

2025학년도 우로보로스 모의고사 1회 정답과 해설

1. ① 2. ③ 3. ④ 4. ④ 5. ④
 6. ① 7. ② 8. ⑤ 9. ② 10. ③
 11. ⑤ 12. ④ 13. ⑤ 14. ① 15. ⑤
 16. 3 17. 264 18. 24 19. 2 20. 4
 21. 100 22. 203

23. ④ 24. ② 25. ③ 26. ③ 27. ⑤
 28. ④
 29. 5 30. 44

< 공통과목 >

1. $\left(\frac{5}{\sqrt[3]{5}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2}{5^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$

2. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+2h) - f(4-h)}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} 3 \times \frac{f(4+2h) - f(4-h)}{(4+2h) - (4-h)}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} 3 \times \frac{f(4+2h) - f(4-h)}{3h}$

이고 함수 $f(x)$ 가 $x=4$ 에서 미분가능하므로 위 극한은 $3f'(4)$ 로 수렴한다.

$f'(x) = x^2 - 5$ 이므로
 $3f'(4) = 33$

3. $\sum_{n=1}^5 \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^5 \frac{1}{(n+1) - n} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$
 $= \sum_{n=1}^5 \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$
 $= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right)$
 $= 1 - \frac{1}{6}$
 $= \frac{5}{6}$

4. 주어진 그림에서
 $f(0) = 3, \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$ 이므로
 $3 + 2 \times 2 = 7$

5. $f(x) = (x-5)(x^2+x-1)$ 에서
 $f'(x) = x^2+x-1+(x-5)(2x+1)$ 이므로
 $f'(5) = 29$

6. $\cos\theta = \frac{4}{5}$ 이고 $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$ 이므로
 $\tan\theta = -\frac{3}{4}$ 이고
 $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan\theta}$
 $= -\frac{4}{3}$

7. $x^4 + 4x^3 + 5 + k = 0$ 에서 $x^4 + 4x^3 + 5 = -k$
 이므로 곡선 $y = x^4 + 4x^3 + 5$ 와 직선 $y = -k$ 의 서로 다른 교점의 개수를 조사하면 된다.
 $f(x) = x^4 + 4x^3 + 5$ 라 하면
 $f'(x) = 4x^3 + 12x^2$ 이므로
 함수 $f(x)$ 는 $x < -3$ 에서 감소하고
 $x = -3$ 에서 극소, $x > -3$ 에서 증가한다.
 따라서 $f(-3) = -k$ 이므로
 $k = 22$

8. 주어진 식을 변형하면
 $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{4\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta + \frac{4}{\tan\theta}$

이다. $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\tan\theta > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\tan\theta + \frac{4}{\tan\theta} \geq 2\sqrt{\tan\theta \times \frac{4}{\tan\theta}} = 4$

이고, 등호는 $\tan\theta = 2$ 일 때 성립한다. 따라서 주어진 식의 최솟값은 4

정답과 해설

9. 함수 $g(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t)}{f'(t)}$ 가 불연속인 x 에

대하여 $\lim_{t \rightarrow x} f'(t) = 0$ 이다.

그런데 $x = 2$ 에서 연속이므로

$\lim_{t \rightarrow 2} f(t) = 0$ 이고

함수 $f(x)$ 는 $(x-2)^2$ 를 인수로 가지며

함수 $f'(x)$ 는 x 를 인수로 가진다.

따라서

$$f'(x) = 3x(x-2), f(x) = (x+1)(x-2)^2$$

이므로 $f(0) = 4$

10. $A - B = \frac{4}{15}$ 에서 $-A + B = -\frac{4}{15}$ 이고,

정적분의 정의에 의하여

$$-A + B = \int_0^{2a} x(x-a)(x-2a)^2$$

$$= \int_0^{2a} x^2(x-2a)^2 - ax(x-2a)^2 dx$$

$$= \frac{32a^5}{30} - a \times \frac{16a^4}{12} = 16a^5 \times \left(\frac{1}{15} - \frac{1}{12} \right)$$

