# SEOL:NAME

## [수학2] 스킬 정리노트

## 이건 제발 하지 마

① 미지수 $3$개 이상 세우지 않기

② 미분가능하지 않은 함수 일단 미분해보고 마는 습관
(낮은 난이도에서는 타격이 없는데 어려운 문제일수록 타격이 큼)

③ 극한 풀 때 되도 않는 근사 사용하기
**확실한 근사 아니면 전개나 유리화 하세요..**

④ 요즘 평가원은 특수 케이스를 잘 안 내려고 하는 경향이 있다. **특수 케이스 찍어놓고 "외않됨?" 이러지 않기**

⑤ 삼차함수 나왔다고 무지성 $ax^3+bx^2+cx+d$로 두는 습관 X
이렇게 해서 풀리는 문제는 생각보다 얼마 없다.

⑥ 사잇값의 정리는 **연속함수**, 평균값의 정리는 **미분가능함수**에서만 적용 가능하다.
그런 함수가 아닐 때는 정말 조심스럽게 활용

⑦ 무지성 로피탈 쓰면 음^^

## 이건 제발 좀 해줘

① 적분은 단순히 계산 뿐만 아니라 **넓이로도 해석이 가능**하다. 하나에 너무 목매이지 말자.

② 계산이 너무 복잡해진다 싶으면 **내가 잘못하고 있거나 뭔가 다른 방법이 있을 가능성**이 높다.
꼭 점검해보자.

③ 처음 본 함수가 나오면 그 **함수의 특징**을 먼저 파악해보자. **어떤 방식으로 만든 함수인지, 어떤 점을 지나는지** 등 어떤 요소든 상관 없다.

④ [수학1]과 달리 [수학2]는 그래프를 바탕으로 전개되는 경우가 많아 **논리적 허점이 생길 가능성**이 높다. 교육청과 평가원 문항은 모두 문제의 답을 **대수적으로 검증 가능하게** 출제한다. 애매하다 싶으면 이게 논리적으로 맞는지 꼭 의심해보자.

⑤ 등식이나 부등식에서 한쪽 변에 $0$이 나오면 **'부호'**와 관련해서 꼭 고려해보자.

## 01 함수의 극한

**- 극한을 구하는 방법**

$x\to\infty$로 갈 때 : 차수 가장 큰 아이들만 살아남음
$x\to 0$으로 갈 때 : 차수 가장 작은 아이들만 살아남음

**| 예제 |** $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\frac{2x^3+x^2+4x}{\sqrt{x^3+4x^2}}$ 의 값은?

**| 풀이 |**
분자의 가장 작은 차수인 항은 $4x$
분모의 루트 안 가장 작은 차수의 항은 $4x^2$인데 루트가 씌워지므로 $|2x|$처럼 받아들여짐.

$x\to 0+$ 로 가는 극한이므로 $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\frac{4x}{|2x|}=2$

**- 함수의 연속성 판단**

**꿀팁 전수** 시험 현장에서는 간단한 함수의 극한을 쓸 때 $\displaystyle\lim_{x\to a+}f(x)$라는 표현보다 $f(a+)$라는 표현을 쓰는 것이 조금 더 효율적이다.
좌극한의 경우는 $f(a-)$로 표시한다.

$f(x)$가 $x=a$에서 연속이면

$$f(a-)=f(a+)=f(a)$$

임을 이용해서 판단한다.

**- $f(x)<g(x)<h(x)$ 형태의 문제 해석**

자주 나오는 유형은 아니지만 샌드위치 정리 써주라는 의미이다. 실제로 극한을 씌웠을 때 남을만한 것만 계산해주면 된다.

**| 예제 |** $\frac{1}{2}x^2+2x\le f(x)\le x^2+2x$ 일 때,

$\displaystyle\lim_{x\to 0+}\frac{xf(x)+5x}{2f(x)-x}$ 의 값은? (단, $x\ge 0$)

**| 풀이 |**
구하려는 극한이 $x\to 0+$ 로 가는 극한이므로 위쪽의 식도 $x\to 0+$ 으로 극한을 취하자.
$x\to 0+$ 은 가장 낮은 차수만 살아남으므로 $f(x)=2x$ 처럼 생각할 수 있다.

따라서 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)+5x}{2f(x)-x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+5x}{4x-x}=\frac{5}{3}$

**- 극한 방향의 변화**

기본 개념 $\lim_{x \to a+} f(x) = f(a+)$처럼 나타낼 때,

$\lim_{x \to a+} f(-x) = f(-a-)$이다.

다시 말해, 구하려는 변수에 마이너스(−)가 취해지면, 극한의 접근 방향도 바뀐다.

**- 교점의 개수와 극한의 관계**

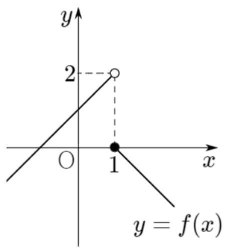
기본 개념 $x$에 대한 방정식 $f(x)=t$의 실근의 개수를 $g(t)$라 하자. 이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$의 교점의 개수이다.

