2025 이동훈 기출 https://atom.ac/books/11758/
오르비 https://orbi.kr/

$\sqrt[3]{24}\times 3^{\frac{2}{3}}$의 값은? [2점][1](2024-확률과통계1/미적분1/기하1)

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

함수 $f(x)=2x^3-5x^2+3$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$의 값은? [2점][2](2024-확률과통계2/미적분2/기하2)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$인 θ에 대하여 $\sin(-\theta)=\frac{1}{3}$일 때, $\tan\theta$의 값은? [3점][3](2024-확률과통계3/미적분3/기하3)

① $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{4}$

함수

$$f(x)=\begin{cases}3x-a & (x<2)\\ x^2+a & (x\geq 2)\end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점][4](2024-확률과통계4/미적분4/기하4)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

다항함수 $f(x)$가

$$f'(x)=3x(x-2),\ f(1)=6$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [3점][5](2024-확률과통계5/미적분5/기하5)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$S_4-S_2=3a_4,\ a_5=\frac{3}{4}$$

일 때, a_1+a_2의 값은? [3점][6](2024-확률과통계6/미적분6/기하6)

① 27 ② 24 ③ 21 ④ 18 ⑤ 15

함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2-12x+4$가 $x=\alpha$에서 극대이고 $x=\beta$에서 극소일 때, $\beta-\alpha$의 값은? (단, α와 β는 상수이다.) [3점][7](2024-확률과통계7/미적분7/기하7)

① -4 ② -1 ③ 2 ④ 5 ⑤ 8

삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$xf(x)-f(x)=3x^4-3x$

를 만족시킬 때, $\int_{-2}^{2} f(x)dx$의 값은? [3점][8](2024-확률과통계8/미적분8/기하8)

① 12 ② 16 ③ 20 ④ 24 ⑤ 28

수직선 위의 두 점 $\mathrm{P}(\log_5 3)$, $\mathrm{Q}(\log_5 12)$에 대하여 선분 PQ를 $m:(1-m)$으로 내분하는 점의 좌표가 1일 때, 4^m의 값은? (단, m은 $0<m<1$인 상수이다.) [4점][9](2024-확률과통계9/미적분9/기하9)

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t\geq 0)$에서의 속도가 각각

$v_1(t)=t^2-6t+5$, $v_2(t)=2t-7$

이다. 시각 t에서의 두 점 P, Q 사이의 거리를 $f(t)$라 할 때, 함수 $f(t)$는 구간 $[0,\ a]$에서 증가하고, 구간 $[a,\ b]$에서 감소하고, 구간 $[b,\ \infty)$에서 증가한다. 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 Q가 움직인 거리는? (단, $0<a<b$) [4점][10](2024-확률과통계10/미적분10/기하10)

① $\frac{15}{2}$ ② $\frac{17}{2}$ ③ $\frac{19}{2}$ ④ $\frac{21}{2}$ ⑤ $\frac{23}{2}$

공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$|a_6|=a_8$, $\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{a_k a_{k+1}}=\frac{5}{96}$

일 때, $\sum_{k=1}^{15} a_k$의 값은? [4점][11](2024-확률과통계11/미적분11/기하11)

① 60 ② 65 ③ 70 ④ 75 ⑤ 80

함수 $f(x)=\dfrac{1}{9}x(x-6)(x-9)$와 실수 $t(0<t<6)$에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<t) \\ -(x-t)+f(t) & (x \geq t) \end{cases}$$

이다. 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이의 최댓값은? [4점][12](2024-확률과통계12/미적분12/기하12)

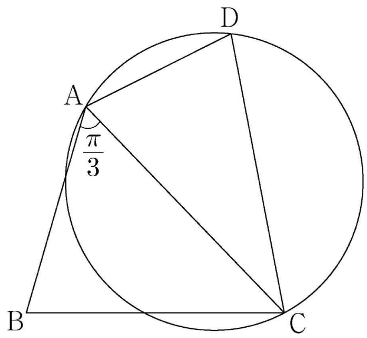
① $\dfrac{125}{4}$ ② $\dfrac{127}{4}$ ③ $\dfrac{129}{4}$ ④ $\dfrac{131}{4}$ ⑤ $\dfrac{133}{4}$

그림과 같이

$\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{13}$, $\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{CD}}=9$, $\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\pi}{3}$

인 사각형 ABCD가 있다. 삼각형 ABC의 넓이를 S_1, 삼각형 ACD의 넓이를 S_2라 하고, 삼각형 ACD의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하자.

$S_2=\dfrac{5}{6}S_1$일 때, $\dfrac{R}{\sin(\angle\mathrm{ADC})}$의 값은? [4점][13](2024-확률과통계13/미적분13/기하13)



① $\dfrac{54}{25}$ ② $\dfrac{117}{50}$ ③ $\dfrac{63}{25}$ ④ $\dfrac{27}{10}$ ⑤ $\dfrac{72}{25}$

두 자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} 2x^3-6x+1 & (x \leq 2) \\ a(x-2)(x-b)+9 & (x>2) \end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자.

$$g(k)+\lim_{t\to k-}g(t)+\lim_{t\to k+}g(t)=9$$

를 만족시키는 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 두 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$에 대하여 $a+b$의 최댓값은? [4점][14](2024-확률과통계14/미적분14/기하14)

① 51 ② 52 ③ 53 ④ 54 ⑤ 55

2025 이동훈 기출 https://atom.ac/books/11758/
오르비 https://orbi.kr/

첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} 2^{a_n} & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \dfrac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_6+a_7=3$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점][15](2024-확률과통계15/미적분15/기하15)

① 139 ② 146 ③ 153 ④ 160 ⑤ 167

방정식 $3^{x-8}=\left(\dfrac{1}{27}\right)^x$을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점][16](2024-확률과통계16/미적분16/기하16)

함수 $f(x)=(x+1)(x^2+3)$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오. [3점][17](2024-확률과통계17/미적분17/기하17)

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(2b_k-1),\ \sum_{k=1}^{10}(3a_k+b_k)=33$$

일 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}b_k$의 값을 구하시오. [3점][18](2024-확률과통계18/미적분18/기하18)

함수 $f(x)=\sin\dfrac{\pi}{4}x$라 할 때, $0<x<16$에서 부등식

$$f(2+x)f(2-x)<\frac{1}{4}$$

을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오. [3점][19](2024-확률과통계19/미적분19/기하19)

$a>\sqrt{2}$ 인 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$f(x)=-x^3+ax^2+2x$

라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$에서의 접선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중 O가 아닌 점을 A라 하고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선이 x축과 만나는 점을 B라 하자. 점 A가 선분 OB를 지름으로 하는 원 위의 점일 때, $\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{AB}}$의 값을 구하시오. [4점][20](2024-확률과통계20/미적분20/기하20)

양수 a에 대하여 $x\geq -1$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+6x & (-1\leq x<6)\\ a\log_4(x-5) & (x\geq 6)\end{cases}$$

이다. $t\geq 0$인 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t-1,\ t+1]$에서의 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 구간 $[0,\ \infty)$에서 함수 $g(t)$의 최솟값이 5가 되도록 하는 양수 a의 최솟값을 구하시오. [4점][21](2024-확률과통계21/미적분21/기하21)

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

함수 $f(x)$에 대하여

$f(k-1)f(k+1)<0$

을 만족시키는 정수 k는 존재하지 않는다.

$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$, $f'\left(\frac{1}{4}\right)<0$일 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점][22](2024-확률과통계22/미적분22/기하22)

2025 이동훈 기출 https://atom.ac/books/11758/
오르비 https://orbi.kr/

5개의 문자 x, x, y, y, z를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점][23](2024-확률과통계23)

① 10 ② 20 ③ 30 ④ 40 ⑤ 50

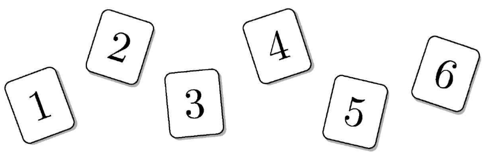
두 사건 A, B는 서로 독립이고

$\mathrm{P}(A \cap B) = \dfrac{1}{4}$, $\mathrm{P}(A^C) = 2\mathrm{P}(A)$

일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은? (단, A^C는 A의 여사건이다.) [3점][24](2024-확률과통계24)

① $\dfrac{3}{8}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{5}{8}$ ④ $\dfrac{3}{4}$ ⑤ $\dfrac{7}{8}$

숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 이 6장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열할 때, 양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수의 합이 10 이하가 되도록 카드가 놓일 확률은? [3점][25](2024-확률과통계25)



① $\dfrac{8}{15}$ ② $\dfrac{19}{30}$ ③ $\dfrac{11}{15}$ ④ $\dfrac{5}{6}$ ⑤ $\dfrac{14}{15}$