$$- \frac{4}{15} a^5 = - \frac{4}{15}$$

이므로 $a = 1$

11. 모든 2 이상의 자연수 n 에 대하여

$a_n - a_{n-1} = n$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{a_k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{10} a_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \left(a_1 - \frac{a_1}{2} \right) + \left(\frac{a_2}{2} - \frac{a_2}{3} \right) + \left(\frac{a_3}{3} - \frac{a_3}{4} \right) + \dots$$

$$+ \left(\frac{a_9}{9} - \frac{a_9}{10} \right) + \left(\frac{a_{10}}{10} - \frac{a_{10}}{11} \right)$$

$$= a_1 + \left(\frac{a_2 - a_1}{2} \right) + \left(\frac{a_3 - a_2}{3} \right) + \left(\frac{a_4 - a_3}{4} \right) \dots$$

$$+ \left(\frac{a_{10} - a_9}{10} \right) - \frac{a_{10}}{11}$$

$$= a_1 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1 - \frac{a_{10}}{11}$$

$$= a_1 - \frac{a_{10}}{11} + 9 \text{이고,}$$

$$a_2 = a_1 + 2$$

$$a_3 = a_2 + 3 = a_1 + 2 + 3$$

$$a_4 = a_3 + 4 = a_1 + 2 + 3 + 4$$

\vdots

$$a_{10} = a_1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 9 + 10 = a_1 + 54$$

이므로 $\frac{10}{11} a_1 - \frac{54}{11} + 9 = -\frac{5}{11}$ 에서

$$a_1 = -5$$

12. 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $f^{-1}(x)$ 라 하면

$$f^{-1}(x) = b^{\frac{x}{a}} \text{이므로}$$

모든 실수 x 에 대하여 $g(x) = f^{-1}(-x)$ 이다.

따라서 임의의 두 양수 α, β 에 대하여

$g(-\beta) = \alpha$ 이면 $f(\alpha) = \beta$ 이다.

두 점 $C\left(-\frac{5}{8}b, b\right), D\left(-\frac{5}{4}b, 2b\right)$ 이 곡선

$y = g(x)$ 위에 있으므로

$$f(b) = \frac{5}{8}b, f(2b) = \frac{5}{4}b \text{에서 } a = \frac{5}{4}, b = 2 \text{이다.}$$

두 사각형 APQB, DCRS는 서로 합동인 사다리꼴이므로, 두 사각형의 넓이의 합은

$$2 \times \frac{1}{2} \times b \times (a + 2a) = 3ab = \frac{15}{2}$$

13. 선분 CD의 길이를 k 라 하면

$$\overline{AB} = \overline{PB} = 3k, \overline{BC} = 2k \text{이다.}$$

삼각형 ABP는 정삼각형이고,

$$\angle ABP = \frac{\pi}{3}, \angle ADP = \frac{\pi}{6} \text{이므로}$$

삼각형 PBC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{PC}}{\sin \angle PBC} = \frac{\overline{BC}}{\sin \angle BPC} = \frac{4\sqrt{57}}{3}, \overline{PC} = 2\sqrt{19} \text{이다.}$$

삼각형 PBC에서 코사인법칙에 의하여

$$(2\sqrt{19})^2 = (3k)^2 + (2k)^2 - 2 \times 3k \times 2k \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

에서 $k = 2$ 이므로 원 O의 반지름의 길이는 6이고,

정답과 해설

삼각형 PCD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{PC}}{\sin \angle CDP} = 4\sqrt{19} \text{이므로}$$

삼각형 CDP의 외접원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{19}$ 이다.

따라서 원 O의 넓이와 삼각형 CDP의 외접원의 넓이의 합은

$$6^2\pi + (2\sqrt{19})^2\pi = 112\pi$$

14. $A = \{x \mid f(x) = -f(x-f(x))+x\}$

에서 주어진 식 $f(x) = -f(x-f(x))+x$ 을 변형하면

$$x-f(x) = f(x-f(x)) \text{이다.}$$

$$x-f(x) = t \text{라 하면 } f(t) = t$$

방정식 $f(t) = t$ 를 만족시키는 실수 t 를 t_0 라 할 때, $x-f(x) = t_0$ 에서

$$f(x) = x - t_0 \cdots \ast$$

이므로 \ast 를 만족하는 x 의 값의 개수가 4이다.