꿀팁 전수 삼차함수 $f(x)$가 어떤 직선과 서로 다른 두 점에서 만난다 → **접하는 것 의심하기**

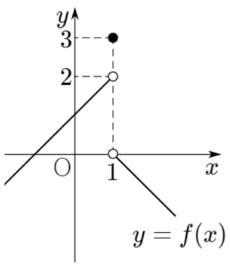
**- 최댓값과 최솟값**

어떤 함수의 최댓값이 존재하려면 최대가 될직한 곳에서 함숫값이 존재해야 한다. 최솟값의 경우도 같은 방식으로 설명된다.

| 예제 | 다음과 같은 함수는 최댓값이 존재하지 않는다.




반면 다음과 같은 함수는 최댓값을 가진다.




**- 사잇값의 정리**

기본 개념 연속함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 모든 실수 $k$에 대하여 $f(c)=k$인 $c \in (a, b)$가 존재

| 예제 | 삼차함수 $f(x)$는 무조건 $f(x)=0$이 되는 실수 $x$가 존재한다.

| 풀이 | $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이면

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

이므로 사잇값의 정리에 의해 $f(c)=0$인 $c$가 존재한다.

$f(x)$의 최고차항의 계수가 음수이면

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

이므로 사잇값의 정리에 의해 $f(c)=0$인 $c$가 존재한다.

| 예제 | $f(a) \times f(b) < 0$이면 $x=a$와 $x=b$ 사이에 $f(c)=0$이 되는 $c$가 존재한다.

꿀팁 전수 사잇값의 정리는 단독 문항으로 난이도 있게 나오기보다는 함수 추론과 관련하여 꼬아놓는 경우가 많다.
다시 말해, 함수 추론 문제에서 **부호와 관련된 조건들이나 근의 개수와 관련된 조건**이 나오면 사잇값의 정리를 활용할 건덕지가 없는지 고민해볼 필요가 있다.

**- 불연속함수의 추론**

불연속함수와 관련된 문항은 일반적으로 극한식이나 등식을 통해 불연속으로 가능한 점을 제한하는 경우가 많다. 다음 경우를 살펴보자.

| 예제 | $(x^2-2x)f(x) = (\text{연속함수})$일 때, $f(x)$가 불연속이 될 수 있는 $x$의 값은 오직 $0$, $2$ 뿐이다.

| 풀이 |

$x \neq 0$, $x \neq 2$일 때 $f(x) = \dfrac{(\text{연속함수})}{x^2-2x}$이므로

함수 $f(x)$는 연속이다. 하지만 $x=0$, $x=2$일 때는 연속성이 보장되지 않으므로 함숫값이 어떻게 될지 모른다. 예를 들어,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x=0,\ x=2) \\ x & (x \neq 0,\ x \neq 2) \end{cases}$$

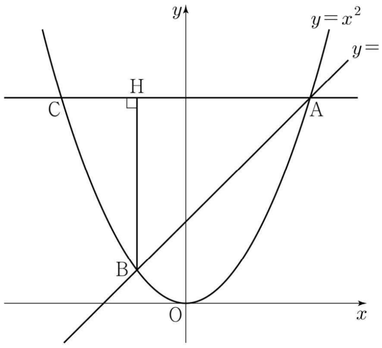
일 때 함수 $(x^2-2x)f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이지만 $x=0$, $x=2$에서 $f(x)$는 불연속이다.

이와 같이 불연속점의 후보를 추려내 원하는 함수를 추론하면 된다.

**- 도형과 극한**

구하고자 하는 값을 주어진 변수에 대한 식으로 나타낼 수 있어야 한다. 사실상 극한값을 계산하는 게 어렵기보다는 **'구하려는 극한'**을 식으로 나타내는 것이 어렵기 때문에 잘 살피고 문제를 풀어야 한다.

**| 예제 |** 직선 $y=x+t$와 곡선 $y=x^2$이 만나는 두 점을 $\mathrm{A}$, $\mathrm{B}$라 하자. 직선 $\mathrm{AC}$가 $x$축과 평행할 때, $\lim_{t\to0+}\frac{\overline{\mathrm{AH}}-\overline{\mathrm{CH}}}{t}$의 값은?




**| 풀이 |**

$\overline{\mathrm{AH}}-\overline{\mathrm{CH}}$를 구하기 위해서는 두 값을 각각 구하는 방법도 있겠지만, 다르게 생각해볼 수도 있다.

선분 $\mathrm{AC}$가 $y$축과 만나는 점을 $\mathrm{P}$라 하면

$$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PH}},\ \overline{\mathrm{CH}}=\overline{\mathrm{CP}}-\overline{\mathrm{PH}}$$

인데, $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{CP}}$이므로

$$\overline{\mathrm{AH}}-\overline{\mathrm{CH}}=2\overline{\mathrm{PH}}$$

$\overline{\mathrm{PH}}$는 점 $\mathrm{H}$의 $x$좌표의 절댓값, 즉, 점 $\mathrm{B}$의 $x$좌표에 $-$를 붙인 것이다.

