개념서

해설편

COMPACT

수학1

수1 COMPACT

1) ⑤

① $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[4]{2}=\sqrt[12]{2^4}\times\sqrt[12]{2^3}=\sqrt[12]{2^4\times 2^3}=\sqrt[12]{2^7}$

② $\sqrt[3]{-\sqrt{64}}=\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{(-2)^3}=-2$

③ $\sqrt[3]{\sqrt[5]{8}}=\sqrt[5]{\sqrt[3]{2^3}}=\sqrt[5]{2}$

④ $\dfrac{\sqrt[3]{-27}}{\sqrt[3]{-8}}=\dfrac{\sqrt[3]{(-3)^3}}{\sqrt[3]{(-2)^3}}=\dfrac{-3}{-2}=\dfrac{3}{2}$, $\sqrt[3]{\dfrac{27}{8}}=\sqrt[3]{\left(\dfrac{3}{2}\right)^3}=\dfrac{3}{2}$

$\therefore\ \dfrac{\sqrt[3]{-27}}{\sqrt[3]{-8}}=\sqrt[3]{\dfrac{27}{8}}$

⑤ $\left(\sqrt[3]{7}\times\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)^6=(\sqrt[3]{7})^6\times\dfrac{1}{(\sqrt{7})^6}$

$=\{(\sqrt[3]{7})^3\}^2\times\dfrac{1}{\{(\sqrt{7})^2\}^3}$

$=7^2\times\dfrac{1}{7^3}=\dfrac{1}{7}$

2) 6

$\sqrt{(-2)^2}+\sqrt[3]{(-3)^3}+\sqrt[4]{(-4)^4}+\cdots+\sqrt[10]{(-10)^{10}}$

$=2+(-3)+4+(-5)+\cdots+10$

$=(-1)\times 4+10=6$

3) 4

10의 10제곱근 중 실수인 것은 $\pm\sqrt[10]{10}$ 이므로

$R(10,\ 10)=2$

$\sqrt{10}$ 의 5제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[5]{\sqrt{10}}$ 이므로

$R(\sqrt{10},\ 5)=1$

$-\sqrt{10}$ 의 5제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[5]{-\sqrt{10}}$ 이므로

$R(-\sqrt{10},\ 5)=1$

-10의 10제곱근 중 실수인 것은 존재하지 않으므로

$R(-10,\ 10)=0$

$\therefore\ R(10,\ 10)+R(\sqrt{10},\ 5)+R(-\sqrt{10},\ 5)+R(-10,\ 10)$

$=2+1+1+0=4$

4) 11

정육면체의 한 모서이의 길이는 $\sqrt[3]{\sqrt{3}}=\sqrt[6]{3}$

정삼각형 AFC의 한 변의 길이는

$\sqrt[6]{3}\times\sqrt{2}$

이므로 △AFC의 넓이는

$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt[6]{3}\times\sqrt{2})^2=\dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt[3]{3}}{2}=\dfrac{\sqrt[6]{3^3}\times\sqrt[6]{3^2}}{2}=\dfrac{\sqrt[6]{3^5}}{2}$

따라서 $m=5,\ n=6$이므로

$m+n=11$

5) 7

$\dfrac{\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a\sqrt[5]{a}}}}{\sqrt[5]{a\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}}}}=\dfrac{\sqrt[3]{a}\times\sqrt[12]{a}\times\sqrt[60]{a}}{\sqrt[5]{a}\times\sqrt[20]{a}\times\sqrt[60]{a}}=\dfrac{\sqrt[60]{a^{20}\times a^5\times a}}{\sqrt[60]{a^{12}\times a^3\times a}}$

$=\sqrt[60]{\dfrac{a^{26}}{a^{16}}}=\sqrt[60]{a^{10}}=\sqrt[6]{a}$

따라서 $m=1,\ n=6$이므로 $m+n=7$

6) ⑤

$\dfrac{a^{-2}+a^{-4}+a^{-6}+a^{-8}+a^{-10}}{a^2+a^4+a^6+a^8+a^{10}}$

$=\dfrac{a^{-10}(a^8+a^6+a^4+a^2+1)}{a^2(1+a^2+a^4+a^6+a^8)}$

$=\dfrac{a^{-10}}{a^2}=a^{-12}$

$=(\sqrt[6]{2-\sqrt{3}})^{-12}=(2-\sqrt{3})^{-2}$

$=\dfrac{1}{(2-\sqrt{3})^2}=\dfrac{1}{7-4\sqrt{3}}$

$=\dfrac{7+4\sqrt{3}}{(7-4\sqrt{3})(7+4\sqrt{3})}=7+4\sqrt{3}$

7) $\dfrac{37}{6}$

조건 (가)에서 $a^2=\sqrt[3]{b}$ 이므로

$a=b^{\frac{1}{6}}$

조건 (나)에서 $b^3=\sqrt{c}$ 이므로

$c=b^6$

따라서 $ac=b^{\frac{1}{6}}\times b^6=b^{\frac{37}{6}}$ 이므로

$k=\frac{37}{6}$

8) ②

$\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}}\div\sqrt{a^3\sqrt{a^k}}\times\sqrt[4]{a^3}=(a^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{3}}\div(a^{3+\frac{k}{2}})^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{3}{4}}$

$=a^{\frac{4}{9}-\frac{3}{2}-\frac{k}{4}+\frac{3}{4}}$

$=a^{-\frac{11}{36}-\frac{k}{4}}$

즉 $-\frac{11}{36}-\frac{k}{4}=0$이므로 $\frac{k}{4}=-\frac{11}{36}$ $\therefore\ k=-\frac{11}{9}$

9) ①

$2^x=3^{-y}=k\,(k>0)$로 놓으면 $xyz\neq0$에서 $k\neq1$

$2^x=k$에서 $2=k^{\frac{1}{x}}$ $\cdots\cdots$ ㉠

$3^{-y}=k$에서 $3=k^{-\frac{1}{y}}$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠×㉡을 하면 $6=k^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}$ $\cdots\cdots$ ㉢

한편 $3^{-y}=k$에서 $9^y=(3^{-y})^{-2}=k^{-2}$이므로

$6^z=k^{-2}$ $\quad\therefore\ 6=k^{-\frac{2}{z}}$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣에서 $k^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}=k^{-\frac{2}{z}}$ 이고 $k\neq1$ 이므로

$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=-\frac{2}{z}$

10) 4

원본의 글자 크기를 a라 하면 6번째 복사본의 글자 크기가 원본의 2배이므로

$a\left(\frac{r}{100}\right)^6=2a\quad\therefore\ \left(\frac{r}{100}\right)^6=2$

8번째 복사본의 글자 크기는 $a\left(\frac{r}{100}\right)^8$이므로

$a\left(\frac{r}{100}\right)^8\div a\left(\frac{r}{100}\right)^6=\left(\frac{r}{100}\right)^2=\left\{\left(\frac{r}{100}\right)^6\right\}^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{3}}$

따라서 $p=3$, $q=1$이므로

$p+q=4$

11) (1) $2^5=32$ (2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}=81$

12) (1) $2=\log_4 16$ (2) $-2=\log_2 0.25$

(3) $\frac{1}{2}=\log_{100}10$ (4) $0=\log_3 1$

13) $\frac{1}{27}$

$\log_3 x=-3$에서 $3^{-3}=x$ $\therefore x=\frac{1}{27}$

14) $-4<x<-3$ 또는 $-3<x<2$ 또는 $x>2$

밑의 조건에서 $x+4>0,\ x+4\neq1$ $\quad x>-4,\ x\neq-3$

$\therefore -4<x<-3$ 또는 $x>-3$ $\cdots\cdots$ ㉠

진수의 조건에서 $(x-2)^2>0$

$\therefore x\neq2$ $\cdots\cdots$ ㉡

따라서 ㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-4<x<-3$ 또는 $-3<x<2$ 또는 $x>2$

15) ⑤

$\log_5 3=b$ 에서

$\frac{\log_2 3}{\log_2 5}=\frac{\log_2 3}{a}=b$ $\quad\therefore\ \log_2 3=ab$

$\therefore\ \log_6 45=\frac{\log_2 45}{\log_2 6}=\frac{\log_2(3^2\cdot5)}{\log_2(2\cdot3)}$

$=\frac{2\log_2 3+\log_2 5}{1+\log_2 3}=\frac{2ab+a}{1+ab}$

$=\frac{a(2b+1)}{1+ab}$

16) ③

$\log_3 4+\log_3 2=\log_3(4\cdot 2)=\log_3 2^3=3\log_3 2$

$\therefore$ (주어진 식)$=\left(3^{3\log_3 2}\right)^2+\left(2^{3\log_3 2}\right)^{\log_2 3}$

$=\left(2^{3\log_3 3}\right)^2+2^{3\log_3 2\cdot log_2 3}$

$=\left(2^3\right)^2+2^3=2^6+2^3=72$

17) ④

$\log\sqrt[4]{A}=\frac{1}{4}\log A=\frac{1}{4}\times(-5.6)=-1.4=-2+0.6$

따라서 $\log\sqrt[4]{A}$ 의 정수 부분은 -2, 소수 부분은 0.6 이다.

18) ⑤

$\log x^3$의 소수부분과 $\log x^5$의 소수 부분이 같으므로

$\log x^5-\log x^3=5\log x-3\log x=2\log x$

에서 $2\log x$ 가 정수이다.

$\log x$ 의 정수부분이 2이므로 $2\le logx<3$

$\therefore\ 4\le 2\log x<6$

이때 $2\log x$가 정수이므로 $2\log x=4$ 또는 $2\log x=5$

$\log x=2$ 또는 $\log x=\frac{5}{2}$

$\therefore\ x=10^2$ 또는 $x=10^{\frac{5}{2}}$

따라서 모든 실수 x의 값의 곱은

$10^2\cdot 10^{\frac{5}{2}}=10^{2+\frac{5}{2}}=10^{\frac{9}{2}}$

19) ④

$\log x$ 의 소수부분과 $\log x^2$의 소수 부분의 합이 1이므로

$\log x+\log x^2=\log x+2\log x=3\log x$

에서 $3\log x$가 정수이다.

$10<x<100$ 에서 $1<\log x<2$ $\therefore\ 3<3\log x<6$

이때 $3\log x$가 정수 이므로 $3\log x=4$ 또는 $3\log x=5$

$\therefore\ \log x=\frac{4}{3}$ 또는 $\log x=\frac{5}{3}$

$\therefore\ x=10^{\frac{4}{3}}$ 또는 $x=10^{\frac{5}{3}}$

따라서 모든 실수 x 의 값의 곱은

$10^{\frac{4}{3}}\cdot 10^{\frac{5}{3}}=10^{\frac{4}{3}+\frac{5}{3}}=10^3$

<다른풀이>

$10<x<100$에서 $1<\log x<2$

$\log x$의 소수부분을 α라고 하면 $\log x=1+\alpha$ $(0<\alpha<1)$

$\therefore\ \log x^2=2\log x=2(1+\alpha)=2+2\alpha$

(i)$0<\alpha<\frac{1}{2}$일때,

$0<2\alpha<1$에서 $\log x^2$의 소수 부분은 2α이므로

$\alpha+2\alpha=1,\ 3\alpha=1$ $\therefore\ \alpha=\frac{1}{3}$

따라서 $\log x=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$ 이므로 $x=10^{\frac{4}{3}}$

(ii) $1\le\alpha<1$ 일때,

$1\le 2\alpha<2$에서 $\log x^2$의 소수 부분은 $2\alpha-1$이므로

$\alpha+2\alpha-1=1,\ 3\alpha=2$ $\therefore\alpha=\frac{2}{3}$

따라서 $\log x=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$ 이므로 $x=10^{\frac{5}{3}}$

20) ③

규모가 5인 지진의 에너지를 E_1, 유모가 4인 지진의 에너지를 E_2라 하면

$\log E_1=11.8+1.5\times 5=19.3$ $\cdots\ E_1=10^{19.3}$

$\log E_2=11.8+1.5\times 4=17.8$ $\cdots\ E_2=10^{17.8}$

$\therefore\ \frac{E_1}{E_2}=\frac{10^{19.3}}{10^{17.8}}=10^{1.5}=10\sqrt{10}$

따라서 규모가 5인 지진의 에너지는 규모가 4인 지진의 에너지의 $10\sqrt{10}$배이다.

21) ④

올해 산유량을 A, 산유량의 증가율을 $a\%$라 하면

$A\left(1+\frac{a}{100}\right)^{20}=2A$ $\therefore\left(1+\frac{a}{100}\right)^{20}=2$

양변에 상용로그를 취하면 $20\log\left(1+\frac{a}{100}\right)=\log 2$

$\log\left(1+\frac{a}{100}\right)=\frac{1}{20}\log 2=\frac{1}{20}\times 0.3=0.015$

이때 $\log 1.035=0.015$이므로

$1+\frac{a}{100}=1.035$ $\therefore a=3.5$

따라서 산유량을 매년 3.5%씩 증가시켜야 한다.

22) 15

$a=\log_2(2+\sqrt{3})$에서 로그의 정의에 의하여

$2^a=2+\sqrt{3}$

이때 $4^a=(2^a)^2$이므로

$4^a+\frac{4}{2^a}=(2+\sqrt{3})^2+\frac{4}{2+\sqrt{3}}$

$=4+4\sqrt{3}+3+\frac{4(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$

$=7+4\sqrt{3}+4(2-\sqrt{3})=7+8=15$

23) ③

$x=\log_3(\sqrt{3}+\sqrt{2})$에서

$3^x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

$\therefore\ 3^x-3^{-x}=3^x-\frac{1}{3^x}=(\sqrt{3}+\sqrt{2})-\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

$=(\sqrt{3}+\sqrt{2})-(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

$=2\sqrt{2}$

24) -5

(주어진 식)

$=\log_2\frac{1}{2}+\log_2\frac{2}{3}+\log_2\frac{3}{4}+\cdots+\log_2\frac{31}{32}$

$=\log_2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{31}{32}\right)=\log_2\frac{1}{32}$

$=\log_2 2^{-5}=-5$

25) 24

$216=6^3$이므로 216의 양의 약수를 작은 수부터 차례대로 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{16}$이라 하면

$a_1a_{16}=a_2a_{15}=\cdots=a_8a_9=6^3$

$\therefore\ \log_6 a_1+\log_6 a_2+\log_6 a_3+\cdots+\log_6 a_{16}$

$=\log_6 a_1a_2a_3\cdots a_{16}$

$=\log_6\{(a_1a_{16})(a_2a_{15})\cdots(a_8a_9)\}$

$=\log_6(6^3)^8=\log_6 6^{24}=24$

26) -1

(주어진 식)

$=\log_5(\log_3 2\cdot log_4 3\cdot log_5 4\cdot\ \cdots\ \cdot log_{32}31)$

$=\log_5\left(\log_3 2\cdot\frac{\log_3 3}{\log_3 4}\cdot\frac{\log_3 4}{\log_3 5}\cdot\ \cdots\ \cdot\frac{\log_3 31}{\log_3 31}\right)$

$=\log_5\left(\frac{\log_3 2}{\log_3 32}\right)=\log_5(\log_{32}2)$

$=\log_5(\log_{2^5}2)$

$=\log_5\frac{1}{5}=-1$

27) $\frac{16}{5}$

밑의 조건에서 $x-3>0,\ x-3\neq 1$

$x>3,\ x\neq 4\qquad\therefore\ 3<x<4$ 또는 $x>4$ ……㉠

진수의 조건에서 $-x^2+8x-12>0$

$x^2-8x+12<0,\qquad(x-2)(x-6)<0$

$\therefore\ 2<x<6$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$3<x<4$ 또는 $4<x<6$

이므로 자연수 x의 값은 5이다.

$\log_2 4=2,\ \log_2 8=3$이므로 $\qquad\log_2 5=2.\cdots$

즉 $\log_2 5$의 정수 부분이 2이므로

$a=2,\ b=\log_2 5-2$

$a-b=4-\log_2 5=\log_2\frac{16}{5}$ 이므로

$2^{a-b}=2^{\log_2\frac{16}{5}}=\frac{16}{5}$

28) 13

$\log A=p\log 2+q\log 3=\log 2^p+\log 3^q=\log(2^p\cdot 3^q)$

이때 $1<\log A<2$에서 $10<A<100$이므로 정수 A는

$3^3,\ \ 3^4,\ \ 2\cdot 3^2,\ \ 2\cdot 3^3,\ \ 2^2\cdot 3,\ \ 2^2\cdot 3^2,\ \ 2^3\cdot 3,\ \ 2^3\cdot 3^2,\ \ 2^4,$

$2^4\cdot 3,\ 2^5,\ 2^5\cdot 3,\ 2^6$의 13개이다.

29) 7.7

15년 전 매출액을 A원, 매출액이 매년 $a\%$씩 증가했다고 하면

$A\left(1+\dfrac{a}{100}\right)^{15}=3A \qquad \therefore \left(1+\dfrac{a}{100}\right)^{15}=3$

양변에 상용로그를 취하면 $15\log\left(1+\dfrac{a}{100}\right)=\log 3$

$\log\left(1+\dfrac{a}{100}\right)=\dfrac{1}{15}\log 3=\dfrac{1}{15}\times 0.48=0.032$

이때 $\log 1.077=0.032$이므로 $1+\dfrac{a}{100}=1.077 \qquad \therefore a=7.7$

따라서 매출액은 매년 7.7%씩 증가했다.

