

<수학(상) 중간고사>

객관식 15문항[61점], 서술형 6문항[39점]

1. $\frac{1}{i} = i^n$ 일 때, n 으로 적당한 것은?

[3.2점]

2. $a + b = 4, a^2 + b^2 = 12$ 일 때, $a^3 + b^3$ 은?
[3.3점]

3. $(i + i^2) + (i^2 + i^3) + \dots + (i^{2020} + i^{2021})$
 $= a + bi$ 일 때, $a + 2b$ 는? [3.4점]

4. 이차 이상의 다항식 $f(x)$ 를 $2x - 2$ 로 나눈 나머지는 4이고, $f(x)$ 를 $x - 3$ 으로 나눈 나머지는 2이다. $f(x)$ 를 $(x - 1)(x - 3)$ 으로 나눈 나머지는 $ax + b$ 이다. $2a + b$ 는? [3.6점]

5. 이차방정식 $x^2 + 4x + a - 3 = 0$ 의 근 중에서 적어도 한 근이 -3 과 3 사이에 존재하도록 하는 모든 정수 a 값의 합은? [3.7점]

7. 방정식 $x^6 = 1$ 의 한 허근을 w 라 하자. 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? [3.9점]
(단, \bar{w} 는 w 의 켤레 복소수)

$1 + w + w^2 + \dots + w^{2021} = 0$

$w^2 + w^4 = -1$

$w^3 - \bar{w}^3 = 0$

6. 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 이라 하자. $\frac{1}{\alpha\beta}, \frac{1}{\beta\gamma}, \frac{1}{\gamma\alpha}$ 를 세 근으로 하는 방정식이 $x^3 - x^2 + 3x - 1 = 0$ 이다. 이때, $a + 2b + 3c$ 의 값은? [3.8점]

8. 이차함수 $y = x^2 + ax + b$ 가 $y = 2|x| + x$ 와 두 점에서 접할 때, $3a + b$ 는? [4.1점]

9. 연립방정식 $\begin{cases} x+2y+3z = \sqrt{3} \\ x^2+4y^2+9z^2 = 1 \end{cases}$ 을 만족
 하는 x, y, z 에 대해 $\sqrt{3}(5x+4y+3z)$ 는?
 [4.3점]

11. x 에 대한 방정식 $x^2+2(a-2)x-1=0$
 의 두 근을 α, β , $x^2+ax+b=0$ 의 두 근을
 α, γ 이라 하자. $2\alpha = \beta - \gamma$ 일 때, $2a-b$ 의
 최댓값은 M 이다. $9M$ 의 값은? [4.5점]

10. 복소수 α, β, γ 이 $\alpha + \beta + \gamma = 4 + i$ 를 만
 족하고, $\alpha\bar{\alpha} = \beta\bar{\beta} = \gamma\bar{\gamma} = 1$ 을 만족한다.
 이때, $\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta + \beta\bar{\gamma} + \bar{\beta}\gamma + \gamma\bar{\alpha} + \bar{\gamma}\alpha$ 의 값은?
 [4.2점]

12. 다항식 $f(x)$ 를 $(x-2)^2(x-3)$ 으로 나
 눈 나머지는 $3x^2-5x+1$ 이며, $f(x)$ 를
 $(x-1)^2(x-3)$ 으로 나눈 나머지는
 x^2+4x+2 이다. $f(x)$ 를 $(x-1)^2(x-2)$ 로
 나눈 나머지를 $R(x)$ 라 할 때, $R(-1)$ 은?
 [4.7점]

13. 이차식 $f(x) = x^2 + 3x + 4$ 와 서로 다른 두 수 a, b 가 $f(a) = b, f(b) = a$ 를 만족한다. 이때, x 에 대한 방정식 $(x-a)(x-b) = n$ 이 실근을 갖도록 하는 자연수 n 의 최솟값은? [4.6점]

15. $(1+x)^{300} = a_0 + a_1x + \dots + a_{300}x^{300}$ 이라 할 때, $a_2 + a_5 + \dots + a_{299}$ 의 값은 k 이다. 이 때, $3k$ 의 일의 자리수는? [4.9점]

14. $f(x) = x^2 + 2x + a$ 에 대해 방정식 $f(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖고, $f(x^2 + 2x + a) = 0$ 이 중근 b 를 갖는다. 이 때, 모든 a 값의 합을 α 라 하면, $\alpha + b$ 는? [4.8점]

<서술형 문제>

1. $a \leq 0$ 일 때, x 에 대한 이차방정식 $ax^2 - 25 = 0$ 이 실수해를 가지지 않음을 보이시오. [4점]

2. 복소수 $a+bi$ ($a \neq 0, b \neq 0$)이 삼차방정식 $x^3 + px + q = 0$ 의 한 근일 때, p 와 q 의 관계식을 a, b 중 a 만 사용하여 나타내고, 그 과정을 서술하시오. (p, q 는 실수)[6점]

4. $a \leq x \leq a+1$ 에서 $f(x) = x^2 - 4x + a + 2$ 의 최솟값이 20일 때, a 값을 모두 구하고, 그 과정을 서술하시오. [6점]

3. 복소수 w 에 대해 $\frac{w^2}{1+w}$ 와 $\frac{w}{1+w^2}$ 가 모두 실수일 때, 최고차항의 계수가 1이고 계수가 모두 실수이고 한 근이 $w + 2\bar{w} - 1$ 인 x 에 대한 이차방정식을 작성하고, 그 과정을 서술하시오. [7점]
(단, \bar{w} 는 w 의 켈레복소수)

5. x, y 에 대한 연립이차방정식
$$\begin{cases} x^2 - xy + 2y^2 = 1 \\ x^2 + xy + 4y^2 = k \end{cases}$$
가 오직 서로 다른 두 쌍의 해를 가질 때, 모든 실수 k 값의 합은 p 이다. $7p$ 의 값을 구하고, 그 과정을 서술하시오. [8점]

6. $f(a, b, c) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ 에 대해 물음에 답하시오. [8점]

(1) $f(a, b, c) = 0$ 일 때, 세 변의 길이가 $a + b, b + c, c + a$ 인 삼각형의 모양을 결정하고 과정을 서술하시오. [3점]

(2) 서로 다른 세 복소수 a, b, c 가 $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$ 를 만족할 때, $\frac{f(a, b, c)}{abc}$ 의 값을 구하고, 그 과정을 서술하시오. [5점]