미분가능성 정복하기 3편 : '의심점'을 만드는 함수 2

들어가며,

고난도 미분 가능성 문항은 의심점이 존재하는 함수들을 제시하고, 이 함수들의 연산(곱, 합성 등)을 통해 의심점을 미분 가능한 점으로 소실시키는 문제의 형태로 자주 등장합니다. 저번 칼럼에서는 '의심점' 만드는 함수 중에서 가장 자주 등장하는 절댓값 함수의 미분 가능성에 대해 알아보았습니다.

이번 칼럼에서는 **고난도 문항**에서 자주 출제되는 의심점이 존재하는 함수인 **무리함수의 미분 가능성**을 다뤄보려 합니다.

칼럼에 들어가기 전, 역대 수능/평가원 중 거의 최고난도 문항으로 꼽히는 19학년도 6월 모의고사 21번 문항을 살펴보겠습니다. 이번 칼럼을 잘 이해한다면, 무리함수 미분 가능성과 관련된 최고난도 문항이 나왔을 때, 당황하지 않고 쉽게 풀어낼 수 있을겁니다.

Example 1 열린 구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2\sin^3 x & \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{4}\right) \\ \cos x & \left(\frac{\pi}{4}\le x<\frac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$$

가 있다. 실수 t에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 실수 k의 개수를 $g(t)$라 하자.

(가) $-\frac{\pi}{2}<k<\frac{3\pi}{2}$

(나) 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$는 $x=k$에서 미분가능하지 않다.

함수 $g(t)$에 대하여 합성함수 $(h\circ g)(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $h(x)$가 있다. $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=a$, $g(0)=b$, $g(-1)=c$라 할 때, $h(a+5)-h(b+3)+c$의 값을 구하시오. [2019학년도 6월 모의고사 21번]

I. 무리함수, 왜 의심점을 가질까?

$\sqrt{f(x)}$의 미분 가능성을 따져보면, 다음과 같다.

① $f(x)$가 $x=a$에서 미분 가능하지 않다.

→ $\sqrt{f(x)}$도 $x=a$에서 미분 가능하지 않다. (**확실점**)

TEAM 수리남's TIP

$\sqrt{f(x)}$는 $\sqrt{x}$와 $f(x)$의 합성함수로, $f(x)$가 $x=a$에서 미분 가능하지 않다고 해서 합성했을 때도 미분 가능하지 않다고 판단할 수 없습니다. 하지만, $\sqrt{f(x)}$의 경우는 ①의 명제가 성립합니다.
합성함수의 미분 가능성으로도 판단할 수 있지만, 미분계수의 정의를 이용하여도 쉽게 판단할 수 있습니다. 1편에서 배운 내용을 통해 스스로 증명에 도전해보세요.

② $f(x)$가 $x=a$에서 미분 가능하다.

→ $f(a)=0$, $f'(a)=0$이면 $\sqrt{f(x)}$의 미분 가능성에서 $x=a$에서 **의심점**을 갖는다.

1) 왜 의심점을 가질까? - *대표적인 예시로 확인하기*

$\sqrt{x^2}$을 보면 그냥 x가 되는 것이 아니라, $|x|$가 되는 것은 다들 알고 있을 것이다. x가 음수인 경우를 고려하면, 쉽게 이해가능할 것이다. 즉, $\sqrt{x^2}=|x|$가 $x=0$에서 미분 불가능하다는 것을 알 수 있다.

2) 왜 $f(a)=0$일 때 의심점을 가질까? - *미분계수의 정의로 정확히 확인해보자.*

1편에서 배웠던 것처럼 $\sqrt{f(x)}$의 미분 가능성은 $x=a$에서의 미분계수를 따져보면 된다.

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(a)}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\left(\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(a)}\right)\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(a)}\right)}{x-a}\times\frac{1}{\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(a)}\right)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times\frac{1}{\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(a)}\right)}$$

임을 알 수 있다.

따라서, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$는 $x=a$에서 $f(x)$가 미분 가능한 상황이므로 $f'(a)$로 수렴하는 것을 알 수 있다.