30) 6.4

10마리의 세균을 3시간, 즉 180분 동안 배양하면 전체 세균의 수는 $10\cdot 2^{18}$마리이다. $10\cdot 2^{18}$에 상용로그를 취하면

$\log(10\cdot 2^{18})=1+18\log 2=1+18\times 0.3=6.4$

$\therefore 10\cdot 2^{18}=10^{6.4}$

따라서 3시간 후의 세균의 수는 $10^{6.4}$마리이므로 $k=6.4$

31) 0.955

현재의 인구는 $A(1-0.1)^5(1+0.1)^5=A\times 0.99^5$

0.99^5에 상용로그를 취하면

$\log 0.99^5=5\log 0.99=5\log(9.9\times 10^{-1})=5(0.996-1)=-0.02$

$\log 9.55-\log 0.99^5=0.98+0.02=1$이므로

$\log\dfrac{9.55}{0.99^5}=\log 10$

즉 $\dfrac{9.55}{0.99^5}=10$이므로 $0.99^5=0.955 \qquad \therefore k=0.955$

32) ③

$\log_{\sqrt{3}}a=2\log_3 a=4\log_9 a=\log_9 a^4$이므로

$\log_9 a^4=\log_9 ab$에서 $a^4=ab$

$a(a^3-b)=0$에서 $b=a^3$

따라서 $\log_a b=\log_a a^3=3$

다른 풀이

$\log_{\sqrt{3}}a=\log_9 ab$에서 $2\log_3 a=\dfrac{1}{2}\log_3 ab$

$4\log_3 a=\log_3 a+\log_3 b$

$3\log_3 a=\log_3 b$

즉 $3=\dfrac{\log_3 b}{\log_3 a}=\log_a b$

33) $2^{\frac{29}{16}}$

$\sqrt[4]{8\sqrt[3]{4}}=(2^3)^{\frac{1}{4}}\cdot(2^2)^{\frac{1}{12}}=2^{\frac{11}{12}}$

$\left(\dfrac{1}{64}\right)^{-\frac{1}{4}}=(2^{-6})^{-\frac{1}{4}}=2^{\frac{3}{2}}$

$\left(2^{\frac{1}{3}}8^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{18}}\cdot(2^3)^{\frac{5}{12}}=2^{\frac{47}{36}}$

$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{32}}}}=(2^5)^{\frac{1}{16}}=2^{\frac{5}{16}}$

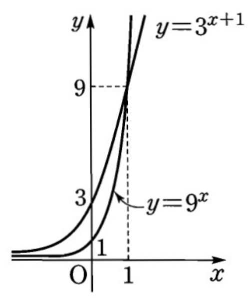
이때 $\dfrac{5}{16}<\dfrac{11}{12}<\dfrac{47}{36}<\dfrac{3}{2}$이고 밑이 1보다 크므로

$2^{\frac{5}{16}}<2^{\frac{11}{12}}<2^{\frac{47}{36}}<2^{\frac{3}{2}}$

따라서 가장 작은 수는 $2^{\frac{5}{16}}$이고 가장 큰 수는 $2^{\frac{3}{2}}$이므로

$2^{\frac{5}{16}}\cdot 2^{\frac{3}{2}}=2^{\frac{29}{16}}$

34) 2



$x=k$를 $y=9^x$에 대입하면

$y=9^k \qquad \therefore \mathrm{A}(\mathrm{k},\ 9^{\mathrm{k}})$

또 $x=k$를 $y=3^{x+1}$에 대입하면

$y=3^{k+1} \qquad \therefore \mathrm{B}(\mathrm{k},\ 3^{\mathrm{k}+1})$

이때 $\overline{\mathrm{AB}}=54$이므로 $9^k-3^{k+1}=54$

$\therefore (3^k)^2-3\cdot 3^k-54=0$

$3^k=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-3t-54=0,\ (t+6)(t-9)=0$

$\therefore t=9\ (\because t>0)$

즉 $3^k=9$이므로 $k=2$

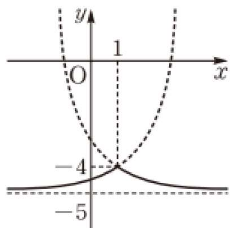
35) $k\le -5$ 또는 $k>-4$

$x\ge 1$이면 $\qquad y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1}-5$

$x<1$이면 $\qquad y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-x+1}-5=2^{x-1}-5$

따라서 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|}-5$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=k$가 그래프와 만나지 않으려면

$k \le -5$ 또는 $k > -4$



36) $3\sqrt{2}$

$\mathrm{A}(a,\ 3^a),\ \mathrm{B}(b,\ 3^b)$에서

$\frac{3^b-3^a}{b-a}=3 \qquad \therefore\ b-a=\frac{1}{3}(3^b-3^a) \qquad \cdots\cdots$ ㉠

또 $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{5}$에서 $(b-a)^2+(3^b-3^a)^2=(2\sqrt{5})^2$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$\frac{1}{9}(3^b-3^a)^2+(3^b-3^a)^2=20$

$(3^b-3^a)^2=18 \qquad \therefore\ 3^b-3^a=3\sqrt{2}\,(\because\ 3^a<3^b)$

37) $\sqrt[3]{4}$

두 삼각형 ACB, ADC의 높이가 $\overline{\mathrm{AB}}$로 같으므로 두 삼각형의 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{BC}} : \overline{\mathrm{CD}}=\triangle\mathrm{ACB} : \triangle\mathrm{ADC}=2:1$

따라서 $\overline{\mathrm{BC}} : \overline{\mathrm{BD}}=2:3$이므로 두 점 C, D의 x좌표를 각각 $2b$, $3b\,(b>0)$로 놓으면

$2^{2b}=a^{3b}=k, \qquad 4^b=\left(a^3\right)^b$

$4=a^3 \qquad \therefore\ a=\sqrt[3]{4}$

38) 4

$\sqrt[4]{8\sqrt[3]{4}}=\left(2^3\cdot 2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{11}{12}}$,

$\left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{1}{4}}=(2^{-6})^{-\frac{1}{4}}=2^{\frac{3}{2}}$,

$\left(2^{\frac{1}{3}}\cdot 8^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{1}{6}}=\left(2^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{15}{2}}\right)^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{47}{36}}$,

$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{256}}}}=(2^8)^{\frac{1}{16}}=2^{\frac{1}{2}}$

이때 $\frac{1}{2}<\frac{11}{12}<\frac{47}{36}<\frac{3}{2}$이고 밑이 1보다 크므로

$2^{\frac{1}{2}}<2^{\frac{11}{12}}<2^{\frac{47}{36}}<2^{\frac{3}{2}}$

따라서 가장 큰 수는 $2^{\frac{3}{2}}$이고, 가장 작은 수는 $2^{\frac{1}{2}}$이므로 구하는 곱은

$2^{\frac{3}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}=2^2=4$

39) ②

$A=a^{\frac{n+1}{n}},\ B=a^{\frac{n+2}{n+1}},\ C=a^{\frac{n+3}{n+2}}$

$\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n},\ \frac{n+2}{n+1}=1+\frac{1}{n+1},\ \frac{n+3}{n+2}=1+\frac{1}{n+2}$이고

n이 자연수이므로

$\frac{1}{n+2}<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}$

따라서 $1+\frac{1}{n+2}<1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{n}$,

즉 $\frac{n+3}{n+2}<\frac{n+2}{n+1}<\frac{n+1}{n}$이고 $a>1$이므로

$a^{\frac{n+3}{n+2}}<a^{\frac{n+2}{n+1}}<a^{\frac{n+1}{n}}$, 즉 $C<B<A$

40) ②

$0<a<1$일 때 $y=a^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로 $0<a<1$에서

$a^1<a^a<a^0$, 즉 $a<a^a<1$

마찬가지로 $0<a<1$이므로 $a<a^a<1$에서

$a^1<a^{a^a}<a^a$, 즉 $a<a^{a^a}<a^a$

41) ②

$f(x)=|x-1|+2$로 놓으면 $-1\le x\le 2$에서

$-2\le x-1\le 1, \qquad 0\le |x-1|\le 2$

$\therefore\ 2\le |x-1|+2\le 4$, 즉 $2\le f(x)\le 4$

(ⅰ) $a>1$일 때,

$y=a^{f(x)}$은 $f(x)=4$일 때 최댓값을 가지므로

$a^4=\frac{1}{4}$

$\therefore\ a=2^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\,(\because\ a>0)$

그런데 이것은 $a>1$을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $0 < a < 1$일 때,

$y = a^{f(x)}$은 $f(x) = 2$일 때 최댓값을 가지므로

$a^2 = \frac{1}{4}$ $\quad\quad \therefore\ a = \frac{1}{2}$ $(\because\ a > 0)$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a = \frac{1}{2}$이고, $f(x) = 4$일 때 최소이므로 최솟값은

$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 2^{-4}$

42) ②

$x + 2y - 4 = 0$에서 $x = 4 - 2y$이므로

$$7^x + 49^y = 7^{4-2y} + 7^{2y}$$

$7^{4-2y} > 0,\ 7^{2y} > 0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에

$$7^{4-2y} + 7^{2y} \geq 2\sqrt{7^{4-2y} \cdot 7^{2y}}$$

$$= 2\sqrt{7^4} = 2 \cdot 7^2 = 98$$

이때 등호는 $7^{4-2y} = 7^{2y}$일 때 성립하므로

$$4 - 2y = 2y \quad\quad \therefore\ y = 1$$

$y = 1$을 $x = 4 - 2y$에 대입하면 $\quad x = 2$

따라서 $7^x + 49^y$은 $x = 2,\ y = 1$일 때 최솟값 98을 가지므로

$$\alpha = 2,\ \beta = 1,\ \gamma = 98$$

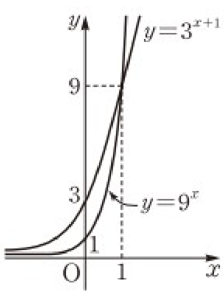
$$\therefore\ \alpha + \beta + \gamma = 101$$

43) 2

$9^x = 3^{x+1}$에서 $3^{2x} = 3^{x+1}$

$$2x = x + 1 \quad\quad \therefore\ x = 1$$

따라서 두 함수 $y = 9^x,\ y = 3^{x+1}$의 그래프의 교점의 x좌표는 1이므로 주어진 두 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$\mathrm{A}(k,\ 9^k)$, $\mathrm{B}(k,\ 3^{k+1})$이므로

(ⅰ) $k > 1$인 경우

$\overline{\mathrm{AB}} = 9^k - 3^{k+1} = 54$이므로 $\quad 3^k = t(t > 0)$로 놓으면

$$t^2 - 3t - 54 = 0,\quad (t+6)(t-9) = 0$$

$$\therefore\ t = 9(\because\ t > 0)$$

즉 $3^k = 9$이므로 $\quad\quad k = 2$

(ⅱ) $k < 1$인 경우

$\overline{\mathrm{AB}} = 3^{k+1} - 9^k = 54$이므로 $3^k = t(t > 0)$로 놓으면

$3t - t^2 = 54 \quad \therefore\ t^2 - 3t + 54 = 0 \quad\quad$ ……㉠

이때 t에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 54 = -207 < 0$$

이므로 방정식 ㉠은 실근을 갖지 않는다.

따라서 $\overline{\mathrm{AB}} = 54$를 만족시키는 상수 k가 존재하지 않음.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\quad k = 2$

44) ⑤

$\begin{cases} 2^{x-1} + 3^{y+1} = 11 \\ 2^{x+2} - 3^{y-1} = 15 \end{cases}$에서 $\begin{cases} \frac{1}{2} \cdot 2^x + 3 \cdot 3^y = 11 \\ 4 \cdot 2^x - \frac{1}{3} \cdot 3^y = 15 \end{cases}$

$2^x = X,\ 3^y = Y(X > 0,\ Y > 0)$로 놓으면

$$\begin{cases} \frac{1}{2}X + 3Y = 11 \\ 4X - \frac{1}{3}Y = 15 \end{cases}$$

이 연립방정식을 풀면

$$X = 4,\ Y = 3$$

즉 $2^x = 4,\ 3^y = 3$이므로 $\quad x = 2,\ y = 1$

따라서 $\alpha = 2,\ \beta = 1$이므로 $\quad\quad \alpha\beta = 2$

45) 13

$\begin{cases} 2^{x+1} + 2^{y+1} = 24 \\ 2^{x+y-2} = 8 \end{cases}$에서 $\begin{cases} 2 \cdot 2^x + 2 \cdot 2^y = 24 \\ \frac{1}{4} \cdot 2^x \cdot 2^y = 8 \end{cases}$

$2^x = X,\ 2^y = Y(x > 0,\ y > 0)$로 놓으면

$\begin{cases} 2X + 2Y = 24 \\ \frac{1}{4}XY = 8 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} X + Y = 12 \\ XY = 32 \end{cases}$

이 연립방정식을 풀면

$$X = 4,\ Y = 8 \text{ 또는 } X = 8,\ Y = 4$$

즉 $2^x = 4,\ 2^y = 8$ 또는 $2^x = 8,\ 2^y = 4$이므로

$$x = 2,\ y = 3 \text{ 또는 } x = 3,\ y = 2$$

$$\therefore\ \alpha^2 + \beta^2 = 2^2 + 3^2 = 13$$

46) $-\frac{9}{4}$

$3^{2x} - 3^{x+1} = a$에서 $\quad\quad (3^x)^2 - 3 \cdot 3^x - a = 0$

$3^x = t(t > 0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2 - 3t - a = 0 \quad\quad\quad\quad$ ……㉠

주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 하므로

(ⅰ) 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 할 때,

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot (-a) > 0$$

$$9 + 4a > 0 \quad\quad \therefore\ a > -\frac{9}{4}$$

(ⅱ) 이차방정식 ㉠의 (두 근의 합)$=3>0$

(ⅲ) 이차방정식 ㉠의 (두 근의 곱)$=-a>0$ $\therefore\ a<0$

이상에서 $-\dfrac{9}{4}<a<0$이므로 $m=-\dfrac{9}{4},\ n=0$

$$\therefore\ m+n=-\frac{9}{4}$$

47) $k \le 2$

$4^x+4^{-x}-2^{1+x}-2^{1-x}+k=0$에서

$$4^x+4^{-x}-2(2^x+2^{-x})+k=0$$

$2^x+2^{-x}=t(t\ge 2)$로 놓으면

$$4^x+4^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2=t^2-2$$

이므로 주어진 방정식은

$$(t^2-2)-2t+k=0$$

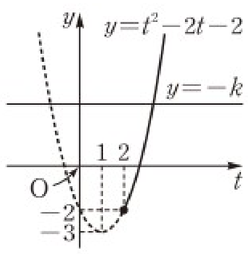
$$\therefore\ t^2-2t-2=-k \qquad \cdots\cdots㉠$$

주어진 방정식이 적어도 하나의 실근을 가지려면 $t\ge 2$에서 방정식 ㉠이 적어도 하나의 실근을 가져야 한다.

이때 $t\ge 2$에서 함수

$$y=t^2-2t-2=(t-1)^2-3$$

의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로



$$-k\ge -2$$

$$\therefore\ k\le 2$$

48) 4

$4^x-2^{x+2}+k\ge 0$에서 $(2^x)^2-4\cdot 2^x+k\ge 0$

$2^x=t(t>0)$로 놓으면 $t^2-4t+k\ge 0$

$$\therefore\ (t-2)^2+k-4\ge 0$$

위의 부등식이 $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 성립하려면

$$k-4\ge 0 \qquad \therefore\ k\ge 4$$

따라서 k의 최솟값은 4이다.

49) 6

50마리의 박테리아가 4시간 후에 4050마리가 되므로

$$50a^4=4050, \qquad a^4=81=3^4$$

$$\therefore\ a=3(\because\ a>0)$$

따라서 한 마리의 박테리아가 x시간 후에 3^x마리가 되므로

$$50\cdot 3^x=36450, \qquad 3^x=729=3^6$$

$$\therefore\ x=6$$

즉 6시간 후에 36450마리가 된다.

50) 3

구매 후 x년이 지났을 대의 자동차의 중고 가격이 686만 원 이하가 되려면

$$2000\times 0.7^x\le 686$$

$$\therefore\ 0.7^x\le\frac{686}{2000}=\frac{343}{1000}=0.7^3$$

이때 밑이 1보다 작으므로 $x\ge 3$

따라서 자동차의 중고 가격이 처음으로 686만 원 이하가 되는 것은 구매 후 3년이 지났을 때이다.

51) 18

두 비커 A, B에 들어 있는 소금물의 처음 농도를 $a\,\%$라 하자.

갑이 작업을 1회 시행했을 때 소금의 양은 $\dfrac{1}{8}$로 줄고 소금물의 양은 변하지 않으므로 소금물의 농도는 $\dfrac{1}{8}a\,\%$

따라서 갑이 작업을 12회 시행한 후 비커 A의 소금물의 농도는

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{12}a\,(\%)$$

한편 을이 작업을 1회 시행했을 때 소금의 양은 $\dfrac{1}{4}$로 줄고 소금물의 양은 변하지 않으므로 소금물의 농도는 $\dfrac{1}{4}a\,\%$

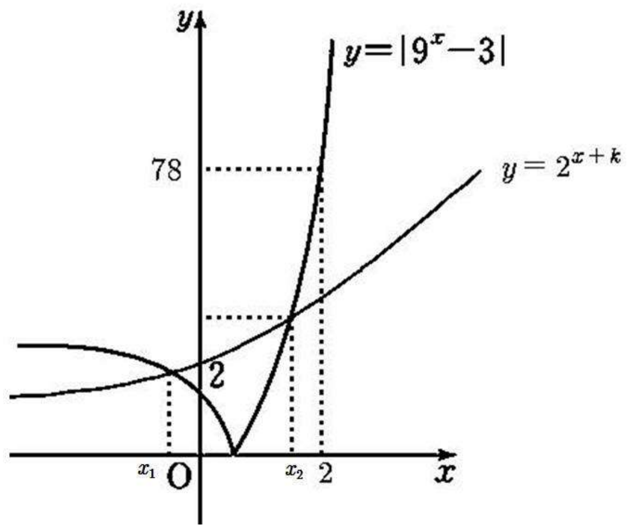
따라서 을이 작업을 n회 시행한 후 비커 B의 소금물의 농도는

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{n}a\,(\%)$$

두 소금물의 농도가 같으므로 $\left(\dfrac{1}{8}\right)^{12}a=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n}a$에서

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{36}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}, \qquad 36=2n \qquad \therefore\ n=18$$

52) ②



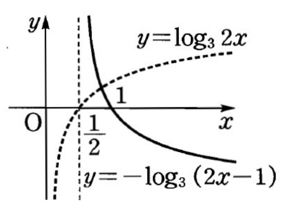
$f(x)=\ |9^x-3|$ 라 하고 $g(x)=2^{x+k}$라 하면
$x<0$에서 근을 갖기 위해서 $f(0)<g(0)$이어야 하므로
$2<2^k$이고,
$0<x<2$에서 근을 갖기 위해서 $f(2)>g(2)$이어야 하므로
$78>2^{2+k}$이다.
따라서
$\therefore 2<2^k<\dfrac{78}{4}=\dfrac{39}{2}=19.5$
만족하는 k는 2, 3, 4이다.
$\therefore$ 모든 자연수의 합은 9이다.

