_1-1$ $\cdots$ ㉠

이고, 이때 a_1이 자연수이므로

a_2가 a_1의 배수 $\Leftrightarrow$ $a_1=1$

이다. 따라서

$a_1=1$이면 이후 3, 1, 3, 1이 반복됨

을 알 수 있다.

$a_1\neq 1$이면 ㉠에서

$a_2=4a_1-1\ \Rightarrow a_3=4a_1\ \Rightarrow a_4=4a_1-4$ $\cdots$ ㉡

이므로 a_1이 2 또는 4인 경우와 그렇지 않은 경우로 나누어 생각해보자.

(i) $a_1=2$ 또는 4인 경우

$a_1=2$이면 이후 7, 8, 4, 6, 5, 6, 5, $\cdots$

임을 알 수 있고,

$a_1=4$이면 이후 15, 16, 12, 13, 14, 15, $16\cdots$

임을 알 수 있다.

(ii) $a_1 \neq 2,\ 4$ 인 경우

㉡에서

$$a_5 = 4a_1 - 3$$

이므로

$$a_1 = 3 \text{이면 이후 } 11,\ 12,\ 8,\ 9,\ 9\ \cdots$$

임을 알 수 있고, $a_1 \neq 3$ 이면

$$a_6 = 4a_1 - 2,\ a_7 = 4a_1 - 1,\ a_8 = 4a_1\ \cdots$$

임을 알 수 있다.

따라서 정리하면

$a_1 = 1$ 인 경우, $a_{12} = 3$

$a_1 = 2$ 인 경우, $a_{12} = 5$

$a_1 = 3$ 인 경우, $a_{12} = 9$

$a_1 = 4$ 인 경우, $a_{12} = 15$

$a_1 > 4$ 인 경우, $a_{12} = 4a_1 - 1$

이므로 구하는 값은

$$(\text{모든 } a_{12} \text{의 값의 합}) = 3+5+9+15+\sum_{n=5}^{10}(4n-1) = 206$$

이다.

16

정답 3

해설

함수 $f(x)$는 $x=1$에서도 연속이므로

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1+} f(x) = f(1)$$

이다. 따라서 주어진 조건에 의해

$$2f(1) - 3 = f(1) \Rightarrow f(1) = 3$$

이다.

17

정답 9

해설

양수 a의 네제곱근 중 실수인 것은 $-a^{\frac{1}{4}},\ a^{\frac{1}{4}}$ 이므로

$$\left(-a^{\frac{1}{4}}\right)\times a^{\frac{1}{4}} = -a^{\frac{1}{2}} = 6-a$$

$$\Rightarrow a - \sqrt{a} - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+2) = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{a} = 3$$

$$\Rightarrow a = 9$$

이다.

18

정답 15

해설

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면

함수 $y=|x|$가 $x=0$에서 미분가능하지 않으므로 $a<0$이어야 한다.

따라서

$x=a$에서 연속 $\Rightarrow 3a^2+b=-a$

$x=a$에서 좌/우 미분계수 같음 $\Rightarrow -1=6a$

을 고려하면

$$a = -\frac{1}{6},\ b = \frac{1}{12}$$

이다.

$$\therefore\ 60(b-a) = 60\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{6}\right) = 15$$

19

정답 2

해설

$$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}} = k\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1}{2}k^2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{15} S_n = \frac{k^2}{2}(\sqrt{16}-1) = \frac{3}{2}k^2 = 6$$

$$\Rightarrow k = 2$$

20

정답 72

해설

$$f(t) = -4 \Leftrightarrow t^3 - 3t^2 - t + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t+1)(t-1)(t-3) = 0$$

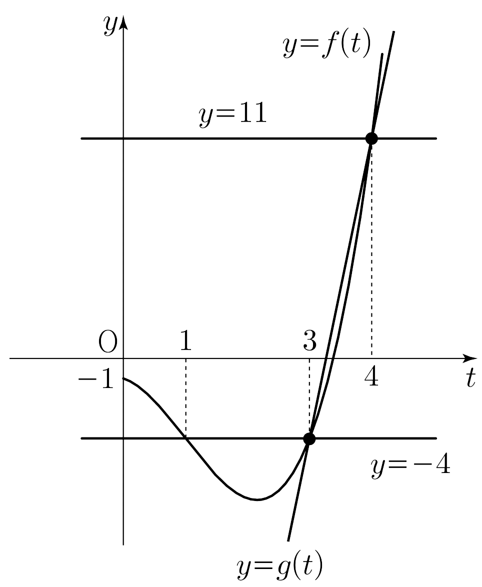
이므로 점 P의 위치가 A와 같은 순간은 $t=1$ 또는 3이다.

또한

$$f(t) = 11 \Leftrightarrow t^3 - 3t^2 - t - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-4)(t^2+t+3) = 0$$

이므로 점 P의 위치가 B와 같은 순간은 $t=4$이다.



한편,

$$g'(t)=a$$

이므로 위 그림을 참고하면

두 점 P, Q가 만날 때, 운동 방향이 서로 같음

$\Rightarrow$ 두 점 P, Q는 시각 $t=3$, 4에서 만남

$\Rightarrow g(3)=-4$, $g(4)=11$

$\Rightarrow g(t)=15t-49$

이다. 따라서

$$s=f'(3)=8,\ a=15,\ b=-49$$

이다.

