1번 문항(2017 한양대 논술기출)

함수

$$f(x)=\int_0^x \frac{\ln(t+1)+1}{t+1}dt$$

에 대하여 $x>0$일 때 부등식 $2f\left(\frac{2}{x}\right)>f\left(\frac{1}{x}\right)+f\left(\frac{3}{x}\right)$이 성립함을 보이시오.

2번 문항(2021 서강대 논술기출)

(1) 함수 $f(x)$가 구간 $[1, \infty)$에서 연속이고 증가할 때, 모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$f(1)+\int_{1}^{n} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k)< \int_{1}^{n+1} f(x)dx$$

(2) p가 자연수일 때, 다음 극한값을 구하시오.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^{n} k^p$$

(3) (1)의 결과를 이용하여 다음 극한값을 구하시오.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

3번 문항(2018 한양대 논술기출)

자연수 n에 대하여 $d_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$일 때, 극한값 $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{d_k}{k(k+1)}$를 구하시오.

4번 문항(2022 한양대 논술기출)

함수 $f(x)=\ln(\ln(x+e))$와 양의 실수 a, b에 대하여 부등식

$$f(a+b)<f(a)+f(b)$$

가 항상 성립함을 보이시오.

5번 문항(2021 한양대 모의논술)

닫힌구간 $[0,\pi]$에서 $\sin(x-\cos x)$와 $\sin x$의 크기를 비교하시오.

6번 문항(2022 한양대 논술기출)

$a > 0$, $0 \le b \le 1$인 상수 a, b에 대하여

함수 $f(x) = a\sqrt{1+e^x} + \ln\left(\dfrac{\sqrt{1+e^x}-b}{\sqrt{1+e^x}+b}\right)$의 도함수가 $f'(x) = \sqrt{1+e^x}$이다.

(1). $a+b$의 값을 구하시오.

(2). 실수 k에 대하여 곡선 $y = e^x$ $(k \le x \le k + e^{-k})$의 길이를 $g(k)$라 할 때, $\lim_{k \to \infty} g(k)$의 값을 구하시오.

7번 문항(2018 한양대 논술기출)

$0 \le a \le b \le \pi$ 인 실수 a, b에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$\frac{1}{2}(b-a)^2\cos b \le \int_a^b (\sin b - \sin x)dx \le \frac{1}{2}(b-a)^2\cos a$$

8번 문항(2023 성균관대 모의논술)

(1) 함수 $f(x)$가 열린 구간 (a, b) 에서 연속이고 열린구간 (a, b) 에서 미분가능하면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

인 c는 a와 b 사이에 적어도 하나 존재하는가? 존재하지 않는다면 반례를 들고, 존재한다면
그 이유를 논하시오.

(2). 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 정의된 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대해 함수 $h(x)=f(x)g(x)$ 라 정의하자.
함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 모두 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 불연속 함수이지만 $h(x)$ 는 미분가능하고

$$\frac{h(b)-h(a)}{b-a}=h'(c)$$

인 c가 a와 b사이에 적어도 하나 존재하는 것이 가능한가? 가능하다면 예를 들고,
가능하지 않다면 그 이유를 논하시오.

(3) 함수 $f(x)$가 열린구간 $(1, 2)$에서 연속이고

$$\int_1^2 (x^3 - x^2 + 1) f(x) dx = 0$$

을 만족시킬 때, $f'(c)=0$인 c가 1 과 2 사이에 적어도 하나 존재함을 보이고
그 이유를 논하시오

9번 문항(2020 연세대 논술기출)

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여

$$I=\int_{-1}^{-b}\frac{f(a+x)}{x}dx+\int_{b}^{1}\frac{f(a+x)}{x}dx$$

라고 하자. (단, a와 b는 실수이고, $0<b<1$이다.)

모든 실수 x에 대하여 $f(x)$의 도함수가 $|f'(x)|\leq 1$를 만족시킬 때,

a와 b의 값에 관계없이 $|I|\leq 2$임을 보이시오.

10번 문항(2020 경북대 논술기출)

함수 $f(x)=2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$에서 함수 $f(x)$는 연속인 역함수 $f^{-1}(x)$를 갖는다. 닫힌구간 $[0, 2]$에서 함수

$$g(x)=\int_0^x \left(1-f^{-1}(s)\right)ds$$

의 최댓값을 M이라 하자.

(1) M의 값을 구하시오.

(2) 자연수 n에 대하여, x에 대한 방정식 $g(x)=\frac{M}{n}$의 근을 d_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} nd_n=\frac{bM}{a+\pi}$이다.

자연수 a, b의 값을 구하시오.

11번 문항(2019 부산대 모의논술)

(1) $0 < x \le 1$을 만족시키는 실수 x와 임의의 자연수 n에 대하여, 부등식

$$\frac{x}{n+1} < \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) < \frac{x}{n}$$

가 성립함을 보이시오.

(2) 임의의 자연수 k에 대하여 자연수 m이 $m > ke^{2k}$를 만족하면

$$\frac{1}{e^{2k}} < \left(1-\frac{k}{m}\right)^m < \frac{1}{e^k}$$

가 성립함을 보이시오.

(3) $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$ 임을 보이시오.

12번 문항(2022 동국대 논술기출)

시각 t일 때, 수직선 위를 움직이는 점 A의 위치를 $s(t)$라고 하자. 미분가능한 함수 $s(t)$는

$$s(t)=\int_0^t \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+\cos x+\sin x}dx$$

를 만족시킨다. 모든 $t(t \geq 0)$에 대하여 $\frac{1}{3} \leq s'(t) \leq 1$임을 보이고, 평균값의 정리를 이용하여

$\frac{t}{3} \leq s(t) \leq t$임을 보이시오. 그리고 점 B의 위치가 $s_2(t)=10+\frac{t}{6}$이면, $s(t)-s_2(t)=0$인

시각 t가 적어도 한 번 있음을 보이시오.

13번 문항(2022 부산대 메디컬 모의논술)

닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 정의된 음이 아닌 함숫값을 갖는 모든 다항함수들을 원소로 하는 집합을 U라 하자. 집합 U의 부분집합 B는

$$B=\left\{f\ \middle|\ f\in U\text{이고 } f\left(\frac{a}{2^n}\right)=\frac{b}{2^n},\ n\text{은 자연수, } a\text{와 } b\text{는 홀수}\right\}$$

두 자연수 n과 a는 $a<2^n-1$을 만족시키고 함수 $g(x)$는 집합 B의 원소이다. 닫힌구간 $\left[\frac{a}{2^n},\ \frac{a+1}{2^n}\right]$에서 $|g'(c)|\geq 1$을 만족시키는 c가 존재함을 보이시오.