53) ⑤

분모, 분자를 2^x 으로 나눈 $y=\dfrac{8}{2^x+2^{-x}-1}$ 의 최댓값은 분모인 $2^x+2^{-x}-1$ 이 최소일 때이다.
$2^x+2^{-x}\geq 2\sqrt{2^x\,2^{-x}}=2$ 이므로 y 의 최댓값은 8

54) 풀이참조

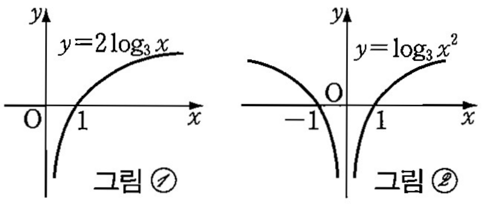
$y=-\log_3(2x-1)=-\log_3 2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$
에서 $y=-\log_3(2x-1)$ 의 그래프는 $y=\log_3 2x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 $\dfrac{1}{2}$ 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 점근선의 방정식은 $x=\dfrac{1}{2}$ 이다.

55) 풀이참조

$y=2\log_3 x$에서 진수 x에
$x=\cdots,\ \dfrac{1}{9},\ \dfrac{1}{3},\ 1,\ 3,\ 9,\cdots,$
를 대입하고, 이에 대응하는 y의 값을 구하여 그래프를 그리면 오른쪽 그림 ①과 같다.



여기에서 x는 양수이어야 하므로 $x\leq 0$인 값은 생각할 수 없다.
그러나 $y=\log_3 x^2$에서는 x^2이 진수이므로 x가 0이 아닌 모든 실수에 대하여 정의 된다. 따라서
$x=\cdots,\ \pm\dfrac{1}{9},\ \pm\dfrac{1}{3},\ \pm 1,\ \pm 3,\ \pm 9,\ \cdots$
에 대응하는 y의 값을 구하여 그래프를 그리면 위의 그림 ②와 같다. 곧,
$y=2\log_3 x$의 정의역은 ⇨ $\{x\,|\,x>0\}$
$y=\log_3 x^2$의 정의역은 ⇨ $\{x\,|\,x\neq 0,\ x$는 실수$\}$

56) 최댓값: 1, 최솟값: -2

$y=\log_{\frac{1}{2}}3x+1$ 에서
$x=\dfrac{1}{3}$ 일 때, $y=\log_{\frac{1}{2}}1+1=0+1=1$
$x=\dfrac{8}{3}$ 일 때, $y=\log_{\frac{1}{2}}8+1=-3+1=-2$
따라서 최댓값은 1, 최솟값은 -2 이다.

57) -12

$y=(\log_3 x)^2+a\log_{\frac{1}{3}}x+b$ 에서
$y=(\log_3 x)^2-a\log_3 x+b$
$\log_3 x=t$ 로 놓으면
$y=t^2-at+b$
y는 $x=\dfrac{1}{9}$, 즉 $t=-2$ 일 때 최솟값 -1 을 가지므로
$y=(t+2)^2-1=t^2+4t+3$
따라서 $a=-4$, $b=3$ 이므로
$ab=-12$

58) 최솟값 16, $x=2$

$y=2(1+\log_2 x)^2+2(1+\log_2 x)+2\log_2 x+2$
에서 $\log_2 x=t$로 놓으면 $x\geqq 2$이므로 $t=\log_2 x\geqq 1$이고

$$y=2(1+t)^2+2(1+t)+2t+2=2(t+2)^2-2$$

따라서 $t=1$ $(x=2)$일 때 최소이고,
이때 $y=2(1+2)^2-2=16$

59) ②

$y=\log_a bx$의 그래프에서 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하므로 $a>1$
또 $x=1$일 때 $y<0$이므로

$$\log_a b<0 \qquad \therefore\ 0<b<1$$

따라서 $y=\log_b ax$의 그래프는 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하고, $x=1$일 때 $y=\log_b a<0$이므로 ②와 같다.

60) ④

진수의 조건에서

$$5x+5>0,\ 3x-1>0 \qquad \therefore\ x>\frac{1}{3} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\log\sqrt{5x+5}=1-\frac{1}{2}\log(3x-1)$에서

$$\frac{1}{2}\log(5x+5)+\frac{1}{2}\log(3x-1)=1$$
$$\log(5x+5)(3x-1)=2$$
$$\log\left(15x^2+10x-5\right)=\log 100$$
$$15x^2+10x-5=100, \qquad 3x^2+2x-21=0$$
$$(x+3)(3x-7)=0 \qquad \therefore\ x=-3 \text{ 또는 } x=\frac{7}{3}$$

이때 ㉠에 의하여 $x=\frac{7}{3}$

61) $\frac{1}{10}$

$x^{\log x}=\frac{100}{x}$의 양변에 상용로그를 취하면

$$\log x^{\log x}=\log\frac{100}{x}, \qquad (\log x)^2=\log 100-\log x$$
$$(\log x)^2+\log x-2=0$$

$\log x=t$로 놓으면

$$t^2+t-2=0, \qquad (t+2)(t-1)=0$$
$$\therefore\ t=-2 \text{ 또는 } t=1$$

즉 $\log x=-2$ 또는 $\log x=1$이므로

$$x=10^{-2}=\frac{1}{100} \text{ 또는 } x=10$$

따라서 주어진 방정식의 모든 근의 곱은

$$\frac{1}{100}\cdot 10=\frac{1}{10}$$

62) $\log 4$

$5^{2x}=2^{4-2x}$의 양변에 상용로그를 취하면

$$2x\log 5=(4-2x)\log 2, \quad 2x(\log 5+\log 2)=4\log 2$$
$$2x\log 10=4\log 2 \qquad \therefore\ x=2\log 2=\log 4$$

63) $0<x\leq\frac{1}{\sqrt{3}}$

64) ④

진수의 조건에서

$$\log_3 x>0 \qquad \therefore\ x>1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\log_2(\log_3 x)\leq 1$에서 $\log_3 x\leqq 2$

$$\therefore\ x\leq 9 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $1<x\leq 9$

65) $\frac{3}{4}$

진수의 조건에서 $x>0$ $\cdots\cdots$㉠

$x^{\log_{\frac{1}{2}}x}>4x^3$의 양변에 밑이 $\frac{1}{2}$인 로그를 취하면

$$\log_{\frac{1}{2}}x^{\log_{\frac{1}{2}}x}<\log_{\frac{1}{2}}4x^3$$

$$(\log_{\frac{1}{2}} x)^2 < \log_{\frac{1}{2}} 4 + 3\log_{\frac{1}{2}} x$$

$\log_{\frac{1}{2}} x = t$ 로 놓으면 $t^2 < -2 + 3t$

$$t^2 - 3t + 2 < 0, \ (t-1)(t-2) < 0$$

$$\therefore \ 1 < t < 2$$

즉 $1 < \log_{\frac{1}{2}} x < 2$ 이므로 $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} < \log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^2$

밑이 1보다 작으므로 $\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$

따라서 $\alpha = \frac{1}{4}$, $\beta = \frac{1}{2}$ 이므로 $\alpha + \beta = \frac{3}{4}$

66) ③

$3^{4x} < (4^x)^3$, 즉 $3^{4x} < 4^{3x}$ 의 양변에 상용로그를 취하면

$4x\log 3 < 3x\log 4$, $\quad x(4\log 3 - 3\log 4) < 0$

$x\log\frac{81}{64} < 0$ $\quad \therefore \ x < 0 \left(\because \ \log\frac{81}{64} > 0\right)$

67) ①

진수의 조건에서 $x > 0$ ……㉠
주어진 부등식의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x^{\log x} < \log x$, $\quad (\log x)^2 < \log x$

$\log x = t$ 로 놓으면 $t^2 < t$

$t^2 - t < 0$, $\quad t(t-1) < 0$ $\quad \therefore \ 0 < t < 1$

즉 $0 < \log x < 1$ 이므로 $\log 1 < \log x < \log 10$

밑이 1보다 크므로 $1 < x < 10$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $1 < x < 10$

따라서 정수 x는 2, 3, 4, …, 9의 8개다.

68) 31

$f(x) = \log_2\left(1 - \frac{1}{x+1}\right) = \log_2 \frac{x}{x+1}$

$\therefore \ f(1) + f(2) + f(3) + \cdots f(n)$

$= \log_2 \frac{1}{2} + \log_2 \frac{2}{3} + \log_2 \frac{3}{4} + \cdots + \log_2 \frac{n}{n+1}$

$= \log_2\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \cdots \cdot \frac{n}{n+1}\right)$

$= \log_2 \frac{1}{n+1}$

즉 $\log_2 \frac{1}{n+1} = -5$이므로 $2^{-5} = \frac{1}{n+1}$

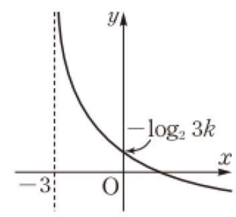
$\therefore \ n = 31$

69) ②

$y = -\log_2 k(x+3) = -\log_2(x+3) - \log_2 k$

이 함수의 그래프는 $y = -\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 $-\log_2 k$만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프가 제3사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$-\log_2 3k \geq 0$, $\quad \log_2 \frac{1}{3k} \geq \log_2 1$

밑이 1보다 크므로 $\frac{1}{3k} \geq 1$

$\therefore \ k \leq \frac{1}{3}$ $(\because \ k > 0)$

따라서 k의 최댓값은 $\frac{1}{3}$이다.

70) 6

$y = 5^x$의 그래프가 점 $(1, \ b)$를 지나므로 $\quad b = 5$

$y = \log_5 x$의 그래프가 점 $\mathrm{A}(a, \ 5)$를 지나므로

$5 = \log_5 a$ $\quad \therefore \ a = 5^5$

$\therefore \ \log_5 ab = \log_5(5^5 \cdot 5) = 6$

71) $(11, \ 3)$

점 A의 좌표를 $(a, \ b)$라 하면 정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 3이므로 $\quad b = 3$

즉 $3 = \log_2 a$에서 $a = 2^3 = 8$

따라서 $\mathrm{A}(8, \ 3)$이므로 $\quad \mathrm{D}(11, \ 3)$

72) $\frac{49}{8}$

$y = \log_{\frac{1}{8}} x = -\frac{1}{3}\log_2 x$에서

$x = \frac{1}{4}$일 때, $y = -\frac{1}{3}\log_2\frac{1}{4} = -\frac{1}{3}\log_2 2^{-2} = \frac{2}{3}$이므로

$A\left(\frac{1}{4},\ \frac{2}{3}\right)$

$x = 2$일 때, $y = -\frac{1}{3}\log_2 2 = -\frac{1}{3}$이므로 $C\left(2,\ -\frac{1}{3}\right)$

$y = \log_{\sqrt{2}} x = 2\log_2 x$에서

$x = \frac{1}{4}$일 때, $y = 2\log_2\frac{1}{4} = 2\log_2 2^{-2} = -4$이므로

$B\left(\frac{1}{4},\ -4\right)$

$x = 2$일 때, $y = 2\log_2 2 = 2$이므로 $D(2,\ 2)$

이때 사각형 ABCD는 사다리꼴이므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{14}{3}+\frac{7}{3}\right)\cdot\frac{7}{4} = \frac{49}{8}$

73) 7

$g(x)$는 $y = \log_2 x$의 역함수이므로 $g(x) = 2^x$

점 A는 $y = g(x)$의 그래프와 y축의 교점이므로 $A(0,\ 1)$

점 B의 y좌표가 1이므로 $1 = \log_2 x$에서 $x = 2$

따라서 $B(2,\ 1)$이므로 $\overline{AB} = 2$

점 C의 x좌표가 2이므로 $C(2,\ 2^2)$, 즉 $C(2,\ 4)$

점 D의 y좌표가 4이므로 $4 = \log_2 x$에서 $x = 16$

따라서 $D(16,\ 4)$이므로 $\overline{CD} = 16 - 2 = 14$

$\therefore\ \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{14}{2} = 7$

74) ②

$a < b < 1$의 각 변에 밑이 a인 로그를 취하면

$\log_a 1 < \log_a b < \log_a a \qquad \therefore\ 0 < \log_a b < 1$ …… ㉠

또 $a < b < 1$의 각 변에 밑이 b인 로그를 취하면

$\log_b 1 < \log_b b < \log_b a \qquad \therefore\ 0 < 1 < \log_b a$

$\log_a\frac{b}{a} = \log_a b - \log_a a = \log_a b - 1$이고 ㉠에서

$-1 < \log_a b - 1 < 0 \qquad \therefore\ -1 < \log_a\frac{b}{a} < 0$

$\log_a\frac{a}{b} = \log_a a - \log_a b = 1 - \log_a b$이고 ㉠에서

$-1 < -\log_a b < 0, \qquad 0 < 1 - \log_a b < 1$

$\therefore\ 0 < \log_a\frac{a}{b} < 1$

따라서 가장 큰 값은 $\log_b a$, 가장 작은 값은 $\log_a\frac{b}{a}$이다.

75) 20

$y = \frac{x^2}{x^{\log x}} = x^{2-\log x}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log y = \log x^{2-\log x} = (2-\log x)\log x$

$= -(\log x)^2 + 2\log x$

$\log x = t$로 놓으면 주어진 함수는

$\log y = -t^2 + 2t = -(t-1)^2 + 1$

따라서 $\log y$는 $t = 1$일 때 최댓값 1을 가지므로

$\log x = 1$에서 $x = 10 \quad \therefore\ a = 10$

$\log y = 1$에서 $y = 10 \quad \therefore\ b = 10$

$\therefore\ a + b = 20$

76) 25

$\log_2 x + \log_3 y = 6$에서 $\frac{\log x}{\log 2} + \frac{\log y}{\log 3} = 6$

$\log_3 x \cdot log_2 y = 8$에서

$\frac{\log x}{\log 3}\cdot\frac{\log y}{\log 2} = 8$ 즉, $\frac{\log x}{\log 2}\cdot\frac{\log y}{\log 3} = 8$

$\frac{\log x}{\log 2} = X,\ \frac{\log y}{\log 3} = Y$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} X + Y = 6 \\ XY = 8 \end{cases}$

이 연립방정식을 풀면 $X = 2,\ Y = 4$ 또는 $X = 4,\ Y = 2$

이때 $x > y$이면 $X > Y$이므로 $X = 4,\ Y = 2$

즉 $\frac{\log x}{\log 2} = 4,\ \frac{\log y}{\log 3} = 2$이므로

$\log x = 4\log 2,\ \log y = 2\log 3$

$\therefore\ x = 2^4 = 16,\ y = 3^2 = 9$

따라서 $a = 16,\ \beta = 9$이므로

$\alpha + \beta = 25$

77) ⑤

n년 후의 휴대 전화의 가격은

$800000\times(1-0.15)^n = 0.85^n\times 800000$ (원)

이므로 n년 후에 휴대 전화의 가격이 8만원 이하가 된다고 하면

$0.85^n\times 800000 \le 80000 \qquad \therefore\ 0.85^n \le \frac{1}{10}$

양변에 상용로그를 취하면

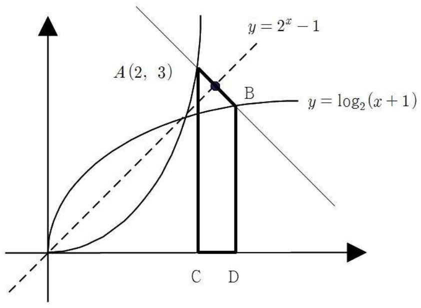
$n\log 0.85 \le -1$

$n(\log 8.5 - 1) \le -1, \qquad n(0.9294 - 1) \le -1$

$-0.0706n \le -1 \qquad \therefore\ n \ge 14.\cdots$

따라서 15년 후인 2034년에 휴대 전화의 가격이 처음으로 8만 원 이하가 된다.

78) ①



$y=2^x-1$ 과 $y=\log_2(x+1)$는 서로 역함수 관계이므로 두 함수는 $y=x$에 대칭이다.
$A(2,3)$을 기울기가 -1인 직선이 $y=\log_2(x+1)$와 만나는 점은 $A(2,3)$를 $y=x$에 대칭이동한 점이 된다.
그러므로 $B(3,2)$가 된다.
따라서 사각형 $ACDB$의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot(2+3)\cdot 1=\frac{5}{2}$이다.

79) ③

선분 AC가 y축에 평행하므로 두 점 A, C의 좌표를 각각 $\mathrm{A}(t,\ \log_2 4t)$, $\mathrm{C}(t,\ \log_2 t)$ $(t>1)$라고 하면

$$\overline{\mathrm{AC}}=\log_2 4t-\log_2 t=\log_2\frac{4t}{t}=2$$

선분AC의 중점을 M이라 하면 삼각형ABC가 정삼각형이므로

$$\overline{\mathrm{BM}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\sqrt{3}$$

따라서 점 B의 좌표는
$\mathrm{B}(t-\sqrt{3},\log_2 4(t-\sqrt{3})$ 이고

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(t-\sqrt{3}-t)^2+\{\log_2 4(t-\sqrt{3})-\log_2 4t\}^2}$$

$$=\sqrt{3+\left\{\log_2\frac{(t-\sqrt{3})}{t}\right\}^2}=2$$

이므로 $\log_2\frac{(t-\sqrt{3})}{t}=\pm 1$이다.