$x^2=x+t$에서 점 $\mathrm{B}$는 두 교점 중 왼쪽에 있는 것이므로 $x=\frac{1-\sqrt{1+4t}}{2}$인데, 구하는 값은 $2\overline{\mathrm{PH}}$이므로

$$|2x|=\sqrt{1+4t}-1$$

곧, 구하는 값은

$$\lim_{t\to0+}\frac{\sqrt{1+4t}-1}{t}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{(\sqrt{1+4t}-1)(\sqrt{1+4t}+1)}{t(\sqrt{1+4t}+1)}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{4}{\sqrt{1+4t}+1}$$

$$=2$$

**꿀팁 전수** 뭔가 구하는 값이 과하게 복잡한 것 같을 때는 문제를 효율적으로 푸는 방법이 없을지 한 번 고민해보자.

**- 등식으로 주어진 함수의 추론**

어떤 함수가 등식의 관계로 연결되어 있으면 인수분해를 활용해서 함수를 추론한다.

**함수의 개형이 중간에 바뀔 수 있음에 유의한다.**

**| 예제 |** 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$\{f(x)\}^3-\{f(x)\}^2-x^2f(x)+x^2=0$$

이다. $f(x)$의 최댓값이 $1$, 최솟값이 $0$일 때 $f\left(-\frac{4}{3}\right)+f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은?

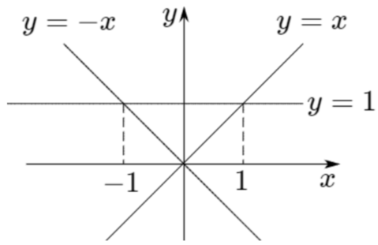
**| 풀이 |**

주어진 식을 인수분해하면

$$\{f(x)-x\}\{f(x)+x\}\{f(x)-1\}=0$$

즉, 모든 실수 $x$에 대하여

$f(x)=x$ 또는 $f(x)=-x$ 또는 $f(x)=1$




이때, $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $f(x)$의 그래프는 위의 선을 따라 이어진다.

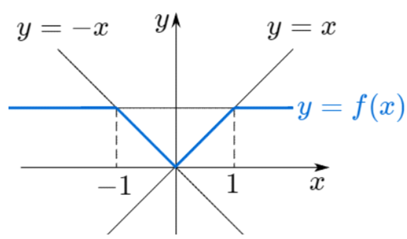
우선 $f(x)$가 최솟값 $0$을 가져야 하기 때문에 위의 그래프에서

$-1\le x\le0$에서 $f(x)=-x$,

$0\le x\le1$에서 $f(x)=x$이다.

또한, $x<-1$에서 $f(x)=-x$이면 최댓값이 존재하지 않으므로 $f(x)=1$, 같은 방식으로 $x>1$에서 $f(x)=1$이다.

이를 그래프로 나타내면 다음과 같다.




따라서 $f\left(-\frac{4}{3}\right)=1$, $f(0)=0$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$이므로

$$f\left(-\frac{4}{3}\right)+f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)=1+0+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

**- 극한과 연속에 관한 헷갈리기 좋은 소재**

① 모든 실수 $t$에 대하여 $\lim_{x \to t} f(x)$의 값이 존재한다고 해서 $f(x)$가 연속이지 않을 수 있다.

| 예제 | $f(x) = \begin{cases} 1 & (x=0) \\ x & (x \neq 0) \end{cases}$인 경우는 모든 실수 $t$에 대하여 $\lim_{x \to t} f(x) = t$으로 값이 존재하나 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

② $\lim_{x \to t} |f(x)|$의 값이 존재한다 하더라도 $\lim_{x \to t-} f(x) \neq \lim_{x \to t+} f(x)$일 수도 있다.

| 예제 | $f(x) = \begin{cases} -x & (x<1) \\ x & (x \geq 1) \end{cases}$일 때 $\lim_{x \to t} |f(x)|$의 값은 실수 $t$의 값에 관계없이 존재한다.
그러나 $f(1-) \neq f(1+)$이다.

③ 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 불연속일 때 $\lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{x \to a+} f(x)$이면 $(x-a)f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하다.

④ 다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^n}$의 값이 존재할 때, $f(x)$가 $n$차일 필요는 없다.

| 예제 | $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^4}$의 값이 존재할 때, $f(x)$가 삼차함수이면 극한값은 $0$이다.

⑤ $f(x)g(x)$가 연속일 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 각각의 연속성을 보장하지는 못한다.

| 예제 | $f(x) = \begin{cases} -x & (x<1) \\ x & (x \geq 1) \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x & (x<1) \\ -x & (x \geq 1) \end{cases}$ 일 때 함수 $f(x)g(x)$는 연속함수이다.

⑥ 연속함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$는 $f(x)=0$일 때 무조건 불연속이다.

| 예제 | 함수 $\frac{x}{x}$는 $x=0$일 때 정의되지 않으므로 $x=0$에서 불연속이다.

## 02 다항함수의 미분법

**- 미분의 성질**

기본 개념 $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+ah)-f(x)}{h} = af'(x)$

**- 미분계수의 정의**

다음은 모두 같은 명제이다.

① $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$의 값이 존재한다.

② $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$의 값이 존재한다.

③ 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하다.