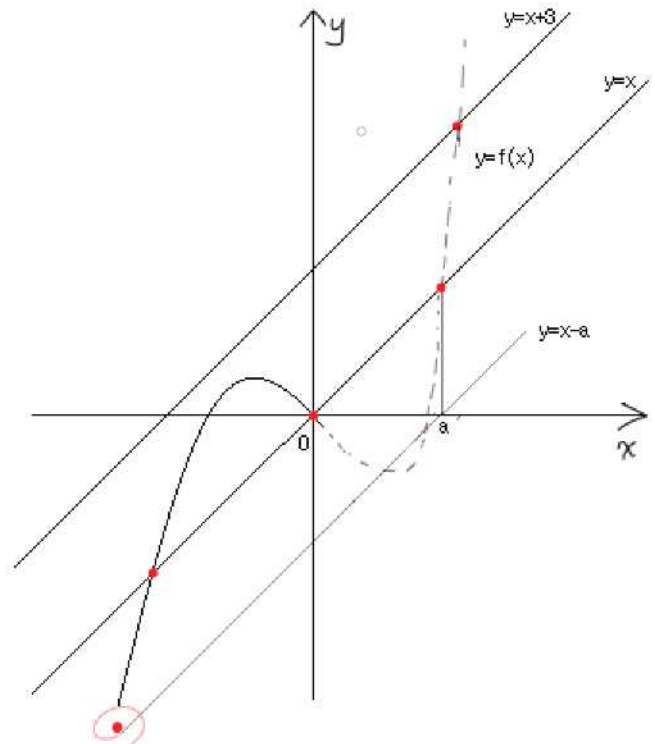
(1)에서 방정식 $f(t) = t$ 의 실근은 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점의 x 좌표와 같고,

(2)에서 방정식 $f(x) = x - t_0$ 의 실근은

함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점의 x 좌표를 t_0 라 하면 점 $(t_0, 0)$ 을 지나고 기울기가 1인 직선과 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 교점의 x 좌표와 같다.

$f(0) = 0$ 이고 $f(-3) = -3$ 이므로, 두 직선 $y = x$, $y = x + 3$ 과 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 위치 관계를 관찰하면 된다.

(1) $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수인 경우



$$f(0) = 0, f'(0) < 0 \text{이고 } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - x = +\infty$$

이므로 $x > 0$ 에서 곡선 $y = f(x)$ 가 직선 $y = x$ 와 만나는 점이 적어도 하나 존재한다.

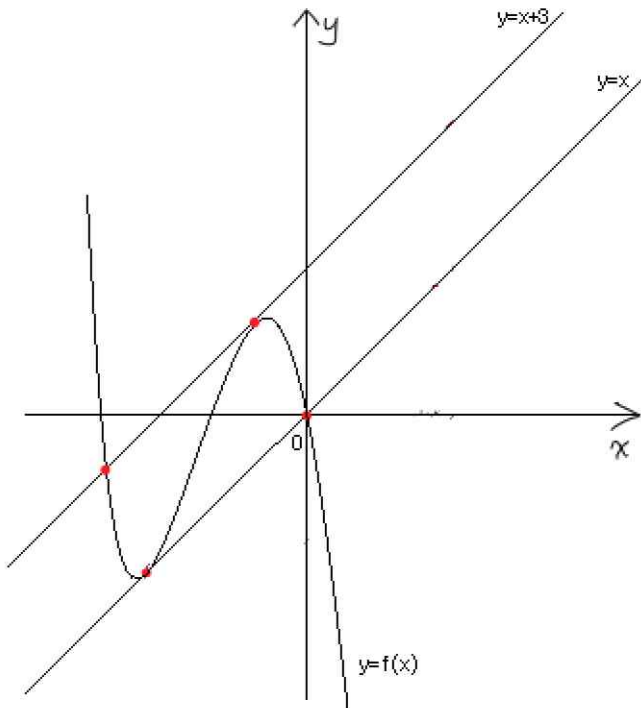
이 점의 x 좌표를 a 라 하면

$x < 0$ 에서 곡선 $y = f(x)$ 가 직선 $y = x - a$ 와 만나는 점이 적어도 하나 존재한다.

따라서 세 직선 $y = x + 3$, $y = x$, $y = x - a$ 와 곡선 $y = f(x)$ 가 만나는 점의 개수가 최소 5개가 되므로 모순이다.