그런데 $t>1$이므로 $\frac{t-\sqrt{3}}{t}<1$

따라서 $\log_2\frac{(t-\sqrt{3})}{t}=-1$ 이고

$$\frac{(t-\sqrt{3})}{t}=\frac{1}{2},\ 2(t-\sqrt{3})=t$$

$\therefore\ t=2\sqrt{3}$
이 때 점 B의 좌표는 $\mathrm{B}(\sqrt{3},\log_2 4\sqrt{3})$이므로
$p=\sqrt{3},\ q=\log_2 4\sqrt{3}$

$\therefore\ p^2\times 2^q=(\sqrt{3})^2\times 2^{\log_2 4\sqrt{3}}=3\times 4\sqrt{3}=12\sqrt{3}$

80) ④

$\mathrm{A}(0,1)$, $\mathrm{B}(1,0)$이고 선분 AB가 정사각형의 한 변이므로 $\mathrm{C}(1,2)$, $\mathrm{D}(2,1)$이다.
이때 직선 $y=-x+k$가 점 $\mathrm{C}(1,2)$를 지나므로
$2=-1+k$
$\therefore\ k=3$

81) (1) $\frac{3}{4}\pi$　(2) $-\frac{7}{6}\pi$

$1^\circ=\frac{\pi}{180}$ 라디안이므로

(1) $135^\circ=\frac{\pi}{180}\times 135=\frac{3}{4}\pi$

(2) $-210^\circ=\frac{\pi}{180}\times(-210)=-\frac{7}{6}\pi$

82) ④

④ $\frac{4}{5}\pi=\frac{180^\circ}{\pi}\times\frac{4}{5}\pi=144^\circ$

83) (1) $\theta=360^\circ\times n+135^\circ$ (n은 정수)
(2) $\theta=360^\circ\times n+(-45^\circ)$ (n은 정수)

84) ②

각 θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 y축에 대하여 대칭이므로

$\theta+5\theta=(2n+1)\pi$ (n은 정수)

$6\theta=(2n+1)\pi \quad \therefore\ \theta=\dfrac{2n+1}{6}\pi$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$에서 $0<\dfrac{2n+1}{6}\pi<\dfrac{\pi}{2}$이므로

$0<2n+1<3,\quad -\dfrac{1}{2}<n<1 \qquad \therefore\ n=0$

$\therefore\ \theta=\dfrac{\pi}{6}$

85) $\dfrac{3}{2}\pi$

각 3θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 x축에 대하여 대칭이므로

$3\theta+5\theta=2n\pi$ (n은 정수)

$8\theta=2n\pi \qquad \therefore\ \theta=\dfrac{n\pi}{4} \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$0<\theta<\pi$에서 $0<\dfrac{n\pi}{4}<\pi$이므로 $0<n<4$

$\therefore\ n=1$ 또는 $n=2$ 또는 $n=3$

이것을 ㉠에 대입하면

$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 또는 $\theta=\dfrac{2}{4}\pi$ 또는 $\theta=\dfrac{3}{4}\pi$

따라서 구하는 모든 θ의 값의 합은

$\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{4}\pi+\dfrac{3}{4}\pi=\dfrac{3}{2}\pi$

86) $\dfrac{3}{4}\pi$

각 θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대이므로

$5\theta-\theta=2n\pi+\pi$ (n은 정수)

$4\theta=(2n+1)\pi \quad \therefore\ \theta=\dfrac{2n+1}{4}\pi$

$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{2n+1}{4}\pi<\pi$이므로

$2<2n+1<4,\quad \dfrac{1}{2}<n<\dfrac{3}{2} \qquad \therefore\ n=1$

$\therefore\ \theta=\dfrac{3}{4}\pi$

87) 6

각 θ를 나타내는 동경과 각 7θ를 나타내는 동경이 원점에 대하여 대칭이므로

$7\theta-\theta=2n\pi+\pi$ (n은 정수)

$6\theta=(2n+1)\pi \quad \therefore\ \theta=\dfrac{2n+1}{6}\pi$

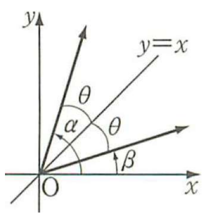
$0<\theta<2\pi$에서 $0<\dfrac{2n+1}{6}\pi<2\pi$이므로

$0<2n+1<12,\ -\dfrac{1}{2}<n<\dfrac{11}{2}$

$\therefore\ n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

따라서 구하는 각 θ의 개수는 6이다.

88) $\alpha+\beta=360^\circ n+90^\circ$



각 α의 동경이 직선 $y=x$와 이루는 각을 θ라고 하면

$\alpha=360^\circ n'+45^\circ+\theta \qquad \cdots\cdots$①

$\beta=360^\circ n''+45^\circ-\theta \qquad \cdots\cdots$②

(n', n''은 정수)

①, ②에서 θ를 소거하면

$\alpha+\beta=360^\circ(n'+n'')+90^\circ$

$n'+n''$은 정수이므로 $n'+n''$은 정수이므로

$n'+n''=n$이므로 놓으면

$\alpha+\beta=360^\circ n+90^\circ$ (n은 정수)

89) ①

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{6^2+(-8)^2}=10$이므로

$\sin\theta=-\dfrac{8}{10}=-\dfrac{4}{5},\ \cos\theta=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5},\ \tan\theta=-\dfrac{8}{6}=-\dfrac{4}{3}$

$\therefore\ 5\sin\theta+5\cos\theta+3\tan\theta=-4+3-4=-5$

90) (1) $-\dfrac{4}{9}$ (2) $-\dfrac{3}{4}$

(1) $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{9}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{9} \qquad \therefore\ \sin\theta\cos\theta=-\dfrac{4}{9}$

(2) $\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{\frac{1}{3}}{-\frac{4}{9}}=-\frac{3}{4}$

91) 1

92) $\frac{2}{\cos\theta}$

$\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$

$=\frac{\cos\theta(1-\sin\theta)+\cos\theta(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}$

$=\frac{\cos\theta-\cos\theta\sin\theta+\cos\theta+\cos\theta\sin\theta}{1-\sin^2\theta}$

$=\frac{2\cos\theta}{\cos^2\theta}=\frac{2}{\cos\theta}$

$=\frac{2}{\cos\theta}$

93) ㄴ, ㄹ, ㅁ

ㄱ. $-970°=360°\times(-3)+110°$
ㄴ. $-620°=360°\times(-2)+100°$
ㄷ. $-170°=360°\times(-1)+190°$
ㄹ. $460°=360°\times1+100°$
ㅁ. $1180°=360°\times3+100°$
이상에서 동경이 $100°$ 를 나타내는 동경과 일치하는 것은 ㄴ, ㄹ, ㅁ이다.

94) ④
부채꼴의 반지름의 길이를 r, 중심각의 크기를 θ라 하면 반지름의 길이와 호의 길이가 같으므로
$r=r\theta$ $\quad\therefore\ \theta=1$
$\therefore\ \overline{\mathrm{BH}}=r\sin1,\ \overline{\mathrm{OH}}=r\cos1$
이때 삼각형 BOH의 넓이가 4이므로
$\frac{1}{2}\cdot r\cos1\cdot r\sin1=4$ $\quad\therefore\ \frac{1}{2}r^2=\frac{4}{\sin1\cos1}$
따라서 부채꼴 OAB의 넓이는 $\frac{1}{2}r^2\cdot1=\frac{4}{\sin1\cos1}$

95) ③

$\mathrm{A}(0,\ 1)$이고 $\mathrm{B}(\cos\theta,\ \sin\theta)$이므로
$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(\cos\theta)^2+(\sin\theta-1)^2}$
$=\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta-2\sin\theta+1}$
$=\sqrt{2-2\sin\theta}$

96) ④

① $f(x)=2\sin2x+1$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$ 이고, $g(x)=\tan2x$ 의 주기는 $\frac{\pi}{2}$ 이므로 두 함수의 주기는 다르다.
② $f(x)=2\sin2x+1$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $0\le x\le\pi$ 에서 최댓값은 3, 최솟값은 -1 이다.
③ $0\le x\le\frac{\pi}{4}$ 에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.
④ $f(0)+f(\pi)=1+1=2$
⑤ [반례]$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1,\ f\left(\frac{\pi}{4}\right)=3$ 이므로
$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)\ne-f\left(\frac{\pi}{4}\right)$

	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$
정의역	실수 전체의 집합	실수 전체의 집합	$x\ne n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)
치역	$\{y\mid-1\le y\le1\}$	$\{y\mid-1\le y\le1\}$	실수 전체의 집합
대칭성	원점에 대하여 대칭	y축에 대하여 대칭	원점에 대하여 대칭
주기	2π	2π	π

97) 최댓값, 최솟값은 없다, 주기: $\frac{1}{4}$

$y=\tan4\pi x+2$ 에서 최댓값, 최솟값은 없고,
주기는 $\frac{\pi}{4\pi}=\frac{1}{4}$

98) ④

$f(x)=a\sin bx+c$ 또는

$f(x)=a\cos bx+c\,(a>0,\ b>0)$로 놓으면

$f(x)$의 최댓값이 1, 최솟값이 -3이고 $a>0$이므로

$a+c=1,\ -a+c=-3$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2,\ c=-1$

또 주기가 $\frac{2}{3}\pi$이고 $b>0$이므로 $\frac{2\pi}{b}=\frac{2}{3}\pi\quad \therefore\ b=3$

$\therefore\ f(x)=2\sin 3x-1$ 또는 $f(x)=2\cos 3x-1$

그런데 $f(x)$의 그래프가 점 $(0,\ 1)$을 지나므로 구하는 함수 $f(x)$는

$f(x)=2\cos 3x-1$

99) ①

함수 $f(x)=2|\cos 3(x-\pi)|+1$의 주기는

$y=|\cos 3x|$의 주기와 같으므로 $a=\frac{\pi}{3}$

$0\le|\cos 3(x-\pi)|\le 1$이므로 $0\le 2|\cos 3(x-\pi)|\le 2$

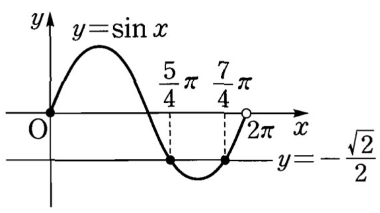
$\therefore\ 1\le 2|\cos 3(x-\pi)|+1\le 3$

따라서 최댓값은 3, 최솟값은 1이므로 $b=3,\ c=1$

$\therefore\ abc=\pi$

100) $x=\frac{5\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$

오른쪽 그림과 같이 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$의 교점의 x좌표가 $\frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$이므로



$x=\frac{5}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$

101) $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{5}{6}\pi$

$2\sin^2\left(x+\frac{3}{2}\pi\right)+3\sin x-3\ge 0$에서

$2\cos^2 x+3\sin x-3\ge 0$

$2(1-\sin^2 x)+3\sin x-3\ge 0$

$2\sin^2 x-3\sin x+1\le 0$

$(2\sin x-1)(\sin x-1)\le 0$

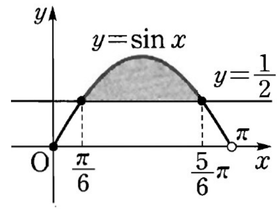
$0\le x<\pi$에서 $\sin x-1\le 0$이므로

$2\sin x-1\ge 0$

$\therefore\ \sin x\ge\frac{1}{2}$

오른쪽 그림에서 부등식

$\sin x\ge\frac{1}{2}$의 해는



$\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{5}{6}\pi$

102) ③

$2\sin^2 x-\cos x-1\ge 0$에서

$2(1-\cos^2 x)-\cos x-1\ge 0$

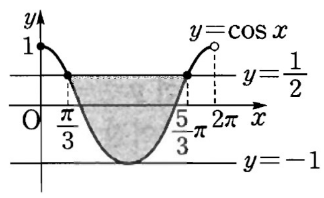
$2\cos^2 x+\cos x-1\le 0$

$(\cos x+1)(2\cos x-1)\le 0$

$\therefore\ -1\le\cos x\le\frac{1}{2}\qquad\cdots\cdots$ ㉠

오른쪽 그림에서 부등식 ㉠의 해는

$\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{5}{3}\pi$



따라서 $\alpha=\frac{\pi}{3},\ \beta=\frac{5}{3}\pi$이므로

$\alpha+\beta=2\pi$

103) ⑤

$\sin 10^\circ=\sin(90^\circ-80^\circ)=\cos 80^\circ$

$\sin 20^\circ=\sin(90^\circ-70^\circ)=\cos 70^\circ$

$\sin 30^\circ=\sin(90^\circ-60^\circ)=\cos 60^\circ$

$\sin 40^\circ=\sin(90^\circ-50^\circ)=\cos 50^\circ$

$\therefore\ \sin^2 10^\circ+\sin^2 20^\circ+\cdots+\sin^2 80^\circ+\sin^2 90^\circ$

$=\left(\sin^2 10^\circ+\sin^2 80^\circ\right)+\left(\sin^2 20^\circ+\sin^2 70^\circ\right)$

$+\left(\sin^2 30^\circ+\sin^2 60^\circ\right)+\left(\sin^2 40^\circ+\sin^2 50^\circ\right)$

$+\sin^2 90^\circ$

$=\left(\cos^2 80^\circ+\sin^2 80^\circ\right)+\left(\cos^2 70^\circ+\sin^2 70^\circ\right)$

$+\left(\cos^2 60^\circ+\sin^2 60^\circ\right)+\left(\cos^2 50^\circ+\sin^2 50^\circ\right)$

$+\sin^2 90^\circ$

$=4+1=5$

104) 1

$\tan 89^\circ = \tan(90^\circ - 1^\circ) = \dfrac{1}{\tan 1^\circ}$

$\tan 88^\circ = \tan(90^\circ - 2^\circ) = \dfrac{1}{\tan 2^\circ}$

$\vdots$

$\tan 46^\circ = \tan(90^\circ - 44^\circ) = \dfrac{1}{\tan 44^\circ}$

$\therefore\ \tan 1^\circ \times tan 2^\circ \times \cdots \times tan 88^\circ \times tan 89^\circ$

$= \tan 1^\circ \times tan 2^\circ \times \cdots \times tan 44^\circ \times tan 45^\circ$

$\times \dfrac{1}{\tan 44^\circ} \times \cdots \times \dfrac{1}{\tan 2^\circ} \times \dfrac{1}{\tan 1^\circ}$

$= \tan 45^\circ = 1$

105) ③

사분원의 중심각의 크기는 $\dfrac{\pi}{2}$ 이고 이 중심각을 6 등분한 각의 크기는 $\dfrac{\pi}{12}$ 이므로 $\theta = \dfrac{\pi}{12}$

∴ (주어진 식)

$= \cos^2\dfrac{\pi}{12} + \cos^2\dfrac{2}{12}\pi + \cos^2\dfrac{3}{12}\pi$

$+ \cos^2\dfrac{4}{12}\pi + \cos^2\dfrac{5}{12}\pi$

$= \cos^2\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{5}{12}\pi\right) + \cos^2\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{12}\pi\right)$

$+ \cos^2\dfrac{3}{12}\pi + \cos^2\dfrac{4}{12}\pi + \cos^2\dfrac{5}{12}\pi$

$= \sin^2\dfrac{5}{12}\pi + \sin^2\dfrac{4}{12}\pi + \cos^2\dfrac{3}{12}\pi$

$+ \cos^2\dfrac{4}{12}\pi + \cos^2\dfrac{5}{12}\pi$

$= \left(\sin^2\dfrac{5}{12}\pi + \cos^2\dfrac{5}{12}\pi\right) + \left(\sin^2\dfrac{4}{12}\pi + \cos^2\dfrac{4}{12}\pi\right)$

$+ \cos^2\dfrac{3}{12}\pi$

$= 1 + 1 + \cos^2\dfrac{\pi}{4} = 2 + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{5}{2}$

106) ③

$y = \sin x$ 의 그래프에서

$\dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{\pi}{2}$ 이므로 $x_1 + x_2 = \pi$

$\dfrac{x_3 + x_4}{2} = 2\pi + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{5}{2}\pi$ 이므로 $x_3 + x_4 = 5\pi$

$\dfrac{x_5 + x_6}{2} = 4\pi + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{9}{2}\pi$ 이므로 $x_5 + x_6 = 9\pi$

$\vdots$

$\dfrac{x_{11} + x_{12}}{2} = 10\pi + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{21}{2}\pi$ 이므로 $x_{11} + x_{12} = 21\pi$

107) $-\dfrac{1}{2}$

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi + \dfrac{\pi}{6}\right) = -\cos\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{6}\right) = -\sin\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{1}{2}$

$\cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = -\cos\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(3\pi + \dfrac{\pi}{6}\right) = -\cos\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

∴ (주어진 식)$= \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$

108) ③

$\triangle ABC$ 는 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 인 이등변삼각형이므로

$A + B + C = \pi,\ B = C$

ㄱ. $A + 2B = \pi$에서

$\sin A = \sin(\pi - 2B) = \sin 2B$

ㄴ. $A + 2B = \pi$에서

$\cos\dfrac{A}{2} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - B\right) = \sin B$

ㄷ. $A + 2C = \pi$에서

$\tan A = \tan(\pi - 2C) = -\tan 2C$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

109) $\dfrac{1}{2}$

$\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$ 이므로 주어진 식은

$\sin^2\alpha + \sin^2\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) + \tan^2\alpha = 4$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \tan^2\alpha = 4$

$1 + \tan^2\alpha = 4$, $\tan^2\alpha = 3$

$\therefore \tan\alpha = \sqrt{3}\quad \left(\because 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$

즉, $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ 이므로 $\overline{OA} = \cos\alpha = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$

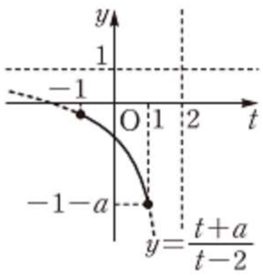
110) ④

$y=\dfrac{\cos x+a}{\cos x-2}$에서 $\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$$y=\frac{t+a}{t-2}=\frac{(t-2)+a+2}{t-2}=\frac{a+2}{t-2}+1$$

이때 $a>-2$에서 $a+2>0$이므로

$y=\dfrac{t+a}{t-2}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $t=1$일 때 최솟값 $-1-a$를 가지므로 $1-a=-3$ $\quad\therefore\ a=2$

111) $\alpha=\dfrac{3}{2}\pi,\ k=-\dfrac{3}{2}$

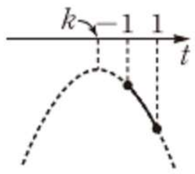
$y=\cos^2x+2k\sin x-1+4k$
$\ =(1-\sin^2x)+2k\sin x-1+4k$
$\ =-\sin^2x+2k\sin x+4k$

$\sin x=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서 $-1\le t\le 1$이고

$$y=-t^2+2kt+4k=-(t-k)^2+k^2+4k$$

$f(t)=-(t-k)^2+k^2+4k$로 놓으면

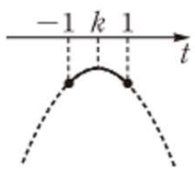
(ⅰ) $k<-1$일 때, $f(t)$의 최댓값은 $f(-1)$이므로



$-1+2k=-4$

$\therefore\ k=-\dfrac{3}{2}$

(ⅱ) $-1\le k\le 1$일 때, $f(t)$의 최댓값은 $f(k)$이므로

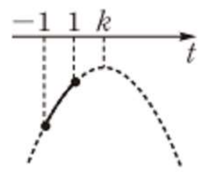


$k^2+4k=-4,\ (k+2)^2=0$

$\therefore\ k=-2$

$k=-2$는 $-1\le k\le 1$을 만족시키지 않는다.