**- 미분가능성의 판단**

기본 개념 $f(x)$가 $x=a$에서 미분 가능하면
① $f(a+) = f(a-) = f(a)$
② $f'(a+) = f'(a-) = f'(a)$

**- 절댓값 함수의 미분 가능성**

다항함수 $f(x)$에 대해, $|f(x)|$가 $f(a)=0$이고, $x=a$에서 미분가능하려면 적어도 $(x-a)^2$을 인수로 가져야 한다.

| 예제 | 사차함수 $f(x)$에 대해 $y=|f(x)|$가 $x=3$에서만 미분불가능하고, $f(0)=0$, $f(1)=-2$일 때, $f(x)$는?

| 풀이 |

$f(0)=0$인데 $x=0$에서 미분가능하려면 $f(x)$는 $x^2$을 인수로 가진다.
$x=3$에서 미분가능하지 않으려면

$$f(x) = kx^2(x-3)(x-\alpha)$$

로 둘 수 있다. (단, $\alpha \neq 3$)
**이때, $\alpha \neq 0$이면 $x=\alpha$에서 미분 불가능이므로 모순.**
따라서 $\alpha = 0$이고 $f(x) = kx^3(x-3)$이다.
$f(1)=-2$이므로 대입하면 $k=1$이다.
곧, $f(x) = x^3(x-3)$

**- 다항함수에서의 미분의 의미**

기본 개념 $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n}$의 값이 존재하면 $f(x)$는 $x^n$을 인수로 가져야 한다.

꿀팁 전수 같은 방식으로 $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n}$ 의 값이 존재하면 $f(x)$는 $(x-a)^n$을 인수로 갖는다.

| 예제 | 이차함수 $f(x)$가 $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 2$이다.

| 풀이 | $f(x)$의 최저차수는 $2$이므로
$f(x) = ax^2$으로 둘 수 있다.
이를 대입해서 약분하면 $a = 2$이므로
$f(x) = 2x^2$이다.

**- 극한값의 분석**

$x = a$에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여

$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - p}{x - a} = q$이면,

$$f(a) = p, \ f'(a) = q$$

**- 여러 개의 극한이 주어지고 다항함수 추론하는 문제**

① 함수의 차수를 먼저 구한다.
② 최고차항의 계수/상수항을 구한다.
③ 주어진 조건을 활용하여 다른 항에 대한 식 세운다.

| 예제 | $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족한다.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^3} = 1, \ \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = -2, \ f(2) = 0$$

| 풀이 |

**첫 번째 극한의 의미 :**
$f(x)$는 최고차항 계수가 $1$인 삼차식이다.
**두 번째 극한의 의미 :**
$f(x)$의 최저차항은 $1$차이고, 그 계수는 $-2$이다.
따라서 $f(x) = x^3 + ax^2 - 2x$로 둘 수 있다.
$f(2) = 0$이므로 대입하면 $a = -1$이다.

$$\therefore \ f(x) = x^3 - x^2 - 2x$$

**- 극한값을 구하는 다양한 방법**

→ Case 1. 미분해서 극한값을 구한다.
→ Case 2. 함수를 약분시켜서 극한값을 구한다.

**- 곱함수 미분계수 빠르게 구하기**

$h(x) = f(x)g(x)$일 때, $f(a) = 0$이라 하자.
이때, $h'(a) = f'(a)g(a)$이다. (곱미분)

| 예제 | $f(x) = (x-99)(x^3 + x^2 + x + 1)$이다.

| 풀이 | $f'(99) = 99^3 + 99^2 + 99 + 1$

**- 미분계수를 통한 계수 추론**

최고차항의 계수가 $p$인 $n$차다항식 $f(x)$에 대하여
$f(0) = a, \ f'(0) = b$이면

$$f(x) = px^n + \cdots + bx + a$$

라 둘 수 있다.
같은 방식으로 $f(k) = a, \ f'(k) = b$이면

$$f(x) = p(x-k)^n + \cdots + b(x-k) + a$$

라 둘 수 있다.

꿀팁 전수 $x = a$에서 $f(x)$의 함숫값과 도함숫값, 즉, $f(a)$와 $f'(a)$의 값을 알고 있다는 것은 다시 말해 함수 $f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식을 알고 있다는 것과 같다.

**- 모르는 다항함수의 추론 방법**

삼차함수가 되었든, 사차함수가 되었든
<u>개형만 정해지면</u> 일단 제발 그려라.

(* 이는 함수를 직관적으로 이해하기 위함)

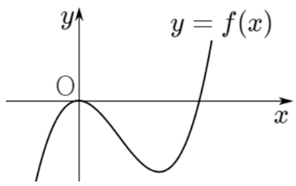
**모르는 항($x$절편, 각 항의 계수)만 미지수로 두면**
무조건 풀린다. (단, 미지수는 2개 이하로만!)

| 예제 | 최고차항의 계수가 $1$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $g(x) = f(x) + |f'(x)|$이고, 다음을 만족시킬 때, $f(x)$는?

(가) $f(0) = g(0) = 0$
(나) 방정식 $f(x) = 0$이 양의 실근을 갖는다.
(다) 방정식 $|f(x)| = 4$의 서로 다른 실근의 개수는 $3$

| 풀이 |

① 준 식에 (가) 조건을 대입하면 $f'(0) = 0$이므로 (나)에 의해 $y = f(x)$의 그래프는 다음과 같이 나타난다.




(다)에서 $f(x) = \pm 4$여야 하는데, $f(x) = 4$의 해가 하나이므로 $f(x) = -4$의 해가 $2$개.
삼차함수가 $2$개의 점과 만나는 경우는 only 접하는 경우.

② 따라서 $f(x)$는 $y=-4$와 접한다.