$\therefore\ s+a-b=8+15-(-49)=72$

21

정답 10

해설

원점 O가 삼각형 APQ의 무게중심이므로

직선 OP가 선분 AQ의 중선

$\Rightarrow$ 점 A와 Q의 중점이 y축 위의 점

임을 알 수 있고, 따라서

$\mathrm{A}\left(k,\ 2a^{k}\right)$, $\mathrm{Q}\left(-k,\ 2a^{-k}\right)$ (단, $k<0$)

로 놓을 수 있다. 또한 무게중심의 성질에 의해

$$\overline{\mathrm{OB}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OA}}\ \Rightarrow\ \mathrm{B}\left(-\frac{k}{2},\ -a^{k}\right)$$

이고, 점 B가 곡선 $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ 위의 점이므로

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{2}}=a^{k}\ \Rightarrow\ a=\sqrt{2}$$

이다. 따라서

점 B가 선분 PQ의 중점 $\Rightarrow \dfrac{2\times(\sqrt{2})^{-k}-3\sqrt{2}}{2}=-(\sqrt{2})^{k}$

$\Rightarrow (\sqrt{2})^{-k}+(\sqrt{2})^{k}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow k=1$

이므로

$$m=\frac{2a^{-k}+3\sqrt{2}}{-k}=5\sqrt{2}$$

이다.

$\therefore\ a\times m=\sqrt{2}\times5\sqrt{2}=10$

22

정답 25

해설

집합 A의 정의와 함수 $g(x)$가 연속임을 고려하면

$F(x)=F(0)$ 또는 $F(x)=F(2)$이면 $f(x)=0$ $\cdots$ (★)

이어야 하므로

$$f(0)=f(2)=0$$

이다. 이때 함수 $F(x)$가 $x=2+$에서 $F(x)$가 증가하는 경우,

$F'(3)<0\ \Rightarrow\ F'(c_1)=0$인 실수 $c_1\,(2<c_1<3)$이 존재함

($\because$ 사잇값정리)

을 알 수 있고, 이때

$F(c_2)=F(2)$인 실수 $c_2\,(2<c_1<c_2)$가 존재함

$\Rightarrow f(c_1)=f(c_2)=0$

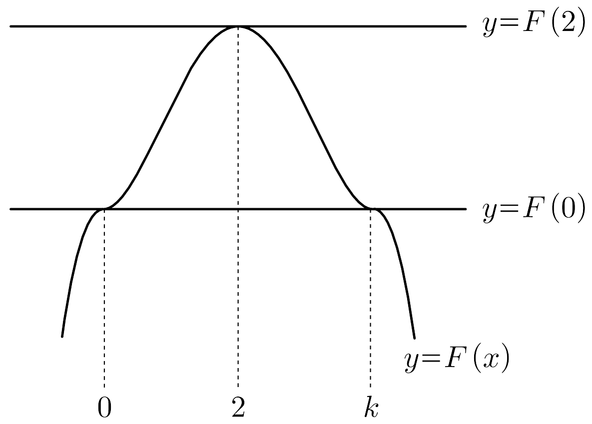
이므로 $f(x)$가 삼차함수임에 모순이다. 따라서

함수 $F(x)$는 $x=2-$에서 감소

$\Rightarrow F(k)=F(0)$인 $k\,(k>2)$가 존재함

$\Rightarrow f(x)=ax(x-2)(x-k)$ (단, $a>0$) ($\because$ (★))

임을 알 수 있다.



따라서 $F(0)<F(2)$임을 고려하면 함수 $y=F(x)$의 그래프는 위 그림과 같아야 하므로

$$\int_{0}^{k}f(x)dx=0\ \Rightarrow\ k=4$$

임을 얻고, 문제의 조건에서

$$F'(3)=-12\ \Rightarrow\ f(3)=-12\ \Rightarrow\ a=4$$

를 얻는다.

한편, $y=F(x)$의 그래프를 참고하면

$y=F(x)$는 직선 $x=2$에 대하여 대칭

$\Rightarrow F(x)=\displaystyle\int_{1}^{x}g(t)dt$의 서로 다른 모든 실근의 곱이 -5

$\Rightarrow$ 실근은 -1, 5

임을 알 수 있다. 따라서

$$F(-1)=\int_{1}^{-1}g(x)dx$$

이다. 이때

$$G(x)=\int_{0}^{x}f(t)dt=x^2(x-4)^2$$

이라 하면

$$F(x)=\begin{cases}G(x)+p & (0\le x\le 4)\\ p-G(x) & (x<0,\ x>4)\end{cases}\ \text{(단, } p\text{는 상수)}$$

이고,

$$\int_{1}^{-1}g(x)dx=-\int_{0}^{1}f(x)dx\ \ (\because\ x<0\text{일 때 } g(x)=0)$$
$$=-G(1)=-9$$

이므로

$$F(-1)=\int_{1}^{-1}g(x)dx\ \Rightarrow\ p-G(-1)=-9$$
$$\Rightarrow p=16$$

이다.

$\therefore\ F(1)=G(1)+16=25$

선택과목 (확률과 통계) 정답 및 해설

23

정답 ④

해설

$$\mathrm{E}(X)=6 \Rightarrow 12p=6 \Rightarrow p=\frac{1}{2}$$

$\therefore\ \mathrm{V}(X)=12p(1-p)=3$

24

정답 ②

해설

다항식 $(2x-1)^6$의 전개식에서 일반항은

$${}_6\mathrm{C}_r\times(2x)^r\times1^{6-r}=2^r\times{}_6\mathrm{C}_r\times x^r\quad(0\le r\le 6)$$

이므로 x^2의 계수는 $r=2$일 때,

$$2^2\times{}_6\mathrm{C}_2=60$$

이다.

25

정답 ⑤

해설

주사위를 두 번 던져서 나온 눈의 수의 곱이 짝수인 사건을 A, 두 눈의 수가 서로소인 사건을 B라 하면 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}$$

이다. 이때

$$\begin{aligned}n(A)&=(\text{전체 경우의 수})-(\text{둘 다 홀수인 경우의 수})\\&=6^2-3^2\\&=27\end{aligned}$$

이고, 이때, 두 수가 모두 짝수이면 서로소일 수 없으므로
두 수가 서로소인 경우는 순서에 관계없이

$(1,\ \text{짝수})$ 또는 $(2,3)$, $(3,4)$, $(5,\ \text{짝수})$

인 경우뿐이다. 따라서

$$n(A\cap B)=6+2+2+6=16$$

이다.