14번 문항(2022 서강대 모의논술)

[1] 함수 $f(x)=\sqrt{1+x}$에 평균값 정리를 적용하여 $-1<x<0$일 때 부등식 $\sqrt{1+x}<1+\frac{x}{2}$이 성립함을 보이시오.

[2] 닫힌구간 $[a,\,b]$에서 연속이고 열린구간 $(a,\,b)$에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 $x\in(a,\,b)$에 대하여 $f(x)>0$을 만족할 때, $\frac{1}{a-c}+\frac{1}{b-c}=\frac{f'(c)}{f(x)}$인 c가 열린구간 $(a,\,b)$에 적어도 하나 존재함을 보이시오.

15번 문항(2022 서강대 논술기출)

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 가지며 $f(1)=f(2)=3$, $f(3)=5$일 때, $f'(a)=\frac{3}{2}$인 a와 $f''(b)>1$인 b가 모두 열린구간 $(1,3)$에 존재함을 보이시오.

16번 문항(2022 이화여대 모의논술)

실수 a에 대하여 부등식 $e^x - e^a \geq e^a(x-a)$가 성립함을 보이시오.

17번 문항(2021 이화여대 모의논술)

(1) 양의 실수 x에 대하여 부등식 $e^x > 1+x$가 성립함을 보이시오.

(2) 함수 $f(x)=x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$이 구간 $(0, \infty)$에서 증가함을 평균값의 정리를 이용하여 보이시오.

(3) 수열 $\{a_n\}$이 아래 조건 (ⅰ), (ⅱ)를 만족하면 수렴한다.

(ⅰ) $a_n \le a_{n+1}$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)
(ⅱ) 어떤 양의 실수 M에 대하여 $a_n \le M$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)

18번 문항(2020 경북대 모의논술)

(가) 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 미분가능할 때, $f'(x)$의 도함수는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{d}{dx}f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$$

이를 함수 $f(x)$의 이계도함수라 하고, 이것을 기호 $f''(x)$와 같이 나타낸다.

(나) 최고차항의 계수가 1인 이차다항식 $p(x)$의 근이 α, β일 때,

$$p(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$$

이다.

(다) 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고 열린 구간 (a,b)에서 미분가능할 때, $f(a)=f(b)$이면

$$f'(c)=0$$

인 c가 열린 구간 (a,b)에 적어도 하나 존재한다.

(라) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

※ 모든 문항에서 풀이 과정을 반드시 기술하시오.

실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 두 함수 $f(x), h(x)$와 세 실수 $a, b, c\,(a<b<c)$에 대하여, 다음 물음에 답하시오.

[1]

(1) 세 점 $(a, f(a))$, $(b, 0)$, $(c, 0)$은 이차함수 $y=q_1(x)$의 그래프 위의 점일 때

$$q_1(x)=\frac{f(a)(x-b)(x-c)}{(a+\boxed{①}b)(\boxed{②}a+\boxed{③}c)}$$

이다. ①, ②, ③에 알맞은 값을 각각 구하시오.

(2) 세 점 $(a, 0)$, $(b, f(b))$, $(c, 0)$은 이차함수 $y=q_2(x)$의 그래프 위의 점일 때

$$q_2(x)=\frac{f(b)(x-c)(x-a)}{(a+\boxed{④}b)(\boxed{⑤}b+\boxed{⑥}c)}$$

이다. ④, ⑤, ⑥에 알맞은 값을 각각 구하시오.

[2] 함수 $h(x)$가 $h(a)=h(b)=h(c)$을 만족시킬 때,
$h''(d)=0$
인 실수 d가 열린 구간 (a,c)에 적어도 하나 존재함을 증명하시오.

[3] 등식

$$\frac{\left(\frac{f(c)-f(b)}{c-b}\right)-\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)}{c-a}=\frac{f''(d)}{2}$$

를 만족시키는 실수 d가 열린 구간 (a,c)에 적어도 하나 존재함을 증명하시오.

19번 문항(2020 서울과학기술대학 논술기출)

(가) 롤의 정리

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린 구간 (a, b)에서 미분가능할 때,

$f(a)=f(b)$이면, $f'(c)=0$인 c가 a와 b사이에 적어도 하나 존재한다.

(나) 함수 $f(x), g(x)$와 실수 k에 대하여 $g(x)=e^{kx}f(x)$이면 방정식 $f(x)=0$과 $g(x)=0$의 실근은 같다.

(다) 함수 $f(x)$가 미분가능하고 $f'(x)$도 미분가능하면, 함수 $f(x)$는 두 번 미분가능하다고 한다.

[1] 함수 $f(x)$가 두 번 미분가능하고 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근이 $m(m \geq 3)$개이면, 방정식 $f''(x)=0$의 서로 다른 실근은 적어도 $m-2$개임을 보이시오.

[2] 삼차함수 $f(x)$에 대하여 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근이 세 개라고 하자. $g(x)=e^{x}f(x)$로 놓았을 때, $f''(0)=g''(0)=0$이면, 0이 방정식 $f(x)=0$의 근이 될 수 있는지, 없는지 설명하시오.

[3] 함수 $f(x)$가 두 번 미분가능하고 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 세 실근이면, 다음 방정식의 실근이 있음을 보이시오.

$f(x)+6f'(x)+9f''(x)=0$

20번 문항(2020 인하대 모의논술)

(가) [평균값 정리] 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능하면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

를 만족하는 c가 a와 b사이에 적어도 하나 존재한다.

(나) $0<x<\frac{\pi}{2}$일 때, $\sin x<x$이 항상 성립한다.

(다) 세 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$가 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le b_n \le c_n$을 만족하고 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$이면, $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$이다.

※ 자연수 n에 대하여 방정식 $\sin x = \frac{1}{x}$는 구간 $\left(2n\pi, 2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$에서 유일한 해 $x=a_n$을 갖는다.

[1] 모든 자연수 n에

$2n\pi < a_{n+1}-2\pi < a_n$

가 성립함을 보이시오.

[2] 각 자연수 n에 대하여

$a_n - a_{n+1} + 2\pi = \frac{1}{\cos b_n}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$

을 만족하는 b_n이 $a_{n+1}-2\pi$와 a_n사이에 존재함을 보이시오.

[3] $\lim_{n\to\infty} a_n \sin(a_{n+1}-a_n)=0$임을 보이시오.

