21. 함수 $f(x)=x^4-3x^3+x^2+1$ 에 대하여 집합

$$A=\{a \mid |x-a| \le k \text{이면 } f(x) \ge f(a) \text{이다.}\}$$

의 원소의 개수가 2가 되도록 하는 k의 최댓값은? [4점]

[2016수능 대비 포카칩 직전 모의평가 수학 A형]

$a-k \le x \le a+k$인 임의의 실수 x에 대해 $f(x) \ge f(a)$

-> $f(x)$가 $x=a$에서 <u>극솟값을 갖는다</u>는 걸 의미한다!!

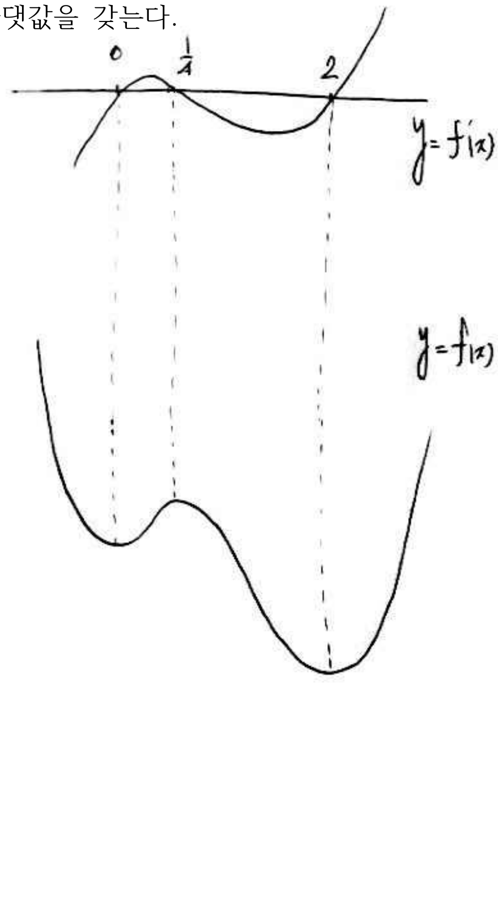
※참고: 고등학교 교과서에서는 극솟값을 다음과 같이 정의한다.

적당히 작은 양수 h에 대해 $\forall x \in (a-h, a+h)$ $f(x) \ge f(a)$일 때 함수 f는 $x=a$에서 극솟값을 가진다.

위 조건을 만족하는 a는 함수 $f(x)$의 극소점임을 알 수 있다.

도함수 $f'(x)=4x^3-9x^2+2x=x(4x-1)(x-2)$
따라서 $f(x)$는 $x=0, x=2$에서 극솟값을, $x=\dfrac{1}{4}$에서 극댓값을 갖는다.

함수 $y=f'(x)$와 $y=f(x)$의 개형은 오른쪽과 같다.



$f(0)>f(2)$이므로
함수 $f(2)$는 함수 $f(x)$의 최솟값이다.

따라서 임의의 k에 대해 $2 \in A$

즉, $0 \in A$를 만족하는 k의 최댓값을 구하면 충분하다.

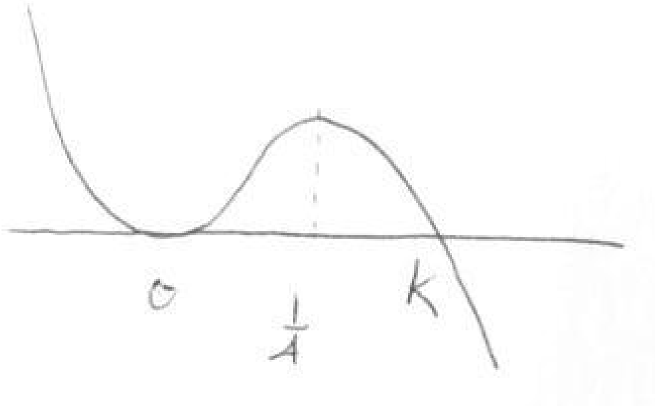
고난도 우수문항 해설 by 土美(Tommy)
2016수능 대비 포카칩 오프라인 모의평가 수학 A형

다음 그림과 같이 $\forall\, t \in (0, k)\ f(t) \geq f(0)$를 만족하는 값이 양수 k의 범위이다.

$\therefore t^4 - 3t^3 + t^2 \geq 0$이려면

$$0 \leq t \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2} \text{ or } t \geq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

이 범위에 포함되기 위한 k의 최댓값은 $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$이다.



30. 자연수 n과 어떤 실수 x에 대하여

$$\begin{cases} 2^{n-a}-x=0 \\ \log_2 x \le a \le 2^x \end{cases}$$

를 만족시키는 자연수 a의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $f(2)\times f(12)\times f(19)$의 값을 구하시오. [4점]

I) 문제 조건문의 분석

첫 번째 식에서 $x=2^{n-a}$라고 아예 값을 박아주었고, 두 번째 식에서 $\log_2 x$를 활용한 식이 나온다.

즉, x라는 문자는 큰 의미를 지니는 것이 아니고, 우리의 주 관심사는 a이므로 x에 실제 값인 2^{n-a}를 넣어주자.

$$n-a \le a \le 2^{2^{n-a}}$$

1) 좌변과 중변에서 $2a \ge n$

2) 중변과 우변에서 $\log_2 a \le 2^{n-a}$ (양변에 로그 씌워줌)

이를 만족하는 a의 범위를 n에 따라 구해주면 충분하다!!

$n=2$일 때

$\log_2 x = 2-a$ 이므로 $2-a \le a \le 2^{2^{2-a}}$

이를 만족하는 자연수 a는 $a=1, 2$ 두개이다. -> $f(2)=2$

$(a=3$이면 $2^{2^{2-3}}=2^{\frac{1}{2}}<3)$

고난도 우수문항 해설 by 土美(Tommy)
2016수능 대비 포카칩 오프라인 모의평가 수학 A형

$n \geq 3$일 경우를 생각해보자.

$n-a \leq a \leq 2^{2^{n-a}}$

1) 좌변과 중변에서 $2a \geq n$
2) 중변과 우변에서 $\log_2 a \leq 2^{n-a}$

따라서 이 두 식을 만족하는 a의 범위는, 방정식 $f_n(t) = 2^{n-t} - \log_2 t = 0$의 근 α_n에 대해

$\lceil \frac{n}{2} \rceil \leq a \leq [\alpha_n]$ 이다. (단, $\lceil x \rceil$는 x보다 작지 않은 최소의 정수이다.)

$n = 12$일 때, $f_{12}(10) = 4 - \log_2 10 > 0 > f_{12}(11) = 2 - \log_2 11$이므로 $10 < \alpha_{12} < 11$
$\therefore 6 \leq a \leq 10$으로 $f(12) = 5$

$n = 19$일 때, $f_{19}(16) = 2^3 - \log_2 16 > 0 > f_{19}(17) = 2^2 - \log_2 17$이므로 $16 < \alpha_{19} < 17$
$\therefore 10 \leq a \leq 16$으로 $f(19) = 7$