$\therefore$ (구하는 확률) $=\dfrac{16}{27}$

26

정답 ④

해설

문제의 조건에 의해

$$\overline{x_1}=\frac{a+(160-a)}{2}=80,\ a=\overline{x_1}-1.96\times\frac{5}{7}$$

이고

$$b=\overline{x_2}-1.96\times\frac{5}{14}$$

이므로

$$a+60=2b \Rightarrow \overline{x_2}=70$$

이다. 따라서

$$c=\overline{x_2}+1.96\times\frac{5}{14}=70+0.7=70.7$$

이다.

27

정답 ③

해설

(가) 조건에 의해 홀수는 3번 이하로 나와야 한다.
이때 짝수만 네 번 나오는 경우는

$(2,2,4,4)$이므로 나열한 네 수의 합이 12

이고, (나) 조건에 모순이다. 따라서

(ⅰ) 홀수 3번, 짝수 1번 또는
(ⅱ) 홀수 2번, 짝수 2번 또는
(ⅲ) 홀수 1번, 짝수 3번

의 경우만 가능하다.

(ⅰ) 홀수 3번, 짝수 1번 나오는 경우
짝수에 따라 경우를 나누어보면 (나) 조건에 의해

- 짝수가 2이면 세 홀수에 관계없이 가능
- 짝수가 4이면 세 홀수가 $(1,1,3)$만 가능

이므로

$$((\text{ⅰ})\text{의 경우의 수})={}_4\mathrm{C}_1\times2\times\frac{3!}{2!}+\frac{4!}{2!}=36$$

이다.

(ⅱ) 홀수 2번, 짝수 2번 나오는 경우
4가 두 번 나오면 나열한 네 수의 합의 최솟값이 10이므로
(나) 조건을 만족시키지 못한다.

따라서 두 짝수는 $(2,2)$ 또는 $(2,4)$이어야 하고, (나) 조건에 의해

- 두 짝수가 $(2,2)$이면 두 홀수가 $(3,3)$은 불가능
- 두 짝수가 $(2,4)$이면 두 홀수가 $(1,1)$만 가능

임을 알 수 있다. 따라서

$$((\text{ⅱ})\text{의 경우의 수})={}_4\mathrm{C}_2\times(2^2-1)+\frac{4!}{2!}=18+12=30$$

이다.

(ⅲ) 홀수 1번, 짝수 3번 나오는 경우

(나) 조건을 고려하면 가능한 경우는

$(1, 2, 2, 4)$

뿐이므로

$$((\text{iii})\text{의 경우의 수}) = \frac{4!}{2!} = 12$$

이다.

$\therefore$ (구하는 경우의 수) $= 36+30+12=78$

28

정답 ①

해설

주머니 A에서 처음 꺼낸 공에 적힌 수에 따라 경우를 나누어 생각해보자.

(i) 주머니 A에서 처음 1을 꺼낸 경우

처음 주머니 A에서 1을 꺼내고, $(\times\frac{1}{3})$

주머니 B에서 2가 적힌 검은 공을 꺼내야 한다. $(\times\frac{1}{3})$

시행이 끝난 뒤, 주머니 A에는 공이 총 4개 들어 있으므로

$$((\text{i})\text{에서의 확률}) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{36}$$

이다.

(ii) 주머니 A에서 처음 2를 꺼낸 경우

처음 주머니 A에서 2를 꺼내고, $(\times\frac{1}{3})$

주머니 B에서 2가 적힌 검은 공을 포함하여 꺼내야 한다. $(\times\frac{2}{3})$

시행이 끝난 뒤, 주머니 A에는 공이 총 5개 들어 있으므로

$$((\text{ii})\text{에서의 확률}) = \frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{45}$$

이다.

(iii) 주머니 A에서 처음 3을 꺼낸 경우

처음 주머니 A에서 3을 꺼내고, $(\times\frac{1}{3})$

시행이 끝난 뒤에 주머니 A에 공이 6개 들어있으므로

$$((\text{iii})\text{에서의 확률}) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{18}$$

이다.

따라서 (i)~(iii)에 의해

$$(\text{구하는 확률}) = \frac{1}{36}+\frac{2}{45}+\frac{1}{18}=\frac{23}{180}$$

이다.

29

정답 543

해설

딸기를 받은 학생의 수에 따라 경우를 나누어 생각해보자.

(i) 딸기를 받은 학생의 수가 3인 경우

세 학생 모두가 딸기와 수박을 적어도 1개씩 받으므로

참외는 자유롭게 나누어 주면 된다. 따라서

$$((\text{i})\text{의 경우의 수}) = {}_3H_1\times{}_3H_3=30$$

이다.

(ii) 딸기를 받은 학생의 수가 2인 경우

① 딸기를 받은 학생과 수박을 받은 학생이 일치할 경우

편의상 A, B가 딸기와 수박을 받는다고 하자. $(\times{}_3C_2)$

이 두 학생에게만 딸기와 수박을 나누어준 뒤, $(\times{}_2H_2\times{}_2H_1)$

C에게 참외를 적어도 1개 나누어주면 되므로 $(\times{}_3H_2)$

$$((\text{ii})\text{-①의 경우의 수}) = {}_3C_2\times{}_2H_2\times{}_2H_1\times{}_3H_2=108$$

이다.

② 딸기를 받은 학생 중 수박을 받지 않는 학생이 있는 경우

편의상 A, B가 딸기를 받는다고 하고, $(\times{}_3C_2)$

B, C가 수박을 받는다고 하자. $(\times{}_2C_1)$

①과 마찬가지로 A, B에게만 딸기를 나누어 주고 $(\times{}_2H_2)$

B, C에게만 수박을 나누어준 뒤 $(\times{}_2H_1)$

참외를 자유롭게 나누어주면 되므로 $(\times{}_3H_3)$

$$((\text{ii})\text{-②의 경우의 수}) = {}_3C_2\times{}_2C_1\times{}_2H_2\times{}_2H_1\times{}_3H_3=360$$

이다. 따라서

$$((\text{ii})\text{의 경우의 수}) = 108+360=468$$

이다.

