미분가능성 정복하기 1편 : '의심점'

들어가며,

미분가능성은 너무나 방대한 주제이고, 기본 개념에 대한 것에서부터 심화 준킬러 문제까지 다양한 스펙트럼으로 출제될 수 있는 단골 주제라고 할 수 있습니다. 오늘 다룰 내용은 문제 난이도와 관련 없이 미분가능성 문제의 가장 기초를 이루는, **의심점**의 개념에 대한 것입니다. 문제가 아무리 꼬아졌고, 복잡한 함수나 그래프가 주어졌건 간에 관계없이 결국 **모든 미분가능성 문제는 의심점을 찾는데서 시작할 수밖에** 없습니다.

또한 아무리 주제별로 간단한 풀이방법을 배워도, 학습범주를 넘어선 고난도 문항이 나왔을 때 **'미분가능성의 정의'를 활용한 풀이방법은 꼭 숙지해야** 이를 해결할 수 있습니다.

이번 칼럼에서 '의심점'에 대한 개념과 '미분가능성의 정의'를 활용한 풀이방법을 정확히 이해하고, 다음 칼럼에서 함수별로 어떤 상황에서 의심점이 생기는지, 또 이를 어떻게 간단히 해결할 수 있는지를 다뤄보려 합니다.

I. 미분가능성, 정의 정도는 한 번쯤 똑바로 알고 가자

'$x=a$에서 미분 가능하다' 의 정의는 $x=a$ 에서 $f(x)$의 미분계수가 존재한다는 것이다.

$$\text{'}x=a\text{에서 미분 가능하다'} \Leftrightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\text{, 이 존재}$$

미분계수는 극한값으로 정의되므로 미분계수의 좌극한과 우극한이 같으면 된다.

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

TEAM 수리남's TIP

여기서 오해하지 말아야 하는 점이 있다. 학생들이 위 내용을 배우고 미분가능성이 나오면 무조건적으로 미분계수의 좌극한과 우극한을 조사하려는 경향이 있는데, 항상 미분계수의 좌극한과 우극한을 조사할 필요는 없다. **조사하려는 점을 기준으로 함수가 달라지는 경우에만 미분계수의 좌극한과 우극한을 따로 조사하면 된다.**

II. 모든 미분가능성 문제 풀이의 시작점, 의심점

모든 미분가능성 문제풀이의 틀은 아래와 같다.

의심점 찾기	→	의심점에서의 미분가능성 조사

미분불가한 점을 찾으려고 할 때, 모든 점에서 미분가능성을 조사해야 하는 것은 아니다. 미분가능성이 의심되는 **의심점**들, 즉 미분가능하지 않을 수도 있는 후보군들만 모두 제대로 찾아내어 조사하면, 정의역 전체에서 미분 불가한 점을 놓치지 않고 찾을 수 있다.
미분가능성 문항의 핵심은, 즉 먼저 의심점을 모두 정확히 찾아내고, 그 의심점들에서 '$x=a$에서 미분가능성의 정의', 즉 $x=a$에서의 미분계수라는 극한값이 존재하는지를 조사하면 된다.

그럼 의심점은 어떻게 찾는가?

아래 표는 **의심점이 될 수 있는 경우**를 요약한 것이다. 아래 내용을 꼭 숙지하고 넘어가자.

TEAM 수리남's 핵심노트

'의심점'이란?

의심점이란 말 그대로 미분가능인지가 '의심'되는 점을 말합니다.
미분가능성 문항의 핵심은 상황에 따라 의심점을 정확하게 파악하고, 그 의심점에서 미분가능성을 조사하는 것입니다.

★ 의심점이 될 수 있는 경우

1. $|f(x)|$: $f(x)=0$이 되는 점
2. $f(x)g(x)$: $f(x)$가 미분불가능한 점, $g(x)$가 미분불가능한 점
3. $f(g(x))$: $g(x)$가 미분불가능한 점, $f(x)$가 $x=a$에서 미분불가능할 때, $g(x)=a$가 되는 점
4. $\sqrt{f(x)}$: $f(x)=0$이 되는 점
5. $f^{-1}(x)$: $f'(x)=0$이 되는 점

여기서 오해하지 말아야 할 점이 있다. **'의심점'은 말 그대로 미분 불가능이 '의심'되는 점을 말하고, 확실히 미분불가능한 점을 의심점이라고 하지 않는다.** 예를 들면 $f(x)$는 실수 전체에서 미분가능하고, $g(x)$는 $x=a$에서 미분불가능하다면, $f(x)+g(x)$는 $x=a$에서 미분불가능한 것이 확실하므로, 이를 의심점이라고 말하지 않는다. 마찬가지로 분수함수에서 (분모)가 0이 되는 점, 함수가 불연속이 되는 점 등은 의심점이 아니고, 이 부분에서 따로 미분가능성을 조사할 필요가 없다.