① $f(a)$의 값이 0이 아니라면, $\lim_{x \to a}\frac{1}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(a)}}$의 값이 존재하게 되고, $\sqrt{f(x)}$의 미분계수가 존재하므로, 의심점이 아닌 확실히 미분 가능한 점임을 알 수 있다.

② $f(a)$값이 0이라면, $\lim_{x \to a}\frac{1}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(a)}}$의 값이 발산하게 되고, $\lim_{x \to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$값이 0으로 수렴해야 $\lim_{x \to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times\frac{1}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(a)}}$가 수렴할 가능성이 있으므로, $f'(a)\neq 0$인 경우는 확실히 미분 불가능한 점, $f'(a)=0$이면 미분 가능할 수도 있는 의심점이 된다는 것을 알 수 있다.

위 내용을 정리하면, 아래와 같다.

TEAM 수리남's 핵심노트

$\sqrt{f(x)}$의 의심점

1) $x=a$에서 $f(x)$가 미분 불가능
→ $\sqrt{f(x)}$도 $x=a$에서 미분 불가능

2) $x=a$에서 $f(x)$가 미분 가능

① $f(a)\neq 0$: 확실히 미분 가능

② $f(a)=0$
→ $f'(a)\neq 0$ 이면, 확실히 미분 불가능
→ $f'(a)=0$ **이면, 의심점! 조사해봐야함**

II. 무리함수∘다항함수의 미분 가능성

Example 2 $\sqrt{f(x)}$에서 $f(x)$가 다항함수일 때, $f(x)$가 $x=a$에서 미분 가능하도록 하는 $f(x)$의 조건을 설명하시오.

$\sqrt{f(x)}$의 미분 가능성 문항 중, $f(x)$가 다항함수인 경우는 다항함수에서는 인수정리의 사용이 가능하므로, 더욱 쉽게 해결할 수 있다.

위에서, $f(a)=0,\ f'(a)=0$인 경우만 의심점을 갖는 것을 알았으니, 이 경우만 생각하면 된다.
(나머지는 언제 미분 가능한지 확실히 알기 때문에 이 경우만 따져보자.)

$f(x)=(x-a)^k g(x)$ (단, $g(a)\neq 0$)와 같이 쓸 수 있다. 이때 $f(a)=0,\ f'(a)=0$이므로 k는 2이상임을 알 수 있다. *($g(a)\neq 0$으로 설정한 이유는 $x-a$를 인수로 몇 개 가지고 있는지 확인하기 위해서이다.)*

이제, 미분계수의 정의를 활용해보자. *(도함수의 연속을 활용해도 나쁘지 않다.)*

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(a)}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{(x-a)^k g(x)}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{|(x-a)|\sqrt{(x-a)^{k-2}g(x)}}{x-a}$$

$x=a$에서 $\sqrt{f(x)}$의 미분계수가 위와 같이 정의됨을 알 수 있다. 이때 절댓값이 있어 우극한과 좌극한의 부호가 달라지므로, 좌극한과 우극한이 같기 위해서는 $\lim_{x\to a}\sqrt{(x-a)^{k-2}g(x)}$가 0으로 수렴해야만, 우극한과 좌극한이 같아져서 $\sqrt{f(x)}$가 $x=a$에서 미분 가능해진다. $g(a)\neq 0$이므로 k가 2보다 클 때, 수렴하게 된다.

TEAM 수리남's 핵심노트

무리함수∘다항함수의 미분 가능성

$\sqrt{f(x)}$에서 $f(x)$가 다항함수인 상황에서 $f(a)=0$이고 $\sqrt{f(x)}$가 $x=a$에서 미분 가능하다면 $f(x)$는 최소 $(x-a)^3$를 인수로 갖는다.

III. 실전 문제 적용하기

Example 1 열린 구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2\sin^3 x & \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{4}\right) \\ \cos x & \left(\frac{\pi}{4}\le x<\frac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$$

가 있다. 실수 t에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 실수 k의 개수를 $g(t)$라 하자.

> (가) $-\frac{\pi}{2}<k<\frac{3\pi}{2}$
>
> (나) 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$는 $x=k$에서 미분가능하지 않다.