(iii) 딸기를 받는 학생의 수가 1인 경우

편의상 A만 딸기를 받는다고 하자. $(\times{}_3C_1)$

① A만 수박을 받는 경우,

참외를 나머지 두 학생에게 적어도 한 개씩 나누어주어야 하므로

$$((\text{iii})\text{-①의 경우의 수}) = 3\times3=9$$

이다.

② 편의상 B만 수박을 받는다고 하면, $(\times{}_2C_1)$

C에게 참외를 적어도 1개 나누어주면 되므로 $(\times{}_3H_2)$

$$((\text{iii})\text{-②의 경우의 수}) = {}_3C_1\times{}_2C_1\times{}_3H_2=36$$

이다. 따라서

$$((\text{iii})\text{의 경우의 수}) = 9+36=45$$

이므로 (i)~(iii)에 의해

$$(\text{구하는 경우의 수}) = 30+468+45=543$$

이다.

30

정답 115

해설

각 시행에서 얻는 점수를 X_1, X_2, X_3이라 하면

$$X_1+X_2+X_3=3\overline{X}$$

이므로

$$\overline{X}>15 \Leftrightarrow X_1+X_2+X_3>45$$

이다. 이때 각 시행에서 뒤집힌 카드에 적힌 숫자의 합을 Y_1, Y_2, Y_3이라 하면

$$X_n+Y_n=21 \ (n=1,\,2,\,3)$$

이므로

$$X_1+X_2+X_3>45 \Leftrightarrow Y_1+Y_2+Y_3<18 \ \cdots \ (\bigstar)$$

이고,

$Y_n=$(n번째 시행에서 나온 주사위의 눈의 수의 약수의 합)

이다. 이때 1부터 6까지의 자연수의 약수의 합은 다음 표와 같다.

눈의 수	1	2	3	4	5	6
약수의 합	1	3	4	7	6	12

위 표를 참고하여 6의 눈이 나온 횟수를 기준으로 (★)을 만족시키는 경우를 구해보자.

(ⅰ) 6의 눈이 나오지 않는 경우

① 4의 눈이 나오지 않는 경우,

5의 눈이 3번 나오는 경우만 제외하면 (★)을 만족시키므로

((ⅰ)-①의 경우의 수)$=4^3-1=63$

이다.

② 4의 눈이 나오는 경우,

(★)을 만족시키지 않는 경우는 나오는 순서와 관계없이

$$(4,\,4,\,4),\ (3,\,4,\,4),\ (4,\,4,\,5),\ (4,\,5,\,5)$$

의 눈이 나오는 경우이므로

((ⅰ)-②의 경우의 수)$=(5^3-4^3)-(1+3\times3)=51$

이다.

(ⅱ) 6의 눈이 나오는 경우

(★)을 만족시키는 경우는 나오는 순서와 관계없이

$$(1,\,2,\,6),\ (1,\,3,\,6),\ (1,\,1,\,6)$$

의 눈이 나오는 경우이므로

((ⅱ)의 경우의 수)$=3!\times2+3=15$

이다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의해

((★)을 만족시키는 경우의 수) $=63+51+15=129$

이고, 전체 경우의 수가 $6^3=216$이므로

$$\mathrm{P}(\overline{X}>15)=\frac{129}{216}=\frac{43}{72}$$

이다.

$\therefore\ p+q=72+43=115$

선택과목 (미적분) 정답 및 해설

23

정답 ③

해설

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-3n}{2n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{3}{n}}{2+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}$$

24

정답 ⑤

해설

$$\frac{dx}{dt}=e^t,\ \frac{dy}{dt}=e^t+1 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{e^t+1}{e^t}$$

이므로 $t=\ln 2$이면

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2}$$

이다.

25

정답 ③

해설

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{n+2k}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1+\frac{2}{n}k}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}$$

이므로 구하는 값은

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1+\frac{2}{n}k}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}&=\int_0^1\frac{1+2x}{\sqrt{1+x}}dx\\&=\int_0^1\left(2\sqrt{x+1}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)dx\\&=\left[\frac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}-2(x+1)^{\frac{1}{2}}\right]_0^1\\&=\frac{2\sqrt{2}+2}{3}\end{aligned}$$

이다.

26

정답 ⑤

해설

$$\sin\alpha=\frac{2}{3}\ \Rightarrow\ \cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}\quad\left(\because\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$$

이고, 문제의 조건에서

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{3},\ 0<\alpha+\beta<\pi\ \Rightarrow\ \sin(\alpha+\beta)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

이므로 삼각함수의 덧셈정리에 의해

$$\begin{aligned}\cos\beta=\cos(\alpha+\beta-\alpha)&=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{2}{3}\\&=\frac{\sqrt{5}+4\sqrt{2}}{9}\end{aligned}$$

이다.

27

정답 ③

해설

두 점 A, B의 좌표는 각각 $\mathrm{A}(t,\,0)$, $\mathrm{B}(t,\,\sin t)$이고, 점 B에서 $y=\sin x$에 그은 접선의 방정식은

$$y=\cos t(x-t)+\sin t$$

이므로 점 C의 좌표는

$$\mathrm{C}(t-\tan t,\,0)$$

이다. 따라서

$$S(t)=\frac{1}{2}\times\sin t\times\tan t\quad\left(\because\ 0<t<\frac{\pi}{2}\right)$$

이므로

$$\lim_{t\to0+}\frac{S(t)}{t^2}=\lim_{t\to0+}\frac{\sin t\tan t}{2t^2}=\frac{1}{2}$$

이다.