4개의 동전을 동시에 던져서 앞면이 나오는 동전의 개수를 확률변수 X라 하고, 이산확률변수 Y를

$$Y = \begin{cases} X & (X\text{가 } 0 \text{ 또는 } 1\text{의 값을 가지는 경우}) \\ 2 & (X\text{가 } 2 \text{ 이상의 값을 가지는 경우}) \end{cases}$$

라 하자. $\mathrm{E}(Y)$의 값은? [3점][26](2024-확률과통계26)

① $\dfrac{25}{16}$ ② $\dfrac{13}{8}$ ③ $\dfrac{27}{16}$ ④ $\dfrac{7}{4}$ ⑤ $\dfrac{29}{16}$

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 5^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 49인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균이 $\overline{x}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $a \le m \le \dfrac{6}{5}a$이다. $\overline{x}$의 값은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96) = 0.95$로 계산한다.) [3점][27](2024-확률과통계27)

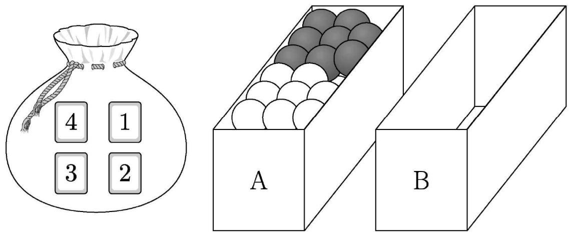
① 15.2 ② 15.4 ③ 15.6 ④ 15.8 ⑤ 16.0

2025 이동훈 기출 https://atom.ac/books/11758/
오르비 https://orbi.kr/

하나의 주머니와 두 상자 A, B가 있다. 주머니에는 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적힌 4장의 카드가 들어 있고, 상자 A에는 흰 공과 검은 공이 각각 8개 이상 들어 있고, 상자 B는 비어 있다. 이 주머니와 두 상자 A, B를 사용하여 다음 시행을 한다.

주머니에서 임의로 한 장의 카드를 꺼내어
카드에 적힌 수를 확인한 후 다시 주머니에 넣는다.
확인한 수가 1이면
상자 A에 있는 흰 공 1개를 상자 B에 넣고,
확인한 수가 2 또는 3이면
상자 A에 있는 흰 공 1개와 검은 공 1개를 상자 B에 넣고,
확인한 수가 4이면
상자 A에 있는 흰 공 2개와 검은 공 1개를 상자 B에 넣는다.

이 시행을 4번 반복한 후 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 8일 때, 상자 B에 들어 있는 검은 공의 개수가 2일 확률은? [4점][28](2024-확률과통계28)



① $\frac{3}{70}$ ② $\frac{2}{35}$ ③ $\frac{1}{14}$ ④ $\frac{3}{35}$ ⑤ $\frac{1}{10}$

다음 조건을 만족시키는 6 이하의 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수를 구하시오. [4점][29](2024-확률과통계29)

$a \leq c \leq d$이고 $b \leq c \leq d$이다.

양수 t에 대하여 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(1,\ t^2)$을 따른다.

$$\mathrm{P}(X \leq 5t) \geq \frac{1}{2}$$

이 되도록 하는 모든 양수 t에 대하여

$\mathrm{P}(t^2 - t + 1 \leq X \leq t^2 + t + 1)$의 최댓값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 값을 k라 하자.

$1000 \times k$의 값을 구하시오. [4점][30](2024-확률과통계30)

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.6	0.226
0.8	0.288
1.0	0.341
1.2	0.385
1.4	0.419

$\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+3x)}{\ln(1+5x)}$의 값은? [2점][31](2024-미적분23)

① $\dfrac{1}{5}$ ② $\dfrac{2}{5}$ ③ $\dfrac{3}{5}$ ④ $\dfrac{4}{5}$ ⑤ 1

매개변수 $t(t>0)$으로 나타내어진 곡선

$x = \ln(t^3+1),\ y = \sin\pi t$

에서 $t=1$일 때, $\dfrac{dy}{dx}$의 값은? [3점][32](2024-미적분24)

① $-\dfrac{1}{3}\pi$ ② $-\dfrac{2}{3}\pi$ ③ $-\pi$ ④ $-\dfrac{4}{3}\pi$ ⑤ $-\dfrac{5}{3}\pi$

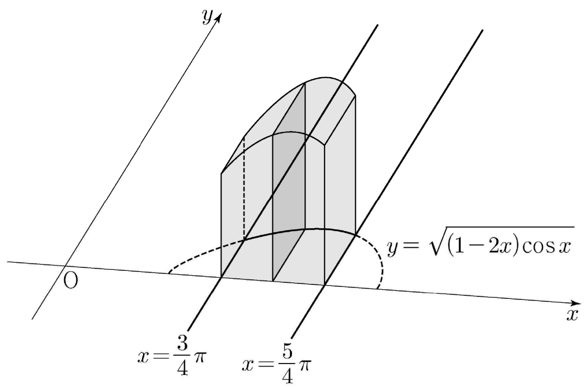
양의 실수 전체의 집합에서 정의되고 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 있다. $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이고, $g'(x)$는 양의 실수 전체의 집합에서 연속이다.
모든 양수 a에 대하여

$$\int_1^a \frac{1}{g'(f(x))f(x)}dx = 2\ln a + \ln(a+1) - \ln 2$$

이고 $f(1)=8$일 때, $f(2)$의 값은? [3점][33](2024-미적분25)

① 36 ② 40 ③ 44 ④ 48 ⑤ 52

그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{(1-2x)\cos x}$ $\left(\dfrac{3}{4}\pi \le x \le \dfrac{5}{4}\pi\right)$와 x축 및 두 직선 $x=\dfrac{3}{4}\pi$, $x=\dfrac{5}{4}\pi$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모든 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점][34](2024-미적분26)



① $\sqrt{2}\pi-\sqrt{2}$ ② $\sqrt{2}\pi-1$ ③ $2\sqrt{2}\pi-\sqrt{2}$
④ $2\sqrt{2}\pi-1$ ⑤ $2\sqrt{2}\pi$

실수 t에 대하여 원점을 지나고 곡선 $y=\frac{1}{e^x}+e^t$에 접하는 직선의 기울기를 $f(t)$라 하자. $f(a)=-e\sqrt{e}$를 만족시키는 상수 a에 대하여 $f'(a)$의 값은? [3점][35](2024-미적분27)

① $-\frac{1}{3}e\sqrt{e}$ ② $-\frac{1}{2}e\sqrt{e}$ ③ $-\frac{2}{3}e\sqrt{e}$

④ $-\frac{5}{6}e\sqrt{e}$ ⑤ $-e\sqrt{e}$

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이고, $x<0$일 때 $f(x)=-4xe^{4x^2}$이다.
모든 양수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수는 2이고, 이 방정식의 두 실근 중 작은 값을 $g(t)$, 큰 값을 $h(t)$라 하자.
두 함수 $g(t)$, $h(t)$는 모든 양수 t에 대하여
$2g(t)+h(t)=k$ (k는 상수)
를 만족시킨다. $\int_0^7 f(x)dx=e^4-1$일 때, $\frac{f(9)}{f(8)}$의 값은? [4점][36](2024-미적분28)

① $\frac{3}{2}e^5$ ② $\frac{4}{3}e^7$ ③ $\frac{5}{4}e^9$ ④ $\frac{6}{5}e^{11}$ ⑤ $\frac{7}{6}e^{13}$

첫째항과 공비가 각각 0이 아닌 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 각각 수렴하고

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right)\times\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n\right),$$

$$3\times\sum_{n=1}^{\infty}|a_{2n}|=7\times\sum_{n=1}^{\infty}|a_{3n}|$$

이 성립한다.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{2n-1}+b_{3n+1}}{b_n}=S$일 때, $120S$의 값을 구하시오. [4점][37](2024-미적분29)

2025 이동훈 기출 https://atom.ac/books/11758/
오르비 https://orbi.kr/

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$f'(x)=|\sin x|\cos x$

이다. 양수 a에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 하자. 함수

$$h(x)=\int_0^x \{f(t)-g(t)\}dt$$

가 $x=a$에서 극대 또는 극소가 되도록 하는 모든 양수 a를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자.

$\frac{100}{\pi}\times(a_6-a_2)$의 값을 구하시오. [4점][38](2024-미적분30)

2025 이동훈 기출 https://atom.ac/books/11758/
오르비 https://orbi.kr/

좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(a,\ -2,\ 6)$, $\mathrm{B}(9,\ 2,\ b)$에 대하여 선분 AB의 중점의 좌표가 $(4,\ 0,\ 7)$일 때, $a+b$의 값은? [2점][39](2024-기하23)

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{6}=1$ 위의 점 $(\sqrt{3},\ -2)$에서의 접선의 기울기는? (단, a는 양수이다.) [3점][40](2024-기하24)

① $\sqrt{3}$ ② $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ④ $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

$|\vec{a}|=\sqrt{11}$, $|\vec{b}|=3$, $|2\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{17}$

일 때, $|\vec{a}-\vec{b}|$의 값은? [3점][41](2024-기하25)

① $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\sqrt{2}$ ③ $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

좌표공간에 평면 α가 있다. 평면 α 위에 있지 않은 서로 다른 두 점 A, B의 평면 α 위로의 정사영을 각각 A′, B′이라 할 때,

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{A'B'}}=6$

이다. 선분 AB의 중점 M의 평면 α 위로의 정사영을 M′이라 할 때,

$\overline{\mathrm{PM'}}\perp\overline{\mathrm{A'B'}}$, $\overline{\mathrm{PM'}}=6$

이 되도록 평면 α 위에 점 P를 잡는다.