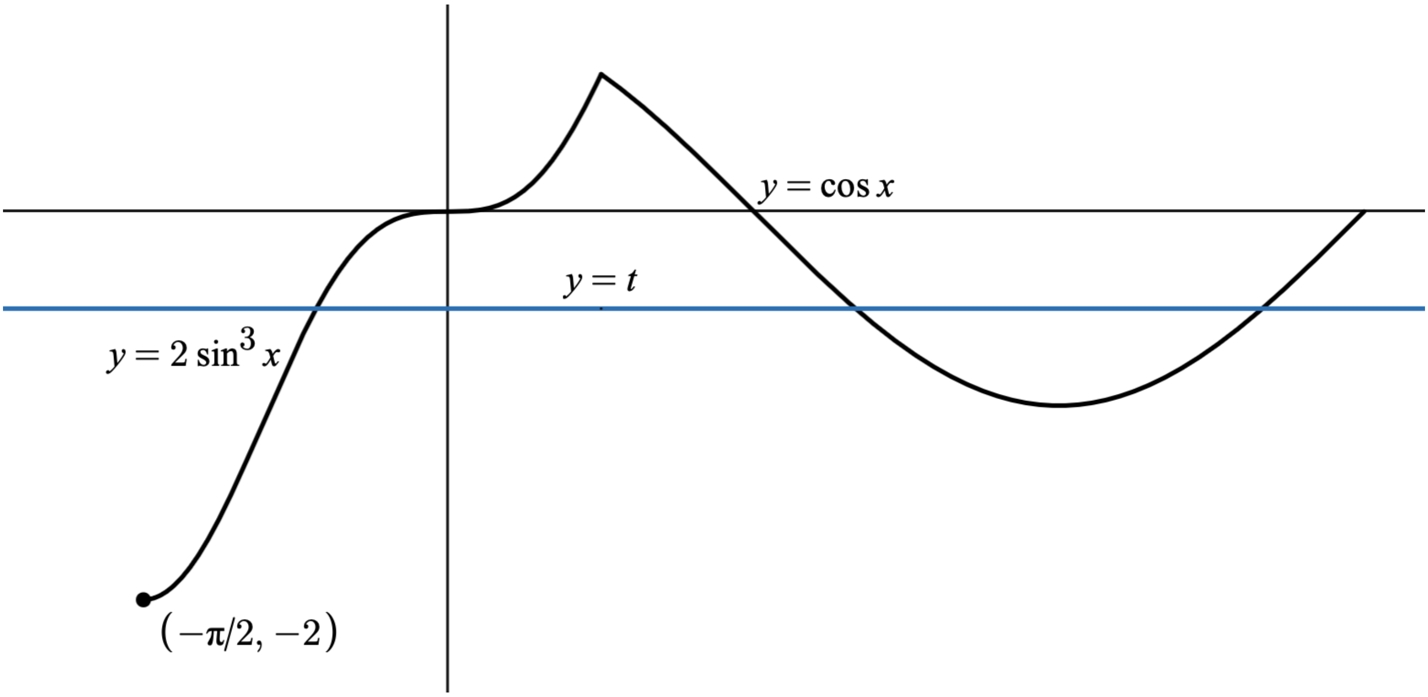
함수 $g(t)$에 대하여 합성함수 $(h \circ g)(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $h(x)$가 있다. $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=a$, $g(0)=b$, $g(-1)=c$라 할 때, $h(a+5)-h(b+3)+c$의 값을 구하시오. [2019학년도 6월 모의고사 21번]

TEAM 수리남's TIP

이 문항은 무리함수안에 다항함수가 아닌 초월함수가 합성된 유형이다. 하지만, 의심점이 어느 상황에서 나타나는지 알고 있기 때문에, 의심점을 쉽게 찾고, 그 부분에서 '미분계수의 정의' 등과 같은 방법으로 문제를 해결할 수 있을 것이다.

Example 1 해설

$\sqrt{|f(x)-t|}$의 미분 가능성이므로 $f(x)$의 개형을 그리고, 어디에서 의심점이 나타나는지, 어느 점에서 확실하게 미분 불가능한지 알아보자. 그래프를 그려보면 아래와 같다.