정답과 해설

(2) $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 음수인 경우



곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 의 교점의 개수가 3 이상이면 (1)과 동일한 이유로 모순이다. 따라서 곡선 $y=f(x)$ 가 $x=-3$ 에서 직선 $y=x$ 와 접할 때 조건을 만족한다.

(1), (2)에 의하여

조건을 만족하는 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = -\frac{3}{4}x(x+3)^2 + x \text{ 이므로}$$

$$f(-8) = 142$$

15. $a_8 = \alpha$ 라 하고 상황을 분류하면 다음과 같다.

| | | | |
|-------|----------|----------------------------------|---------------|
| a_7 | a_8 | a_9 | a_{10} |
| 4 | α | $\frac{1}{4} - \frac{1}{\alpha}$ | $\frac{9}{4}$ |
| | | 4α | |

모든 자연수 n 에 대하여

a_{n+2} 가 정수가 아니면

$a_{n+1} \times a_n$ 은 정수가 아니다.

따라서 $a_8 \times a_9$ 가 정수이면 a_{10} 이 정수이므로

$a_8 \times a_9$ 는 정수가 아니다.

(1) $a_7 \times a_8$ 이 정수가 아닌 경우

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{\alpha} = \beta \text{라 하면 } \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} = \frac{9}{4} \text{에서}$$

$$\frac{\beta}{\alpha} - 1 = \frac{9}{4}\beta, \frac{1}{\alpha^2} - \frac{5}{2\alpha} + \frac{25}{16} = 0 \text{이다.}$$

$$t = \frac{1}{\alpha} \text{라 하고 정리하면}$$

$$16t^2 - 40t + 25 = 0, t = \frac{5}{4} \text{이므로 } \alpha = \frac{4}{5} \text{이고,}$$

$$\frac{1}{a_6} - \frac{1}{4} = \frac{4}{5} \text{을 만족하는 } a_6 \text{의 값은 } \frac{20}{21} \text{이다.}$$

| | | | |
|-----------------|----------------|-----------------|-------|
| a_4 | a_5 | a_6 | a_7 |
| $\frac{21}{25}$ | $\frac{21}{5}$ | $\frac{20}{21}$ | 4 |

$$a_5 \times a_6 \text{이 정수가 아니면 } a_5 = \frac{20}{101} < 4 \text{이므로}$$

조건을 만족시키지 않는다.

$$a_5 \times a_6 \text{이 정수이면 } a_5 = \frac{21}{5} > 4 \text{이므로}$$

조건을 만족시키고,

$$\frac{1}{a_4} - \frac{5}{21} = \frac{20}{21} \text{을 만족시키는 } a_4 \text{의 값은}$$

$$\frac{21}{25} \text{이다.}$$

정답과 해설

(2) $a_7 \times a_8$ 이 정수인 경우

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{4\alpha} = \frac{9}{4} \text{에서 } \alpha = \frac{1}{3} \text{이므로}$$

$$a_7 \times a_8 = \frac{4}{3} \text{가 되어 모순이다.}$$

(1), (2)에 의하여

$$a_4 = \frac{21}{25}$$

16. $4^x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{x-9}$ 에서 $2x \leq -x+9$ 이므로

x 의 최댓값은 3

17.
$$\int_{-3}^3 (4|t^3| + 3t^2 + 2|t| + 5) dt$$

$$= 2 \times \int_0^3 (4t^3 + 3t^2 + 2t + 5) dt$$

$$= 2 \times [t^4 + t^3 + t^2 + 5t]_0^3$$

$$= 264$$

18. 함수 $g(x)$ 는 $x = -1, x = 1$ 에서

미분 불가능하므로

$x \neq -1, x \neq 1$ 에서

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

이다.

함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이고

$$g'(x) = \begin{cases} 1 & (x < -1, x > 1) \\ -1 & (-1 < x < 1) \end{cases}$$

이므로 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)g'(x)$ 의 값과

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)g'(x)$ 의 값이 모두 존재하면 된다.

따라서 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = x^2 - 1 \text{이므로}$$

$$f(5) = 24$$

19. 점 A를 y 축에 대하여 대칭이동한 점을

A' 이라 하면

세 점 A', B, P 가 한 직선 위에 있을 때

$\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 값이 최소이다.