삼각형 A′B′P의 평면 ABP 위로의 정사영의 넓이가 $\dfrac{9}{2}$일 때, 선분 PM의 길이는? [3점][42](2024-기하26)

① 12 ② 15 ③ 18 ④ 21 ⑤ 24

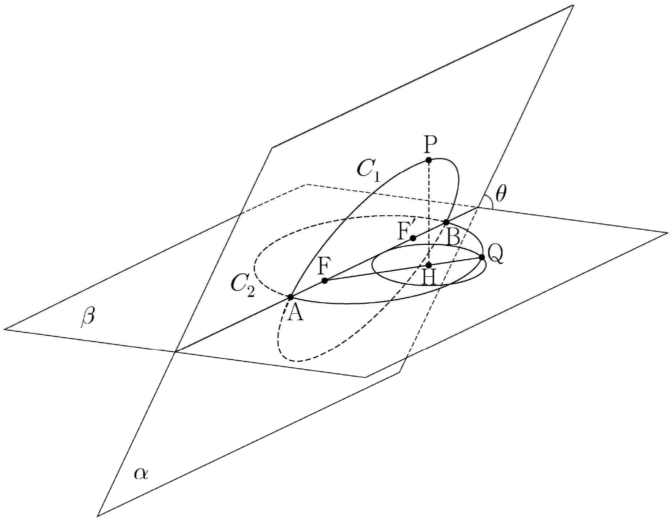
초점이 F인 포물선 $y^2=8x$ 위의 한 점 A에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 B라 하고, 직선 BF와 포물선이 만나는 두 점을 각각 C, D라 하자. $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{CD}}$일 때, 삼각형 ABD의 넓이는? (단, $\overline{\mathrm{CF}}<\overline{\mathrm{DF}}$이고, 점 A는 원점이 아니다.) [3점][43](2024-기하27)

① $100\sqrt{2}$ ② $104\sqrt{2}$ ③ $108\sqrt{2}$ ④ $112\sqrt{2}$ ⑤ $116\sqrt{2}$

2025 이동훈 기출 https://atom.ac/books/11758/
오르비 https://orbi.kr/

그림과 같이 서로 다른 두 평면 α, β의 교선 위에 $\overline{AB}=18$인 두 점 A, B가 있다. 선분 AB를 지름으로 하는 원 C_1이 평면 α 위에 있고, 선분 AB를 장축으로 하고 두 점 F, F$'$을 초점으로 하는 타원 C_2가 평면 β 위에 있다.

원 C_1 위의 한 점 P에서 평면 β에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{HF'}<\overline{HF}$이고 $\angle HFF'=\frac{\pi}{6}$이다. 직선 HF와 타원 C_2가 만나는 점 중 점 H와 가까운 점을 Q라 하면, $\overline{FH}<\overline{FQ}$이다.
점 H를 중심으로 하고 점 Q를 지나는 평면 β 위의 원은 반지름의 길이가 4이고 직선 AB에 접한다. 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? (단, 점 P는 평면 β 위에 있지 않다.) [4점][44](2024-기하28)



① $\frac{2\sqrt{66}}{33}$ ② $\frac{4\sqrt{69}}{69}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ④ $\frac{4\sqrt{3}}{15}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{78}}{39}$

양수 c에 대하여 두 점 F$(c,\ 0)$, F$'(-c,\ 0)$을 초점으로 하고, 주축의 길이가 6인 쌍곡선이 있다. 이 쌍곡선 위에 다음 조건을 만족시키는 서로 다른 두 점 P, Q가 존재하도록 하는 모든 c의 값의 합을 구하시오. [4점][45](2024-기하29)

(가) 점 P는 제1사분면 위에 있고, 점 Q는 직선 PF$'$ 위에 있다.
(나) 삼각형 PF$'$F는 이등변삼각형이다.
(다) 삼각형 PQF의 둘레의 길이는 28이다.

2025 이동훈 기출 https://atom.ac/books/11758/
오르비 https://orbi.kr/

좌표평면에 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC가 있다.
선분 AB를 $1:3$으로 내분하는 점을 D, 선분 BC를 $1:3$으로 내분하는 점을 E, 선분 CA를 $1:3$으로 내분하는 점을 F라 하자. 네 점 P, Q, R, X가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|\overrightarrow{DP}|=|\overrightarrow{EQ}|=|\overrightarrow{FR}|=1$

(나) $\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{QC}+\overrightarrow{RA}$

$|\overrightarrow{AX}|$의 값이 최대일 때, 삼각형 PQR의 넓이를 S라 하자. $16S^2$의 값을 구하시오. [4점][46](2024-기하30)

1) [풀이]

$$\sqrt[3]{24}\times 3^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{2^3\times 3}\times 3^{\frac{2}{3}}$$

$$=2\times 3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}=2\times 3=6$$

답 ①
2) [풀이]

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)=4$$

$(\because f'(x)=6x^2-10x)$

답 ④
3) [풀이]

$\sin(-\theta)=-\sin\theta=\frac{1}{3}$, 즉 $\sin\theta=-\frac{1}{3}$

θ는 제4사분면의 각이므로

$\therefore\ \tan\theta=-\frac{\sqrt{2}}{4}$

답 ②
4) [풀이]

$\lim_{x\to 2-}f(x)=f(2)$, 즉 $6-a=4+a$

$\therefore\ a=1$

답 ①
5) [풀이]

$$f(x)=\int f'(x)dx=x^3-3x^2+C$$

(단, C은 적분상수)

$f(1)=-2+C=6$, $C=8$

$\therefore\ f(2)=4$

답 ④
6) [풀이]

$S_4-S_2=a_4+a_3=3a_4$, $a_4=\frac{1}{2}a_3$

등비수열 $\{a_n\}$의 공비는 $\frac{1}{2}$이다.

$a_5=a_1r^4=\frac{a_1}{16}=\frac{3}{4}$, $a_1=12$

$\therefore\ a_1+a_2=12+6=18$

답 ④
7) [풀이]

$f'(x)=x^2-4x-12=(x-6)(x+2)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-2(=\alpha)$ 또는 $x=6(=\beta)$

$\therefore\ \beta-\alpha=8$

답 ⑤
8) [풀이]

$(x-1)f(x)=3x(x-1)(x^2+x+1)$

양변을 $x-1(\neq 0)$로 나누면

$f(x)=3x(x^2+x+1)=3x^3+3x^2+3x$

(이때, 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $f(1)=9$이다.)

$\therefore \int_{-2}^{2} f(x)dx$

$=\int_{-2}^{2}(3x^3+3x^2+3x)dx$

$=2\int_{0}^{2}3x^2dx$

($\because$ 함수 $y=3x^3+3x$는 원점에 대하여 대칭이고, 함수 $y=3x^2$은 y축에 대하여 대칭이다.)

$=\left[2x^3\right]_0^2$

$=16$

답 ②
9) [풀이]

$\dfrac{(1-m)\log_5 3+m\log_5 12}{m+(1-m)}$

$=(1-m)\log_5 3+m\log_5 3+m\log_5 4$

$=\log_5 3+m\log_5 4=1$

$m\log_5 4=1-\log_5 3=\log_5 \dfrac{5}{3}$

$m=\dfrac{\log_5 \frac{5}{3}}{\log_5 4}=\log_4 \dfrac{5}{3}$

$\therefore\ 4^m=\dfrac{5}{3}$

답 ④
10) [풀이]

시각 $t(t\geq 0)$에서의 두 점 P, Q의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$라고 하자.

$f(t)=\left|x_1(t)-x_2(t)\right|$

$=\left|\int\{v_1(t)-v_2(t)\}dt\right|$

$=\left|\dfrac{1}{3}t^3-4t^2+12t+C\right|$

(단, C는 적분상수)

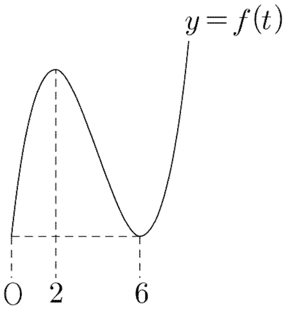
$y=\dfrac{1}{3}t^3-4t^2+12t+C$로 두면

$y'=t^2-8t+12=(t-6)(t-2)$

$y'=0 \Leftrightarrow t=2$ 또는 $t=6$

함수 $f(t)$의 그래프는

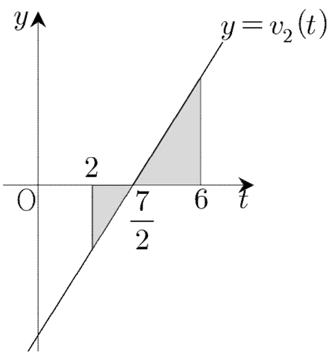
(이때, 삼차함수의 비율관계를 이용하면 편하다.)