1번 문항 해설

정답 : 해설참조

구간 $\left[\frac{1}{x},\ \frac{2}{x}\right]$ 에서 평균값 정리를 사용하면

$\dfrac{f\left(\frac{2}{x}\right)-f\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{2}{x}-\frac{1}{x}}=f'(c_1)$ $\left(\frac{1}{x}< c_1 < \frac{2}{x}\right)$ 이고,

구간 $\left[\frac{2}{x},\ \frac{3}{x}\right]$ 에서 평균값 정리를 사용하면

$\dfrac{f\left(\frac{3}{x}\right)-f\left(\frac{2}{x}\right)}{\frac{3}{x}-\frac{2}{x}}=f'(c_2)$ $\left(\frac{1}{x}< c_2 < \frac{2}{x}\right)$ 이다.

이때, $f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{\ln(t+1)+1}{t+1}dt$의 양변을 미분하면 $f'(x)=\dfrac{\ln(x+1)+1}{x+1}$

양변을 한 번 더 미분하면, $f''(x)=\dfrac{-\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ 이므로 $x>0$에서 $f''(x)<0$ 이고

함수 $f'(x)$는 감소함수이다.

그렇다면 $c_1<c_2$에서 $f'(c_1)>f'(c_2)$ 이고

$\dfrac{f\left(\frac{2}{x}\right)-f\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{2}{x}-\frac{1}{x}} > \dfrac{f\left(\frac{3}{x}\right)-f\left(\frac{2}{x}\right)}{\frac{3}{x}-\frac{2}{x}}$ 이다. 양변에 $\frac{1}{x}$ 을 곱하면

$f\left(\frac{2}{x}\right)-f\left(\frac{1}{x}\right)>f\left(\frac{3}{x}\right)-f\left(\frac{2}{x}\right)$ 이고, 이항하여 구하고자 하는

$2f\left(\frac{2}{x}\right)>f\left(\frac{1}{x}\right)+f\left(\frac{3}{x}\right)$를 얻는다.

2번 문항 해설

$f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면 $F'(x)$ 는 구간 $[1. \infty)$ 에서 연속이고 증가함수이다.
임의의 자연수 k 와 함수 $F(x)$ 에 대하여 구간 $[k,\ k+1]$ 에서 평균값 정리를 사용하면
$\dfrac{F(k+1)-F(k)}{(k+1)-k}=F'(c_1)$ $(k<c_1<k+1)$ 이다.

$k<c_1$ 에 대하여 $F'(k)<F'(c_1)$ 이고, ($\because$ $F'(x)$ 는 증가함수)

$f(k)<F(k+1)-F(k)$ 를 얻는다. 양변에 $\sum_{k=1}^{n}$ 을 취하여

$\sum_{k=1}^{n} f(k)<\int_1^{n+1} f(x)dx$ 를 얻는다. $\cdots$ ㉠

마찬가지로 $[k-1,\ k]$ 에서 평균값 정리를 사용하면
$\dfrac{F(k)-F(k-1)}{k-(k-1)}=F'(c_2)$ $(k-1<c_2<k)$ 이다.
$c_2<k$ 에 대하여 $F'(c_2)<F'(k)$ 이고, ($\because$ $F'(x)$ 는 증가함수)

$F(k)-F(k-1)<f(k)$ 를 얻는다. 양변에 $\sum_{k=2}^{n}$ 을 취하면 (단, n 은 2 이상의 자연수)

$\int_1^n f(x)dx<\sum_{k=2}^{n} f(k)$가 성립하고 양변에 $f(1)$ 을 더하여

$f(1)+\int_1^n f(x)dx<\sum_{k=1}^{n} f(k)$을 얻는다. (단, $n=1$ 인 경우 등호 $f(1)+\int_1^n f(x)dx=\sum_{k=1}^{n} f(k)$ 가 성립) $\cdots$ ㉡

㉠+㉡에 의해 주어진 부등식 $f(1)+\int_1^n f(x)dx \le \sum_{k=1}^{n} f(k)<\int_1^{n+1} f(x)dx$ 가 성립한다.

3번 문항 해설

정답 : 2

$d_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$ 일 때, 극한값 $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{d_k}{k(k+1)}$ 를 구하시오

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{d_k}{k(k+1)} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{d_k}{k} - \frac{d_k}{k+1}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{d_k}{k} - \frac{d_{k+1} - \frac{1}{k+2}}{k+1}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left\{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{d_k}{k} - \frac{d_{k+1}}{k+1}\right) + \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)\right\} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{d_1}{1} - \frac{d_{n+1}}{n+1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(2 - \frac{1}{n+2}\right) - \lim_{n\to\infty} \left(\frac{d_{n+1}}{n+1}\right)\end{aligned}$$

이때, $k > 1$ 에서 $0 < \frac{1}{k} < \ln k - \ln(k-1)$ 이므로 각 변에 $\sum_{k=2}^{n+1}$ 을 취하면

$0 < \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} < \ln(n+1)$ 이므로

$d_{n+1} = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1}\right)$ 에서 $1 < d_{n+1} < 1 + \ln(n+1)$ 이므로

$\frac{1}{n+1} < \frac{d_{n+1}}{n+1} < \frac{1}{n+1} + \frac{\ln(n+1)}{n+1}$ 이다. 각 변에 $\lim_{n\to\infty}$ 를 취하면

$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{d_{n+1}}{n+1}\right) = 0$ 을 얻고

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{d_k}{k(k+1)} &= \lim_{n\to\infty} \left(2 - \frac{1}{n+2}\right) - \lim_{n\to\infty} \left(\frac{d_{n+1}}{n+1}\right) \\ &= 2\end{aligned}$$

를 얻는다.

4번 문항 해설

정답 : 해설참조

$f'(x) = \dfrac{1}{(x+e)\ln(x+e)}$이고 이를 한 번 더 미분하면 $f''(x) = -\dfrac{1+\ln(x+e)}{(x+e)^2(\ln(x+e))^2}$

이므로 모든 $x>0$에 대해 $f''(x)<0$이다. 즉, f'은 감소한다.

일반성을 잃지 않고 $a \geq b$라 가정하자. 그러면 평균값 정리에 의해

$\dfrac{f(a+b)-f(a)}{b} = f'(z)$인 z가 열린구간 $(a,\ a+b)$에서

항상 존재하고, $\dfrac{f(b)}{b} = \dfrac{f(b)-f(0)}{b-0} = f'(w)$인 w가 열린구간 $(a,\ b)$에서 항상 존재한다.