즉, $x^2(x-a)$라 두면 극솟값은 $x=\frac{2}{3}a$에서 가지므로 대입하면 $a=3$일 때 (다)가 성립한다.

따라서 $f(x)=x^2(x-3)$

**- 절댓값 함수를 대하는 자세 (매우 중요)**

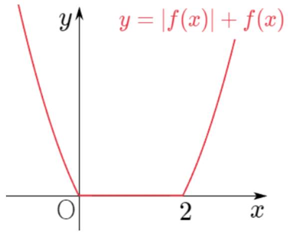
기본 개념 절댓값 함수는 무조건 그 안이 $0$보다 크거나 같을 때, $0$보다 작을 때로 구분

꿀팁 전수

① $y=\dfrac{|f(x)|+f(x)}{2}$ :

$f(x)<0$이면 $y=0$이므로 $f(x)<0$인 부분에 대해서는 전부 잘려서 $0$이 되고, $f(x)>0$인 부분만 그대로 표현하는 함수이다.

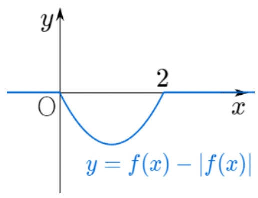
| 예제 | 함수 $y=|x^2-2x|+x^2-2x$의 그래프는 다음과 같다.




② $y=\dfrac{f(x)-|f(x)|}{2}$ :

$f(x)\geq 0$이면 $y=0$이므로 $f(x)\geq 0$인 부분에 대해서는 전부 잘려서 $0$이 되고, $f(x)<0$인 부분은 그대로 표현하는 함수이다.

| 예제 | 함수 $y=x^2-2x-|x^2-2x|$의 그래프는 다음과 같다.




변형으로 $f(x)+|f(x)-x|$ 이런 함수도 나올 수 있다만, 결국은 그냥 **절댓값 안이 0보다 클 때와 0보다 작을 때로 나눠서** 함수의 특성을 파악하면 된다.

꿀팁 전수 $g(x)=f(x)+|f(x)-x|$라는 함수에서 $g(x)-x=f(x)-x+|f(x)-x|$ 이므로 함수 $g(x)-x$는 $f(x)-x$에서 $f(x)-x\geq 0$인 부분만 표현해서 세로로 $2$배 늘린 함수라고 볼 수 있다.

**- 최대/최솟값과 극대/극소**

어떤 함수가 미분가능할 때, 극솟값 또는 극댓값을 가지면 그 점에서 $f'(a)=0$도 성립한다.

꿀팁 전수 미분가능한 어떤 함수가 최댓값을 가질 때, 그 점에서의 미분계수는 $0$이다. 최댓값은 극댓값 중 가장 큰 값이기 때문이다. 최솟값일 때도 마찬가지이다.

**- 함수의 극대/극소 판단**

주의 : $f'(x)=0$이라고 무조건 극대/극소인 게 아님

① $f'(x)=0$인 점 주위에서 $f'(x)$의 부호가 $(+)$에서 $(-)$로 가면 극대

② $f'(x)=0$인 점 주위에서 $f'(x)$의 부호가 $(-)$에서 $(+)$로 가면 극소

| 예제 | $f(a)=0$, $f'(a)=0$일 때, $f(x)$는 $x=a$에서 극값을 가지지 않을 수 있다.

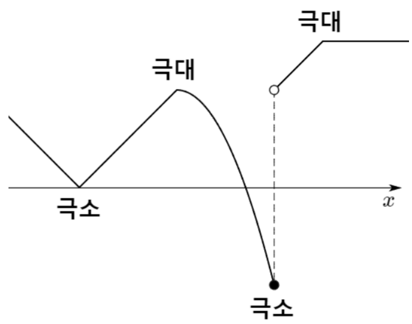
| 풀이 | $f(x)$가 $(x-a)^2$만을 인수로 가지면 다시 뒤집히는 형태이기 때문에 극값이다. 만일 $(x-a)^3$을 인수로 가지면 극값이 아니다.

**- 극값의 엄밀한 정의**

① $f(x)$가 $x=a$의 근방의 모든 함숫값보다 크거나 같으면 $x=a$에서 극대이다.

② $f(x)$가 $x=a$의 근방의 모든 함숫값보다 작거나 같으면 $x=a$에서 극소이다.

꿀팁 전수 다음과 같은 경우도 극대/극소이다.




**- 그래프 그리기**

꿀팁 전수 ①

**대부분의 미분 문제는 일단 그래프 그리기를 전제로 해서 시작한다.** 삼차함수에서 도함수가 $0$이라던지, 영점이 존재하던지 하는 정보가 있으면 일단 그래프 보고 시작하는 게 나은 경우가 많다.

**수학적 특성이 바로 이해되는 함수가 아니면 그래프를 그려보자.**

**꿀팁 전수 ②**

그래프를 그릴 때는 극댓값, 극솟값과 필요 시 절편 정도만 표시해주면 된다. $x$축, $y$축은 가능한 나중에 그리는 것이 좋다.
미리 그려 놓으면 나중에 함수 개형이 바뀌었을 때 대처가 어렵다.

**꿀팁 전수 ③**

다시 한 번 강조하지만 내가 모르는 함수는 가능한 그래프를 그려서 직관적으로 이해하려고 노력해보자.