28

정답 ②

해설

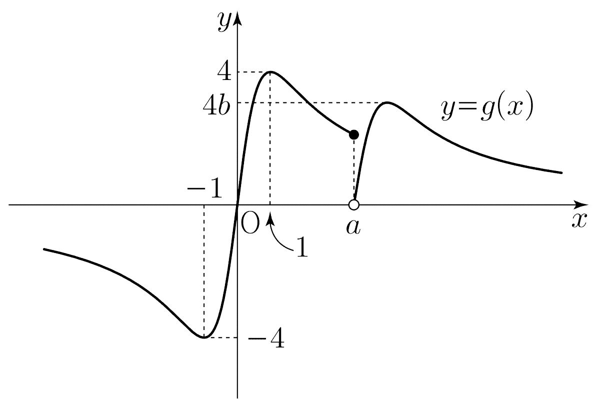
함수 $h(t)$가 $t=k$에서 연속이면

$$\lim_{t\to k-}h(t)\times\lim_{t\to k+}h(t)=\{h(k)\}^2,\ h(k)\text{는 음이 아닌 정수}$$

이므로 문제의 조건을 만족시키지 않는다. b의 부호에 따라 경우를 나누어 생각해보자.

(i) $0<b<1$인 경우

함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 아래 그림과 같다.



위 그림을 참고하면

$h(t)$는 $t=-4,\ 0,\ f(a),\ 4b,\ 4$

에서만 불연속일 수 있고, 이때

$$\lim_{t\to-4-}h(t)\times\lim_{t\to-4+}h(t)=0,$$

$$\lim_{t\to0-}h(t)\times\lim_{t\to0+}h(t)=6,$$

$$\lim_{t\to4-}h(t)\times\lim_{t\to4+}h(t)=0$$

이므로, b의 값을 바꾸어 가며 $y=g(x)$의 개형을 생각해보면 문제의 조건을 만족시키는 경우는

$k=0$ 또는 $k=f(a)=4b$

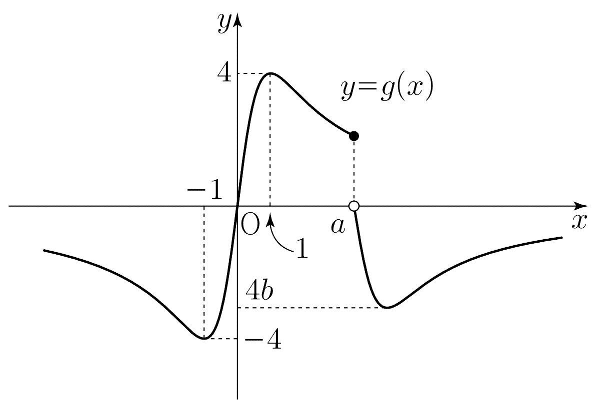
인 경우뿐임을 알 수 있다. 이때 b의 값이 정해지면 a의 값이 유일하게 결정되므로

$4b$는 4보다 작은 자연수 $\Rightarrow$ 순서쌍 $(a,\,b)$의 개수는 3

임을 알 수 있다.

(ii) $-1<b<0$인 경우

함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 아래 그림과 같다.



위 그림을 참고하면

$h(t)$는 $t=-4,\ 0,\ f(a),\ 4b,\ 4$

에서만 불연속일 수 있고, 이때

$$\lim_{t\to f(a)-}h(t)\times\lim_{t\to f(a)+}h(t)=2,$$

$$\lim_{t\to4b-}h(t)\times\lim_{t\to4b+}h(t)=8$$

이므로 문제의 조건을 만족시키는 경우는

$$\begin{cases}\bullet\ f(a)\text{가 정수일 때 } k=f(a)\\\bullet\ k=4b\end{cases}$$

임을 알 수 있다. 따라서

$0<f(a)<4,\ x>1$에서 함수 $f(x)$는 감소

임을 고려하면 조건을 만족시키는 순서쌍 $(a,\,b)$의 개수는 $3\times3=9$이다.

$\therefore$ (모든 순서쌍 $(a,\,b)$의 개수$)=3+9=12$

29

정답 62

해설

모든 자연수 k에 대하여

$$b_{2k}=(2^k-3^{-k})^2=4^k-2\times\left(\frac{2}{3}\right)^k+\frac{1}{9^k},$$

$$b_{2k-1}=\frac{1}{a_{2k-1}}$$

이므로

$$T_{2n}=\sum_{k=1}^{n}(b_{2k-1}+b_{2k})$$

이고, 문제의 조건에서

$$\lim_{n\to\infty}T_{2n}\text{ 이 수렴 }\Rightarrow\lim_{n\to\infty}(b_{2n-1}+b_{2n})=0$$

$$\Rightarrow a_{2n-1}=-\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\Rightarrow a_n=-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\ (\because\ \{a_n\}\text{의 공비가 양수})$$

임을 알 수 있다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{-\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}$$

이고

$$\lim_{n\to\infty}T_{2n}=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{-2\times\left(\frac{2}{3}\right)^k+\left(\frac{1}{9}\right)^k\right\}$$

$$=\frac{-\frac{4}{3}}{1-\frac{2}{3}}+\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}}$$

$$=-\frac{31}{8}$$

이다. 따라서

$$p=\frac{31}{4},\ k=-\frac{31}{8}\ \Rightarrow\ 16(p+k)=16\times\frac{31}{8}=62$$

이다.