TEAM 수리남's TIP

예를 들면, $x=a$에서 미분 불가능한 함수 $g(x)$가 있고, 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 있고, 이때 '함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체에서 미분가능하다' 라는 조건의 문제가 있다고 생각해보자.
위에서 말한 것처럼 의심점을 찾고, 그 의심점에서 미분가능성을 조사하면 된다.
$g(x)$가 $x=a$에서 미분 불가능하다고 했으므로, 나머지 점에서는 모두 미분 가능할 것이고, $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다고 했으므로 $x=a$를 제외한 모든 점에서는 $f(x)$와 $g(x)$의 곱함수인 $f(x)g(x)$는 $x=a$를 제외한 모든 점에서 미분가능할 것이다. 하지만, $x=a$에서는 $g(x)$가 미분불가능하다고 했으므로, $f(x)g(x)$의 미분가능성도 장담할 수는 없다. 즉 위와 같은 상황에서는 $x=a$가 의심점이 되는 것이다.

문제에서는 실수 전체에서 $f(x)g(x)$가 미분가능하다고 했으므로, 의심점인 $x=a$에서도 $f(x)g(x)$가 미분가능 해야한다. 즉, '$\lim_{x \to a} \frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}$이 존재한다' 라는 조건을 이용해서, $f(x)$와 $g(x)$가 어떤 함수인지를 알아내야 하는 것이다.

III. 기본 개념 확인하기

Example 1 다음 함수의 미분가능성을 조사하시오.

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

Example 2 $f(x)=|x-2|$의 미분가능성을 미분가능성의 정의를 이용하여 조사하시오.

Example 1 해설

$x=0$을 제외한 점에서는 $\sin x$도 미분가능, $\frac{1}{x}$도 미분가능이므로, 둘의 합성함수인 $\sin\frac{1}{x}$도 미분가능하고, $x^2\sin\frac{1}{x}$도 미분가능하다. 즉 이 함수의 의심점은 $x=0$임을 알 수 있다. 그렇다면 위에서 배운대로 $x=0$에서 미분가능성을 정의를 통해 조사해보자.

$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}$이 존재하면 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

위에서 설명한 것처럼 <u>**이런 경우에는 좌극한과 우극한을 나눠서 따로 조사할 필요가 없다**</u>. $x=0$ **전후로 함수가 달라지지 않고** $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$**로 같기 때문이다.**

$-1\le sin\frac{1}{x}\le 1$이므로 $-|x|\le x\sin\frac{1}{x}\le|x|$

따라서 샌드위치 정리에 의해 $\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=f'(0)=0$으로 미분가능함을 알 수 있다.

Example 2 해설

절댓값 함수를 아래와 같이 풀어서 써보자.

$$f(x)=\begin{cases} x-2 & (x\ge2) \\ -x+2 & (x<2)\end{cases}$$

$x\ge2$일 때와 $x<2$일 때는 미분가능한 함수이므로, **의심점은 함수가 달라지는 경계인** $x=2$임을 알 수 있다. 즉 $x=2$에서만 미분가능성 조사를 하면 된다.

$f'(2)=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$이고, 이 극한값이 존재해야 $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능할 것이다. **이 경우에는** $x=2$ **전후로** $f(x)$**가 달라지므로, 좌극한과 우극한을 따로 조사해야 하는 것이 맞다.**

① 좌극한 : $f(x)$는 $x<2$에서 $-x+2$라고 했으므로 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\lim_{x\to2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2-}\frac{(-x+2)-0}{x-2}=-1$$

② 우극한 : $f(x)$는 $x\ge2$일 때, $x-2$라고 했으므로 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\lim_{x\to2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2+}\frac{(x-2)-0}{x-2}=1$$

좌극한과 우극한이 달라 극한값이 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하지 않다.

IV. 실전 문제 적용하기

Example 3 $f(x)=|x-1|\times|x-2|$이고, $g(x)=x^3+ax^2+bx-8$이다. 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $a+b$의 값을 구하시오.

TEAM 수리남's TIP

실전에서는 위 문제와 같이 두 개 이상의 함수가 곱해져있거나 합성되어있는 등의 형태로 등장하며, 이 함수가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다는 조건을 제공한다. 이 함수의 의심점을 찾아, 의심점에서 미분가능하다는 조건을 이용해, 미지수를 찾는 형태의 문항이 자주 등장한다.