그런데 $0<w<b \leq a<z<a+b$이므로 $w<z$, 따라서 $f'(w)>f'(z)$임을 알 수 있다.

이를 정리하면 $f(a+b)<f(a)+f(b)$를 얻는다.

5번 문항 해설

정답 : 해설참조

(i) $x=\frac{\pi}{2}$; $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}$이므로 $\sin(x-\cos x)=\sin x$

(ii) $0 \le x < \frac{\pi}{2}$; $\cos x > 0$이므로 $x-\cos x < x$이고 $\sin x$는 $0 \le x < \frac{\pi}{2}$에서 단조증가함수이므로

$\sin(x-\cos x)< \sin x$

(iii) $\frac{\pi}{2}< x \le \pi$; $\cos x < 0$이므로 $x-\cos x > x$이고 $\sin x$는 $\frac{\pi}{2}< x \le \pi$에서 단조감소함수이므로

$\sin(x-\cos x)< \sin x$

<별해>

(i) $x=\frac{\pi}{2}$; $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}$이므로 $\sin(x-\cos x)=\sin x$

(ii) $0 \le x < \frac{\pi}{2}$; $\cos x > 0$이므로 $x-\cos x < x$, 닫힌구간 $[x-\cos x,\ x]$에서 평균값의 정리를 적용하면

$$\sin x-\sin(x-\cos x)=\cos\alpha(x-(x-\cos x))=\cos\alpha\cos x$$

를 만족하는 α가 열린구간 $(x-\cos x,\ x)$에 존재한다.

한편, $x-\cos x \ge x-1 \ge -1$이므로 $\cos\alpha > 0$이고 $\sin x > \sin(x-\cos x)$이다.

(iii) $\frac{\pi}{2}< x \le \pi$; $\cos x < 0$이므로 $x-\cos x > x$, 닫힌구간 $[x,\ x-\cos x]$에서 평균값의 정리를 적용하면

$$\sin(x-\cos x)-\sin x=\cos\alpha((x-\cos x)-x)=\cos\alpha(-\cos x)$$

를 만족하는 α가 열린구간 $(x,\ x-\cos x)$에 존재한다. 그러므로

$x-\cos x \le x+1 \le \pi+1$이므로 $\cos\alpha < 0$이고 $\sin x > \sin(x-\cos x)$이다.

6번 문항 해설

정답 : (1) 3 (2) 1

(1) 함수 $f(x)=a\sqrt{1+e^x}+\ln\left(\sqrt{1+e^x}-b\right)-\ln\left(\sqrt{1+e^x}+b\right)$를 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}\left(a+\frac{1}{\sqrt{1+e^x}-b}-\frac{1}{\sqrt{1+e^x}+b}\right)=\sqrt{1+e^x}$$

따라서

$$e^x\left[a+\frac{2b}{\left(1+e^x\right)-b^2}\right]=2\left(1+e^x\right)$$

즉

$$e^x\left[a\left\{\left(1+e^x\right)-b^2\right\}+2b\right]=2\left(1+e^x\right)\left\{\left(1+e^x\right)-b^2\right\}$$

전개하면

$$ae^{2x}+\left[a\left(1-b^2\right)+2b\right]e^x=2e^{2x}+2\left(2-b^2\right)e^x+2\left(1-b^2\right)$$

양변의 계수를 비교하면 $a=2,\ b=1$이다. 따라서 $a+b=3$

(2) 제시문 <나>, 치환적분법 및 문제 1에 의하여

$$g(k)=\int_k^{k+e^{-k}}\sqrt{1+e^{2t}}\,dt=\frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2e^{-k}}\sqrt{1+e^x}\,dx\ \left(x=2t\ \ \frac{dt}{dx}=\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(f\left(2k+2e^{-k}\right)-f(2k)\right)$$

평균값 정리에 의하여

$$g(k)=\frac{1}{2}f'(c)2e^{-k}=e^{-k}f'(c)=e^{-k}\sqrt{1+e^c}$$

를 만족하는 c가 열린구간 $\left(2k,\ 2k+2e^{-k}\right)$에 적어도 하나 존재한다. 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 $f''(x)=A'(x)>0$이므로 $f'(x)$는 증가한다. 따라서

$$e^{-k}\sqrt{1+e^{2k}}<g(k)=e^{-k}\sqrt{1+e^c}<e^{-k}\sqrt{1+e^{2k+2e^{-k}}}\text{ 이고}$$

$$\lim_{k\to\infty}e^{-k}\sqrt{1+e^{2k}}=\lim_{k\to\infty}\sqrt{1+e^{-2k}}=1,\ \lim_{k\to\infty}e^{-k}\sqrt{1+e^{2k+2e^{-k}}}=\lim_{k\to\infty}\sqrt{e^{2e^{-k}}+e^{-2k}}=1$$

제시문 <다>에 의하여 $\lim_{k\to\infty}g(k)=1$

7번 문항 해설

정답 : 해설참조

함수 $f(x) = \sin x$는 미분가능하므로,

평균값 정리에 의해 $a < x < b$인 실수 x에 대하여 $\sin b - \sin x = (\cos\alpha)(b-x)$인 $\alpha \in (x,\ b)$가 존재한다.

또한, $f'(x) = \cos x$는 구간 $[0,\ \pi]$에서 감소하므로, $\cos a \ge \cos\alpha \ge \cos b$가 성립한다.

그런데, $b - x > 0$이므로, $(b-x)\cos a \ge (b-x)\cos\alpha = \sin b - \sin x \ge (b-x)\cos b$이다.

각 변을 a에서 b까지 적분하면, $\int_a^b (b-x)\cos b\,dx \le \int_a^b (\sin b - \sin x)dx \le \int_a^b (b-x)\cos a\,dx$

이다.

그러므로 $\frac{1}{2}(b-a)^2\cos b \le \int_a^b (\sin b - \sin x)dx \le \frac{1}{2}(b-a)^2\cos a$이다.

8번 문항 해설

정답 : 해설참조

(1).

열린구간 $(-1,\ 1)$에서 연속인 함수 $f(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$f(x)=\begin{cases} -1 & (x=-1) \\ -x & (-1<x<1) \\ 1 & (x=1) \end{cases}$$

그러면 $\dfrac{f(1)-f(-1)}{f-(-1)}=0$이지만 열린구간 $(-1,\ 1)$에 속하는 임의의 c에 대해 $f'(c)=-1$이므로 평균값 정리가 성립할 수 없다.

(2).

닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 불연속인 함수 $f(x)$, $g(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$f(x)=\begin{cases} -1 & (-1\le x\le 0) \\ 1 & (0<x\le 1) \end{cases},\quad g(x)=\begin{cases} 1 & (-1\le x\le 0) \\ -1 & (0<x\le 1) \end{cases}$$

그러면 닫힌구간 $[-1,\ 1]$의 임의의 점 x에 대해 $h(x)=-1$이 된다. 따라서 $h(x)$는 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 미분가능하고 열린구간 $(-1,\ 1)$의 임의의 점 c에 대해 $\dfrac{h(1)-h(-1)}{1-(-1)}=h'(c)=0$을 만족한다.

(3).

함수 $g(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$g(x)=\int_1^x (t^3-t^2+1)f(t)\,dt$$

함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[1,\ 2]$에서 연속이고 열린구간 $(1,\ 2)$에서 미분가능하다.
따라서 평균값 정리에 의하여
$g'(c)=(c^3-c^2+1)f(c)=0$인 c가 열린구간 $(1,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.
그런데 열린구간 $(1,\ 2)$에서 $c^3-c^2+1=c^2(c-1)+1\ge 1>0$이므로
$f(c)=0$를 만족한다.

9번 문항 해설

정답 : 해설참조

치환하여 다음과 같이 정리한다.

$$I=\int_{-1}^{-b}\frac{f(a+x)}{x}dx+\int_{b}^{1}\frac{f(a+x)}{x}dx=\int_{b}^{1}\frac{f(a+x)-f(a-x)}{x}dx$$

평균값 정리에 의해

함수 $f(x)$가 구간 $[a-x,\ a+x]$에서 연속이고 구간 $(a-x,\ a+x)$에서 미분가능하므로

$\dfrac{f(a+x)-f(a-x)}{2x}=f'(c)$인 c가 구간 $(a-x,\ a+x)$에 존재한다.

$\dfrac{f(a+x)-f(a-x)}{x}=2f'(c)$이므로 $-2\le\dfrac{f(a+x)-f(a-x)}{x}\le 2$이다.

따라서 $-2\le\displaystyle\int_{b}^{1}\frac{f(a+x)-f(a-x)}{x}dx\le 2$이다.

10번 문항 해설

정답 : (1) $2\sqrt{2}$ (2) 4

(1) $f(x)=2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$의 역함수 $f^{-1}(x)$는 닫힌구간 $[0,\ 2]$ 사이에서 $-\frac{\pi}{4}\le f^{-1}(x)\le 0$, $1\le 1-f^{-1}(x)\le 1+\frac{\pi}{4}$이다.

따라서 함수 $g(x)$의 피적분함수는 양수의 값을 가지므로 $g(x)$는 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 증가한다.

그러므로 $g(2)=M$이다.

역함수의 성질에 의하여

$$\int_0^2 f^{-1}(s)ds=-\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(x)dx=-\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} 2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx=2-2\sqrt{2}$$

이다. 따라서

$$M=g(2)=2-\int_0^2 f^{-1}(s)ds=2\sqrt{2}\ \text{ 이다.}$$

(2) 함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 증가하고, $g(2)=M$이므로 자연수 n에 대하여 방정식 $g(x)=\frac{M}{n}$는 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 하나의 실근 d_n을 갖는다. $g(0)=0$이고, 함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ 2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{M}{n}=g(d_n)=d_n\left(\frac{g(d_n)-g(0)}{d_n}\right)=d_n g'(c_n),\ \ 0<c_n<d_n\le 2$$

인 c_n이 존재한다. $1\le 1-f^{-1}(c_n)=g'(c_n)$이고 $d_n=\frac{M}{ng'(c_n)}\le\frac{M}{n}$이므로 $\lim_{x\to\infty}d_n=0$이다.

$f^{-1}(x)$는 연속이고 $f^{-1}(0)=-\frac{\pi}{4}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}nd_n=\lim_{n\to\infty}\frac{M}{1-f^{-1}(c_n)}=\frac{M}{1-f^{-1}(0)}=\frac{4M}{4+\pi}$$

따라서 $a=b=4$이다.

11번 문항 해설

정답 : (1) 해설참조 (2) 해설참조 (3) 해설참조

(1) $g(x)=\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$이라 하면, 함수 $g(x)$는 $0<x\le 1$인 x에 대하여 $[0,\ x]$에서 연속이고, $(0,\ x)$에서 미분가능이므로 평균값의 정리에 의해

$$\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(c) \qquad \cdots ㉠$$

을 만족하는 $0<c<x\le 1$인 c가 적어도 한 개 존재한다.

한편, $g'(c)=\dfrac{\frac{1}{n}}{1+\frac{c}{n}}=\dfrac{1}{n+c}$이고, $0<c<1$에서 $\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{1}{n+c}<\dfrac{1}{n}$이므로

$$\frac{1}{n+1}<g'(c)<\frac{1}{n} \qquad \cdots ㉡$$

이다. ㉠에서 $g(0)=0$이므로 $g'(c)=\dfrac{g(x)}{x}$이고, 이것을 ㉡에 대입하면

$$\frac{1}{n+1}<\frac{g(x)}{x}<\frac{1}{n}$$

이다. 따라서, 양변에 x를 곱하면

$$\frac{x}{n+1}<g(x)=\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)<\frac{x}{n}$$

가 성립한다.

(2) 임의의 자연수 k에 대하여 m이 $m>ke^{2k}$를 만족하므로

$$0<\frac{k}{m-k}<\frac{k}{ke^{2k}-k}=\frac{1}{e^{2k}-1}<1$$

이 되어 (a)로부터

$$\ln\left(1+\frac{k}{m-k}\right)^m=m\times\ln\left(1+\frac{k}{m-k}\right)\le m\frac{k}{m-k}=k\left(1+\frac{k}{m-k}\right)<k(1+1)=2k$$

$$\ln\left(1+\frac{k}{m-k}\right)^m=m\times\ln\left(1+\frac{k}{m-k}\right)\ge m\frac{k}{m-k+1}=\frac{m}{m-k+1}k>k$$

이다. 이를 정리하면

$$e^k<\left(1+\frac{k}{m-k}\right)^m<e^{2k}$$

이다. 즉, 자연수 k에 대하여 m이 $m>ke^{2k}$를 만족하면

$$\frac{1}{e^{2k}}<\left(1-\frac{k}{m}\right)^m<\frac{1}{e^k}$$

이 성립한다.

(3) $p(x)=\dfrac{x^2}{e^x}$ (단, $x>0$)이라 하자.

$p'(x)=\dfrac{2x-x^2}{e^x}$이므로 $x=2$에서 함수 $p(x)$는 극댓값을 갖는다.