(단, $f(0)=f(6)$, $f(0)=C\geq 0$)

위의 그림에서

$a=2$, $b=6$이므로



구하는 거리를 s라고 하면

$\therefore$ $s=$(위의 그림에서 어둡게 색칠한 두 삼각형의 넓이의 합)

$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times3+\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times5$

$=\frac{17}{2}$

답 ②

11) [풀이]

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d(\neq 0)$라고 하자.

$|a_6|=a_8 \Leftrightarrow a_8=\pm a_6$, $a_8\geq 0$

이때, $a_8=a_6$라고 하면 $d=0$이므로 이는 가정에 모순이다.

따라서 $a_8=-a_6$

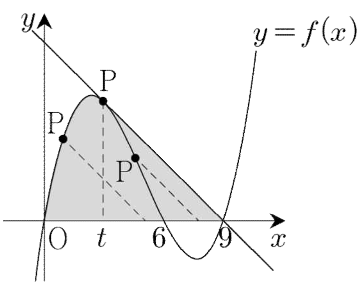
등차중항의 정의에 의하여

$a_6+a_8=2a_7=0$, $a_7=0$

(이때, $a_8>0$, $a_6<0$, $d>0$)

수열 $\{a_n\}$을 나열하면

$-6d(=a_1)$, $-5d$, $-4d$, $-3d$, $-2d$, $-d$, 0, d, $2d$, $\cdots$

$$\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{a_k a_{k+1}}=\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$
$$=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_6}\right)=\frac{5}{a_1 a_6}=\frac{5}{96},$$
$a_1 a_6=96$, 즉 $6d^2=96$, $d=4$
$$\therefore \sum_{k=1}^{15}a_k=\frac{-24\times 2+14\times 4}{2}\times 15$$
$$=60$$
답 ①
12) [풀이]
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$를 P라고 하자.
함수 $g(x)$에 대하여
$x\geq t$일 때, $g(x)=$(기울기가 -1이고 점 P를 지나는 직선)
함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 $S(t)$라고 하자.
함수 $f(x)$의 그래프는


점 P를 움직이면서 $S(t)$의 값의 변화를 관찰하면
위의 그림처럼 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기가 -1일 때, $S(t)$는 최대가 된다.
$$9f'(x)=(x-6)(x-9)+x(x-9)+x(x-6)$$
$$=3x^2-30x+54$$
$f'(x)=-1 \Leftrightarrow x=3$
$\therefore\ S(3)$
$$=\int_0^3\left(\frac{1}{9}x^3-\frac{5}{3}x^2+6x\right)dx+\frac{9-3}{2}\times f(3)$$
$$=\left[\frac{1}{36}x^4-\frac{5}{9}x^3+3x^2\right]_0^3+3\times 6$$
$$=\frac{129}{4}$$
답 ③

[참고]
$$S(t)=\int_0^t f(x)dx+\frac{1}{2}\{f(t)\}^2$$

$S'(t)=f(t)+f(t)f'(t)=f(t)\{1+f'(t)\}$

$S'(t)=0 \Leftrightarrow f'(t)=-1 \ (\because f(t)\neq 0)$

13) [풀이]

$\overline{\mathrm{AC}}=x,\ \overline{\mathrm{AD}}=p,\ \overline{\mathrm{CD}}=q$로 두자.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$(\sqrt{13})^2=3^2+x^2-2\times3\times x\times\cos\frac{\pi}{3}$

$x^2-3x-4=0,\ (x-4)(x+1)=0,$

$x=4$

$S_2=\frac{5}{6}S_1$에서

$\frac{1}{2}\times pq\times\sin(\angle\mathrm{ADC})=\frac{5}{6}\times\frac{1}{2}\times3\times4\times\sin\frac{\pi}{3}$

$\sin(\angle\mathrm{ADC})=\frac{5\sqrt{3}}{9}\ \ (\because pq=9)$

삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{4}{\sin(\angle\mathrm{ADC})}=2R$

$\therefore\ \frac{R}{\sin(\angle\mathrm{ADC})}=\frac{2}{\sin^2(\angle\mathrm{ADC})}=\frac{54}{25}$

답 ①

14) [풀이]

$x<2$일 때,

$f'(x)=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ 또는 $x=-1$

$f(-1)=5$(극대), $f(1)=-3$(극소)

이차함수

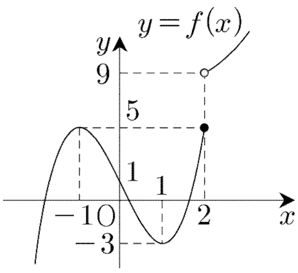
$y=a(x-2)(x-b)+9$

의 대칭축은 $x=\frac{b+2}{2}$이다.

$\frac{b+2}{2}\leq 2(b\leq 2),\ \frac{b+2}{2}>2(b>2)$

인 두 경우로 나누어 생각하자.

(1) $b\leq 2$인 경우 (×)

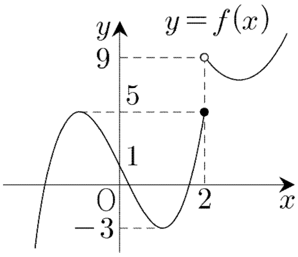


$-3<k<5$이면 문제에서 주어진 등식이 성립한다.

즉, 실수 k의 개수가 1일 수 없다.

(2) $b>2$인 경우

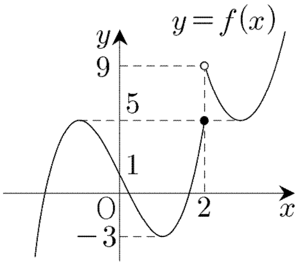
$5<$(꼭짓점의 y좌표)<9 (×)



$-3<k<5$이면 문제에서 주어진 등식이 성립한다.

즉, 실수 k의 개수가 1일 수 없다.

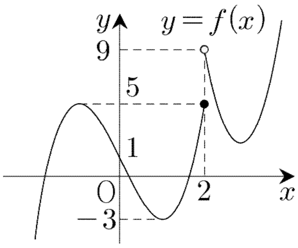
(꼭짓점의 y좌표)$=5$ (×)



$-3<k<5$이면 문제에서 주어진 등식이 성립한다.

즉, 실수 k의 개수가 1일 수 없다.

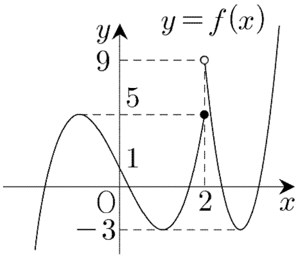
$-3<$(꼭짓점의 y좌표)<5 (×)



$-3<k<$(꼭짓점의 y좌표)이면 문제에서 주어진 등식이 성립한다.

즉, 실수 k의 개수가 1일 수 없다.

(꼭짓점의 y좌표)$=-3$ (○)



t가 $-\infty$에서 ∞까지 변할 때,

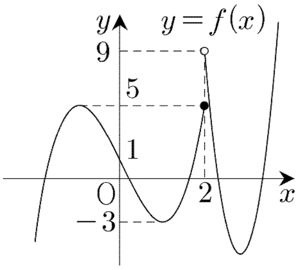
$g(t)$의 값의 변화는

$1,\ 3(t=-3),\ 5,\ 4(t=5),\ 2,\ 1$

$g(k)+\lim_{t\to k-}g(t)+\lim_{t\to k+}g(t)=9$

$\Leftrightarrow k=1$

(꼭짓점의 y좌표)<-3 $(\times)$



t가 $-\infty$에서 ∞까지 변할 때,

$g(t)$의 값의 변화는

$1,\ 2,\ 3,\ 4(t=-3),\ 5,\ 4(t=5),\ 2,\ 1$

(꼭짓점의 y좌표)$<k<-3$이면 문제에서 주어진 등식이 성립한다.

즉, 실수 k의 개수가 1일 수 없다.

이상에서

(꼭짓점의 y좌표)$=-a\dfrac{(b-2)^2}{4}+9=-3$

$a(b-2)^2=48=2^4\times3^1$ (단, $b>2$)

$a=48,\ b=3$ 또는

$a=12,\ b=4$ 또는

$a=3,\ b=6$

따라서 $a+b$의 최댓값은 51이다.