30

정답 20

해설

문제의 조건에서

$$\int_t^{t+1}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx=2+\cos\pi t$$

이고, 정수 n에 대하여 $t=2n-1$이면 문제의 조건에 의해

구간 $[2n-1,\,2n]$에서 곡선 $y=f(x)$의 길이가 1

$\Rightarrow$ 구간 $[2n-1,\,2n]$에서 $\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}=1$

$\Rightarrow$ 구간 $[2n-1,\,2n]$에서 $f'(x)=0$ $\cdots$ ㉠

이다. 따라서 $2n-1<k<2n$인 k에 대하여

$$\int_k^{k+1}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

$$=\int_k^{2n}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx+\int_{2n}^{k+1}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

$$=(2n-k)+\int_{2n}^{k+1}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx\ (\because\ ㉠)$$

$$=2+\cos\pi k$$

이므로

$$\int_{2n}^{k+1}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx=k+\cos\pi k+2-2n$$

이고, 위 식의 양변을 k에 대하여 미분하면

$$\sqrt{1+\{f'(k+1)\}^2}=1-\pi\sin\pi k$$

$$\Rightarrow\ \{f'(k+1)\}^2=(\pi\sin\pi k)^2-2\pi\sin\pi k$$

이므로 $2n<x<2n+1$에서

$$\{f'(x)\}^2=\{\pi\sin\pi(x-1)\}^2-2\pi\sin\pi(x-1)$$

$$=(\pi\sin\pi x)^2+2\pi\sin\pi x\ \cdots\ ㉡$$

을 얻는다.

따라서 ㉠, ㉡을 고려하면 $\left[0,\,\frac{9}{2}\right]$에서

$$\{f'(x)\}^2=\begin{cases}0 & (1\le x\le 2,\ 3\le x\le 4)\\ (\pi\sin\pi x)^2+2\pi\sin\pi x & (\text{그 외의 경우})\end{cases}$$

이다. 따라서

$$\int_0^{\frac{9}{2}}\{f'(x)\}^2\cos\pi x\,dx=\int_0^1\{f'(x)\}^2\cos\pi x\,dx$$

$$+\int_2^3\{f'(x)\}^2\cos\pi x\,dx$$

$$+\int_4^{\frac{9}{2}}\{f'(x)\}^2\cos\pi x\,dx$$

이고, 위의 적분식에서 $\pi\sin\pi x=t$로 치환하면 $\pi^2\cos\pi x=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int_0^{\frac{9}{2}}\{f'(x)\}^2\cos\pi x dx=\int_0^{\pi}\frac{t^2+2t}{\pi^2}\,dt$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\left[\frac{t^3}{3}+t^2\right]_0^{\pi}$$

$$=1+\frac{\pi}{3}$$

이다.

$$\therefore\ a=1,\ b=\frac{1}{3}\ \Rightarrow\ 60\times a\times b=20$$

선택과목 (기하) 정답 및 해설

23

정답 ⑤

해설

$$\vec{a}+2\vec{b}=(x-2,\ 2+2y)=(3,\ 4)\ \Rightarrow\ x=5,\ y=1$$

$\therefore\ x+y=5+1=6$

24

정답 ④

해설

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{9}=1$ 의 두 점근선의 기울기의 곱은

$$\left(\frac{3}{a}\right)\times\left(-\frac{3}{a}\right)=-\frac{9}{a^2}$$

이고, 문제의 조건에 의해 이 값이 -1 이어야 하므로

$$a^2=9\ \Rightarrow \text{두 초점의 좌표는 각각 } (3\sqrt{2},\ 0),\ (-3\sqrt{2},\ 0)$$
$$\Rightarrow (\text{두 초점 사이의 거리})=6\sqrt{2}$$

이다.

25

정답 ②

해설

점 $\mathrm{B}(a,\ 1,\ 0)$을 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $\mathrm{C}(-a,\ 1,\ 0)$이고,

구 S의 중심은 선분 AB의 중점 $\mathrm{M}\left(\frac{a+1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1\right)$

이다. 이때 세 점 A, B, C가 모두 구 S 위의 점이므로

$$\overline{\mathrm{MA}}=\overline{\mathrm{MC}}\ \Rightarrow\ \left(\frac{a-1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2=\left(\frac{3a+1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2$$
$$\Rightarrow\ a^2-2a+1=9a^2+6a+1$$
$$\Rightarrow\ 8a^2+8a=0$$
$$\Rightarrow\ a=-1\ (\because\ a\neq 0)$$

이다. 따라서

$$(\text{구 } S\text{의 반지름의 길이})=\overline{\mathrm{MA}}=\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}=\frac{3}{2}$$

이므로

$$(\text{구 } S\text{의 부피})=\frac{4}{3}\pi\times\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{9}{2}\pi$$

이다.

26

정답 ④

해설

사각형 ABCD가 평행사변형이므로

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right),\ \overrightarrow{\mathrm{CM}}=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

이다. 따라서 문제의 조건에서

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CM}}=-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}\left(1^2+\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\frac{1}{2}\times 2^2\right)$$
$$=-\frac{1}{2}\left(3+\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)$$

의 값이 $-\frac{1}{2}$ 이므로 $\angle\mathrm{BAD}=\theta$라 하면

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=-\frac{4}{3}\ \Rightarrow\ \cos\theta=-\frac{2}{3}\ \Rightarrow\ \sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

이다. 따라서

$$(\text{사각형 ABCD의 넓이})=\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\sin\theta=\frac{2\sqrt{5}}{3}$$

이다.