### - 곱함수의 미분 가능성

**기본 개념**

미분가능한 함수 $f(x)$와 연속함수 $g(x)$에 대하여 함수 $h(x)=f(x)g(x)$가 $x=a$에서 미분가능한데, $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않으면 $f(a)=0$

**추가 설명**

$x \neq a$에서 양변을 미분하면

$$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

이때, $\lim\limits_{x\to a} f'(x)g(x)$의 값이 존재하므로

$h'(a)$의 값이 존재하려면 $\lim\limits_{x\to a} f(x)g'(x)$가 존재하고,

그러려면 $f(a)=0$이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to a} g'(x)$의 값이 존재하지 않기 때문이다.

### - 각종 미분 스킬들

① $\dfrac{d}{dx}(x-a)^n=n(x-a)^{n-1}$

② 우함수와 기함수의 미분계수

$f(x)=f(-x)$일 때, $f'(x)=-f'(-x)$ (좌우대칭)

$f(x)=-f(-x)$일 때, $f'(x)=f'(-x)$ (원점대칭)

### - 접선의 방정식

접점의 좌표를 $(t, f(t))$라 두고 시작한다.
그 접선의 방정식이 지나는 점에 식을 대입해서 $t$를 구하거나, '평균변화율'과 '순간변화율'이 같다는 점을 이용해보면 된다.
아래의 예제를 참조하면 이해가 갈 것이다.

**| 예제 |** 점 $(0, 4)$에서 $y=x^3-x+2$에 그은 접선?

**| 풀이1 | 접선의 방정식과 지나는 점**

접점을 $(t, t^3-t+2)$라 하면 $y'=3x^2-1$이므로
접선의 방정식은

$$y=(3t^2-1)(x-t)+(t^3-t+2)$$

이다. 이 직선이 $(0, 4)$를 지나므로 대입하면

$$-t(3t^2-1)+t^3-t+2=4$$

$$-2t^3+2=4 \Rightarrow \therefore\ t=-1$$

이고, 따라서 접선의 방정식은 $y=2x+4$이다.

**| 풀이2 | 평균변화율과 순간변화율은 같다.**

접점을 $(t, t^3-t+2)$라 하자. (단, $t\neq 0$)
이때, 점 $(0, 4)$과 $(t, t^3-t+2)$를 잇는 직선의 기울기(평균변화율)와 $x=t$에서의 순간변화율은 같으므로

$$\frac{(t^3-t+2)-4}{t}=3t^2-1$$

$$\Rightarrow t^3-t-2=3t^3-t$$

$$\Rightarrow 2t^3=-2 \text{이므로 } t=-1$$

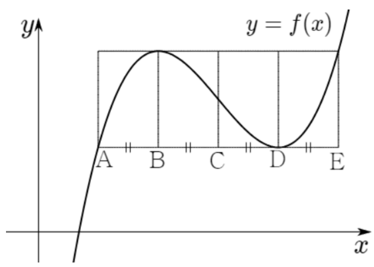
따라서 접점은 $(-1, 2)$이므로 접선은 $y=2x+4$

### - 접선의 절편

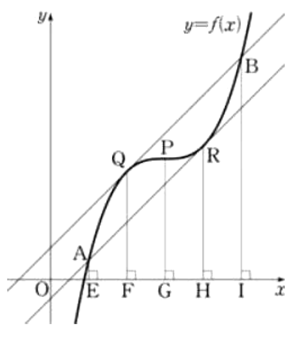
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서 그은 접선의 방정식은 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$이다.
즉, 접선의 $y$절편은 $f(t)-tf'(t)$이다.

### - 삼차함수와 사차함수에서의 비율 관계

① 삼차함수에서는 다음 길이비가 성립

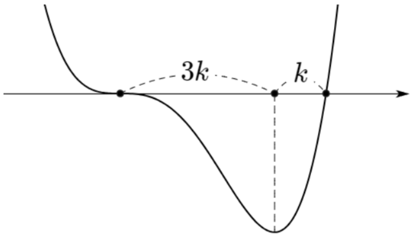



$(\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE})$




$(\overline{EF}=\overline{FG}=\overline{GH}=\overline{HI})$

② 사차함수에서는 다음 길이비가 성립




**- 주기함수에서의 연속성 & 미분 가능성**

구간 $[0, k)$에서 $f(x)=g(x)$인 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)=f(x+k)$를 만족시키면

$$g(0)=g(k-),\ g'(0)=g'(k-)$$

를 만족시킨다.

| 예제 | $[0, 2)$에서 최고차항 계수가 1인 사차함수의 일부인 $f(x)$에 대하여 다음을 만족시킨다.

(가) $f(0)=0,\ f'(0)=0$
(나) $f(x)=f(x+2)$

| 풀이 | 사차함수를 $g(x)$라 하자.
$f(x)$가 $x=2$에서 연속이기 위해
$g(2)=g(0)=0,\ g'(2)=g'(0)=0$이다.
따라서 $g(x)=x^2(x-2)^2$

**- 다항함수에서 극댓값과 극솟값의 차**

① 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에서 $f'(a)=f'(b)=0$일 때,

**극댓값과 극솟값의 차는** $\dfrac{|b-a|^3}{2}$

② 함수 $(x-a)^2(x-b)^2$의 극댓값은 $\dfrac{(b-a)^4}{16}$

**- 특수함수**

① $y=p(x-a)+f(a)$ :

기울기가 $p$이고, 점 $(a, f(a))$를 지나는 함수

② $\dfrac{f(x)}{|f(x)|}$ 또는 $\dfrac{|f(x)|}{f(x)}$ :

$f(x)$의 부호를 나타내는 함수이다.
$f(x)>0$이면 $1$, $f(x)<0$이면 $-1$이 되며,
$f(x)=0$이면 함숫값이 존재하지 않는다.