답 ①

15) [풀이]

$a_6+a_7=3=1+2$이므로

$a_6=2,\ a_7=1$ 또는 $a_6=1,\ a_7=2$

(1) $a_6=2,\ a_7=1$인 경우

문제에서 주어진 귀납적 정의를 이용하여

수열 $a_7,\ a_6,\ a_5,\ a_4,\ a_3,\ a_2,\ a_1$을 쓰면

아래 표와 같다.

<table>
<tr><th>a_1</th><th>a_2</th><th>a_3</th><th>a_4</th><th>a_5</th><th>a_6</th><th>a_7</th><th>a_8</th></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">1</td><td rowspan="4">2</td><td rowspan="4">1</td><td rowspan="7">2</td><td rowspan="7">1</td><td rowspan="7">2</td></tr>
<tr><td>4</td></tr>
<tr><td>16</td><td rowspan="2">8</td><td rowspan="2">4</td></tr>
<tr><td>3</td></tr>
<tr><td>64</td><td rowspan="2">32</td><td rowspan="2">16</td><td rowspan="3">8</td><td rowspan="3">4</td></tr>
<tr><td>5</td></tr>
<tr><td>12</td><td>6</td><td>3</td></tr>
</table>

(예를 들어 $a_7=1$에서

$2^{a_6}=1(a_6=0(\times))$, $\frac{1}{2}a_6=1(a_6=2(\bigcirc))$

$a_2=8$에서

$2^{a_1}=8(a_1=3(\bigcirc))$, $\frac{1}{2}a_1=8(a_1=16(\bigcirc))$

와 같이 판단한 것이다.)

(2) $a_6=1$, $a_7=2$인 경우

위의 표에서 $a_7=1$, $a_8=2$일 때,

a_2는 2, 8, 32, 6이므로

$a_6=1$, $a_7=2$일 때,

a_1은 2, 8, 32, 6이다.

(1), (2)에서

구하는 값은

$1+4+16+3+64+5+12$

$+2+8+32+6$

$=153$

답 ③

16) [풀이]

$3^{x-8}=3^{-3x}$, $x-8=-3x$

$\therefore\ x=2$

답 2

17) [풀이]

$f'(x)=x^2+3+(x+1)\times 2x$

$\therefore\ f'(1)=8$

답 8

18) [풀이]

$\sum_{k=1}^{10}a_k=A$, $\sum_{k=1}^{10}b_k=B$로 두면

$A=2B-10$, $3A+B=33$

연립하면

$3(2B-10)+B=33,\ 7B=63$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} b_k = B = 9$$

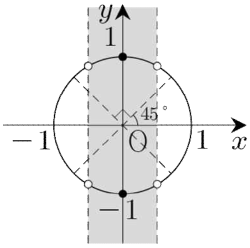
답 9
19) [풀이]

$f(2+x)(2-x)$

$=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}x\right)$

$=\cos^2\frac{\pi}{4}x < \frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < \cos\frac{\pi}{4}x < \frac{1}{2} \qquad \cdots(*)$

단위원을 이용하여 문제를 해결하자.



위의 그림에서

$(*) \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{4}x = 0$

풀면

$x=2,\ 6,\ 10,\ 14$

따라서 구하는 값은

$2+6+10+14=32$

답 32
20) [풀이]

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 O에서의 접선의 방정식은

$y=2x$

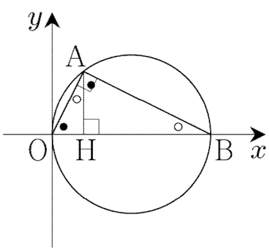
$(\because f'(x)=-3x^2+2ax+2)$

이 직선의 방정식과 함수 $f(x)$의 방정식을 연립하면

$-x^3+ax^2=0,\ -x^2(x-a)=0,$

$x=a,\ \mathrm{A}(a,\ 2a)$

점 A에서 x축의 내린 수선의 발을 H라고 하자.



$\overline{\mathrm{OH}}:\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{AH}}:\overline{\mathrm{HB}}=1:2$

$(\because \triangle \mathrm{AOH} \sim \triangle \mathrm{BAH})$

즉, $a : 2a = 2a : \overline{\mathrm{HB}}$에서 $\overline{\mathrm{HB}} = 4a$

$\mathrm{B}(5a,\ 0)$

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 A에서의 접선

$y = (2 - a^2)(x - a) + 2a$

이 점 $\mathrm{B}(5a,\ 0)$을 지나므로

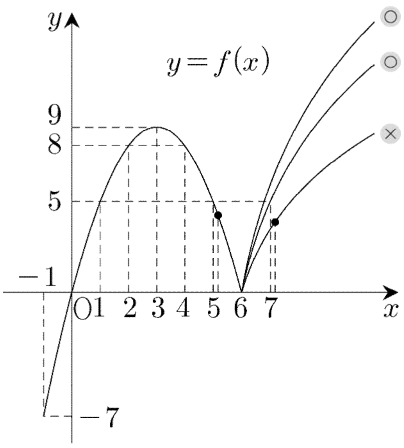
$0 = (2 - a^2)(5a - a) + 2a,\ a = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{OA}} \times \overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{5}\,a \times 2\sqrt{5}\,a = 25$

답 25

21) [풀이]

함수 $f(x)$의 그래프는



만약 $f(7) < 5$이면 위의 그림처럼 아주 작은 양수 h에 대하여

구간 $[5+h,\ 7+h]$에서 $f(x)$의 최댓값은 5 보다 작다.

즉, $g(6+h)$의 값은 5 보다 작다.

$f(7) \geq 5$이면 위의 그림에서 $t \geq 6$일 때, $g(t) \geq 5$이다.

(그리고 $0 \leq t \leq 6$일 때, $g(t) \geq 5$이다.)

$f(7) = a\log_4 2 \geq 5,\ a \geq 10$

따라서 a의 최솟값은 10이다.

답 10

22) [풀이]

삼차함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 양수이고

구간 $\left(-\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{4}\right)$에서 감소하므로 극값을 갖는다.

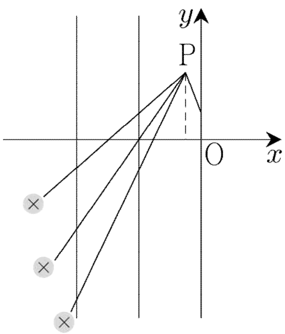
두 점 $\left(-\dfrac{1}{4},\ f\left(-\dfrac{1}{4}\right)\right)$, $\left(\dfrac{1}{4},\ f\left(\dfrac{1}{4}\right)\right)$을 각각 P, Q라 하자.

$f(0) > 0$이라고 가정하자.

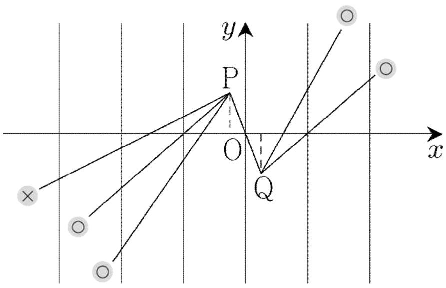
$x \to -\infty$일 때, $f(x) \to -\infty$이므로

사이값 정리에 의하여 곡선 $y = f(x)$는 아래 그림과 같이 x축과 만난다.

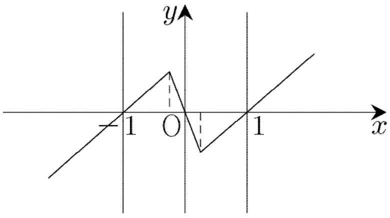
2025 이동훈 기출 https://atom.ac/books/11758/
오르비 https://orbi.kr/
(이때, 절편의 x좌표는 음수(−)이다.)