이때 직선 BP_0 의 기울기는

직선 $A'B$ 의 기울기와 같다.

따라서
$$\frac{\log_2 2k - \log_2 k}{2k - (-k)} = \frac{1}{3k} = \frac{1}{6} \text{이므로}$$

$$k = 2$$

20. $f(x) = (x-a)(x-b)^2$ 에서

$$f'(x) = (3x - 2a - b)(x - b) \text{이고}$$

$$g(x) = (a-b)^2(x-a) \text{이므로}$$

$$h(x) = \frac{(x-a)(x-b)^2}{(a-b)^2(3x-2a-b)(x-a)(x-b)}$$

$$(x \neq a, x \neq \frac{2a+b}{3}, x \neq b)$$

이다. 함수 $h(x)$ 가 $x = 2$ 에서만 불연속이므로

$$h(x) = \frac{(x-b)}{(a-b)^2(3x-2a-b)} \left(x \neq \frac{2a+b}{3}\right)$$

이고, $\frac{2a+b}{3} = 2$ 에서 $b = 6 - 2a$ 이다.

$$f(0) = -16 = -ab^2 \text{에서}$$

$$a(6-2a)^2 = 16, a(a-3)^2 = 4$$

이므로 $a = 1$ 또는 $a = 4$ 이고,

$a = 4$ 이면 $a > b$ 이므로 모순이다.

따라서 $a = 1, b = 4$ 이므로

$$f(x) = (x-1)(x-4)^2$$

$$f(5) = 4$$

정답과 해설

21. 함수 $|x|f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$g(x) = F(x) - F(k)$$

이다. 조건 (가)에서 $\lim_{x \rightarrow m} \frac{1}{|g(x)|} = \infty$ 이면

$$\lim_{x \rightarrow m} g(x) = 0 \text{ 이므로}$$

$k = -2$ 일 때 함수 $y = F(x) - F(-2)$ 와 x 축이 만나는 점의 개수는 1이고

$k \neq -2$ 일 때 함수 $y = F(x) - F(k)$ 와 x 축이 만나는 점의 개수는 2이다.

따라서 함수 $g(x)$ 는

$x < -2$ 에서 감소하고, $x = -2$ 에서 극소이며,

$x > -2$ 에서 증가하므로

$x < -2$ 에서 $f(x) \leq 0$ 이고

$x > -2$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이다.

함수 $|x|f(x)$ 의 부호가 $x = -2$ 의 좌우에서 $(-) \rightarrow (+)$ 로 바뀌므로

$$f'(-2) \neq 0 \text{ 이다.}$$

조건 (나)에 의하여 집합 B 의 원소의 개수가 1 이상이므로

방정식 $f(x) = 0$ 의 -2 가 아닌 실근이 적어도 하나 존재하여야 한다.

이 값을 a 라 하면

$f(x)$ 의 함숫값의 부호가 $x = -2$ 에서만 바뀌므로

$$f(x) = (x+2)(x-a)^2 \text{ 이고,}$$

$$f'(1) = 0 \text{ 이므로 } a = 1 \text{ 또는 } a = 7 \text{ 이다.}$$

따라서 조건을 만족하는 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = (x+2)(x-1)^2 \text{ 또는}$$

$$f(x) = (x+2)(x-7)^2 \text{ 이므로}$$

$$f(3) = 20 \text{ 또는 } f(3) = 80,$$

$$20 + 80 = 100$$

$$22. f(k+t) = t - k + f(k)$$

\rightarrow 구간 $(k, k+1]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 점 $(k, f(k))$ 를 지나고 기울기가 1인 직선