③ $\dfrac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2}$ :

$f(x)\geq g(x)$이면 $f(x)$, $f(x)<g(x)$이면 $g(x)$
즉, $f(x)$와 $g(x)$ 중 큰 함수를 의미한다.

꿀팁 전수 특수함수들은 워낙 여러 종류가 있고 어떤 형태로 나올지도 예상하지 못한다. 따라서 종류별 함수 특징 정도만 기억하고 실전에서는 절댓값 안의 값에 따라 분류하여 함수를 직접 분석할 수 있어야 한다.

**- 간단한 합성함수의 미분법**

상수 $a$, $b$와 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여

$$f(ax+b)=af'(ax+b)$$

**- 로피탈의 정리(L'Hospital's Rule)**

① 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=c$에서 미분가능하고,

② $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$의 값이 존재하며,

③ $\lim\limits_{x\to c}f(x)=\lim\limits_{x\to c}g(x)=0$이거나

$\lim\limits_{x\to c}f(x)=\lim\limits_{x\to c}g(x)=\pm\infty$이면

다음이 성립한다.

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

주의 위의 정리는 정말 참조로 기재해두었긴 했으나, 평가원 문항에서 로피탈의 정리는 오히려 계산량을 극대화시키는 경우가 있어 가급적 사용을 지양하는 편이 좋다.

## 03 다항함수의 적분법

**- 다항함수의 부정적분**

$$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$$

적분상수를 까먹고 틀리는 경우가 매우 많기 때문에 일부러 언급하였다. 주의하자.

**- 넓이와 관련된 유명한 공식들**

① $\int_0^a kx^2dx = \frac{ka^3}{3}$ (이차함수 적분)

| 예제 | $\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}$

② $\left|\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)dx\right| = \frac{|a|(\beta-\alpha)^3}{6}$ $(\beta > \alpha)$

| 예제 | 함수 $f(x)=3x^2-6x$ 의 그래프와 $x$축으로 둘러싸인 영역의 넓이는?

| 풀이 | 구하는 넓이는

$$\left|\int_0^2 3x(x-2)dx\right| = \frac{3\times(2-0)^3}{6} = 4$$

③ 일차함수 $y=f(x)$와 최고차항의 계수가 $a$인 이차함수 $y=g(x)$가 $x=\alpha,\ \beta\,(\alpha<\beta)$에서 만날 때 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 넓이는

$$\frac{|a|(\beta-\alpha)^3}{6}$$

꿀팁 전수 이는 ②에서 알아본 공식과 동일하다.
이차함수가 직선과 둘러싸인 영역의 넓이는 교점의 $g(x)$의 최고차항의 계수와 교점의 $x$좌표 차에만 영향받을 뿐, 일차함수의 형태에는 영향받지 않는다.

| 예제 | 두 함수 $y=x^2-4x+3$, $y=2x-2$로 둘러싸인 영역의 넓이는?

| 풀이 | 두 함수를 같다고 두면

$$x^2-6x+5=(x-1)(x-5)=0$$

이므로 $x=1$, $x=5$에서 만난다.
넓이 공식에 대입하면 구하는 넓이는

$$\frac{1\times(5-1)^3}{6} = \frac{32}{3}$$

**- 절댓값이 포함된 함수의 적분 방법**

절댓값 안이 0보다 큰 부분, 0보다 작은 부분으로 나누어서 푼다.

| 예제 | $\int_0^2 |3x^2-3x|dx$의 값은?

| 풀이 |

$$\int_0^2 |3x^2-3x|dx$$
$$= -\int_0^1 (3x^2-3x)dx + \int_1^2 (3x^2-3x)dx$$
$$= -\left[x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_0^1 + \left[x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_1^2$$
$$=3$$

**- 정적분을 바라보는 자세**

정적분은 결국 넓이이다.
다만, 음의 구간에서는 '음의 넓이', 양의 구간에서는 '양의 넓이'로 해석하는 것의 차이일 뿐이다.

**- 범위가 주어진 함수의 정적분**

① $f(x)\ge 0$일 때 $\int_a^b f(x)dx \ge 0$이다. (단, $a<b$)

② $f(x)>0$일 때 $\int_a^b f(x)dx = 0$이면 무조건 $a=b$

| 예제 | 연속함수 $f(x)$에 대하여 방정식 $\int_0^x \{f(t)\}^2dt=0$을 풀면? (단, $f(x)\neq 0$)

| 풀이 | $f(x)\neq 0$에서 모든 실수 $t$에 대하여 $\{f(t)\}^2>0$이므로 $x\neq 0$일 때

$x>0$이면 : $\int_0^x \{f(t)\}^2dt>0$

$x<0$이면 : $\int_0^x \{f(t)\}^2dt<0$

따라서 $x=0$

**- 자주 나오는 정적분 형태**

$$g(x)=xf(x)-\int_a^x f(t)dt$$

일 때, $g(x)$를 분석하는 방법은 다음을 따른다.
① 정적분이 0이 되는 값을 넣는다.
이 경우는 $x=a$를 대입하면 된다.
② 양변을 미분하여 $g'(x)=xf'(x)$를 얻는다.