27

정답 ①

해설

점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 하면
문제의 조건에 의해

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ \mathrm{H}\text{는 선분 BD 위의 점}\\ \bullet\ \overline{\mathrm{CH}}=\overline{\mathrm{HD}}\ (\because\ \overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{AD}})\end{array}\right\}\ \cdots\ ㉠$$

임을 알 수 있다. 이때 삼수선의 정리에 의해

$$\angle\mathrm{ACB}=\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ \angle\mathrm{HCB}=\frac{\pi}{2}$$

이므로 $\overline{\mathrm{CH}}=x$라 하면 ㉠에 의해

삼각형 BCH는 $\overline{\mathrm{BC}}=2,\ \overline{\mathrm{CH}}=x,\ \overline{\mathrm{BH}}=4-x$인 직각삼각형

$$\Rightarrow\ (4-x)^2=2^2+x^2\ (\because\ \text{피타고라스의 정리})$$
$$\Rightarrow\ x=\frac{3}{2}$$

임을 얻는다. 따라서

$$\overline{\mathrm{BH}}=\frac{5}{2}\ \Rightarrow\ \cos(\angle\mathrm{HBC})=\frac{4}{5}$$
$$\Rightarrow\ \overline{\mathrm{CD}}^2=4^2+2^2-2\times4\times2\times\frac{4}{5}\ (\because\ \text{코사인법칙})$$
$$\Rightarrow\ \overline{\mathrm{CD}}=\frac{6}{\sqrt{5}}$$

이고, 삼각형 HCD가 $\overline{\mathrm{CH}}=\overline{\mathrm{DH}}$인 이등변삼각형이므로

$$\cos(\angle\mathrm{HCD})=\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{2\,\overline{\mathrm{CH}}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$
$$\Rightarrow\ \sin(\angle\mathrm{HCD})=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

이다. 따라서 점 H에서 직선 CD에 내린 수선의 발을 H′이라 하면
삼수선의 정리에 의해

$$\cos\theta = \frac{\overline{HH'}}{\overline{AH'}} = \frac{\frac{3}{2\sqrt{5}}}{\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{3}}{6} \ (\because \ \triangle ACD\text{는 정삼각형})$$

이다.

28

정답 ③

해설

(가) 조건에서 선분 AB의 중점을 M이라 하면

$$\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP}) = \overrightarrow{AB} \cdot (2\overrightarrow{MP}) = 0$$

⇒ 직선 AB와 직선 MP가 서로 수직

임을 알 수 있으므로 주어진 원을 $C: x^2 + y^2 = 4$라 하면

$$\begin{cases} \bullet \text{ 점 M이 선분 AB의 중점} \\ \bullet \text{ 두 점 A, B가 원 } C \text{ 위의 점} \end{cases}$$

⇒ 점 P는 직선 OM 위에 있음 ⋯ ㉠

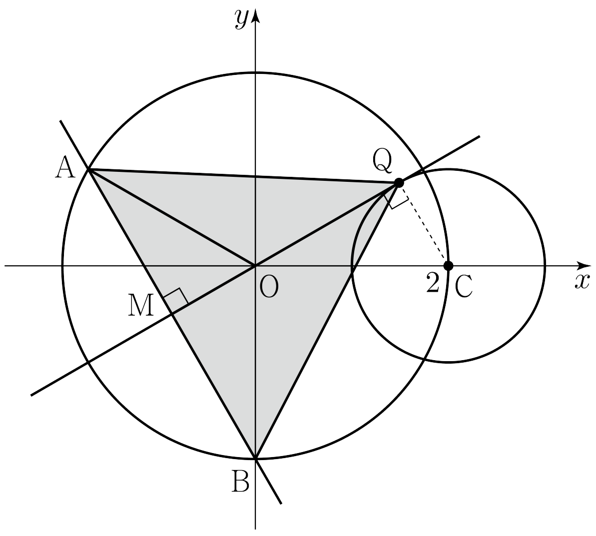
을 알 수 있다. 이때 (나) 조건에 의해

점 P는 원 $(x-2)^2 + y^2 = 1$ 위에 있으므로

㉠을 만족시키는 P가 하나뿐

⇒ 직선 OM과 원 $(x-2)^2 + y^2 = 1$의 접점이 점 Q

이다.



따라서 위 그림과 같이 편의상 점 Q의 y좌표를 양수라 하면

$$\overline{OC} = 2, \ \overline{CQ} = 1 \ \Rightarrow \ \angle COQ = \frac{\pi}{6}$$

이고, 문제의 조건에서

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OQ} = -\sqrt{3} \ \Rightarrow \ \overline{OM} \times \overline{OQ} = \sqrt{3} \ \left(\because \ \angle OMA = \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \ \overline{OM} = 1 \ (\because \ \overline{OA} = 2, \ \overline{CQ} = 1)$$

이므로

$$(\text{삼각형 ABQ의 넓이}) = \overline{MQ} \times \overline{MA} = (1+\sqrt{3}) \times \sqrt{3} = 3 + \sqrt{3}$$

이다.

29

정답 49

해설

$$y^2 = 4a \ \Rightarrow \ y = \pm 2\sqrt{a}$$

에서 점 A의 좌표는 $A(a, -2\sqrt{a})$이므로 점 F′의 좌표는 $F'(0, -2\sqrt{a})$이다.

따라서 점 F′을 초점으로 하고 직선 $x = a$를 준선으로 하는 포물선의 방정식은 포물선 $y^2 = -2ax$를 x축의 방향으로 $\frac{a}{2}$만큼, y축의 방향으로 $-2\sqrt{a}$만큼 평행이동한 포물선과 같으므로

$$(y + 2\sqrt{a})^2 = -2a\left(x - \frac{a}{2}\right)$$

이다. 이때, 점 B의 x좌표를 b라 하면

$$(0 + 2\sqrt{a})^2 = -2a\left(b - \frac{a}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \ 4a = -2a\left(b - \frac{a}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \ b = \frac{a}{2} - 2$$

이므로 점 B의 좌표는 $B\left(-2 + \frac{a}{2}, 0\right)$이다.

한편, 포물선의 정의에 의해 $\overline{AF} = a + 1$이고, 문제의 조건에 의해

$$\overline{AF} - \overline{CF'} = \frac{11}{8} \ \Rightarrow \ \overline{CF'} = a - \frac{3}{8} \ \cdots \ ㉠$$

이다. 또한, 포물선의 정의에 의해

$$\overline{BF'} = \frac{a}{2} + 2 \ \left(\because \ b = \frac{a}{2} - 2\right)$$

이다. 따라서 포물선의 성질에 의해

$$\frac{1}{\overline{CF'}} + \frac{1}{\overline{BF'}} = \frac{2}{a} \ \Rightarrow \ \frac{2}{a+4} + \frac{1}{a - \frac{3}{8}} = \frac{2}{a}$$

$$\Rightarrow \ a^2 - 4a + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \ a = 3 \ (\because \ a > 1)$$

임을 얻고, 따라서

$$\overline{BC} = \frac{9}{2} + \frac{13}{8} = \frac{49}{8}$$

이다.