그러므로

$$0<p(x)=\frac{x^2}{e^x}\le p(2)=\frac{4}{e^2}$$

이다. 양변을 x로 나누면

$$0<\frac{x}{e^x}\le\frac{4}{e^2x}$$

이고 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{e^2x}=0$이므로 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$이다.

12번 문항 해설

정답 : 해설참조

$s(t)$의 도함수는 $s'(t)=\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+\cos t+\sin t}$ 이다.

삼각함수의 덧셈정리에서

$$\cos x+\sin x=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right) \qquad =\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x+\sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)$$

$=\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$

이므로 $-\sqrt{2}\le \cos x+\sin x\le\sqrt{2}$ 이다. 그러므로 $\dfrac{1}{3}\le s'(t)\le 1$ 이다.

한편 주어진 등식에 $t=0$을 대입하면 $s(0)=0$이므로

$t>0$일 때, 구간 $[0,t]$에서 $s(t)$에 평균값 정리를 적용하면

$$\frac{s(t)-s(0)}{t}=s'(c)\ \ (0<c<t)$$

인 c가 존재한다. 한편 $\dfrac{s(t)-s(0)}{t}=\dfrac{s(t)}{t}$이고, $\dfrac{1}{3}\le s'(c)\le 1$이므로

$$\frac{1}{3}\le\frac{s(t)}{t}\le 1,\ 즉\ \frac{t}{3}\le s(t)\le t$$

가 성립한다. 이 부등식은 $t=0$일 때도 성립한다.

$h(t)=s(t)-s_2(t)$라고 하면 $\dfrac{1}{6}t-10\le h(t)\le\dfrac{5}{6}t-10$ 이다.

$t=0$을 대입하면 $h(0)=-10$, $t=60$을 대입하면 $0\le h(60)\le 40$이고

함수 $h(t)$는 연속함수이다. 따라서 사이값 정리에 의하여 $h(t)=0$인 시간 t가 적어도 하나 존재한다.

13번 문항 해설

집합 B의 원소 $g(x)$는 다음의 성질 (I)와 (II)를 만족시킨다.

(I) a가 홀수이면, $g\left(\frac{a}{2^n}\right)=\frac{b}{2^n}$인 홀수 b가 존재한다.

(II) a가 짝수이면, $g\left(\frac{a}{2^n}\right)=\frac{b}{2^n}$인 짝수 b가 존재한다.

성질 (II)를 만족시키는 이유는 다음과 같다.

a가 짝수이면, $\frac{a}{2^n}=\frac{a_0}{2^m}$를 만족시키는 $m<n$인 자연수 m과 홀수 a_0가 존재한다. 따라서 집합 B의 조건으로부터

$$g\left(\frac{a}{2^n}\right)=g\left(\frac{a_0}{2^m}\right)=\frac{b_0}{2^m},\quad b_0\text{는 홀수,}$$

이다. $b'=b_0 2^{n-m}$라 두면 b'은 짝수이고 $g\left(\frac{a}{2^n}\right)=\frac{b'}{2^n}$이므로, 성질 (II)가 만족됨을 알 수 있다.

제시문 (나)에 의해

$$g'(c)=\frac{g\left(\frac{a+1}{2^n}\right)-g\left(\frac{a}{2^n}\right)}{\frac{a+1}{2^n}-\frac{a}{2^n}}$$

을 만족시키는 c가 열린구간 $\left(\frac{a}{2^n},\frac{a+1}{2^n}\right)$에 적어도 하나 존재한다. 또한, 연속하는 두 자연수 $a, a+1$은 둘 중 하나는 홀수이고 하나는 짝수이므로 성질 (I)와 (II)로부터

$$g'(c)=\frac{g\left(\frac{a+1}{2^n}\right)-g\left(\frac{a}{2^n}\right)}{\frac{a+1}{2^n}-\frac{a}{2^n}}=\frac{\frac{b'}{2^n}-\frac{b}{2^n}}{\frac{1}{2^n}}=b'-b$$

인 b와 b'이 존재하고 둘 중 하나는 반드시 홀수이어야 하고 다른 하나는 짝수이어야 한다. 즉, $|b'-b|\geq 1$이므로 $|g'(c)|\geq 1$이다.

14번 문항 해설

[1]

$f(x)=\sqrt{1+x}$ 에 대하여 닫힌구간 $[a, b]$ 에 평균값 정리를 적용하면 $x<c<0$ 인 적당한 c가 존재하여

$$\frac{1-\sqrt{1+x}}{-x}=\frac{f(0)-f(x)}{0-x}=f'(c)=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}>\frac{1}{2}$$

가 성립하므로 $\sqrt{1+x}<1+\frac{x}{2}$ 이다.

[2]

$g(x)=(x-a)(x-b)f(x)$ 라 놓으면 $g(x)$ 는 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 열린구간 (a, b) 에서 미분가능하며 $g(a)=g(b)=0$ 이다. 따라서 제시문 [가]의 평균값 정리에 의하여 $g'(c)=0$ 인 c가 열린구간 (a, b) 에 존재한다.

$$g'(x)=(x-a)f(x)+(x-b)f(x)+(x-a)(x-b)f'(x)$$

로부터 $0=(c-a)f(c)+(c-b)f(c)+(c-a)(c-b)f'(c)$ 를 얻는다. 등식의 양변을 $(c-a)(c-b)f(c)$ 로 나누면

$$\frac{1}{c-a}+\frac{1}{c-b}+\frac{f'(c)}{f(c)}=0$$

이 성립하여

$$\frac{1}{a-c}+\frac{1}{b-c}=\frac{f'(c)}{f(c)}$$

15번 문항 해설

[1] 제시문 [나]의 평균값 정리에 의해서

$$f'(r)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{3-3}{2-1}=0$$

을 만족하는 r이 열린구간 $(1,2)$에 존재하며

$$f'(s)=\frac{f(3)-f(2)}{3-2}=\frac{5-3}{3-2}=2$$

를 만족하는 s가 열린구간 $(2,3)$에 존재한다. 모든 실수 x에 대해서 이계도함수 $f''(x)$가 존재하므로 $f'(x)$는 닫힌구간 $[r,s]$에서 연속이다.

$$f'(r)=0,\ f'(s)=2,\ 0<\frac{3}{2}<2$$

이므로 제시문 [가]에 주어진 사잇값 정리에 의하여 $f'(a)=\frac{3}{2}$을 만족하는 a가 열린구간 (r,s)에 존재한다.