**- 우함수와 기함수의 정적분**

$f(x)=f(-x)$ 일 때 이를 **우함수**라고 한다.

('우' 글자가 좌우대칭 ⇒ 그래프도 좌우대칭)

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx=\int_{0}^{a} f(x)dx$$

$f(x)=-f(-x)$ 일 때, 이를 **기함수**라고 한다.

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$$

**| 예제 |** $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^4+x^3+x^2+x+1)dx$

**| 풀이 |** $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^4+x^2+1)dx$

$$=2\int_{0}^{1}(x^4+x^2+1)dx$$

$$=2\left[\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1=\frac{46}{15}$$

**- 정적분으로 정의된 함수의 해석**

$f(x)=\displaystyle\int_{a}^{x} g(t)dt$ 의 형태로 나타낸 식에서는

① 양변에 $x=a$ 를 대입하여 $f(a)=0$ 임을 얻는다.

② 양변을 미분하여 $f'(x)=g(x)$ 임을 얻는다.

**| 예제 |** $f(x)=\displaystyle\int_{2}^{x}(3t^2+1)dt$

**| 풀이 |** $f(2)=0$ 이고, $f'(x)=3x^2+1$ 이므로

$f(x)=x^3+x+C \Rightarrow C=-10$

**- 평행이동 적분**

$$\int (x-a)^n dx=\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}+C \quad (a,\ n\text{은 상수})$$

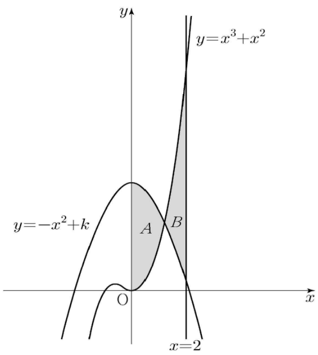
**- 두 그래프 사이의 넓이**

구간 $[a, b]$ 에서 두 그래프

$y=f(x)$, $y=g(x)$ 사이의 넓이는

$$\int_{a}^{b}|f(x)-g(x)|dx$$

**| 예제 |** $A=B$ 일 때, 상수 $k$ 의 값은?




**| 풀이 |** $A$ 와 $B$ 의 넓이가 같을 때,

$$\int_{0}^{2}\{(x^3+x^2)-(-x^2+k)\}dx=0$$

이다. $A$ 는 $x^3+x^2$ 가 $-x^2+k$ 보다 작으므로 적분했을 때, **음의 넓이**가 되지만, $B$ 는 $x^3+x^2$ 가 $-x^2+k$ 보다 크므로 적분했을 때, **양의 넓이**가 된다. 두 구간을 모두 적분하면 음의 넓이와 양의 넓이가 상쇄되어 적분값이 0 이 된다.

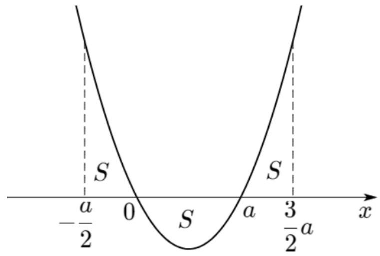
$$\int_{0}^{2}(x^3+2x^2-k)dx=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}x^3-kx\right]_0^2$$

$$=\frac{28}{3}-2k=0 \Rightarrow k=\frac{14}{3}$$

**- 이차함수의 적분과 넓이비**

$f(x)=px(x-a)$ 일 때, $\displaystyle\int_{0}^{\frac{3}{2}a} f(x)dx=0$ 이다.

즉, 아래에서 $S$ 로 표시된 세 영역의 넓이가 같다.

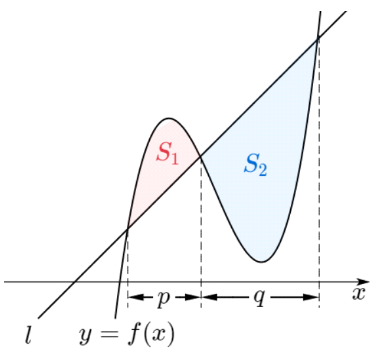



이를 흔히 **'이차함수 2 : 1 넓이공식'**이라 한다.

**꿀팁 전수** $\displaystyle\int_{\frac{3}{2}a}^{2a} f(x)dx=4S$ 도 자주 출제된다.

**- 삼차함수의 적분 공식**

그림과 같이 삼차함수 $f(x)$ 의 그래프와 직선 $l$ 이 세 점에서 만난다고 가정하자.




$f(x)$ 의 최고차항의 계수를 $a$ 라 하고, 이웃한 교점 사이의 $x$ 좌표 차이를 각각 $p$, $q$ 라 하자.

$$S_1=\frac{|a|}{6}\times p^3\left(\frac{p}{2}+q\right)$$

$$S_2=\frac{|a|}{6}\times q^3\left(\frac{q}{2}+p\right)$$