(ⅲ) $k>1$일 때, $f(t)$의 최댓값은 $f(1)$이므로



$-1+6k=-4$

$\therefore\ k=-\dfrac{1}{2}$

그런데 $k=-\dfrac{1}{2}$은 $k>1$을 만족시키지 않는다.

이상에서 $k=-\dfrac{3}{2}$이고 $f(t)$는 $t=-1$, 즉 $\sin x=-1$일 때 최댓값을 가지므로

$x=\dfrac{3}{2}\pi\ \ (\because\ 0\le x<2\pi)\ \ \therefore\ \alpha=\dfrac{3}{2}\pi$

112) $x=\dfrac{\pi}{6}$

$2\log\cos x,\ 2\log\sin x$에서 로그의 진수의 조건에 의하여

$\cos x>0,\ \sin x>0$

$\therefore\ 0<x<\dfrac{\pi}{2}\ \ (\because\ 0<x<2\pi)$

$2\log\cos x-2\log\sin x=\log 3$에서

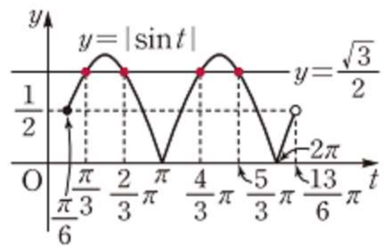
$2\log\dfrac{\cos x}{\sin x}=\log 3$

따라서 $\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)^2=3$이므로 $\tan^2x=\dfrac{1}{3}$

$\therefore\ \tan x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\ \ \left(\because\ 0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\therefore\ x=\dfrac{\pi}{6}$

113) ④



$x+\dfrac{\pi}{6}=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$,

$\dfrac{\pi}{6}\le t<\dfrac{13}{6}\pi$

$\dfrac{\pi}{6}\le t<\dfrac{13}{6}\pi$에서

$y=|\sin t|$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$은 오른쪽 그림과 같으므로 방정식 $|\sin t|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$의 근은

$t=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $t=\dfrac{2}{3}\pi$ 또는 $t=\dfrac{4}{3}\pi$ 또는 $t=\dfrac{5}{3}\pi$

즉, $x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{2}{3}\pi$ 또는 $x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{4}{3}\pi$ 또는 $x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{5}{3}\pi$ 이므로

$x=\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $x=\dfrac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\dfrac{3}{2}\pi$

따라서 모든 근의 곱은

$\dfrac{\pi}{6}\cdot\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{7}{6}\pi\cdot\dfrac{3}{2}\pi=\dfrac{7}{48}\pi^4$

$\therefore\ p-q=48-7=41$

114) ⑤

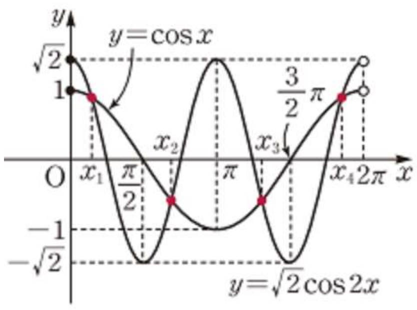
$\sqrt{2}\cos 2x-\cos x=0$에서 $\sqrt{2}\cos 2x=\cos x$

방정식 $\sqrt{2}\cos 2x=\cos x$의 실근은 두 함수 $y=\sqrt{2}\cos 2x$, $y=\cos x$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다.

오른쪽 그림과 같이

$0\le x<2\pi$에서 두 함수 $y=\sqrt{2}\cos 2x$, $y=\cos x$의 그래프의 교점과 x좌표를 작은 것부터 차례대로 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ 라 하면

$\dfrac{x_1+x_4}{2}=\pi$, $\dfrac{x_2+x_3}{2}=\pi$

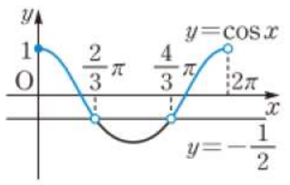


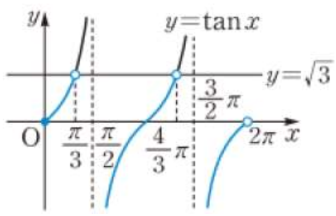
$\therefore\ x_1+x_4=2\pi$, $x_2+x_3=2\pi$

따라서 모든 근의 합은

$x_1+x_2+x_3+x_4=2\pi+2\pi=4\pi$

115) ③





위의 그림에서

$A=\left\{x\ \middle|\ 0\le x<\dfrac{2}{3}\pi\ \text{또는}\ \dfrac{4}{3}\pi<x<2\pi\right\}$

$B=\left\{x\ \middle|\ 0\le x<\dfrac{\pi}{3}\ \text{또는}\ \dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{4}{3}\pi\ \text{또는}\ \dfrac{3}{2}\pi<x<2\pi\right\}$

$\therefore\ A\cap B=\left\{x|0\le x<\dfrac{\pi}{3}\ \text{또는}\ \dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{2}{3}\pi\ \text{또는}\ \dfrac{3}{2}\pi<x<2\pi\right\}$

따라서 집합 $A\cap B$의 원소가 아닌 것은 ③이다.

116) $\dfrac{4}{3}\pi$

주어진 이차함수의 그래프가 x축에 접하면 이차방정식 $x^2-2x\cos\theta+1-\dfrac{3}{2}\cos\theta=0$이 중근을 가지므로

이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-\cos\theta)^2-\left(1-\dfrac{3}{2}\cos\theta\right)=0$

$2\cos^2\theta+3\cos\theta-2=0$, $(\cos\theta+2)(2\cos\theta-1)=0$

$0<\theta<2\pi$에서 $-1\le cos\theta<1$이므로 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \theta=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $\theta=\dfrac{5}{3}\pi$

따라서 $\theta_1=\dfrac{\pi}{3}$, $\theta_2=\dfrac{5}{3}\pi$이므로 $\theta_2-\theta=\dfrac{4}{3}\pi$

117) $\dfrac{5\sqrt{6}}{3}$

사인법칙에 의하여 $\dfrac{c}{\sin 45^\circ}=\dfrac{5}{\sin 60^\circ}$이므로

$c\sin 60^\circ=5\sin 45^\circ$

$\therefore\ c=5\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{5\sqrt{6}}{3}$

118) 15° 또는 105°

사인법칙에 의하여 $\dfrac{5}{\sin 30^\circ}=\dfrac{5\sqrt{2}}{\sin C}$이므로

$5\sin C=5\sqrt{2}\sin 30^\circ$ $\quad\therefore\ \sin C=5\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{5}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$0^\circ<C<180^\circ$이므로 $C=45^\circ$ 또는 $C=135^\circ$

$A=180^\circ-(B+C)$이므로 $A=105^\circ$ 또는 $A=15^\circ$

119) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

$A+B+C=180^\circ$이므로

$C=180^\circ-(35^\circ+100^\circ)=45^\circ$

사인법칙에 의하여 $\dfrac{3}{\sin 45^\circ}=2R$

$\therefore\ R=\dfrac{3}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

120) $A=\dfrac{\pi}{2}$인 직각삼각형

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$에서

$\sin A=\dfrac{a}{2R}$, $\sin B=\dfrac{b}{2R}$, $\sin C=\dfrac{c}{2R}$

이때 $a\sin A=b\sin B+c\sin C$이므로

$a\times\dfrac{a}{2R}=b\times\dfrac{b}{2R}+c\times\dfrac{c}{2R}$, 즉 $a^2=b^2+c^2$

따라서 삼각형 ABC는 $A=\dfrac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다.

121) 2

삼각형 ABC에서 $\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$이다.

삼각형 ABC에서 $ab:bc:ca=2:3:6$이므로
$ab=2k^2, bc=3k^2, ca=6k^2\ (k>0)$ …… ㉠
이라 하면
$(abc)^2=2k^2\times 3k^2\times 6k^2=36k^6$
이때 $a>0, b>0, c>0$이므로 $abc=6k^3$ …… ㉡
따라서 ㉠, ㉡에 의하여 $a=2k, b=k, c=3k$이므로
$$\begin{aligned}\sin A:\sin B:\sin C&=a:b:c\\&=2k:k:3k\\&=2:1:3\end{aligned}$$

122) $\sqrt{5}$

코사인법칙에 의하여
$$\begin{aligned}a^2&=3^2+(\sqrt{2})^2-2\cdot3\cdot\sqrt{2}\cos 45^\circ\\&=9+2-2\cdot3\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=5\end{aligned}$$
$a>0$이므로 $a=\sqrt{5}$

123) 120°

코사인법칙에 의하여
$$\cos A=\frac{7^2+8^2-13^2}{2\cdot7\cdot8}=-\frac{1}{2}$$
$0^\circ<A<180^\circ$ 이므로 $A=120^\circ$

124) $\sqrt{2}$

$\triangle\mathrm{ABC}$에서 코사인법칙에 의하여
$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AC}}^2&=(2\mathrm{x})^2+\left(\frac{1}{\mathrm{x}}\right)^2-2\cdot2\mathrm{x}\cdot\frac{1}{\mathrm{x}}\cdot\cos60^\circ\\&=4x^2+\frac{1}{x^2}-2\end{aligned}$$
$4x^2>0,\ \frac{1}{x^2}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$4x^2+\frac{1}{x^2}\geq 2\sqrt{4x^2\cdot\frac{1}{x^2}}=4$ (단, 등호는 $4x^2=\frac{1}{x^2}$일 때 성립)
$\therefore\ \overline{\mathrm{AC}}^2=4\mathrm{x}^2+\frac{1}{\mathrm{x}^2}-2\geq 4-2=2$
따라서 $\overline{\mathrm{AC}}$의 길이의 최솟값은 $\sqrt{2}$이다.

125) 1

삼각형의 세 내각 중 최대인 각은 변의 길이가 최대인 변과 마주 보는 각이고, $4<2\sqrt{7}<6$이므로 변의 길이가 6인 변과 마주 보는 각의 크기가 α이다.
따라서 코사인법칙의 활용에서
$$\begin{aligned}\cos\alpha&=\frac{4^2+(2\sqrt{7})^2-6^2}{2\times4\times2\sqrt{7}}\\&=\frac{16+28-36}{16\sqrt{7}}\\&=\frac{1}{2\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{14}\end{aligned}$$
마찬가지로 삼각형의 세 내각 중 최소인 각은 변의 길이가 최소인 변과 마주 보는 각이므로 변의 길이가 4인 변과 마주 보는 각의 크기가 β이다.
따라서 코사인법칙의 활용에서
$$\begin{aligned}\cos\beta&=\frac{(2\sqrt{7})^2+6^2-4^2}{2\times2\sqrt{7}\times6}\\&=\frac{28+36-16}{24\sqrt{7}}\\&=\frac{2}{\sqrt{7}}\end{aligned}$$
이고 $0<\beta<\pi$이므로
$$\begin{aligned}\sin\beta&=\sqrt{1-\cos^2\beta}\\&=\sqrt{1-\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2}\\&=\sqrt{\frac{3}{7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}\end{aligned}$$
따라서
$$\cos\alpha sin\beta=\frac{\sqrt{7}}{14}\times\frac{\sqrt{21}}{7}=\frac{\sqrt{3}}{14}$$

126) ③

길이가 9인 변의 대각의 크기를 θ라 하면
$$\cos\theta=\frac{7^2+8^2-9^2}{2\cdot7\cdot8}=\frac{2}{7}$$
$$\therefore\ \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{3\sqrt{5}}{7}\quad(\because\ 0°<\theta<180°)$$
삼각형의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙
$$\frac{9}{\sin\theta}=2R\qquad\therefore\ R=\frac{1}{2}\cdot9\cdot\frac{7}{3\sqrt{5}}=\frac{21\sqrt{5}}{10}$$

따라서 구하는 외접원의 넓이는

$\pi R^2 = \pi\left(\frac{21\sqrt{5}}{10}\right)^2 = \frac{441}{20}\pi$

127) 3

$a=2, b=3, c=4$라 하면

$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$= \frac{3^2+4^2-2^2}{2\times3\times4} = \frac{7}{8}$

이때 $0 < A < \pi$이므로 $\sin A > 0$에서

$\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A}$

$= \sqrt{1-\left(\frac{7}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{8}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이 S는

$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}\times3\times4\times\frac{\sqrt{15}}{8} = \frac{3\sqrt{15}}{4}$

128) ⑤

$\overline{\mathrm{BD}} = \mathrm{x}$라 하면 $\triangle\mathrm{ABC} = \triangle\mathrm{ABD} + \triangle\mathrm{BCD}$ 이므로

$\frac{1}{2}\cdot6\cdot4\cdot sin60°$

$= \frac{1}{2}\cdot6\cdot x\cdot sin30° + \frac{1}{2}\cdot x\cdot4\cdot sin30°$

$6\sqrt{3} = \frac{3}{2}x + x,\ \frac{5}{2}x = 6\sqrt{3}$

$\therefore\ x = \frac{12\sqrt{3}}{5}$

129) $\sqrt{23}$

$\triangle$ABC에서 코사인법칙에 의하여

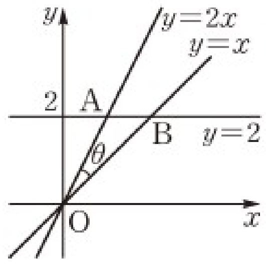
$\cos B = \frac{5^2+9^2-7^2}{2\cdot5\cdot9} = \frac{19}{30}$

$\triangle$ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AD}}^2 = 5^2+6^2-2\cdot5\cdot6\cdot\frac{19}{30} = 23$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AD}} = \sqrt{23}$

130) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$



오른쪽 그림과 같이 두 직선 $y=2x$, $y=x$와 직선 $y=2$의 교점을 각각 A, B 라 하면

$\mathrm{A}(1,\ 2),\ \mathrm{B}(2,\ 2)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{OA}} = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$,

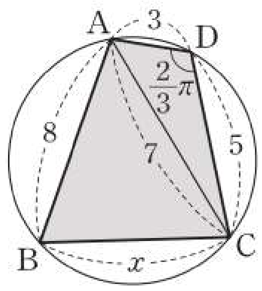
$\overline{\mathrm{OB}} = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$,

$\overline{\mathrm{AB}} = 1$

따라서 $\triangle$AOB에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta = \frac{(\sqrt{5})^2+(2\sqrt{2})^2-1}{2\cdot\sqrt{5}\cdot2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

131) 3



삼각형 ACD에 코사인법칙을 적용하면

$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 - 2\times\overline{AD}\times\overline{CD}\times\cos D$

$= 3^3+5^2-2\times3\times5\times cos\frac{2}{3}\pi$

$= 9+25+15 = 49$

이므로 $\overline{AC} = 7\ (\overline{AC} > 0)$

사각형 $ABCD$가 원에 내접하므로

$B = \pi - D = \pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{\pi}{3}$

삼각형 ABC에서 $\overline{BC} = x$라 하면

코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos B$

즉, $7^2 = 8^2 + x^2 - 2\times8\times x\times cos\frac{\pi}{3}$

$x^2 - 8x + 15 = 0,\ (x-3)(x-5) = 0$

여기서 $x > 3$이므로 $x = 5$

따라서 사각형 $ABCD$의 넓이를 S, 두 삼각형 ABC, ACD의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하면

$S_1 = \frac{1}{2}\times8\times5\times sin\frac{\pi}{3}$

$= \frac{1}{2}\times8\times5\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$

$S_2 = \frac{1}{2}\times3\times5\times sin\frac{2}{3}\pi$

$= \frac{1}{2}\times3\times5\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \dfrac{15\sqrt{3}}{4}$

이므로

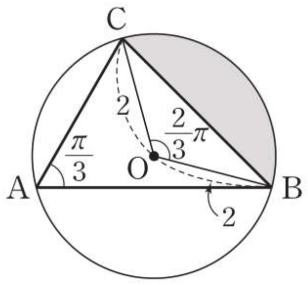
$S = S_1 + S_2 = 10\sqrt{3} + \dfrac{15\sqrt{3}}{4} = \dfrac{55\sqrt{3}}{4}$

132) 21

133) $\dfrac{1}{3}$

삼각형 ABC의 외접원의 중심을 O라 하면 $A = \dfrac{\pi}{3}$이므로 중심각과 원주각의 관계에 의하여

$\angle COB = 2\angle CAB = \dfrac{2}{3}\pi$



색칠된 부분의 넓이는

(부채꼴 COB의 넓이) $-$ (삼각형 COB의 넓이)

$= \dfrac{1}{2} \times \overline{OB}^2 \times (\angle COB) - \dfrac{1}{2} \times \overline{OB}^2 \times \sin(\angle COB)$

$= \dfrac{1}{2} \times 2^2 \times \dfrac{2}{3}\pi - \dfrac{1}{2} \times 2^2 \times \sin\dfrac{2}{3}\pi$

$= \dfrac{4}{3}\pi - 2 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$

이므로 $p = \dfrac{4}{3}, q = -1$ (p, q는 유리수)

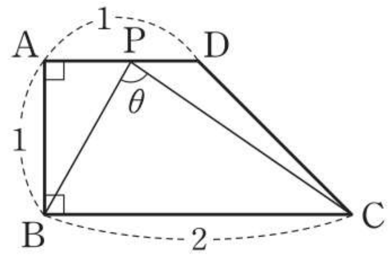
따라서 $p + q = \dfrac{4}{3} - 1 = \dfrac{1}{3}$

134) 1

삼각형 ABC의 넓이 S는 $S = \dfrac{1}{2}ab\sin C$이다.

삼각형 PBC에서 선분 BC를 밑변으로 하면 삼각형 PBC의 높이는 선분 AB의 길이와 같다.

$\angle BPC = \theta$라 하면



삼각형 PBC의 넓이는

$\dfrac{1}{2} \times \overline{PB} \times \overline{PC} \times \sin\theta = \dfrac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC}$

이때 $\overline{PB} \times \overline{PC} = 2$이므로

$\dfrac{1}{2} \times 2 \times sin\theta = \dfrac{1}{2} \times 1 \times 2$

$\sin\theta = 1, \theta = \dfrac{\pi}{2}$

따라서 $\angle BPC = \dfrac{\pi}{2}$

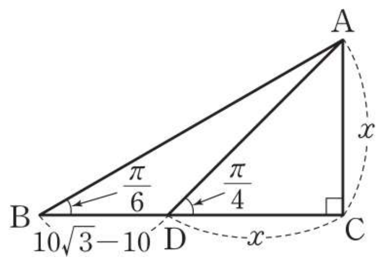
135) $\dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

삼각형 ABC에서 $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$이 성립한다.