(단, y축에 평행한 직선들 사이의 거리는 1이다.)
예를 들어 위의 세 경우 모두
$f(-2)f(0)<0$
이므로 문제에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
x절편의 절댓값이 커질 때, 마찬가지의 이유로
$f(k-1)f(k+1)<0$
인 음의 정수 k가 적어도 하나 존재한다.
이는 가정에 모순이다.
그리고 $f(0)<0$도 가정의 모순임을 보일 수 있다.
따라서 $f(0)=0$이다. ($\because$ 귀류법)
이제 $f(x)=x(x-\alpha)(x-\beta)$로 두자.
(단, $\alpha<0$, $\beta>0$)



위의 그림처럼 $\alpha<-1$이면
$f(k-1)f(k+1)<0$
인 음의 정수 k가 적어도 하나 존재한다.
따라서 $-1\le\alpha<-\dfrac{1}{4}$
마찬가지의 방법으로 $\dfrac{1}{4}<\beta\le1$
이때, $f(-1)<0$, $f(1)>0$
(즉, $f(-1)f(1)<0$)
인 경우는 제외해야 한다.
(1) $\alpha=-1$, $\beta=1$인 경우

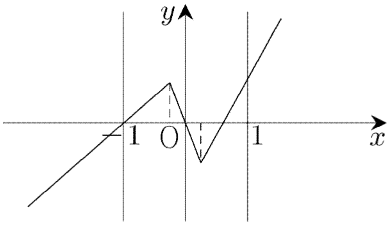


$f(x)=x(x+1)(x-1)=x^3-x$

$f'(x)=3x^2-1$

$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{13}{16}\neq-\frac{1}{4}$ (×)

(2) $\alpha=-1$, $\beta\neq1$인 경우

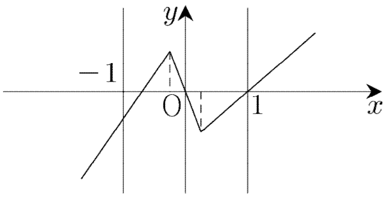


$f(x)=x(x+1)(x-\beta)=(x^2+x)(x-\beta)$

$f'(x)=(2x+1)(x-\beta)+x^2+x$

$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{\beta}{2}-\frac{5}{16}=-\frac{1}{4}$, $\beta=-\frac{1}{8}$ (×)

(3) $\alpha\neq-1$, $\beta=1$인 경우



$f(x)=x(x-\alpha)(x-1)=(x^2-x)(x-\alpha)$

$f'(x)=(2x-1)(x-\alpha)+x^2-x$

$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{2}\alpha+\frac{11}{16}=-\frac{1}{4}$, $\alpha=-\frac{5}{8}$ (○)

$f'\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{5}{8}<0$

$\therefore\ f(8)=8\times\frac{69}{8}\times7=483$

답 483

23) [풀이]

같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$\frac{5!}{2!2!}=30$

답 ③

24) [풀이]

여사건의 확률의 정의에 의하여

$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=2\mathrm{P}(A)$

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{3}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{4}$

$\therefore\ \mathrm{P}(B)=\dfrac{3}{4}$

답 ④

25) [풀이]

6 이하의 서로 다른 두 자연수의 합을 가장 큰 것부터 작은 순으로 써보면

$11(=5+6),\ 10(=6+4),\ \cdots$

양 끝에 5, 6이 올 확률은

(즉, $5\circ\circ\circ\circ6$ 또는 $6\circ\circ\circ\circ5$)

$\dfrac{2!\times4!}{6!}=\dfrac{1}{15}$

따라서 구하는 확률은

$1-\dfrac{1}{15}=\dfrac{14}{15}$

답 ⑤

26) [풀이]

독립시행의 확률에 의하여 다음의 표를 만들 수 있다.

X	0	1	2	3	4	합
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	1

문제에서 주어진 조건에 의하여

Y	0	1	2	합
$\mathrm{P}(Y=y)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{16}$	1

$\therefore\ \mathrm{E}(Y)=0\times\dfrac{1}{16}+1\times\dfrac{1}{4}+2\times\dfrac{11}{16}=\dfrac{13}{8}$

답 ②

27) [풀이]

$\dfrac{6}{5}a-a=2\times1.96\times\dfrac{5}{7},\ a=14$

$14=\overline{x}-1.96\times\dfrac{5}{7}$

$\therefore\ \overline{x}=15.4$

답 ②

28) [풀이]

확인한 수가 1이면 상자 A에서 1개의 공을 꺼내 상자 B에 넣고,

확인한 수가 2, 3이면 상자 A에서 2개의 공을 꺼내 상자 B에 넣고,

확인한 수가 4이면 상자 A에서 3개의 공을 꺼내 상자 B에 넣는다.

다음의 세 경우가 가능하다.

$8=3+2+2+1$ …(경우1)

$=3+3+1+1$ …(경우2)

$=2+2+2+2$ …(경우3)

(경우1): $\dfrac{4!}{2!}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{1}{4}\right)=p$

상자 B에 남는 검은 공의 개수는 3이다.

(경우2): $\dfrac{4!}{2!2!}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\left(\dfrac{1}{4}\right)^2=q$

상자 B에 남는 검은 공의 개수는 2이다.

(경우3): $\left(\dfrac{1}{2}\right)^4=r$

상자 B에 남는 검은 공의 개수는 4이다.

따라서 구하는 확률은

$$\frac{q}{p+q+r}=\frac{3}{35}$$

답 ④

29) [풀이]

다음의 필요충분조건이 성립한다.

$a\le c\le d$이고 $b\le c\le d$이다.

$\Leftrightarrow$ $a<b\le c\le d$(…㉠)

또는 $b<a\le c\le d$(…㉡)

또는 $a=b\le c\le d$(…㉢)

㉠: ${}_6\mathrm{H}_4-{}_6\mathrm{H}_3$

전자는 $a\le b\le c\le d$인 순서쌍의 개수이고, 후자는 $a=b\le c\le d$인 순서쌍의 개수이다.

㉡: ${}_6\mathrm{H}_4-{}_6\mathrm{H}_3$

㉢: ${}_6\mathrm{H}_3$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는

$2\times({}_6\mathrm{H}_4-{}_6\mathrm{H}_3)+{}_6\mathrm{H}_3$

$=2\times{}_6\mathrm{H}_4-{}_6\mathrm{H}_3$

$=2\times{}_9\mathrm{C}_4-{}_8\mathrm{C}_3$

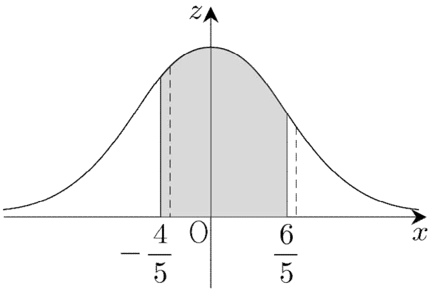
$=252-56=196$

답 196

30) [풀이]

$\mathrm{P}(X \le 5t) \ge \frac{1}{2}$에서 $5t \ge 1$(=평균)이다.

즉, $t \ge \frac{1}{5}$



$Z = \frac{X-1}{t}$로 두면

$\mathrm{P}(t^2 - t + 1 \le X \le t^2 + t + 1)$

$= \mathrm{P}(t-1 \le Z \le t+1)$

$\le \mathrm{P}(-0.8 \le Z \le 1.2)$

(단, 등호는 $t = 0.2$일 때 성립한다.)

($\because$ 위의 그림에서 t가 커지면 넓이가 작아진다.)

$= 0.288 + 0.385 = 0.673$

$\therefore\ 1000 \times k = 673$

답 673

31) [풀이]

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+3x)}{\ln(1+5x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\ln(1+3x)}{3x}}{\frac{\ln(1+5x)}{5x}} \times \frac{3}{5}$$

$$= \frac{1}{1} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$$

답 ③

32) [풀이]

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\pi \cos \pi t}{\frac{3t^2}{t^3+1}}$$

$$\therefore\ \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1} = -\frac{2}{3}\pi$$

답 ②

33) [풀이]

역함수의 정의에 의하여

$g(f(x))=x$

양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(f(x))f'(x)=1$, 즉 $\dfrac{1}{g'(f(x))}=f'(x)$

치환적분법에 의하여

$\displaystyle\int_1^a \frac{1}{g'(f(x))f(x)}dx$

$\displaystyle=\int_1^a \frac{f'(x)}{f(x)}dx$

$=[\ln f(x)]_1^a$

$=\ln f(a)-\ln 8$ ($\because f(1)=8$)

$=2\ln a+\ln(a+1)-\ln 2$

즉, $\ln f(a)=2\ln a+\ln(a+1)+\ln 4$

$a=2$를 대입하면

$\ln f(2)=\ln(2^2\times 3\times 4)=\ln 48$

$\therefore\ f(2)=48$

답 ④

34) [풀이]

부분적분법을 적용하자.

구하는 부피를 V라고 하면

$\displaystyle V=\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}(1-2x)\cos x dx$

$\displaystyle=\left[(1-2x)\sin x\right]_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}-\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}(-2)\sin x dx$

$=2\sqrt{2}\pi-\sqrt{2}-0$

($\because$ 함수 $y=\sin x$는 점 $(\pi,\ 0)$에 대하여 대칭이다.)

$=2\sqrt{2}\pi-\sqrt{2}$

답 ③

35) [풀이]

접점의 x좌표를 s로 두면

$f(t)=-e^{-s}$, $f'(t)=e^{-s}\dfrac{ds}{dt}$

($\because y'=-e^{-x}$)

(이때, s는 t에 대한 함수임을 명심해야 한다.)