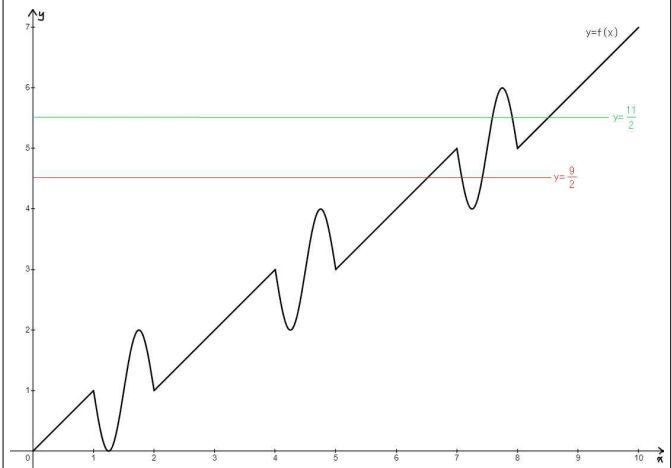
$$f(k+t) = -\sin(2\pi t) + f(k)$$

\rightarrow 구간 $(k, k+1]$ 에서

$$f(x) = -\sin(2\pi x) + f(k)$$

이고, 조건 (다)에 의하여

함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$g\left(\frac{9}{2}\right)$ 의 값은

$$\text{방정식 } -\sin(2\pi x) + 5 = \frac{9}{2} \quad (7 < x < 8)$$

를 만족시키는 x 의 최댓값과 같고,

그 값은 $\frac{89}{12}$ 이다.

$g\left(\frac{11}{2}\right)$ 의 값은

$$\text{방정식 } x - 3 = \frac{11}{2}$$

를 만족시키는 x 의 값과 같고,

그 값은 $\frac{17}{2}$ 이다.

$$\text{따라서 } \frac{89}{12} + \frac{17}{2} = \frac{191}{12} \text{ 이므로 } p = 12, q = 191$$

$$p + q = 203$$

정답과 해설

〈 미적분 〉

$$\begin{aligned}
 23. \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{1 - \cos 2x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} 9 \times \frac{1 - \cos 3x}{(3x)^2} \times \frac{1}{4} \times \frac{(2x)^2}{1 - \cos 2x} \\
 &= \frac{9}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 24. \quad & \int_{e^2}^{e^8} \frac{1}{x \ln x} dx \text{에서 } \ln x = t, \frac{1}{x} dx = dt \\
 & \text{로 치환하면} \\
 & \int_2^8 \frac{1}{t} dt = [\ln t]_2^8 = \ln 8 - \ln 2 = \ln 4 \\
 & = 2 \ln 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 25. \quad & \text{주어진 입체도형의 부피는} \\
 & \int_1^3 \left(\sqrt{x(x+1)} - \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}} \right)^2 dx \text{이므로} \\
 & \int_1^3 \left(x(x+1) - 2 + \frac{1}{x(x+1)} \right) dx \\
 &= \int_1^3 \left(x^2 + x - 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\
 &= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x + \ln x - \ln(x+1) \right]_1^3 \\
 &= \frac{26}{3} + \ln \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

26. 주어진 식에서

$$-\sqrt{3} < t < 0 \text{에서 } x > 0,$$

$$0 < t < \sqrt{3} \text{에서 } x < 0 \text{이므로}$$

점 P(-1, 0)은 $t = \sqrt{2}$ 에 대응하는 점이고

점 Q(1, 0)은 $t = -\sqrt{2}$ 에 대응하는 점이다.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2bt}{3at^2 - 3a} \text{에서}$$

$$t = -\sqrt{2} \text{일 때 } \frac{dy}{dx} < 0,$$

$$t = \sqrt{2} \text{일 때 } \frac{dy}{dx} > 0 \text{이므로}$$

점 P에서 곡선 $y = f(x)$ 에 접하는

직선의 기울기는 $\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ 이고

점 Q에서 곡선 $y = f(x)$ 에 접하는

직선의 기울기는 $-\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$ 이다.

$$t = \sqrt{2} \text{일 때 } 2\sqrt{2}a - 3\sqrt{2}a = -\sqrt{2}a = -1$$

$$\text{이므로 } a = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{이고}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\sqrt{2}b}{3a} = \frac{4b}{3} = \sqrt{3} \text{이므로}$$

$$b = \frac{3\sqrt{3}}{4} \text{이다.}$$

$$\text{따라서 } a \times b = \frac{3\sqrt{6}}{8}$$

정답과 해설

27. 모든 자연수 n 에 대하여

$$\tan^2 \pi a_n = \frac{1}{a_n} \text{이므로}$$

$$-\tan \pi a_{2n} = \frac{1}{a_{2n}} \text{이고}$$

$$\tan \pi a_{2n+1} = \frac{1}{a_{2n+1}} \text{이다.}$$

$$\frac{a_{2n+1} + 1}{a_{2n+1} - 1} = \frac{1 + \frac{1}{a_{2n+1}}}{1 - \frac{1}{a_{2n+1}}}$$