$\angle CAD = \pi - \left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$이므로 삼각형 ADC는 $\overline{AC} = \overline{DC}$인 직각이등변삼각형이다.

따라서 $\overline{AC} = \overline{DC} = x$라 하면 $\overline{AD} = \sqrt{2}x$

삼각형 ABC에서



$\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}, \tan\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$이므로

$\overline{AB} = \dfrac{\overline{AC}}{\sin\dfrac{\pi}{6}} = \dfrac{x}{\dfrac{1}{2}} = 2x$

$\overline{BC} = \dfrac{\overline{AC}}{\tan\dfrac{\pi}{6}} = \dfrac{x}{\dfrac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}x$

이때 $\overline{BC} = \overline{BD} + \overline{DC}$이므로

$\sqrt{3}x = (10\sqrt{3} - 10) + x$

$(\sqrt{3} - 1)x = 10(\sqrt{3} - 1)$

$x = 10$

따라서 삼각형 ABD에서

$\overline{AB} = 2x = 20, \overline{BD} = 10\sqrt{3} - 10$

$\overline{AD} = \sqrt{2}x = 10\sqrt{2}$

이므로

$\cos(\angle BAD)$

$$=\frac{\overline{AB}^2+\overline{AD}^2-\overline{BD}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{AD}}$$
$$=\frac{20^2+(10\sqrt{2})^2-(10\sqrt{3}-10)^2}{2\times20\times10\sqrt{2}}$$
$$=\frac{400+200-(300-200\sqrt{3}+100)}{400\sqrt{2}}$$
$$=\frac{200+200\sqrt{3}}{400\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

136) 4

1. 삼각형 ABC에서 코사인법칙
$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$가 성립한다.

2. 이웃하는 두 변의 길이가 a, b이고 그 끼인 각의 크기가 h인 평행사변형의 넓이 S는 $S=ab\sin\theta$이다.

3. 두 대각선의 길이가 a, b이고 두 대각선이 이루는 각의 크기가 h인 사각형의 넓이 S는 $S=\frac{1}{2}ab\sin\theta$이다.

삼각형 ABC에 코사인법칙을 적용하면
$$\overline{AC}^2=1^2+2^2-2\times1\times2\times cos\frac{\pi}{3}$$
$$=1+4-2=3$$
이므로 $\overline{AC}=\sqrt{3}\ (\overline{AC}>0)$

삼각형 BCD에서
$\overline{CD}=\overline{AB}=1,\ \angle BCD=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$
이므로 코사인법칙에 의하여
$$\overline{BD}^2=2^2+1^2-2\times2\times1\times cos\frac{2}{3}\pi$$
$$=4+1+2=7$$
$\overline{BD}=\sqrt{7}\ (\overline{BD}>0)$

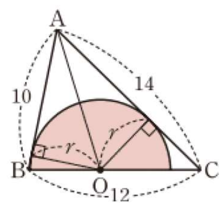
따라서 평행사변형 $ABCD$의 넓이는
$$\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin B=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}\times\sin\theta$$
$$1\times2\times sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{7}\times\sin\theta$$
$$2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times7\times sin\theta$$
$$\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{7}}$$
이므로 $\sin^2\theta=\frac{4}{7}$

137) $\sqrt{2}+\sqrt{6}$

$\triangle$ACB는 $\angle$ACB$=90°$인 직각삼각형이므로
$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$
또 $\triangle$ADB에서 $\angle$ADB$=90°$, $\angle$DAB$=\angle$DBA$=45°$
$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{BD}}=4\cdot\sin45°=4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$
$\therefore$ $\square$ACBD$=\triangle$ACB$+\triangle$ADB
$=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2\sqrt{3}+\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{2}\cdot2\sqrt{2}$
$=2\sqrt{3}+4$ ……㉠
같은 호에 대한 원주각의 크기가 같으므로
$\angle$ADC$=\angle$ABC$=30°$
$\overline{\mathrm{CD}}=x$라 하면
$\square$ACBD$=\triangle$ADC$+\triangle$DCB
$=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{2}\cdot x\cdot sin30°+\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{2}\cdot x\cdot sin60°$
$=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{6}}{2}x$ ……㉡
㉠, ㉡에서 $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}x=2(\sqrt{3}+2)$
$\therefore\ x=\frac{4(\sqrt{3}+2)}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}=\sqrt{2}+\sqrt{6}$

138) ④

$\triangle$ABC에서 헤론의 공식에 의하여
$s=\frac{10+12+14}{2}=18$
$\triangle$ABC의 넓이를 S라 하면
$S=\sqrt{18(18-10)(18-12)(18-14)}=24\sqrt{6}$
반원의 반지름의 길이를 r라 하면
$S=\triangle$ABO$+\triangle$AOC에서
$\frac{1}{2}\cdot10\cdot r+\frac{1}{2}\cdot14\cdot r=24\sqrt{6}$
$12r=24\sqrt{6}$ $\therefore\ r=2\sqrt{6}$
따라서 반원의 넓이는
$\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot(2\sqrt{6})^2=12\pi$



139) $\sqrt{3}$

$\angle$EAC$=90°-\angle$ACE$=\angle$BCD
$\angle$EAC$=\theta$라 하면 $\triangle$EAC에서 $\overline{\mathrm{EC}}=2\sin\theta$이므로
$\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{EC}}=2\sin\theta$
$\triangle$BCD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle BDC)}=\frac{\overline{BD}}{\sin(\angle BCD)}$$

$$\frac{\overline{BC}}{\sin120^\circ}=\frac{2\sin\theta}{\sin\theta}$$

$$\therefore\ \overline{BC}=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

140) ③

드론의 위치를 C라 하면

$\angle ACB=180^\circ-(45^\circ+75^\circ)=60^\circ$

$\triangle ABC$에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{30}{\sin60^\circ}=\frac{\overline{BC}}{\sin45^\circ}$$

$$\therefore\ \overline{BC}=30\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=10\sqrt{6}\ (\mathrm{m})$$

141) $2\sqrt{19}$

$\triangle ABC$에서 $\overline{AC}=\dfrac{2}{\sin30^\circ}=4$

$\triangle CDE$에서 $\overline{CE}=\dfrac{3}{\sin30^\circ}=6$

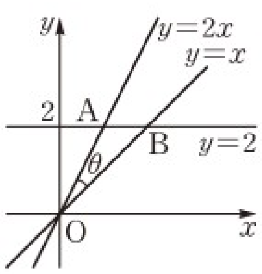
$\angle ACE=180^\circ-(30^\circ+30^\circ)=120^\circ$ 이므로 $\triangle ACE$ 에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AE}^2=4^2+6^2-2\cdot4\cdot6\cdot\cos120^\circ=76$

$\therefore\ \overline{AE}=2\sqrt{19}$

142) $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

오른쪽 그림과 같이 두 직선 $y=2x$, $y=x$와 직선 $y=2$의 교점을 각각 A, B라 하면



A$(1,\ 2)$, B$(2,\ 2)$

$\therefore\ \overline{OA}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$,

$\overline{OB}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$,

$\overline{AB}=1$

따라서 $\triangle AOB$에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{(\sqrt{5})^2+(2\sqrt{2})^2-1}{2\cdot\sqrt{5}\cdot2\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

143) $\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$

정육각형의 한 내각의 크기는 $\dfrac{180^\circ\times(6-2)}{6}=120^\circ$

$\overline{MF}=4$이므로 $\triangle AMF$에서 코사인법칙에 의하여

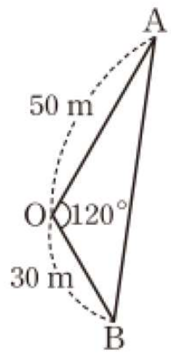
$\overline{AM}^2=8^2+4^2-2\cdot8\cdot4\cdot\cos120^\circ=112$

$\therefore\ \overline{AM}=4\sqrt{7}$

$$\therefore\ \cos\theta=\frac{4^2+(4\sqrt{7})^2-8^2}{2\cdot4\cdot4\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$$

144) 70

10초 후의 두 자전거의 위치를 각각 A, B라 하면



$\overline{OA}=10\cdot5=50\ (\mathrm{m})$

$\overline{OB}=10\cdot3=30\ (\mathrm{m})$

$\triangle OAB$에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2=50^2+30^2-2\cdot50\cdot30\cdot\cos120^\circ$

$=4900$

$\therefore\ \overline{AB}=70\ (\mathrm{m})$

따라서 두 자전거 사이의 거리는 $70\,\mathrm{m}$ 이다.

145) ③

$\overline{BC}=3\overline{AD}$ 에서 $\overline{BC}:\overline{AD}=3:1$ 이므로

$\triangle ABC:\triangle ACD=3:1$

즉, $\triangle ABC=3\triangle ACD$ 이므로

$$\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\sin\alpha=3\cdot\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{CD}\cdot\sin\beta$$

$$\therefore\ \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{3\overline{CD}}{\overline{AB}}$$

146) $3\sqrt{3}$

$\overline{AP}=x$, $\overline{AQ}=y$라 하면 $\triangle ABC=4\triangle APQ$ 에서

$$\frac{1}{2}\cdot9\cdot12\cdot\sin60^\circ=4\left(\frac{1}{2}\cdot x\cdot y\cdot\sin60^\circ\right)$$

$\therefore\ xy=27$

코사인법칙에 의하여

$\overline{PQ}^2=x^2+y^2-2xy\cos60^\circ=x^2+y^2-xy$

$= (x-y)^2 + xy$

$\geq xy = 27$ (단, 등호는 $x = y = 3\sqrt{3}$ 일 때 성립)

$\therefore\ \overline{PQ} \geq \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

따라서 $\overline{PQ}$ 의 길이의 최솟값은 $3\sqrt{3}$ 이다.

147) $\dfrac{7}{25}$

$S = \dfrac{1}{2}bc\sin A$ 이므로

$\triangle APR = \dfrac{1}{2}\overline{AP} \cdot \overline{AR} \cdot \sin A = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3c}{5} \cdot \dfrac{2b}{5} \cdot \sin A$

$= \dfrac{6}{25}\left(\dfrac{1}{2}bc\sin A\right) = \dfrac{6}{25}S$

같은 방법으로

$\triangle BQP = \dfrac{6}{25}S$, $\triangle CRQ = \dfrac{6}{25}S$

$\therefore\ S' = \triangle ABC - (\triangle APR + \triangle BQP + \triangle CRQ)$

$= S - \left(\dfrac{6}{25}S + \dfrac{6}{25}S + \dfrac{6}{25}S\right) = \dfrac{7}{25}S$

$\therefore\ \dfrac{S'}{S} = \dfrac{7}{25}$

148) $10\sqrt{3}$

$\overline{AC} = \sqrt{(2\sqrt{11})^2 + (2\sqrt{5})^2} = 8$

$\overline{AF} = \sqrt{(2\sqrt{11})^2 + (\sqrt{5})^2} = 7$

$\overline{CF} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2} = 5$

헤론의 공식에서 $s = \dfrac{8+7+5}{2} = 10$

따라서 삼각형 AFC 의 넓이는

$\sqrt{10(10-8)(10-7)(10-5)} = 10\sqrt{3}$

다른풀이

$\triangle AFC$ 에서 코사인법칙에 의하여

$\cos A = \dfrac{7^2 + 8^2 - 5^2}{2 \cdot 7 \cdot 8} = \dfrac{11}{14}$

$\therefore\ \sin A = \sqrt{1 - \left(\dfrac{11}{14}\right)^2} = \dfrac{5\sqrt{3}}{14}$

따라서 $\triangle AFC$ 의 넓이는

$\dfrac{1}{2} \cdot \overline{AF} \cdot \overline{AC} \cdot \sin A = \dfrac{1}{2} \cdot 7 \cdot 8 \cdot \dfrac{5\sqrt{3}}{14} = 10\sqrt{3}$

149) ③

$\triangle ABC$ 의 넓이를 S라 하면

$S = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot 4 \cdot sinB = 2\sqrt{5}\sin B$

이므로 S는 $B = 90°$ 일 때 최대이다.

따라서 $\triangle ABC$ 의 넓이의 최댓값은

$2\sqrt{5} \cdot \sin 90° = 2\sqrt{5}$ 이고

피타고라스 정리에 의하여

$x^2 = (\sqrt{5})^2 + 4^2 = 21 \qquad \therefore\ x = \sqrt{21}$

150) ⑤

사각형 ABCD 의 넓이가 $2\sqrt{2}$ 이므로

$\dfrac{1}{2}ab\sin 45° = 2\sqrt{2}$

$\dfrac{\sqrt{2}}{4}ab = 2\sqrt{2}$

$\therefore\ ab = 8$

$\therefore\ a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = 6^3 - 3 \cdot 8 \cdot 6 = 72$

151) 1, 9, 17, 25, 33

$a_n = 8n - 7$에 $n = 1, 2, 3, 4, 5$를 차례대로 대입하면

$a_1 = 8\cdot1 - 7 = 1$, $a_2 = 8\cdot2 - 7 = 9$, $a_3 = 8\cdot3 - 7 = 17$,

$a_4 = 8\cdot4 - 7 = 25$, $a_5 = 8\cdot5 - 7 = 33$

152) 15, 0

$5 - 10 = -5$에서 공차가 -5이므로 주어진 수열은

20, $\boxed{15}$, 10, 5, $\boxed{0}$, ⋯

153) $a_n = -3n + 18$

$a_n = 15 + (n-1)\cdot(-3) = -3n + 18$

154) 5

주어진 등차수열의 공차를 d라 하면 첫째항이 1, 제21항이 101 이므로

$1+20d=101,\quad 20d=100\quad \therefore d=5$

155) 6

$a_n=a_1+(n-1)\cdot(-2)=-2n+a_1+2$이므로

$2-3a_n=2-3(-2n+a_1+2)=6n-3a_1-4$

$=2-3a_1+(n-1)\cdot 6$

따라서 등차수열 $\{2-3a_n\}$의 공차는 6이다.

156) 12

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면 등차수열 $\{a_{2n}\}$은 $a_2,\ a_4,\ a_6,\ \cdots$이고 공차가 8이므로

$a_4-a_2=8,\quad (a+3d)-(a+d)=8$

$2d=8\quad \therefore d=4$

등차수열 $\{a_{3n+1}\}$은 $a_4,\ a_7,\ a_{10},\ \cdots$이므로

$a_7-a_4=(a+6d)-(a+3d)=3d=3\cdot 4=12$

따라서 등차수열 $\{3a_{n+1}\}$의 공차는 12이다.

157) $n=19,\ d=2$

첫째항이 -9, 끝항이 31, 항수는 $(n+2)$인 등차수열이고 첫째항부터 끝항까지의 합이 231 이므로

$\dfrac{(n+2)(-9+31)}{2}=231,\ 11(n+2)=231$

$n+2=21\qquad \therefore\ n=19$

따라서 31 은 제21 항이므로

$-9+(21-1)d=31\qquad \therefore\ d=2$

158) 745

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a, 공차를 d 라고 하면

$S_{10}=\dfrac{10\{2a+(10-1)d\}}{2}=145$

$\therefore\ 2a+9d=29\qquad \cdots\cdots$㉠

$S_{20}-S_{10}=\dfrac{20\{20+(20-1)d\}}{2}-145=445$

$\therefore\ 2a+19d=59\qquad \cdots\cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1,\ d=3$

따라서 제21 항부터 제30 항까지의 합은

$S_{30}-S_{20}=\dfrac{30\{2+(30-1)\cdot 3\}}{2}-590$

$=1335-590=745$

159) 77

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_5=a+4d=8\qquad \cdots\cdots$ ㉠

$a_{13}=a+12d=-16\qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=20,\ d=-3$

$\therefore a_n=20+(n-1)\cdot(-3)=-3n+23$

$-3n+23<0$에서 $n>\dfrac{23}{3}=7.\times\times\times$

즉 수열 $\{a_n\}$은 제 8항부터 음수이므로 첫째항부터 제 7항까지의 합이 최대이다.

따라서 $a_7=-3\cdot 7+23=2$이므로 구하는 최댓값은

$S_7=\dfrac{7(20+2)}{2}=77$

160) ②

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

S_{17} 이 최댓값이므로 $a_{17}\geq 0,\ a_{18}<0$ 에서

$100+16d\geq 0,\ 100+17d<0$

$\therefore\ -\dfrac{25}{4}\leq d\leq-\dfrac{100}{17}$

즉, $-6.25\leq d<-5.88\cdots$에서 d 는 정수이므로

$d=-6$

$\therefore\ a_{10}=100+(10-1)\cdot(-6)=46$

161) 7

첫 항부터 이루기위해서는 a_1을 따로 구하면 안된다. 예를 들어, $a_1=-1,\ a_n=2n-4\,(n\geq 2)$식으로 표현되는 것이 아니라, $a_n=2n-4$식으로 표현되어야 한다. 그러려면 $S_0=0$ 이어야한다.