접선: $y=-e^{-s}(x-s)+e^{-s}+e^t$

이 직선이 원점을 지나므로

$0=-e^{-s}(0-s)+e^{-s}+e^t$,

$(s+1)e^{-s}+e^{t}=0$ $\cdots$㉠

양변을 t에 대하여 미분하면

$-se^{-s}\dfrac{ds}{dt}+e^{t}=0,\ \dfrac{ds}{dt}=\dfrac{e^{s+t}}{s}$

$f(a)=-e^{-s}=-e^{\frac{3}{2}},\ s=-\dfrac{3}{2}(t=a)$

이를 ㉠에 대입하면

$-\dfrac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}+e^{a}=0,\ e^{a}=\dfrac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}$

$\therefore\ f'(a)=e^{\frac{3}{2}}\times\dfrac{e^{-\frac{3}{2}}\times\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}}$

$=-\dfrac{1}{3}e\sqrt{e}$

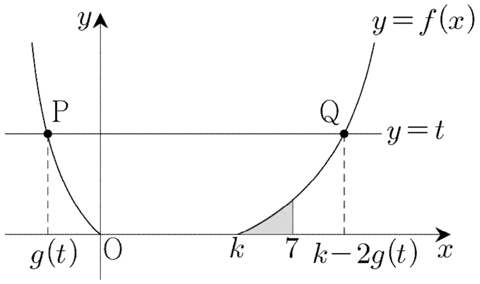
답 ①

36) [풀이]

$h(t)=k-2g(t)$

이므로 아래 그림처럼 두 점 $\mathrm{P}(g(t),\ t)$, $\mathrm{Q}(h(t),\ t)$가 결정된다.

$0\le x\le k$일 때, $f(x)=0$이어야 방정식 $f(x)=t(t>0)$의 서로 다른 실근의 개수는 항상 2이다.



함수 $f(x)$(단, $x\le 0$)의 그래프를

y축에 대하여 대칭이동 ⇨ y축에 대하여 2배

⇨ x축의 방향으로 $k(\ge 0)$만큼 평행이동시키면

함수 $f(x)$(단, $x\ge k$)의 그래프와 일치한다.

즉, $x\ge k$일 때,

$f(x)=-4\left(-\dfrac{x-k}{2}\right)e^{4\times\left(-\frac{x-k}{2}\right)^{2}}$

$=2(x-k)e^{(x-k)^{2}}$

$\displaystyle\int_{0}^{7}f(x)dx=\int_{k}^{7}f(x)dx$

$=\displaystyle\int_{0}^{7-k}2xe^{x^{2}}dx$

$=\left[e^{x^2}\right]_0^{7-k}$

$=e^{(7-k)^2}-1$

$=e^4-1$

$7-k=2$에서 $k=5$

$\therefore \dfrac{f(9)}{f(8)}=\dfrac{2\times4\times e^{4^2}}{2\times3\times e^{3^2}}=\dfrac{4}{3}e^7$

답 ②

37) [풀이]

두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공비를 각각 r_a, r_b라고 하면

$|r_a|<1$, $|r_b|<1$ (단, $r_ar_b\neq0$)

($\because$ 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$가 모두 수렴)

$3\times\sum_{n=1}^{\infty}|a_{2n}|=7\times\sum_{n=1}^{\infty}|a_{3n}|$, 즉

$3\times\dfrac{|a_1r_1|}{1-|r_a|^2}=7\times\dfrac{|a_1r_a^2|}{1-|r_a|^3}$,

$3\times\dfrac{1}{1-|r_a|^2}=7\times\dfrac{|r_a|}{1-|r_a|^3}$,

($\because$ 실수 A에 대하여 $A^2=|A|^2$)

$3\times\dfrac{1}{(1+t)(1-t)}=7\times\dfrac{t}{(1-t)(1+t+t^2)}$

(이때, $t=|r_a|$, $-1<t<0$, $0<t<1$)

$3\times\dfrac{1}{1+t}=7\times\dfrac{t}{1+t+t^2}$

$4t^2+4t-3=0$, $(2t+3)(2t-1)=0$,

$t=\dfrac{1}{2}=|r_a|$

한편

$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right)\times\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n\right)$, 즉

$\dfrac{a_1b_1}{1-r_ar_b}=\dfrac{a_1}{1-r_a}\times\dfrac{b_1}{1-r_b}$, $2r_ar_b=r_a+r_b$

$r_a=\dfrac{1}{2}$이면 r_b는 없다.

$r_a=-\dfrac{1}{2}$이면 $r_b=\dfrac{1}{4}$

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{2n-1}+b_{3n+1}}{b_n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_1\left(\frac{1}{4}\right)^{2n-2}+b_1\left(\frac{1}{4}\right)^{3n}}{b_1\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{4}\right)^{2n+1}\right\}$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}+\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^3}{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}$$

$$=\frac{81}{60}$$

$\therefore\ 120S=162$

답 162

38) [풀이]

곡선 $y=f(x)$가 원점을 지난다고 가정해도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.

모든 정수 n에 대하여

$(2n-2)\pi\le x\le(2n-1)\pi$일 때,

$f'(x)=\sin x\cos x$

$(2n-1)\pi\le x\le 2n\pi$일 때,

$f'(x)=-\sin x\cos x$

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$0\le x\le\pi$일 때,

$f(x)=\frac{1}{2}\sin^2 x\ (\because f(0)=0)$

이때, $f''(x)=\cos^2 x-\sin^2 x$이고,

$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{3}{4}\pi$

$\pi\le x\le 2\pi$일 때,

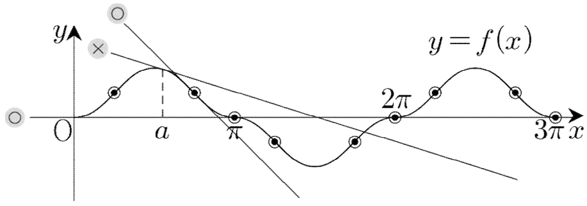
$f(x)=-\frac{1}{2}\sin^2 x\ (\because f(\pi)=0)$

이때, $f''(x)=-\cos^2 x+\sin^2 x$이고,

$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{5}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$

$\vdots$

함수 $f(x)$의 그래프는



(단, ◉는 변곡점이다.)

$h'(x) = f(x) - g(x)$이므로

위의 그림처럼 a가 변곡점의 x좌표가 아니면

$x = a$에서 함수 $h(x)$는 극값을 가진다.

왜냐하면 $x = a$의 좌우에서 $h'(x)$의 부호 변화가 없기 때문이다.

따라서 수열 $\{a_n\}$을 쓰면

$(\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi,\ \pi),\ (\frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi,\ 2\pi),\ \cdots$

$\therefore\ \frac{100}{\pi} \times (a_6 - a_2)$

$= \frac{100}{\pi} \times \frac{5}{4}\pi = 125$

답 125

39) [풀이]

$\frac{a+9}{2} = 4,\ \frac{6+b}{2} = 7$

$a = -1,\ b = 8$

$\therefore\ a + b = 7$

답 ④

40) [풀이]

점 $(\sqrt{3},\ -2)$가 타원 위에 있으므로

$\frac{(\sqrt{3})^2}{a^2} + \frac{(-2)^2}{6} = 1,\ a^2 = 9,\ a = 3$

접선의 방정식은

$\frac{\sqrt{3} \times x}{9} + \frac{-2 \times y}{6} = 1$

이 직선의 기울기는 $\frac{\sqrt{3}}{3}$이다.

답 ③

41) [풀이]

$|2\vec{a} - \vec{b}|^2$

$= 4|\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$

$= 4 \times 11 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 9$

$= 17$에서 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 9$

$|\vec{a} - \vec{b}|^2$

$=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=11-2\times9+9$

$=2$

$\therefore\ |\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{2}$

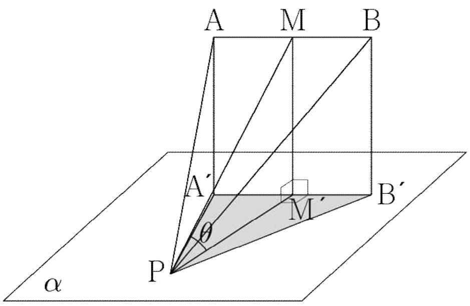
답 ②

42) [풀이]

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{A'B'}}=6$

이므로

$\overline{\mathrm{AB}}$//(평면 α), (평면 $\mathrm{AA'B'B}$)$\perp$(평면 α)



$\overline{\mathrm{MM'}}\perp\overline{\mathrm{A'B'}}$, $\overline{\mathrm{PM'}}\perp\overline{\mathrm{A'B'}}$

이므로 삼각형 $\mathrm{PM'M}$은 $\angle\mathrm{PM'M}=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

이때, $\angle\mathrm{MPM'}=\theta$로 두자.