$$= \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \pi a_{2n+1}}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \times \tan \pi a_{2n+1}}$$

$$= \tan \left(\frac{\pi}{4} + \pi a_{2n+1} \right)$$

이고

$$\frac{a_{2n} - 1}{a_{2n} + 1} = \frac{1 - \frac{1}{a_{2n}}}{1 + \frac{1}{a_{2n}}}$$

$$= \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \pi a_{2n}}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \times (-\tan \pi a_{2n})}$$

$$= \tan \left(\frac{\pi}{4} + \pi a_{2n} \right)$$

이므로 주어진 극한은

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \pi a_{2n+1} \right) - \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \pi a_{2n} \right)}{a_{2n+1} - a_{2n}}$$

이다. $n \rightarrow \infty$ 이면 $a_{2n+1} - a_{2n} \rightarrow 0$ 이므로

주어진 극한은 함수 $f(x) = \tan^2 x$ 라 하면

$\pi f' \left(\frac{\pi}{4} \right)$ 의 값과 같다.

$$f'(x) = 2 \tan x \sec^2 x \text{이므로}$$

$$\pi f' \left(\frac{\pi}{4} \right) = \pi \times 2 \times 1 \times 2 = 4\pi$$

28. 조건 (가)에서 $\frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{x^2} \right) = \frac{3x^2}{\ln(x^3+1)}$

이고 $f(\sqrt[3]{3}) = \frac{\sqrt[3]{9}}{2} \times f(1)$ 이므로

조건 (나)에서

$$g(x) = \int_1^x \frac{f(t)}{t^3+1} dt$$

$$= \int_1^x \frac{t^2}{t^3+1} \times \frac{f(t)}{t^2} dt$$

$$= \left[\frac{1}{3} \ln(t^3+1) \times \frac{f(t)}{t^2} \right]_1^x$$

$$- \int_1^x \frac{1}{3} \ln(t^3+1) \times \frac{3t^2}{\ln(t^3+1)} dt$$

$$= \frac{1}{3} \ln(x^3+1) \times \frac{f(x)}{x^2} - \frac{f(1)}{3} \ln 2 - \int_1^x t^2 dt$$

$$= \frac{1}{3} \ln(x^3+1) \times \frac{f(x)}{x^2} - \frac{f(1)}{3} \ln 2 - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{3}$$

이다. 따라서

$$g(\sqrt[3]{3}) = \frac{\ln 4}{3} \times \frac{f(\sqrt[3]{3})}{\sqrt[3]{9}} - \frac{f(1)}{3} \ln 2 - 1 + \frac{1}{3}$$

$$= -\frac{2}{3}$$

정답과 해설

29. 함수 $f(x)$ 가 $x > 0$ 에서 미분가능하고

$x = g(t)$ 에서 극소이므로

모든 $t \geq -1 + \sqrt{3}$ 인 실수 t 에 대하여

$f'(g(t)) = 0$ 에서

$$\frac{2\ln(g(t))}{g(t)} + 2g(t) - t^2 - 2t = 0 \text{이 성립한다.}$$

따라서 $\frac{2\ln(g(t))}{g(t)} + 2g(t) = t^2 + 2t$ 에서

$$\frac{2\ln(g(t))}{g(t)} + 2g(t) + 1 = t^2 + 2t + 1 = (t+1)^2$$

$t \geq -1 + \sqrt{3}$ 에서 $t+1 > 0$ 이고

$$\frac{2\ln(g(t))}{g(t)} + 2g(t) + 1 > 0 \text{이므로}$$

$$\sqrt{\frac{2\ln(g(t))}{g(t)} + 2g(t) + 1} = t+1,$$

$$\sqrt{\frac{2\ln(g(t))}{g(t)} + 2g(t) + 1} - 1 = t$$

즉 함수 $g(t)$ 의 역함수는

$$h(t) = \sqrt{\frac{2\ln t}{t} + 2t + 1} - 1 \text{이다.}$$

$$h'(t) = \frac{\frac{2-2\ln t}{t^2} + 2}{2\sqrt{\frac{2\ln t}{t} + 2t + 1}} \text{에서}$$