$\sqrt{|f(x)-t|}$의 미분 가능성을 생각해보면

1. $|f(x)-t|$가 미분 불가능한 점에서는 $\sqrt{|f(x)-t|}$ 무조건 미분 불가능

→ $f(x)$가 미분 불가능한 점 또는 $y=t$와 $y=f(x)$가 만나는데 접하지 않는 점

2. $|f(x)-t|$가 미분 가능한 점

$\sqrt{|f(x)-t|}$이 $x=a$에서 미분 불가능하다고 하면, a를 대입했을 때 0이 되는 점(즉, $f(x)$와 $y=t$가 만나는 점), $f'(a)\neq 0$인 점은 미분 확실하게 불가능. $f'(a)=0$인 점은 의심점이 됨을 알 수 있다.

1, 2를 종합해서 생각해보면, $f(x)$가 미분 불가능한 점인 $x=\frac{\pi}{4}$에서는 $\sqrt{|f(x)-t|}$는 항상 미분 불가이다. 또한 $y=t$와 $y=f(x)$가 만나는 점들 중에서 접하지 않는 경우는 미분이 확실하게 불가능하고, 접하는 경우가 의심점이 된다. 즉 $y=t$와 $y=f(x)$가 접하면서 만나는 $t=-1$, $t=0$에서만 미분 가능성을 체크하면 문제는 다 끝난다.

1) $t=-1$

$y=-1$과 $y=f(x)$가 두 점에서 만나는데, 하나는 접하는 경우, 하나는 접하지 않고 만나는 경우이다.
위에서 정리한 내용에 따르면, 접하지 않고 만나는 점에서는 확실히 미분 불가능하다.

$x=\pi$에서 접하기 때문에, $x=\pi$가 의심점이 되고, 이 부분에서 미분 가능성을 조사하면 된다. 이 부근에서 $f(x)=\cos x$이고, $\sqrt{|f(x)-t|}$는 $\sqrt{|1+\cos x|}=\sqrt{1+\cos x}\,(1+\cos x\geq 0)$임을 알 수 있다.

sol 1) 미분계수의 정의

$x=\pi$에서의 미분계수는 $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sqrt{1+\cos x}}{x-\pi}$이다. 무리함수에서 미분 가능성의 문제가 생기는 경우는, 제곱의 형태로 무리수를 빠져나오면서 절댓값이 씌워지기 때문이다. 따라서, 무리함수의 미분 가능성의 핵심은 루트 안에 있는 함수를 제곱의 형태로 만들어주는 작업이다.

TEAM 수리남's 핵심노트

무리함수의 미분 가능성

무리함수 미분 가능성 문제풀이의 핵심은 루트 안에 있는 함수를
제곱의 형태로 만들어 루트 밖으로 빼주는 작업이다.

$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sqrt{1+\cos x}}{x-\pi}$에서 $1+\cos x$를 제곱의 형태로 만들기 위해서는 어떻게 하면 될까?
$1-\cos x$를 곱해주면, $\sin^2 x$가 된다는 것을 쉽게 깨달을 것이다.

즉, $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sqrt{1+\cos x}}{x-\pi}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sqrt{1+\cos x}\sqrt{1-\cos x}}{x-\pi}\times\dfrac{1}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sqrt{\sin^2 x}}{x-\pi}\times\dfrac{1}{\sqrt{1-\cos x}}$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{|\sin x|}{x-\pi}\times\frac{1}{\sqrt{1-\cos x}}$$

이때, $\sin x$가 $x=\pi$ 전 후로 부호가 바뀌므로, 좌극한/우극한을 따로 조사해야한다.

$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi}=-1$ 이므로, 좌극한 우극한의 부호도 다를 수 밖에 없다. 따라서 미분계수의 값이 존재하지 않고,

$x=\pi$에서 미분 불가능함을 알 수 있다. 따라서 $t=-1$**일 때, 미분 불가능점은 3개이다.**$(x=\frac{\pi}{4}$**포함)**

sol 2) 도함수의 연속

$\sqrt{1+\cos x}$를 미분하면, $\frac{-\sin x}{2\sqrt{1+\cos x}}=\frac{-\sin x\sqrt{1-\cos x}}{2|\sin x|}$

(미분 가능성 정의에서 한 것과 같이 분모 분자에 $\sqrt{1-\cos x}$를 곱해준 것

좌극한 : $\lim_{x\to\pi-}\frac{-\sin x\sqrt{1-\cos x}}{2|\sin x|}=\frac{-\sin x\sqrt{1-\cos x}}{2\sin x}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

우극한 : $\lim_{x\to\pi+}\frac{-\sin x\sqrt{1-\cos x}}{2|\sin x|}=\frac{-\sin x\sqrt{1-\cos x}}{-2\sin x}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

두 값이 다르므로, 미분 가능하지 않다.