($\triangle\mathrm{A'B'P}$의 넓이)$\times\cos\theta=\dfrac{9}{2}$,

$\cos\theta=\dfrac{9}{2}\times\dfrac{1}{\dfrac{1}{2}\times6\times6}=\dfrac{1}{4}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PM}}=\dfrac{6}{\cos\theta}=24$

답 ⑤

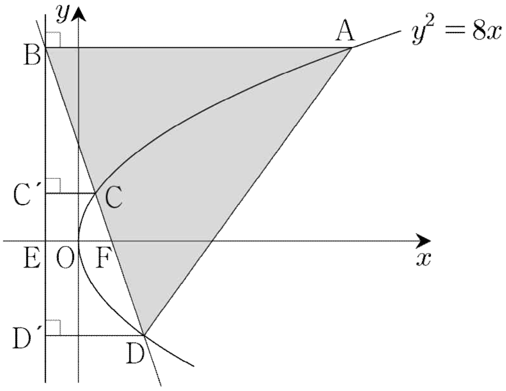
43) [풀이]

포물선 $y^2=4\times2\times x$의 초점과 준선은 각각

$\mathrm{F}(2,\ 0)$, $x=-2$

두 점 C, D에서 직선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{C'}$, $\mathrm{D'}$, 직선 $x=-2$가 x축과 만나는 점을 E 라고 하자.

2025 이동훈 기출 https://atom.ac/books/11758/
오르비 https://orbi.kr/



포물선의 정의에 의하여

$\overline{CF}=\overline{CC'}(=a)$, $\overline{DF}=\overline{DD'}(=b)$

$\overline{BC}=\overline{CD}=a+b$

서로 닮음인 두 직각삼각형 BCC′, BDD′에 대하여

$a+b:a=2(a+b):b$, $2a^2+ab-b^2=0$,

$(2a-b)(a+b)=0$, $b=2a$

직각삼각형 BFE의 세 변의 길이의 비는

$3:1:2\sqrt{2}\,(=\overline{BF}:\overline{FE}:\overline{BE})$

$(\because \triangle BCC' \sim \triangle BFE)$

이므로 $\overline{FE}=4$에서

$\overline{BE}=8\sqrt{2}=$(점 A의 y좌표)

$(8\sqrt{2})^2=8x$, $x=16$, $A(16,\ 8\sqrt{2})$

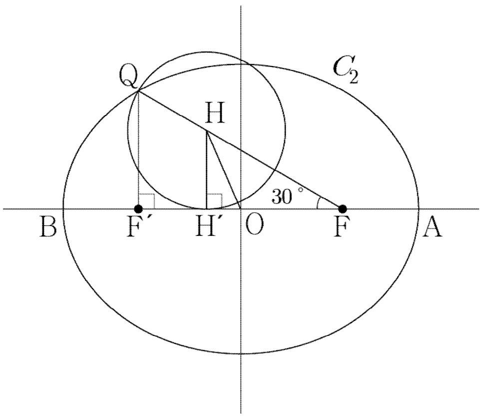
∴ ($\triangle ABD$의 넓이)

$=\dfrac{1}{2}\times 18\times 12\sqrt{2}=108\sqrt{2}$

답 ③

44) [풀이]

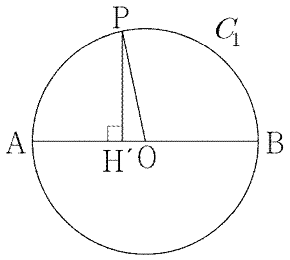
타원의 중심을 O, 점 H에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H′라고 하자.



직각삼각형 HH′F에서 삼각비의 정의에 의하여

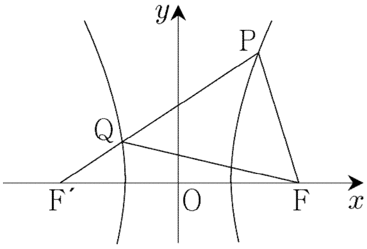
$\overline{HF}=8$

타원의 정의에 의하여
$\overline{\mathrm{QF}}+\overline{\mathrm{QF'}}=12+\overline{\mathrm{QF'}}=18$, $\overline{\mathrm{QF'}}=6$
(이때, $\angle \mathrm{QF'F}=90^{\circ}$)
그리고
$\overline{\mathrm{H'O}}=\overline{\mathrm{F'F}}-\overline{\mathrm{F'H}}-\overline{\mathrm{OF}}$
$=6\sqrt{3}-2\sqrt{3}-3\sqrt{3}=\sqrt{3}$



한편 $\overline{\mathrm{PH}}\perp\beta$, $\overline{\mathrm{HH'}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$
이므로 삼수선의 정리에 의하여
$\overline{\mathrm{PH'}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$ (위의 그림)
직각삼각형 $\mathrm{PH'O}$에서 피타고라스의 정리에 의하여
$\overline{\mathrm{PH'}}=\sqrt{9^2-(\sqrt{3})^2}=\sqrt{78}$
이면각의 정의에 의하여
$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{HH'}}}{\overline{\mathrm{PH'}}}=\dfrac{4}{\sqrt{78}}=\dfrac{2\sqrt{78}}{39}$

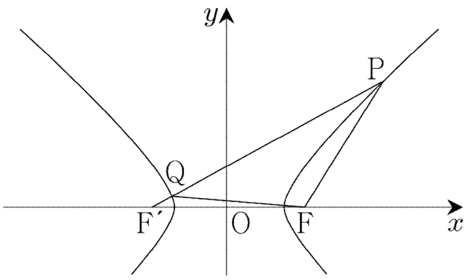
답 ⑤
45) [풀이]
$\overline{\mathrm{PF}}=p$, $\overline{\mathrm{PQ}}=q$, $\overline{\mathrm{QF'}}=r$, $\overline{\mathrm{QF}}=s$
라고 하자.
쌍곡선의 정의에 의하여
$q+r-p=6$(…㉠), $s-r=6$(…㉡)
(다): $p+q+s=28$(…㉢)
위의 세 등식을 연립하면
㉠+㉡: $-p+q+s=12$
이를 ㉢과 연립하면
$p=8$, $s=20-q$, $r=s-6=14-q$
(나): 다음의 두 경우가 가능하다.
(1) $\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{F'F}}$인 경우



$\overline{\mathrm{PF}}=8$, $\overline{\mathrm{PF'}}=14(=2c=\overline{\mathrm{F'F}})$

$\therefore\ c=7$

(2) $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{FF'}}$인 경우



$\overline{\mathrm{PF}}=8(=2c=\overline{\mathrm{F'F}})$

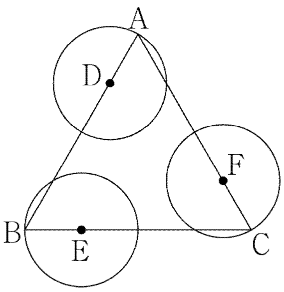
$\therefore\ c=4$

(1), (2)에서 구하는 값은

$7+4=11$

답 11

46) [풀이]



(가): 점 P는 중심이 D이고, 반지름의 길이가 1인 원 위에 있다.

점 Q는 중심이 E이고, 반지름의 길이가 1인 원 위에 있다.

점 R는 중심이 F이고, 반지름의 길이가 1인 원 위에 있다.

(나): $\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\overrightarrow{\mathrm{PD}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}}$,

$\overrightarrow{\mathrm{QC}}=\overrightarrow{\mathrm{QE}}+\overrightarrow{\mathrm{EC}}$,

$\overrightarrow{\mathrm{RA}}=\overrightarrow{\mathrm{RF}}+\overrightarrow{\mathrm{FA}}$

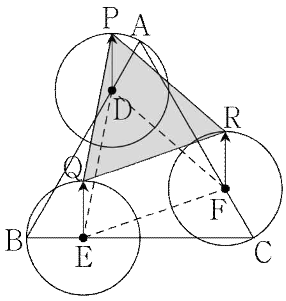
위의 세 등식을 변변히 더하면

$\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{QC}}+\overrightarrow{\mathrm{RA}}$

$=(\overrightarrow{\mathrm{PD}}+\overrightarrow{\mathrm{QE}}+\overrightarrow{\mathrm{RF}})+(\overrightarrow{\mathrm{DB}}+\overrightarrow{\mathrm{EC}}+\overrightarrow{\mathrm{FA}})$

$=\overrightarrow{\mathrm{PD}}+\overrightarrow{\mathrm{QE}}+\overrightarrow{\mathrm{RF}}\,(=\overrightarrow{\mathrm{AX}})$

$(\because \overrightarrow{DB}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{FA}=\vec{0})$
이므로
$|\overrightarrow{AX}|=|\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{QE}+\overrightarrow{RF}|$
$=|\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{EQ}+\overrightarrow{FR}|\le 3$
(단, 등호는 세 벡터 $\overrightarrow{DP}$, $\overrightarrow{EQ}$, $\overrightarrow{FR}$의 방향이 모두 같을 때 성립한다.(아래 그림))



위의 그림처럼 두 삼각형 DEF, PQR은 서로 합동이다.
삼각형 ADF에서 코사인법칙에 의하여
$\overline{DF}^2=1^2+3^2-2\times1\times3\times\cos60^\circ$
$=7$, $\overline{DF}=\sqrt{7}$
$\therefore\ 16S^2=16\times\left(\dfrac{7\sqrt{3}}{4}\right)^2=147$
답 147