‘삼도극 근사’

(나만 알기 아까운 필수 개념 #2)

#원리는 사실 탐구용이고 그냥 쓰면 된다.

쉽게 설명하면, 삼각함수 도형의 극한 문제를 해결할 때, 아래의 식들을 다항식으로 바꿔쓸 수 있다는 것이다.

$$\cdot \lim_{\theta \to 0+} \sin\theta = \lim_{\theta \to 0+} \theta$$

$$\cdot \lim_{\theta \to 0+} \tan\theta = \lim_{\theta \to 0+} \theta$$

$$\cdot \lim_{x \to 0+} (e^x - 1) = \lim_{x \to 0+} x$$

$$\cdot \lim_{x \to 0+} \ln(1+x) = \lim_{x \to 0+} x$$

$$\cdot \lim_{\theta \to 0+} (1-\cos\theta) = \lim_{\theta \to 0+} \frac{1}{2}\theta^2$$

$$\cdot \lim_{\theta \to 0+} (\sec\theta - 1) = \lim_{\theta \to 0+} \frac{1}{2}\theta^2$$

원리 설명

다음과 같은 xy 평면 위에 나타낼 수 있는 함수가 있다.

$y = \sin x$,

$y = \tan x$,

$y = e^x - 1$,

$y = \ln(1+x)$,

이 함수들의 그래프를 그려보면 $x \to 0$ 일 때, 직선 $y = x$와
모든 경향성이 일치한다. (함숫값, 미분계수, 형태 등)

따라서, 이 함수들은 $x \to 0$ 일 때 직선 $y = x$로 함수식을 대체 할 수 있다. 이를 근사라고 한다.
(근사 (近似) : 거의 같다. 순화어는 `비슷하다'.)

$y = \sec x - 1$

$y = 1 - \cos x$

이 함수들의 그래프를 그려보면 $x \to 0$ 일 때, 곡선 $y = \frac{1}{2}x^2$ 과

모든 경향성이 일치한다.

따라서, 이 함수들은 $x \to 0$ 일 때, 곡선 $y = \frac{1}{2}x^2$ 로 근사할 수 있다.

이를 이용해서 문제를 풀어보자.

예제 #1) (by $H.I.C$)

그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정사각형 $ABCD$ 안에

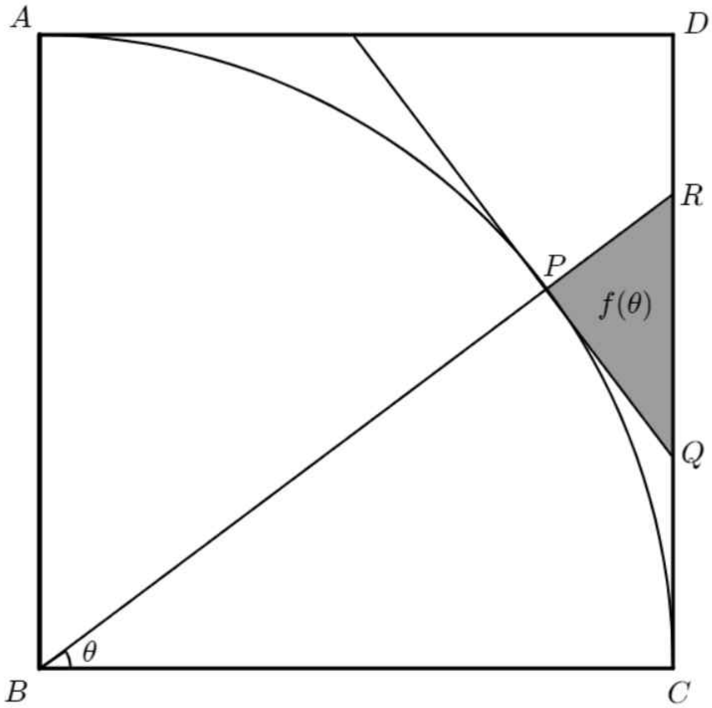
중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$이고 반지름의 길이가 3인 부채꼴 BCA가

있다. 호 AC위의 점 P에서의 접선이 선분 CD와 만나는 점을

Q, 선분 BP의 연장선이 선분 CD와 만나는 점을 R라 하자.

$\angle PBC = \theta$일 때, 삼각형 PQR의 넓이를 $f(\theta)$라 하자.

$\lim_{\theta \to 0+} \frac{16f(\theta)}{\theta^3}$의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$)



예제 #1 해설)

선분 BQ를 긋자. 이때, $\angle PQC = \dfrac{\theta}{2}$이다.

$\overline{PQ} = \overline{CQ} = \overline{BC} \times \tan\dfrac{\theta}{2} = 3\tan\dfrac{\theta}{2}$,

한편, 삼각형 RBC와 삼각형 RQP는 닮음이다. ($\because RHA$ 닮음)
따라서 $\angle RQP = \theta$,

$\overline{PR} = \overline{PQ} \times \tan\theta = 3\tan\dfrac{\theta}{2} \cdot \tan\theta$,

$f(\theta) = \dfrac{9}{2}\tan^2\dfrac{\theta}{2} \cdot \tan\theta$,

$\lim\limits_{\theta \to 0+} f(\theta) = \lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{9}{2} \cdot \dfrac{\theta^2}{4} \cdot \theta = \lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{9\theta^3}{8}$ ($\because$근사정리)

$$\therefore \lim_{\theta \to 0+} \frac{16 f(\theta)}{\theta^3} = \lim_{\theta \to 0+} 16 \times \frac{9\theta^3}{8} \times \frac{1}{\theta^3} = 18$$