$$h'(e) = \frac{2}{2\sqrt{\frac{2}{e} + 2e + 1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{e} + 2e + 1}}$$

$$\text{이므로 } \frac{1}{\{h'(e)\}^2} = \frac{2}{e} + 2e + 1,$$

$$\frac{e}{\{h'(e)\}^2} = 2e^2 + e + 2$$

따라서 $a = 2, b = 1, c = 2$ 이므로

$$a + b + c = 2 + 1 + 2 = 5$$

(다른 풀이)

$$h(g(t)) = t \text{에서 } g'(t) \times h'(g(t)) = 1,$$

$$h'(g(t)) = \frac{1}{g'(t)} \text{이므로}$$

$g(\alpha) = e$ 를 만족하는 실수 α 에 대하여

$e \times \{g'(\alpha)\}^2$ 의 값을 구하면 된다.

$$\frac{2\ln(g(t))}{g(t)} + 2g(t) = t^2 + 2t \text{에서}$$

$$\sqrt{\frac{2\ln(g(t))}{g(t)} + 2g(t) + 1} - 1 = t$$

$t = \alpha$ 일 때

$$\sqrt{\frac{2}{e} + 2e + 1} - 1 = \alpha$$

$$\frac{2\ln(g(t))}{g(t)} + 2g(t) = t^2 + 2t \text{에서}$$

양변을 t 에 대하여 미분하면

$$\left\{ \frac{2-2\ln(g(t))}{\{g(t)\}^2} + 2 \right\} g'(t) = 2t + 2,$$

$$2g'(\alpha) = 2\alpha + 2 = 2\sqrt{\frac{2}{e} + 2e + 1}$$

$$\text{이므로 } g'(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{e} + 2e + 1}$$

$$\text{따라서 } \{g'(\alpha)\}^2 = \frac{2}{e} + 2e + 1,$$

$$e \times \{g'(\alpha)\}^2 = 2e^2 + e + 2$$

이므로 $a = 2, b = 1, c = 2$

$$a + b + c = 2 + 1 + 2 = 5$$

정답과 해설

30. 함수 $f(x)$ 의 이계도함수 $f''(x)$ 가

$$f''(x) = (x^2 - x - 2)e^{-x} \text{이므로}$$

$$f'(x) = (-x^2 - x + 1)e^{-x} + C (C \text{는 적분상수})$$

에서 $f'(0) = 1$ 이므로 $C = 0$ 이고

$$f(x) = (x^2 + 3x + 2)e^{-x} + k (k \text{는 상수})$$

이다.

$$\text{방정식 } f(x) = f'(t)(x-t) + f(t)$$

의 실근의 개수 $g(t)$ 는 곡선 $y = f(x)$ 와 점 $(t, f(t))$ 에서 곡선 $y = f(x)$ 에 접하는 직선의 교점의 개수와 같고

함수 $g(t)$ 가 불연속이 되는 t 의 값은 함수 $f(x)$ 가 극값 또는 변곡점을 갖는 x 의 값과 같다.

함수 $f(x)$ 가 극값을 갖는 x 의 값은

방정식 $f'(x) = 0$ 에서 $-x^2 - x + 1 = 0$ 을 만족하는 두 실근과 같고

함수 $f(x)$ 가 변곡점을 갖는 x 의 값은

방정식 $f''(x) = 0$ 에서 $x^2 - x - 2 = 0$ 을 만족하는 두 실근과 같다.

함수 $g(x)h(x)$ 가 모든 실수 a 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow a^+} g(x)h(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} g(x)h(x) = g(a)h(a)$$

를 만족시켜야 하므로, 함수 $g(x)$ 가 $x = c$ 에서 불연속이면 $h(c) = 0$ 을 만족시켜야 한다.

따라서 방정식 $-x^2 - x + 1 = 0$ 의 두 실근과

방정식 $x^2 - x - 2 = 0$ 의 두 실근이

방정식 $h(x) = 0$ 의 네 실근이 되면 된다.

함수 $h(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로

조건을 만족시키는 함수 $h(x)$ 는

$$h(x) = (x^2 + x - 1)(x^2 - x - 2) \text{이다.}$$

따라서 $h(3) = 44$