또한 평균값 정리를 닫힌구간 $[r,s]$와 미분가능한 함수 $f'(x)$에 적용하면

$$f''(b)=\frac{f'(s)-f'(r)}{s-r}=\frac{2}{s-r}$$

을 만족하는 b가 열린구간 (r,s)에 존재한다. 구간 (r,s)는 구간 $(1,3)$에 포함되므로 $s-r<2$가 성립하고 따라서 $f''(b)>1$이다.

16번 문항 해설

(1)

함수 $f(x)=e^x-e^a-e^a(x-a)$의 도함수 $f'(x)=e^x-e^a$는 $x<a$일 때 $f'(x)<0$이고, $x>a$일 때 $f'(x)>0$이며 $f'(a)=0$이다. 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 최솟값 $f(a)=0$를 갖는다. 따라서 $f(x)\geq 0$이다. 즉 $e^x-e^a\geq e^a(x-a)$가 성립한다.

[별해] $x=a$이면 $e^a-e^a=0$이고 $e^a(a-a)=0$이므로 부등식이 성립한다.

$x\neq a$이면 함수 $f(x)=e^x$가 미분가능하므로 평균값 정리에 의해

$$\frac{e^x-e^a}{x-a}=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c)=e^c$$

를 만족하는 c가 a와 x사이($a<c<x$ 혹은 $x<c<a$)에 존재하고 $e^x-e^a=e^c(x-a)$이다.

(ㄱ) $a<c<x$이면 $e^c>e^a$이고 $x-a>0$이므로 $e^c(x-a)\geq e^a(x-a)$이다. 따라서 부등식 $e^x-e^a\geq e^a(x-a)$가 성립한다.

(ㄴ) $x<c<a$이면 $e^c<e^a$이고 $x-a<0$이므로 $e^c(x-a)\geq e^a(x-a)$이다. 따라서 부등식 $e^x-e^a\geq e^a(x-a)$가 성립한다.

위에 의해 $e^x-e^a\geq e^a(x-a)$가 성립한다.

(2)

$x=a$에서 함수 $f(x)=e^x$의 미분계수가 e^a이므로, 곡선 $y=e^x$ 위의 점 $(a,\ e^a)$에서의 접선의 방정식은 $y-e^a=e^a(x-a)$이다. 이 접선이 직선 $y=1$과 만나는 점이 $(b,\ 1)$이므로 $1-e^a=e^a(b-a)$가 성립한다. 문항 (1)의 결과로부터 $e^a(b-a)\leq e^b-e^a$이 성립하므로 $1-e^a\leq e^b-e^a$를 얻는다. 따라서 $e^b\geq 1$이 성립한다.

17번 문항 해설

(1)

함수 $g(x)=e^x-1-x$를 미분하면 $g'(x)=e^x-1$이고, $g(0)=e^0-1=0$이다.

평균값의 정리에 의하여 다음을 만족하는 c가 $(0,\ x)$ 안에 적어도 하나 존재한다.

$$\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\frac{e^x-1-x}{x}=e^c-1=g'(c)$$

x와 c가 양의 실수이므로 $e^c-1>0$이고 $x>0$이다. 따라서 $g(x)=xg'(c)=x(e^c-1)>0$이다. 결론적으로 양의 실수 x에 대하여 부등식 $e^x>1+x$가 성립한다.

(2)

로그함수 $\ln x$의 도함수는 $\frac{1}{x}$이다. 평균값의 정리에 의하여 다음을 만족하는 c가 $(x,\ x+1)$ 안에 적어도 하나 존재한다.

$$\ln(x+1)-\ln x=\frac{1}{c}$$

함수 $f(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=x(\ln(x+1)-\ln x)$를 미분하면

$$f'(x)=\ln(x+1)-\ln x+x\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)=\ln(x+1)-\ln x-\frac{1}{x+1}$$

이고, $\frac{1}{c}>\frac{1}{x+1}$이므로

$$f'(x)=\ln(x+1)-\ln x-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{c}-\frac{1}{x+1}>\frac{1}{c}-\frac{1}{c}=0$$

에서 $f'(x)>0$이다. 따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(0,\ \infty)$에서 증가한다.

(3)

수열 $\{b_n\}$의 일반항이 $b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $(n=1,2,3,\cdots)$일 때, 수열 $\{b_n\}$이 위의 조건 (i), (ii)를 만족함을 보임으로써 수렴함을 보이시오.

(2)의 결과로부터 함수 $f(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$가 구간 $(0,\ \infty)$에서 증가함수이므로, 자연수 n에 대하여 아래 부등식이 성립한다.

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\le(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

로그함수의 성질로부터

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \leq \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

이다. 로그함수 $\ln x$가 증가함수이므로

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

이 성립한다. 따라서 수열 $\{b_n\}$은 조건 (i)을 만족한다.

(1)의 결과로부터 양의 실수 x에 대하여 부등식 $e^x > 1+x$이 성립하므로, 자연수 n에 대하여 아래 부등식이 성립한다.

$$1+\frac{1}{n} < e^{\frac{1}{n}}$$

로그함수는 증가함수이므로

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \ln e^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}$$

이 성립한다. 로그함수의 성질로부터

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 = \ln e$$

이다. 로그함수 $\ln x$가 증가함수이므로

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le e$$

이 성립한다. 따라서 수열 $\{b_n\}$은 조건 (ii)를 만족한다.

그러므로 수열 $\{b_n\}$이 조건 (i), (ii)를 만족한다.

18번 문항 해설

[1] (1) 이차식 $q_1(x)$에 대하여, 등식 $q_1(x)=0$은 두 개의 서로 다른 근 b와 c를 가지므로, $q_1(x)=C(x-b)(x-c)$임을 알 수 있다. 또한 $q_1(a)=f(a)$임을 이용하면, $C=\dfrac{f(a)}{(a-b)(a-c)}$임을 알 수 있다. 따라서 ①$=-1$, ②$=1$, ③$=-1$이다.(각 5점씩 15점)

(2) 이차식 $q_2(x)$에 대하여, 등식 $q_2(x)=0$은 두 개의 서로 다른 근 a와 c를 가지므로, $q_2(x)=C'(x-c)(x-a)$임을 알 수 있다. 또한 $q_2(b)=f(b)$임을 이용하면, $C'=\dfrac{f(b)}{(b-c)(b-a)}=\dfrac{f(b)}{(a-b)(-b+c)}$임을 알 수 있다. 따라서 ④$=-1$, ⑤$=-1$, ⑥$=1$이다.(각 5점씩 15점)