Example 3 해설

$f(x)$는 절댓값 함수이므로, 아래와 같이 풀어서 쓸 수 있다.

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)(x-2) & (x<1)\\ -(x-1)(x-2) & (1\le x<2)\\ (x-1)(x-2) & (x\ge 2)\end{cases}$$

이때, $f(x)$는 $x=1$, $x=2$를 경계로 함수가 달라지고 있으므로 $x=1$, $x=2$가 의심점이고 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수로 실수전체의 집합에서 미분가능하므로 두 함수의 곱인 $f(x)g(x)$의 의심점도 $x=1$, $x=2$이다.(나머지 점에서는 $f(x)$, $g(x)$ 모두 미분가능하므로, 두 곱함수도 미분가능)

즉, $f(x)g(x)$의 미분가능성은 $x=1$, $x=2$에서만 따져보면 된다.

1) $x=1$에서의 미분가능성

$h(x)=f(x)g(x)$라하면, $h'(1)$이 존재해야, $h(x)$가 $x=1$에서 미분가능하다.

$$h'(1)=\lim_{x\to1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)g(x)-f(1)g(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)g(x)}{x-1}\ (f(1)=0\text{이므로})$$

이때, **$f(x)$가 $x=1$을 기점으로 함수가 달라지고 있기 때문에, 이 경우에도 좌극한과 우극한을 따로 조사해야 한다.**

① 좌극한 : $x<1$일 때, $f(x)=(x-1)(x-2)$이므로

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)g(x)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{(x-1)(x-2)g(x)}{x-1}=-g(1)$$

② 우극한 : $1\le x<2$일 때, $f(x)=-(x-1)(x-2)$이므로

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)g(x)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{-(x-1)(x-2)g(x)}{x-1}=g(1)$$

$h(x)=f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 위에서 좌극한과 우극한이 같아야 한다. 따라서 $-g(1)=g(1)$, $\therefore\ g(1)=0$

2) $x=2$에서의 미분가능성

마찬가지로 $x=2$에서도 똑같이 미분가능성을 따져주면, $g(2)=0$임을 알 수 있다.

$g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로, $g(x)=(x-1)(x-2)(x-k)$라고 쓸 수 있다. $g(x)$의 상수항이 -8이므로, $g(0)=-8$이고, $g(0)=-2k=-8$이므로 $k=4$이다.

따라서 $g(x)=(x-1)(x-2)(x-4)=x^3-7x^2+14x-8$, $a+b=7$임을 알 수 있다.

TEAM 수리남's TIP

참고로, 이 문제는 곱함수의 미분가능성에 대해 자세히 배우면, 정의를 이용하지 않고도 매우 빠르게 해결할 수 있고, 이를 미분가능성 칼럼 3편에서 자세히 다뤄보려 합니다. **하지만, 우리가 알고 있는 범주를 넘어선 고난도 문제가 나왔을 때, 미분가능성의 정의를 활용하여 검증할 수 있는 능력을 기르는 것은 매우 중요합니다.** 따라서 1편의 모든 문제를 미분가능성의 정의를 활용하여 풀 수 있도록 연습해보세요!

TAKE HOME MESSAGE

미분가능성을 다루는 주제는 예전부터 꾸준히 등장해왔고, 킬러문항으로도 자주 등장하는 중요한 소재입니다. 다양한 상황이 존재하기 때문에 많은 학생들이 어려워하는 주제이지만, **미분가능성 유형 전체를 관통하는** '**의심점**'이라는 핵심 개념을 이해한다면 대부분의 문제에서 첫 단추를 꿸 수 있습니다.

물론 미분가능성 파트에서는 '의심점'을 찾는 것 외에도 공부해야 할 심화내용이 많습니다. 하지만, 주제를 관통하는 핵심을 알아야 대비하지 못한 상황이 나왔을 때도 문제를 해결할 수 있습니다.
나무만을 보지 말고 숲을 볼 수 있는 공부를 하세요.

미분가능성 파트는 양이 워낙 방대하기에 시리즈 형태로 구성했습니다. **다음 칼럼들에는 함수별로 의심점은 어떻게 찾고, 어떻게 문제를 해결해야 하는지 차례대로 다뤄보겠습니다.**

다양한 심화개념과 심화문제도 다룰 예정이니 많은 관심 부탁드립니다.

지금까지 **TEAM 수리남**이었습니다.
이 글을 읽는 수험생 여러분 모두에게 행운을 바랍니다.