TEAM 수리남's TIP

모든 미분 가능한 함수가 도함수가 연속인 것은 아닙니다. 따라서 미분 가능성 문항을 도함수의 연속으로 푸는 것은 엄밀히 따지면 잘못된 풀이입니다. 하지만, 역대 수능/평가원 미분 가능성 문항은 도함수의 연속으로 해결할 수 있게 출제 되었습니다. 그래도 결국 기본은 '미분 가능성의 정의' 이고, 도함수의 연속을 사용하기 어렵거나 불가능한 문항이 충분히 출제될 수 있기 때문에, 항상 미분 가능성의 정의로 푸는 연습을 하는 것을 권해드립니다.

2) $t=0$

$y=0$과 $y=f(x)$는 두 점에서 만나는데, 한 점에서는 접하고, 한 점에서는 접하지 않는다. 접하지 않는 점은 바로 미분 불가능하다는 것을 알 수 있고, 접하는 점은 의심점으로 미분 가능성을 따져봐야한다.

$x=0$에서 접하고 이때 $f(x)=2\sin^3 x$이므로, $\sqrt{|2\sin^3 x|}$의 미분계수는 다음과 같다.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{|2\sin^3 x|}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{|\sin^2 x\times2\sin x|}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{|\sin x|\times\sqrt{|2\sin x|}}{x}$$

(**위에서 배웠던 것처럼, 루트안에 있는 제곱의 형태를 밖으로 빼려고 노력한 것이다.**)

이때 x는 0 전후로 $\sin x$의 부호가 달라지기 때문에 $\lim_{x\to0}\frac{|\sin x|}{x}$의 좌극한과 우극한이 다르다는 것을 알 수 있다. 하지만 옆에 있는 $\sqrt{|2\sin x|}$가 0으로 수렴하기 때문에, 좌미분계수와 우미분계수 모두 0임을 알 수

있다. 따라서 $t=0$일 때, $x=0$에서 미분 가능함을 알 수 있다.

따라서 **이때, 미분 불가능한 점의 개수는 2개이다.**($x=\frac{\pi}{4}$ **포함)**

이제, 나머지 점은 미분계수의 정의를 쓰지 않아도 모두 위에서 정리한 것에서 미분 가능성을 결정할 수 있기 때문에, $g(x)$를 쉽게 알아낼 수 있다. *(의심점 없이 확실한 점들만 남음)*

$g(x)$를 구하면, 그 다음부터는 굉장히 간단한 합성함수의 연속 문제이다. *(풀이과정 생략)*
스스로 한 번 답을 내보자.

답 : 99

TAKE HOME MESSAGE

3편에서는 의심점을 만드는 함수 중에서, 약간 어려울 수 있는 주제인 무리함수에 대해 다뤄봤습니다. 슬슬 난이도 있는 미분 가능성 문항이 나올 때가 되기도 했고, 까다로운 준킬러로도 충분히 나올 수 있는 소재이기 때문에 확실히 대비해서 수능장에 들어가시기 바랍니다.

미분 가능성 파트는 양이 워낙 방대하기에 시리즈 형태로 구성했습니다. 이제 마지막 칼럼만을 앞두고 있습니다. **다음 칼럼에는 의심점을 소실시키는 연산(곱, 합성)이 나왔을 때는 어떻게 문제를 해결해야 하는지 다뤄보겠습니다.**

다양한 **심화개념**과 **심화문제**도 다룰 예정이니 많은 관심 부탁드립니다.

지금까지 **TEAM 수리남**이었습니다.
이 글을 읽는 수험생 여러분 모두에게 행운을 빕니다.