$k=4,\ a_1=S_1=3$

[다른 풀이]
$S_n = -(n-2)^2 + k$ 에서
(i) $n \geq 2$일 때,
$a_n = S_n - S_{n-1}$
$= -(n-2)^2 + k - \{-(n-3)^2 + k\}$
$= -2n + 5$ …… ㉠
(ii) $n = 1$일 때,
$a_1 = S_1 = -1 + k$
$a_1 = -1 + k$는 ㉠에 $n = 1$을 대입한 것과 같아야 한다.
$-1 + k = -2 + 5$ $\therefore\ k = 4$
$\therefore\ a_1 = -1 + 4 = 3$ $\therefore\ a_1 + k = 3 + 4 = 7$

162) 5050

$S_n = n^2 + 2n$ 에서
(i) $n = 1$ 일 때,
$a_1 = S_1 = 1^2 + 2 \cdot 1 = 3$
(ii) $n \geq 2$ 일 때,
$a_n = S_n - S_{n-1}$
$= n^2 + 2n - \{(n-1)^2 + 2(n-1)\}$
$= 2n + 1$ …………………… ㉠
이 때, $a_1 = 3$ 은 ㉠에 $n = 1$ 을 대입한 것과 같으므로
$a_n = 2n + 1$
따라서 $a_1 = 3$, $a_3 = 7$, $a_5 = 11$, ……, $a_{99} = 199$ 이므로
$a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{99}$ 는 첫째항이 3 , 끝항이 199 , 항수가 50 인 등차수열의 합과 같다.
$\therefore\ a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{99} = \dfrac{50(3+199)}{2} = 5050$

163) ⑤

세 실수를 a , ar , ar^2 으로 놓으면
$a + ar + ar^2 = 7$ $\therefore\ a(1 + r + r^2) = 7$ …… ㉠
$a \cdot ar \cdot ar^2 = 8$ $\therefore\ (ar)^3 = 8$ …… ㉡
㉡ 에서 $ar = 2$ $\therefore\ a = \dfrac{2}{r}$
$a = \dfrac{2}{r}$ 를 ㉠ 에 대입하면 $\dfrac{2}{r}(1 + r + r^2) = 7$
양변에 r 을 곱하여 정리하면
$2r^2 - 5r + 2 = 0$, $(2r-1)(r-2) = 0$
$\therefore\ r = \dfrac{1}{2}$ 또는 $r = 2$
$r = \dfrac{1}{2}$ 일 때 $a = 4$, $r = 2$ 일 때, $a = 1$ 이므로
세 실수는 1 , 2 , 4 이다. 따라서 가장 큰 수는 4 이다.

164) ④

등비수열을 이루는 세 실수를 a, ar, ar^2이라 하면
$a + ar + ar^2 = a(1 + r + r^2) = 13$ …… ㉠
$a \cdot ar \cdot ar^2 = (ar)^3 = 27$ $\therefore\ ar = 3$ …… ㉡
㉡에서 $a = \dfrac{3}{r}$을 ㉠에 대입하면
$\dfrac{3}{r}(1 + r + r^2) = 13$, $3r^2 - 10r + 3 = 0$
$(3r-1)(r-3) = 0$ $\therefore\ r = \dfrac{1}{3}$ 또는 $r = 3$
$\therefore\ a = 9$ 또는 $a = 1$
따라서 세 실수는 1, 3, 9이므로 가장 큰 수는 9이다.

165) ①

주어진 등비수열의 첫째항을 a , 공비를 r라 하면
$ar^2 = 32$ …… ㉠
$ar^5 = 4$ …… ㉡
㉡÷㉠을 하면 $r^3 = \dfrac{1}{8}$ $\therefore\ r = \dfrac{1}{2}$
㉠에서 $a \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = 32$ $\therefore\ a = 128$
따라서 S는 첫째항이 128 , 공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합이므로
$$S = \frac{128 \cdot \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 256 \cdot \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\} = 256 - \frac{1}{4}$$
$\therefore\ [S] = 255$

166) $\dfrac{1}{3}\{1 - (-2)^n\}$

첫째항이 1, 공비가 -2인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로
$$\frac{1 \cdot \{1 - (-2)^n\}}{1 - (-2)} = \frac{1}{3}\{1 - (-2)^n\}$$

167) $\frac{9}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^7\right\}$

첫째항이 3, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열의 제n항을 $\frac{1}{243}$이라 하면

$$3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{243},\quad \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{729}=\left(\frac{1}{3}\right)^6$$

이때, $n-1=6$이므로 $n=7$

$$\therefore 3+1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{243}=\frac{3\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^7\right\}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{9}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^7\right\}$$

168) -6

첫 항부터 이루기위해서는 a_1을 따로 구하면 안된다. 예를 들어, $a_1=-1$, $a_n=2n-4\ (n\geq 2)$이런식으로 표현되는 것이 아니라, $a_n=2n-4$이런식으로 표현되어야 한다. 그러려면 $S_0=0$이여하 한다. $k=-6$

[다른 풀이]

$S_n=2\cdot 3^{n+1}+k$에서

ⅰ) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=2\cdot 3^2+k=18+k$ …… ㉠

ⅱ) $n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=2\cdot 3^{n+1}+k-(2\cdot 3^n+k)$

$=2\cdot 3^n(3-1)=4\cdot 3^n$ …… ㉡

이 때 이 수열이 첫째항부터 등비수열을 이루려면 ㉡에 $n=1$을 대입한 것과 ㉠이 같아야 하므로

$12=18+k \qquad \therefore k=-6$

169) ④

등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차를 각각 d, d'이라 하면

$$a_1+b_1=4,\ d+d'=2$$

$\therefore\ (a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{15})+(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{15})$

$$=\frac{15(2a_1+14d)}{2}+\frac{15(2b_1+14d')}{2}$$

$$=\frac{15\{2(a_1+b_1)+14(d+d')\}}{2}$$

$$=\frac{15(2\cdot 4+14\cdot 2)}{2}$$

$$=270$$

다른풀이

수열 $\{a_n+b_n\}$은 첫째항이 4, 공차가 2인 등차수열

(주어진 식)$=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_{15}+b_{15})$

$$=\frac{15\{2\cdot 4+(15-1)\cdot 2\}}{2}$$

$$=270$$

170) ⑤

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_{10}=50+9d=23$, $9d=-27 \qquad \therefore\ d=-3$

$\therefore\ a_n=50+(n-1)\cdot(-3)=-3n+53$

$a_n<0$에서 $\quad -3n+53<0 \qquad \therefore\ n>\frac{53}{3}=17.\cdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 제17항가지 양수이고, 제18항부터 음수이다.

$a_{17}=2$, $a_{18}=-1$, $a_{30}=-37$이므로

$$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{30}|$$

$$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{17})-(a_{18}+a_{19}+a_{20}+\cdots+a_{30})$$

$$=\frac{17(50+2)}{2}-\frac{13\{-1+(-37)\}}{2}$$

$$=442+247$$

$$=689$$

171) ①

$$S_{10}+T_{10}=\frac{10(a_1+a_{10})}{2}+\frac{10(b_1+b_{10})}{2}=5(a_1+a_{10})+5(b_1+b_{10})$$

$$=5\{(a_1+b_1)+(a_{10}+b_{10})\}=5\{(a_1+b_1)+42\}$$

즉 $5\{(a_1+b_1)+42\}=160$이므로 $\quad (a_1+b_1)+42=32$

$\therefore\ a_1+b_1=-10$

172) 12

첫째항이 2, 공비가 5인 등비수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\frac{2(5^n-1)}{5-1}=\frac{1}{2}(5^n-1)$$

$S_n\geq 10^8$에서 $\frac{1}{2}(5^n-1)\geq 10^8$

$\therefore\ 5^n\geq 2\cdot 10^8+1$

즉 $5^n>2\cdot 10^8$이므로 양변에 상용로그를 취하면

$\log 5^n>\log(2\cdot 10^8)$, $n\log 5>8+\log 2$

$\therefore\ n > \dfrac{8+\log 2}{\log 5} = \dfrac{8+0.3}{1-0.3} = 11.\cdots$

따라서 첫째항부터 제 12항까지의 합이 처음으로 10^8 이상이 된다.

173) ①

$S_n = n^2 - 10n$ 이므로

$a_1 = S_1 = -9$ ……㉠

$n \geq 2$ 일 때

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (n^2 - 10n) - \{(n-1)^2 - 10(n-1)\}$

$= 2n - 11$ ……㉡

㉡에 $n=1$ 을 대입하여 얻은 값이 ㉠과 같으므로

모든 자연수 n 에 대하여

$a_n = 2n - 11$

$a_n < 0$ 이려면

$2n - 11 < 0$ $\quad\therefore\ n < \dfrac{11}{2}$

따라서 $a_n < 0$ 을 만족시키는 자연수 n 의 값은

$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

이므로 자연수 n 의 개수는 5 이다.

174) ①

$a_8 - a_6 = 2d,\ S_8 - S_6 = a_7 + a_8$ 이므로

$\dfrac{a_8 - a_6}{S_8 - S_6} = 2$ 에서

$\dfrac{2d}{a_7 + a_8} = 2,\ \dfrac{2d}{(6+6d)+(6+7d)} = 2$

$2d = 2(12 + 13d),\ 24d = -24$

$\therefore\ d = -1$

175) ①

$n \geq 2$ 일 때, $S_{n+1} - S_{n-1} = a_{n+1} + a_n$ 이므로

$(S_{n+1} - S_{n-1})^2 = 4a_n a_{n+1} + 4$ 에서

$(a_{n+1} + a_n)^2 = 4a_n a_{n+1} + 4$

$(a_{n+1})^2 - 2a_n a_{n+1} + (a_n)^2 = 4$

$(a_{n+1} - a_n)^2 = 4$

$\therefore\ a_{n+1} - a_n = 2\ (\because\ a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < \cdots)$

한편, $a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2$ 이므로 모든 자연수 n 에 대해

$a_{n+1} - a_n = 2$

가 성립한다.

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 2 인 등차수열이다.

$\therefore\ a_{20} = a_1 + 19 \times 2$

$= 1 + 38 = 39$

176) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(3k-2)$

주어진 수열의 제k항을 a_k라 하면

$a_k = 1 + (k-1) \cdot 3 = 3k - 2$

$3k - 2 = 28$ 에서 $\quad 3k = 30 \quad \therefore\ k = 10$

$\therefore\ 1 + 4 + 7 + \cdots + 28 = \displaystyle\sum_{k=1}^{10}(3k-2)$

177) $\displaystyle\sum_{k=1}^{8}2^k$

주어진 수열의 제k항을 a_k라 하면

$a_k = 2 \cdot 2^{k-1} = 2^k$

$2^k = 256 = 2^8$ 에서 $\quad k = 8$

$\therefore\ 2 + 4 + 8 + \cdots + 256 = \displaystyle\sum_{k=1}^{8}2^k$

178) $4n$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-2)^2 - \sum_{k=1}^{n}(k^2 - 4k) = \sum_{k=1}^{n}\{(k-2)^2 - (k^2 - 4k)\}$

$= \displaystyle\sum_{k=1}^{n}4 = 4n$

179) 705

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(k-1)(2k+1) = \sum_{k=1}^{10}(2k^2 - k - 1)$

$= 2\sum_{k=1}^{10} k^2 - \sum_{k=1}^{10} k - \sum_{k=1}^{10} 1$

$= 2 \cdot \dfrac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} - \dfrac{10 \cdot 11}{2} - 1 \cdot 10$

$= 700 - 55 - 10 = 705$

180) 5

$\sum_{k=1}^{n-1} (4k+3) = 4\sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} 3 = 4 \cdot \dfrac{(n-1)n}{2} + 3(n-1)$

$= 2n^2 + n - 3$

즉 $2n^2 + n - 3 = 52$ 이므로 $2n^2 + n - 55 = 0$

$(2n+11)(n-5) = 0$

$\therefore n = 5$ ($\because n$은 자연수)

181) 풀이 참조

(1)

$\sum_{k=1}^{n} 2 \cdot 3^k = \dfrac{6(3^n - 1)}{3-1} = 3^{n+1} - 3$

(2)

$\sum_{k=1}^{n} 2 \cdot 3^{k-1} = \dfrac{2(3^n - 1)}{3-1} = 3^n - 1$

(3)

$\sum_{k=1}^{n-1} 2 \cdot 3^k = \dfrac{6(3^{n-1} - 1)}{3-1} = 3^n - 3$

(4)

$\sum_{k=1}^{n-1} 2 \cdot 3^{k-1} = \dfrac{2(3^{n-1} - 1)}{3-1} = 3^{n-1} - 1$

182) $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

주어진 수열의 제 k항을 a_k라 하면 $a_k = k(k+1)$

$\therefore \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} \left(k^2 + k\right) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k$

$= \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \dfrac{n(n+1)}{2}$

$= \dfrac{n(n+1)}{6}\{(2n+1)+3\}$

$= \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

183) $\dfrac{n(2n+1)(2n-1)}{3}$

주어진 수열의 제 k항을 a_k라 하면 $a_k = (2k-1)^2$

$\therefore \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(4k^2 - 4k + 1\right)$

$= 4\sum_{k=1}^{n} k^2 - 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$

$= 4 \cdot \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4 \cdot \dfrac{n(n+1)}{2} + 1 \cdot n$

$= \dfrac{n}{3}\{2(n+1)(2n+1) - 6(n+1) + 3\}$

$= \dfrac{n\left(4n^2 - 1\right)}{3} = \dfrac{n(2n+1)(2n-1)}{3}$

184) ③

주어진 수열의 제k항을 a_k라 하면

$a_k = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{k-1} = \dfrac{1 \cdot (2^k - 1)}{2-1} = 2^k - 1$

따라서 주어진 수열의 첫째항부터 제100항까지의 합은

$\sum_{k=1}^{100} a_k = \sum_{k=1}^{100} (2^k - 1) = \dfrac{2(2^{100} - 1)}{2-1} - 100$

$= 2^{101} - 102$

185) ④

주어진 수열의 제 n항을 a_n이라 하면

$a_n = n(21-n)$

$\therefore$ (주어진 식)$= \sum_{k=1}^{20} k(21-k)$

$= 21\sum_{k=1}^{20} k - \sum_{k=1}^{20} k^2$

$= 21 \cdot \dfrac{20 \cdot 21}{2} - \dfrac{20 \cdot 21 \cdot 41}{6}$

$= 4410 - 2870 = 1540$

186) ④

주어진 수열의 제k항을 a_k라 하면

$a_k = 10^k - 1$

$\therefore S = \sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10} (10^k - 1)$

$= \frac{10(10^{10}-1)}{2} - 10 = \frac{10^{11}-100}{9}$

$\therefore 9S = 10^{11} - 100$

187) 0

$$\sum_{k=1}^{100} \frac{3^k - 2^k}{4^k} = \sum_{k=1}^{100}\left(\frac{3}{4}\right)^k - \sum_{k=1}^{100}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$= \frac{\frac{3}{4}\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{100}\right\}}{1-\frac{3}{4}} - \frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{100}\right\}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= 3\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{100}\right\} - \left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{100}\right\}$$

$$= 2 - 3\left(\frac{3}{4}\right)^{100} + \left(\frac{1}{2}\right)^{100}$$

따라서 $a=2,\ b=-3,\ c=1$ 이므로

$a+b+c=0$

188) $\frac{9}{5}$

$$\sum_{k=2}^{10} \frac{2}{(k-1)k}$$

$$= 2\sum_{k=2}^{10}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$$

$$= 2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)\right\}$$

$$= 2\left(1-\frac{1}{10}\right) = \frac{9}{5}$$

189) $\frac{n}{2n+1}$

(주어진 식)$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{n}{2n+1}$$

190) $2\sqrt{5}$

$$\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}}$$

$$= \sum_{k=1}^{20} \frac{\sqrt{k-1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k-1}+\sqrt{k})(\sqrt{k-1}-\sqrt{k})}$$

$$= \sum_{k=1}^{20} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$$

$$= (1-0) + (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{20}-\sqrt{19})$$

$$= \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

191) $2(\sqrt{n+1}-1)$

(주어진 식)$= \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$

$$= 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})}$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$

$$= 2\{(\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\}$$

$$= 2(\sqrt{n+1}-1)$$

192) $\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-1)$

(주어진 식)$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}}$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1}}{(\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1})}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\{(\sqrt{3}-1) + (\sqrt{5}-\sqrt{3}) + (\sqrt{7}-\sqrt{5}) + \cdots + (\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})\}$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-1)$$

193) ④

주어진 수열의 제 k항을 a_k라 하면

$$a_k=\frac{1}{(2k+1)^2-1}=\frac{1}{4k^2+4k}$$
$$=\frac{1}{4k(k+1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

주어진 식은 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 12항까지의 합이므로

$$\sum_{k=1}^{12}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{13}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{13}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{12}{13}=\frac{3}{13}$$

따라서 $p=13$, $q=3$이므로 $p+q=16$

194) $\frac{n}{2n+1}$

제 n항을 a_n, 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$$a_n=\frac{1}{(2n)^2-1}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$\therefore \mathrm{S}_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$$

195) ⑤

$$a_n=\frac{1}{1+2+\cdots+n}=\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

주어진 식은 첫째항부터 제 1999항까지의 합이므로

$$2\sum_{k=1}^{1999}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{1999}-\frac{1}{2000}\right)\right\}$$
$$=2\left(1-\frac{1}{2000}\right)=\frac{1999}{1000}$$

196) ①

$$S=1\cdot1-2\cdot2+3\cdot2^2-4\cdot2^3+\cdots-10\cdot2^9 \quad\cdots\cdots㉠$$

㉠의 양변에 -2를 곱하면

$$-2S=-1\cdot2+2\cdot2^2-3\cdot2^3+4\cdot2^4-\cdots+10\cdot2^{10} \quad\cdots\cdots㉡$$

㉠ - ㉡을 하면

$$3S=1-2+2^2-2^3+\cdots-2^9-10\cdot2^{10}$$
$$=\frac{1-(-2)^{10}}{1-(-2)}-10\cdot2^{10}=\frac{1-31\cdot2^{10}}{3}$$
$$\therefore 9S=3\cdot3S=3\cdot\frac{1-31\cdot2^{10}}{3}=1-31\cdot2^{10}$$

197) ③

$$S=1+2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+30\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{29} \quad\cdots\cdots㉠$$

㉠의 양변에 $\frac{1}{2}$을 곱하면

$$\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+30\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{30} \quad\cdots\cdots㉡$$

㉠ - ㉡을 하면

$$\frac{1}{2}S=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{29}-30\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{30}$$
$$=\frac{1\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{30}\right\}}{1-\frac{1}{2}}-30\left(\frac{1}{2}\right)^{30}$$
$$=2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{30}\right\}-30\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{30}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{25}$$
$$\therefore S=4-\left(\frac{1}{2}\right)^{24}$$

따라서 $a=4$, $b=24$이므로

$a+b=28$

198) $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

수열 $1\cdot n$, $2\cdot(n-1)$, $3\cdot(n-2)$, $\cdots$, $n\cdot1$의 제 k항을 a_k라 하면

$$a_k=k\{n-(k-1)\}=-k^2+(n+1)k$$
$$\therefore \text{(주어진 식)}=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\{-k^2+(n+1)k\}$$
$$=-\sum_{k=1}^{n}k^2+(n+1)\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

199) ②

수열 $1\cdot(2n-1)$, $2\cdot(2n-3)$, $3\cdot(2n-5)$, $\cdots$, $n\cdot 1$의 제 k항을 a_k라 하면