[2] 롤의 정리에 의하여, $h'(c_1)=0$인 c_1이 열린 구간 (a,b)사이에 적어도 하나 존재하고, 역시 롤의 정리에 의하여 $h'(c_2)=0$인 c_2이 열린 구간 (b,c)사이에 적어도 하나 존재한다. (20점)

이 때, $a<c_1<b<c_2<c$임을 알 수 있다. (10점)

다시 롤의 정리에 의하여 $h''(d)=0$인 d가 열린 구간 $(c_1,c_2)\subset(a,c)$사이에 적어도 하나 존재한다. (10점)

[3] 문제 [3-1](1), (2)의 답에서와 마찬가지 방법을 통하여, 이차 이하 다항함수 $y=q_3(x)$의 그래프가 세 점 $(a,0)$, $(b,0)$, $(c,f(c))$을 지난다고 하면,

$q_3(x)=\dfrac{f(c)}{(c-a)(c-b)}(x-a)(x-b)$이다.

$p(x)=q_1(x)+q_2(x)+q_3(x)$로 두면, $p(x)$는 이차 이하의 다항식이고, 함수 $y=p(x)$의 그래프는 $(a,f(a))$, $(b,f(b))$, $(c,f(c))$를 지난다.

$h(x)=f(x)-p(x)$로 두면, $h(a)=h(b)=h(c)=0$임을 알 수 있다. [3-2]의 결과로부터, $h''(d)=0$인 d가 열린 구간 (a,c)사이에 적어도 하나 존재함을 알 수 있다. (20점)

이때, $p(x)$의 이차항의 계수 $A=\dfrac{\left(\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}\right)-\left(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)}{c-a}$이다. (15점)

한편, $h''(x)=f''(x)-p''(x)=f''(x)-2A$인데, $h''(d)=0$으로부터,

$\dfrac{\left(\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}\right)-\left(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)}{c-a}=\dfrac{f''(d)}{2}$이다. (15점)

19번 문항 해설

[1] 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 m개의 실근을 $s_1, s_2, \cdots, s_m (s_1 < s_2 < \cdots < s_m)$이라 하자. 함수 $f(x)$가 미분가능하고 $f(s_1)=f(s_2)=0$이므로 롤의 정리에 의하여 s_1과 s_2 사이에 $f'(t_1)=0$인 실수 t_1이 적어도 하나 존재한다. 이와 같은 방법으로 $j=2, \cdots, m-1$에 대하여 $f'(t_j)=0$인 t_j가 s_j와 s_{j+1} 사이에 적어도 하나 존재한다. 즉, 방정식 $f'(x)=0$의 근 $t_1, t_2, \cdots, t_{m-1}$이 $s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < \cdots < t_{m-1} < s_m$을 만족하므로 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근은 적어도 $m-1$개 존재한다. 위와 같은 과정을 반복하면, $f'(x)$가 미분가능하고 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근이 적어도 $m-1$개이므로 방정식 $f''(x)=0$은 적어도 $m-2$개의 서로 다른 실근을 가진다.

[2] 0은 $f(x)=0$의 실근이 될 수 없다. 왜냐하면 함수 $g(x)$를 두 번 미분하면

$$g''(x)=e^x\{f(x)+2f'(x)+f''(x)\}$$

인데 $g''(0)=0$이고 $f''(0)=0$이므로 $0=f(0)+2f'(0)$이다. 만약 $f(0)=0$이면 $f'(0)=0$이다. 이것은 삼차방정식 $f(x)=0$가 중근을 가짐을 의미한다. 그런데 이것은 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가진다는 조건에 모순이 된다.

[3] 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 세 실근이 세 개이므로 $g(x)=e^{\frac{x}{3}}f(x)=0$도 서로 다른 세 실근을 가진다. 따라서 문항 [2.1]에 의하여 $g''(x)=0$의 실근을 적어도 하나 존재한다. 그런데 함수 $g(x)$를 두 번 미분하여 얻은 방정식은 다음과 같다.

$$g''(x)=\frac{1}{9}e^{\frac{x}{3}}\{f(x)+6f'(x)+9f''(x)\}=0$$

위의 방정식이 적어도 하나의 실근을 가지므로 방정식 $f(x)+6f'(x)+9f''(x)=0$은 실근을 가진다.

20번 문항 해설

[1] $a_{n+1} > 2(n+1)\pi$ 이므로 $2n\pi < a_{n+1} - 2\pi$ 이다. 그리고

$\sin(a_{n+1} - 2\pi) - \sin a_n = \sin a_{n+1} - \sin a_n = \dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n} < 0$ 이므로

$2n\pi < a_{n+1} - 2\pi < a_n$ 이다.

[2] 구간 $[a_{n+1} - 2\pi, a_n]$ 에서 함수 $f(x) = \sin x$ 에 평균값 정리를 적용하면

$$\frac{\sin a_n - \sin(a_{n+1} - 2\pi)}{a_n - a_{n+1} + 2\pi} = \cos b_n$$

인 b_n 이 $a_{n+1} - 2\pi$ 와 a_n 사이에 적어도 하나 존재한다. 즉,

$$a_n - a_{n+1} + 2\pi = \frac{\sin a_n - \sin(a_{n+1} - 2\pi)}{\cos b_n} = \frac{\sin a_n - \sin a_{n+1}}{\cos b_n} = \frac{1}{\cos b_n}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$ 을

얻는다.

[3] $0 < a_n - (a_{n+1} - 2\pi) < \dfrac{\pi}{2}$ 이므로 제시문 (나)에 의하여

$\sin(a_n - (a_{n+1} - 2\pi)) < a_n - a_{n+1} + 2\pi$ 을 얻는다.

[1]과 [2]의 결과를 이용하면

$\sin(a_n - a_{n+1}) < \dfrac{1}{\cos b_n}\left(\dfrac{1}{a_n} - \dfrac{1}{a_{n+1}}\right)$ 이고 $1 - \dfrac{2\pi}{a_{n+1}} < \dfrac{a_n}{a_{n+1}} < 1$ 임을 알 수 있다.

$\lim\limits_{n\to\infty} \cos b_n = 1$ 이므로 $0 < a_n \sin(a_n - a_{n+1}) < \dfrac{1 - \dfrac{a_n}{a_{n+1}}}{\cos b_n}$ 이고 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 - \dfrac{a_n}{a_{n+1}}}{\cos b_n} = 0$ 이다.

따라서, 제시문 (다)에 의해 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \sin(a_{n+1} - a_n) = 0$ 을 얻는다.