$\therefore \ 8 \times \overline{BC} = 49$

30

정답 384

해설

평면 OAC는 구 S의 중심을 지나므로 점 P는 점 O를 중심으로 하고 점 A를 지나는 원 위의 점이다. 이 원을 C라 하자.

점 B에서 평면 OAC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\begin{cases} \text{직선 OH가 원 } C\text{와 만나는 두 점 중} \\ \text{H와 가까운 점이 } \mathrm{P_1},\ \text{H와 먼 점이 } \mathrm{P_2} \end{cases}$$

임을 알 수 있다. 이때 문제의 조건에서

선분 $\mathrm{P_1P_2}$가 선분 AC와 점 C에서 만남

$\Rightarrow$ 점 H는 직선 OC 위의 점

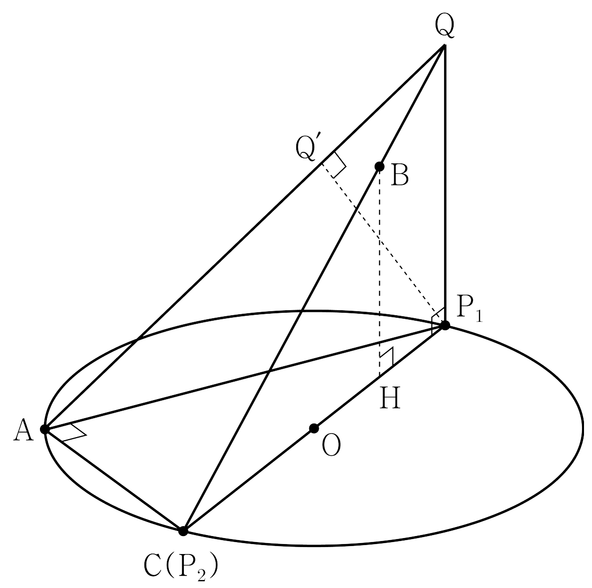
임을 알 수 있으므로

$$\overline{\mathrm{OB}}=4,\ \overline{\mathrm{OC}}=4,\ \overline{\mathrm{BC}}=4\sqrt{3}$$

임을 고려하면

$$\angle\mathrm{OCB}=\frac{\pi}{6}\ \Rightarrow\ \overline{\mathrm{BH}}=2\sqrt{3},\ \overline{\mathrm{CH}}=6$$

이고, $\mathrm{C}=\mathrm{P_2}$임을 알 수 있다.



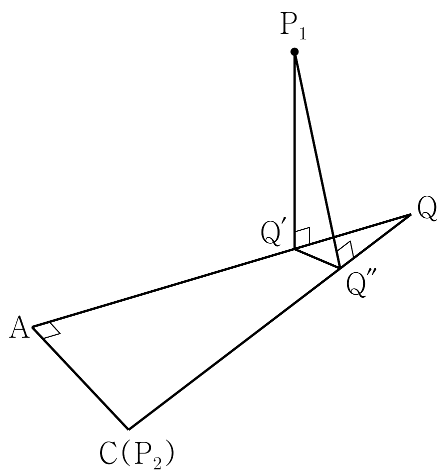
따라서 평면 OAC와 수직이고 점 $\mathrm{P_1}$을 지나는 직선이 평면 BAC와 만나는 점을 Q라 하면

$$\overline{\mathrm{CH}}:\overline{\mathrm{CP_1}}=3:4\ \Rightarrow\ \overline{\mathrm{P_1Q}}=\frac{8}{\sqrt{3}}$$

이고 삼각형 $\mathrm{AP_1Q}$에서 $\overline{\mathrm{AP_1}}=4\sqrt{3}$이므로 점 $\mathrm{P_1}$에서 평면 ACQ에 내린 수선의 발을 Q′이라 하면

$$\overline{\mathrm{QQ'}}=\frac{8}{\sqrt{3}}\times\frac{2}{\sqrt{13}}=\frac{16}{\sqrt{39}}$$

이다.



이때 점 Q′에서 직선 CQ에 내린 수선의 발을 Q″이라 하면 삼각형 ACQ에서

$$\overline{\mathrm{AC}}=4,\ \overline{\mathrm{CQ}}=\frac{16}{\sqrt{3}}\ \Rightarrow\ \sin(\angle\mathrm{AQC})=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow\ \overline{\mathrm{Q'Q''}}=\frac{16}{\sqrt{39}}\times\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{4}{\sqrt{13}}$$

임을 얻는다. 이때 삼수선의 정리에 의해

두 평면 $\mathrm{BP_1P_2}$와 BAC가 이루는 이면각의 크기를 θ라 하면

$$\theta=\angle\mathrm{P_1Q''Q'}$$

이므로

$$\tan\theta=\frac{\overline{\mathrm{P_1Q'}}}{\overline{\mathrm{Q'Q''}}}=\frac{\frac{8}{\sqrt{3}}\times\frac{3}{\sqrt{13}}}{\frac{4}{\sqrt{13}}}=2\sqrt{3}\ \Rightarrow\ \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{13}}$$

이다. 따라서 삼각형 $\mathrm{BP_1P_2}$의 넓이가 $8\sqrt{3}$임을 고려하면

$$(\text{구하는 정사영의 넓이})=8\sqrt{3}\times\cos\theta=\frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$$

이다.

$$\therefore\ 26k^2=26\times\frac{192}{13}=384$$