$a_k=k\{2n-(2k-1)\}=(2n+1)k-2k^2$

주어진 식의 좌변은 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합이므로

(좌변) $= \sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n}\{(2n+1)k-2k^2\}$

$$=(2n+1)\sum_{k=1}^{n}k-2\sum_{k=1}^{n}k^2$$
$$=(2n+1)\cdot\frac{n(n+1)}{2}-2\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

따라서 $a=2$, $b=1$이므로 $a+2b=4$

200) ②

수열$\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n

$S_n=n^2+n$이므로

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=2$

(ii) $n\geq 2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=n^2+n-\{(n-1)^2+n-1\}=2n \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $a_1=2$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2n$

따라서 $a_{2k-1}=2(2k-1)=4k-2$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}a_{2k-1}=\sum_{k=1}^{10}(4k-2)=4\cdot\frac{10\cdot 11}{2}-2\cdot 10$$
$$=220-20=200$$

201) 136

$a_8=S_8-S_7$

$$=\left\{\sum_{k=1}^{9}(2k+1)^2-\sum_{k=1}^{8}(2k-1)^2\right\}-\left\{\sum_{k=1}^{8}(2k+1)^2-\sum_{k=1}^{7}(2k-1)^2\right\}$$
$$=\left\{\sum_{k=1}^{9}(2k+1)^2-\sum_{k=1}^{8}(2k+1)^2\right\}-\left\{\sum_{k=1}^{8}(2k-1)^2-\sum_{k=1}^{7}(2k-1)^2\right\}$$
$$=(2\cdot 9+1)^2-(2\cdot 8-1)^2=19^2-15^2$$
$$=361-225=136$$

다른풀이

$$S_n=\sum_{k=1}^{n+1}(2k+1)^2-\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2$$
$$=\{3^2+5^2+\cdots+(2n+3)^2\}-\{1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2\}$$
$$=(2n+1)^2+(2n+3)^2-1^2$$
$$=18n^2+16n+9$$

$\therefore\ a_8=S_8-S_7$

$$=8\cdot 8^2+16\cdot 8+9-(8\cdot 7^2+16\cdot 7+9)=136$$

202) ⑤

$$\sum_{i=1}^{m}\left\{\sum_{j=1}^{n}(i+j)\right\}=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}i+\sum_{i=1}^{n}j\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\left\{in+\frac{n(n+1)}{2}\right\}$$
$$=n\sum_{i=1}^{m}i+\sum_{i=1}^{m}\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=n\cdot\frac{m(m+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}\cdot m$$
$$=\frac{mn(m+n+2)}{2}=\frac{40\cdot 15}{2}=300$$

203) ④

$$a_{2n-1}=\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}-\sum_{k=1}^{n-1}a_{2k-1}$$
$$=(3n^2+n)-\{3(n-1)^2+(n-1)\}$$
$$=(3n^2+n)-(3n^2-5n+2)$$
$$=6n-2$$

등차수열 $\{a_n\}$에서 a_8은 a_7과 a_9의 등차중항이므로

$2a_8=a_7+a_9=(6\times 4-2)+(6\times 5-2)$

$=22+28=50$

$\therefore\ a_8=25$

204) 195

$\sum_{k=1}^{n} ka_k = S_n$ 이라 하면

$a_1 = S_1 = 6$

$na_n = S_n - S_{n-1}$

$= n(n+1)(n+2) - (n-1)n(n+1)$

$= 3n(n+1) \ (n \geq 2)$

$\therefore \ na_n = 3n(n+1) \ (n \geq 1)$

즉, $a_n = 3(n+1)$ 이므로 …①

…3점

$\sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10} 3(k+1) = 3\sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} 3$

$= 3 \times \frac{10 \times 11}{2} + 30 = 195$ …②

…3점

채점 기준	배점
① a_n 구하기	3점
② $\sum_{k=1}^{10} a_k$ 의 값 구하기	3점

205) ④

$a_1 = 3$에서

$a_2 =$(27을 7로 나누었을 때의 나머지)$= 6$

$a_3 =$(54를 7로 나누었을 때의 나머지)$= 5$

$a_4 =$(45를 7로 나누었을 때의 나머지)$= 3$

$a_5 =$(27를 7로 나누었을 때의 나머지)$= 6$

$\vdots$

$\therefore a_n = \begin{cases} 3 & (n = 3k-2) \\ 6 & (n = 3k-1) \\ 5 & (n = 3k) \end{cases}$ (단, k는 자연수)

이 때 $98 = 3 \cdot 33 - 1$, $99 = 3 \cdot 33$, $100 = 3 \cdot 34 - 2$이므로

$a_{98} + a_{99} + a_{100} = 6 + 5 + 3 = 14$

206) ④

$S_n = 2a_n + n \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$에서

$S_{n+1} = 2a_{n+1} + n + 1$

한편 $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n (n = 1, 2, 3, \cdots)$이므로

$a_{n+1} = 2a_{n+1} + n + 1 - (2a_n + n)$

$a_{n+1} = 2a_n - 1$

$\therefore a_{n+1} - 1 = 2(a_n - 1)$

따라서 수열 $\{a_n - 1\}$은 공비가 2인 등비수열이고 첫째항은

$a_1 - 1 = -2$이므로

$a_n - 1 = (-2) \cdot 2^{n-1} = -2^n$

$\therefore a_n = 1 - 2^n$

$\therefore a_{99} = 1 - 2^{99}$

207) ②

$S_{n+1} = 2S_n + 3$에서 $S_{n+1} + 2 = 2(S_n + 3)$

수열 $\{S_n + 3\}$은 공비가 2인 등비수열, 첫째항은

$S_1 + 3 = 4$이므로

$S_n + 3 = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$

$\therefore \ S_n = 2^{n+1} - 3$

$\therefore \ a_9 = S_9 - S_8 = 2^{10} - 3 - (2^9 - 3) = 512$

208)

(1) $a_1 = 9$, $b_1 = 8$

(2) $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n$, $b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}b_n$

(3) $a_n + b_n = 17$

(1) 1회 시행 후 A의 소금물의 양은 $(200+100)\text{g}$이고, 이 속에는 10% 소금물 200g, 7% 소금물 100g이 섞여 있으므로

$$a_1 = \frac{1}{200+100}\left(\frac{10}{100} \times 200 + \frac{7}{100} \times 100\right) \times 100 = 9$$

같은 방법으로 생각하면

$$b_1 = \frac{1}{100+200}\left(\frac{10}{100} \times 100 + \frac{7}{100} \times 200\right) \times 100 = 8$$

(2) n회 시행 후의 그릇 A, B에 들어 있는 소금물의 농도는 각각 a_n%, b_n%이므로, $n+1$회 시행 후의 각각의 소금물의 농도는

$a_{n+1} = \frac{1}{200+100}\left(\frac{a_n}{100} \times 200 + \frac{b_n}{100} \times 100\right) \times 100$

$= \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n$

$b_{n+1} = \frac{1}{100+200}\left(\frac{a_n}{100} \times 100 + \frac{b_n}{100} \times 200\right) \times 100$

$= \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}b_n$

(3) $a_{n+1} + b_{n+1} = \left(\frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n\right) + \left(\frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}b_n\right) = a_n + b_n$ 이므로

$$a_n + b_n = a_{n-1} + b_{n-1} = \cdots = a_1 + b_1 = 9 + 8 = 17$$

209) $x_{n+2}=\dfrac{3\times x_{n+1}-1\times x_n}{3-1}$

점 $\mathrm{P_n}$의 좌표를 x_n이라고 하면
$x_1=1,\quad x_2=3$이고
$$x_{n+2}=\frac{3\times x_{n+1}-1\times x_n}{3-1}$$
$$x_{n+2}=\frac{3x_{n+1}-x_n}{2}$$

210) 37

211) 56

212) 풀이 참조

(i) $n=1$일 때
$(좌변)=2\cdot 1-1=1$, $(우변)=1^2=1$
따라서 주어진 등식이 성립한다.
(ii) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
$$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$$
위의 식의 양변에 $2k+1$을 더하면
$$\begin{aligned}1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)&=k^2+2k+1\\&=(k+1)^2\end{aligned}$$
따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.
(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

213) 풀이 참조
(i) $n=2$일 때
$(좌변)=(1+h)^2=1+2h+h^2$. $(우변)=1+2h$
이 때 $h^2>0$이므로 주어진 부등식이 성립한다.
(ii) $n=k\ (k\ge 2)$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
$$(1+h)^2>1+kh$$
위의 식의 양변에 $1+h$을 곱하면 $1+h>0$이므로
$$\begin{aligned}(1+h)^2&>(1+kh)(1+h)\\&=1+(1+k)h+kh^2\\&>1+(1+kh)\ (\because kh^2>0)\end{aligned}$$
따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.
(i), (ii)에서 $n\ge 2$ 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

214) ④

(ii) $n=k\ (k\ge 5)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
$$2^k>k^2$$
위의 식의 양변에 2를 곱하면
$$2^{k+1}>2k^2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$
그런데 $k\ge 5$이면
$$k^2-2k-1=\boxed{(k-1)^2}-2>0$$
이므로 $k^2>2k+1 \qquad \cdots\cdots ㉡$
㉠, ㉡에서
$$2^{k+1}>2k^2=k^2+k^2>k^2+2k+1=\boxed{(k+1)^2}$$
따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.
(i), (ii)에서 $n\ge 5$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

215) ③

(ii) $n=k\ (k\ge 2)$일 때, 부등식 ㉠이 성립한다고 가정하면
$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{k}$$
위의 식의 양변에 $\dfrac{1}{(k+1)^2}$을 더하면
$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}$$
$$<2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2} \qquad \cdots\cdots ㉡$$
이때
$$\left\{2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}\right\}-\boxed{2-\frac{1}{k+1}}$$
$$=-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{1}{k+1}$$
$$=\frac{-(k+1)^2+k+k(k+1)}{k(k+1)^2}$$
$$=-\frac{1}{k(k+1)^2}<\boxed{0}$$

$\therefore 2-\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{(k+1)^2}< \ 2-\dfrac{1}{k+1}$ …… ㉢

㉡, ㉢에서

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ \cdots\ +\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k+1}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 부등식 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식 ㉠이 성립한다.

216) . 11

조건 (가)에서 $a_{n+2}=a_n-4$이므로

$a_2=p$라 놓으면

$a_1=7$

$a_2=p$

$a_3=a_1-4=7-4=3$

$a_4=a_2-4=p-4$

$a_5=a_3-4=\ -1$

$a_6=a_4-4=p-8$

$\therefore\quad a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6$
$=7+p+3+(p-4)+(-1)+(p-8)$
$=3p-3$

조건(나)에서 $a_{n+6}=a_n$이므로

$a_7=a_1, a_8=a_2,\ a_9=a_3,\ \cdots,\ a_{12}=a_6$

수열 $\{a_n\}$은 주기가 6인 수열이므로

$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6$이 반복된다.

즉, $7,\ p,\ 3,\ p-4,\ -1,\ p-8$이 반복된다.

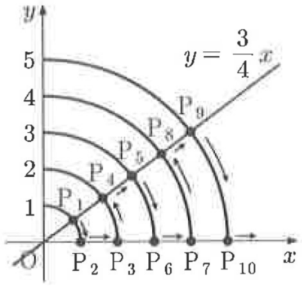
$$\therefore\quad \sum_{k=1}^{50}a_k=\sum_{k=1}^{48}a_k+a_{49}+a_{50}=8(3p-3)+7+p$$
$$=25p-17=258$$

이때 $25p=275$이므로 $p=11$

따라서 $a_2=p=11$

217) ①

다음 그림에서 4개의 점을 묶으면



1번째 묶음 : $\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2,\ \mathrm{P}_3,\ \mathrm{P}_4$

2번째 묶음 : $\mathrm{P}_5,\ \mathrm{P}_6,\ \mathrm{P}_7,\ \mathrm{P}_8$

⋮

7번째 묶음 : $\mathrm{P}_{25},\ \mathrm{P}_{26},\ \mathrm{P}_{27},\ \mathrm{P}_{28}$

⋮

이때 n번째 묶음의 첫째항은 P_{4n-3}이고 이것은 중심이 O이고 반지름의 길이가 $2n-1$인 원과 직선 $y=\dfrac{3}{4}x$의 교점이다.

즉 제 7번째 묶음의 첫째항 P_{25}는 반지름의 길이가 13인 원과 직선 $y=\dfrac{3}{4}x$의 교점이므로 $x^2+y^2=13^2$과 $y=\dfrac{3}{4}x$를 연립하여 x좌표를 구하면

$$x^2+\frac{9}{16}x^2=13^2,\ \ \frac{25}{16}x^2=13^2,\ \ x^2=\frac{52^2}{5^2}\ \text{따라서}\ x=\frac{52}{5}$$

다른 풀이

직선과 x축에 의하여 점의 위치 파악하여 풀이하기

그림에서 점 $\mathrm{P_n}$의 좌표는 $n=4k$ 또는 $4k+1$일 때, 직선 $y=\dfrac{3}{4}x$위에 있고 $n=4k+2$ 또는 $4k+3$일 때, x축 위에 있다. (단, k는 정수)

$25=4\cdot 6+1$로 나타낼 수 있으므로 점 P_{25}는 반지름이 13인 원과 직선 $y=\dfrac{3}{4}x$와의 교점이다. 또한 x축의 양의 방향과 직선 $y=\dfrac{3}{4}x$가 이루는 예각을 θ라 하면 점 P_{25}의 x좌표는 $13\cos\theta$ $\left(\text{단, }\tan\theta=\dfrac{3}{4}\right)$

따라서 $13\cos\theta=13\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{52}{5}$

218) $\dfrac{1}{7}$

$\sqrt{n+1}\,a_{n+1}=\sqrt{n}\,a_n$ 에서 $a_{n+1}=\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}\,a_n$

위의 식의 n에 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots, 48$을 차례대로 대입하면

$a_2=\sqrt{\dfrac{1}{2}}\,a_1$

$a_3=\sqrt{\dfrac{2}{3}}\,a_2=\sqrt{\dfrac{1}{3}}\,a_1$

$a_4=\sqrt{\dfrac{3}{4}}\,a_3=\sqrt{\dfrac{1}{4}}\,a_1$

⋮

$a_{49}=\sqrt{\dfrac{48}{49}}\,a_{48}=\sqrt{\dfrac{1}{49}}\,a_1=\dfrac{1}{7}$

219) 20

$a_n=\left(1-\frac{1}{n^2}\right)a_{n-1}$

$=\frac{n^2-1}{n^2}a_{n-1}$

$=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}a_{n-1}$

앞의 식의 n에 $2,\ 3,\ 4,\ \cdots$를 차례대로 대입하면

$a_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}a_1$

$a_3=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}a_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}a_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}a_1$

$a_4=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}a_3=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}a_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}a_1$

$\vdots$

$\therefore\ a_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}a_1=\frac{2(n+1)}{n}$

$a_k=\frac{21}{10}$에서 $\frac{2(k+1)}{k}=\frac{21}{10}$

$21k=20k+20 \quad \therefore\ k=20$

220) 33

$a_{n+1}=(n+1)a_n$의 n에 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2017$을 차례대로 대입

$a_2=2\cdot a_1$

$a_3=3\cdot a_2=3\cdot 2\cdot a_1$

$a_4=4\cdot a_3=4\cdot 3\cdot 2\cdot a_1$

$\vdots$

$a_{2018}=2018\cdot a_{2017}=2018\cdot 2017\cdot\ \cdots\ \cdots 2a_1$

이때 $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120$이므로 $a_5,\ a_6,\ \cdots,\ a_{2018}$은 모두 120으로 나누어 떨어진다.

즉 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2018}$을 120으로 나누었을 때의 나머지는 $a_1+a_2+a_3+a_4$를 120으로 나누었을 때의 나누었을 때의 나머지와 같다.

이때 $a_1+a_2+a_3+a_4=1+2+6+24=33$이므로 구하는 나머지는 33이다.

221) ⑤

$a_n+a_{n+1}=n+1$의 n에 $1,\ 3,\ 5,\ \cdots,\ 49$를 차례대로 대입하면

$a_1+a_2=2$

$a_3+a_4=4$

$a_5+b_6=6$

$\vdots$

$a_{49}+a_{50}=50$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{50}a_k=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{49}+a_{50})$

$=2+4+6+\cdots+50$

$=\sum_{k=1}^{25}2k=2\cdot\frac{25\cdot 26}{2}=650$

222) $\frac{54}{55}$

$\sum_{k=1}^{8}\frac{a_k}{a_{k+1}a_{k+2}}$

$=\sum_{k=1}^{8}\frac{a_{k+2}-a_{k+1}}{a_{k+1}a_{k+2}}$

$=\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_{k+2}}\right)$

$=\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}\right)+\left(\frac{1}{a_4}-\frac{1}{a_5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_9}-\frac{1}{a_{10}}\right)$

$=\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_{10}}$

이때 수열 $\{a_n\}$의 각 항을 차례대로 나열하면

$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ \cdots$

이므로 구하는 값은

$1-\frac{1}{55}=\frac{54}{55}$

223) 6

$a_1+a_2+a_3=a_2+a_4+a_6=10$이므로 $a_1=a_4$

$a_2+a_3+a_4=a_3+a_4+a_5=10$이므로 $a_2=a_5$

$a_3+a_4+a_5=a_4+a_5+a_6=10$이므로 $a_3=a_6$

$\vdots$

$\therefore\ a_n=\begin{cases}a_1 & (n=3k-2)\\ a_2 & (n=3k-1)\\ a_3 & (n=3k)\end{cases}$ (단, k는 자연수)

이때 $7=3\cdot 3-2,\ 12=3\cdot 4$이므로

$a_1=a_7=3,\ a_3=a_{12}=5$

$a_1+a_2+a_3=10$에서

$a_2=10-a_1-a_3=10-3-5=2$

$101=3\cdot34-1$, $106=3\cdot36-2$이므로

$a_{101}a_{106}=a_2a_1=2\cdot3=6$

224) $\frac{256}{81}$

시행을 한 번 하면 전체 끈의 길이의 $\frac{2}{3}$가 남으므로

$a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $a_1=\frac{2}{3}\cdot81=54$, 공비가 $\frac{2}{3}$인

등비수열이므로 $a_n=54\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore\ a_8=54\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^7=\frac{256}{81}$