

Show and Prove



수리논술을 위한 수학 2 & 미적분

저자 소개

SaP 시리즈 저자

김기대 T

- 고려대학교 수학과
- 2015~ 기대모의고사 저자
- 2023~ 기대 N제 저자
- 2023~ Show and Prove 1편~4편 저자
- 現) 오르비, 이투스, 대치명인 수능수학 & 수리논술 강의

2편 자문

한도현 경희대학교 의예과 수리논술 장학생 (메디컬 논술 성적 상위 3등 이내)

2편 검토진

- | | | | |
|-----|---------------------------------|-----|----------------------------------|
| 김기준 | 서울대학교 수학교육과 | 박도형 | 경희대학교 치의예과 (논술전형 합격) |
| 양수진 | 서울대학교 수리과학부 박사수료
前 용인외대부고 교사 | 정소흔 | 이화여자대학교 수학과 학부
고려대학교 수학교육과 석사 |
| 유연주 | 이화여자대학교 수학과 졸업
콩쌤의 수학 교실 운영 | 박지호 | 한양대, 성균관대 논술 최초합 |
| 임준홍 | 대치 새움학원 | | |

기대T 2024학년도 교재 커리큘럼

교재명	3월	4월	5월	6월	7월	8월	9월	10월	11월	
Show and Prove 수리논술 실전개념서	1편 (교재 난이도 下~中)									학교별 Final 수업
				2편 (교재 난이도 中~中上)						
			3편 (교재 난이도 上)							
기대 N제 수능수학 문제집				시즌1						
				시즌2 (미정)						
기대모의고사 수능수학 모의고사				시즌1			시즌2 (미정)			
- 학습기간은 책을 편 시점부터 3주를 넘기지 않는 것이 좋습니다. (한 권 기준) - 음영구간은 '출판시기와 권장학습시즌'을 의미합니다.										

1. 학습 전 사전공부 권장량

1편 수리논술을 위한 Basic logic & 수학 1

고1 수학 학습 + 수학1 학습 + 수학2 기본개념 1회독

2편 수리논술을 위한 수학 2 & 미적분

본 시리즈 1편 학습 + 1편 누적 + 수학2 학습 + 미적분 학습

3편 수리논술을 위한 Advanced 미적분 & Advanced Theme

본 시리즈 2편 학습 + 2편 누적

4편 수리논술을 위한 기하와 확통 (현강전용 교재)

고1 수학 학습 + 수학1 학습 + 미적분 학습 + (본인 필요에 따라 선택) 확통, 기하 과목이수

(오르비, 포만한, 수만회에 후기 작성시 추첨을 통해 4편(선택기하+선택확통)을 8월에 보내드립니다.

show and prove 검색시 나오는 게시글 기준이며, 쪽지를 통해 당첨안내 드립니다.)

2. 예제와 실전문제 활용법

예제와 실전문제에 대한 해설 전부는 해설집에 수록되었으나, 일부는 문제집에도 동시 수록되었습니다.

해설이 없는 문제는 없으니, 항상 해설집을 옆에 두고 공부하시기 바랍니다.

(Chapter별로 나뉘어져있는 **예제해설모음** 뒤에 **문제해설모음**이 있습니다.)

또한 예제와 실전문제에 있는 별표는 다음과 같이 활용하면 됩니다.



별표	설명	고민 정도	고민 시간
★☆☆☆☆	직전에 배운 개념을 가볍게 확인하기 위한 쉬운 문제	매우 빠르게	3분~5분 이내
★★☆☆☆	빈출하는 주제, 평이한 난이도의 문제	적당히	10분~15분 이내
★★★☆☆	실전 문제로 나오는 수준의 난이도이며, 고민에 가치가 있는 고난도 문제 (Like 준킬러문제)	넉넉히	15분~20분 이내
★★★★☆	합격자도 승률이 반반 정도인 문제 (Like 수능킬러문제)		20분~25분 이내
★★★★★	못 풀고도 합격이 가능할 만큼, 도전과 배움에 의의를 둔 초고난도 문제. 적당한 고민 후 해설로 빠른 학습 권장	빠르게	15분~20분 이내
꼭 고민시간을 지키지 않아도 됩니다. 풀릴 것 같다면 더 고민해도 됩니다.			

기대T 2024학년도 수리논술 수업 커리큘럼

수리논술 수업일		수업 Theme	수업명	교재
3월	8일 (수)	수리논술의 기본과 증명법 1	정규반 시즌1	시리즈 1편 +자체교재 +모의고사 응시 후 첨삭
	15일 (수)	증명법 2 & 도형		
	22일 (수)	삼각함수와 수열		
	29일 (수)	1편 마무리 (실전 논제)		
4월	5일 (수)	다항함수 성질 증명과 그 활용	정규반 시즌2	시리즈 2편 +자체교재 +모의고사 응시 후 첨삭
	12일 (수)	극한과 연속		
	19일 (수)	미분가능성 오개념 때려잡기		
	26일 (수)	Basic 미분 1 (평균값의 정리와 활용)		
5월	3일 (수)	휴강 (내신기간 or 이전 내용 복습)	정규반 시즌2	시리즈 2편 +자체교재 +모의고사 응시 후 첨삭
	10일 (수)	Basic 미분 2 (미분의 활용)		
	17일 (수)	Basic 적분 1 (수리논술용 적분 기본기)		
	24일 (수)	Basic 적분 2 + 2편 마무리 (실전 논제)		
오르비학원 기준 매주 수요일 (6월 전까지 고정) / 현장강의 or 온라인 라이브 수업 선택가능				
6월	1주차	휴강 (6/1 평가원 모의고사) : 확/기 기본개념 연습	정규반 시즌3	시리즈 4편 (현강용 교재) +모의고사 응시 후 첨삭
	2주차	Basic 확률과 통계 1		
	3주차	Advanced 확률과 통계 1		
	4주차	Basic 선택기하 1		
	5주차	Advanced 선택기하 1		
7월	1주차	Advanced 확률과 통계 2	정규반 시즌3	시리즈 4편 (현강용 교재) +모의고사 응시 후 첨삭
	2주차	휴강 (확통, 기하 복습해오기)		
	3주차	Advanced 미적분 1		
	4주차	Advanced 미적분 2		
8월	1주차	Advanced 미적분 3	Semi Final	시리즈 3편 +자체교재 +모의고사 응시 후 첨삭
	2주차	수리논술 전용 실전개념 1		
	3주차	수리논술 전용 실전개념 2		
	4주차	수리논술 전용 실전개념 3 + 3편 마무리 (실전논제)		
	5주차	세미 파이널 1 (대학별 성향파악1 + 전범위 모의)		
9월	1주차	휴강 (9/6 평가원 모의) + 수시원서 지원상담 진행	Semi Final	시리즈 3편 +자체교재 +모의고사 응시 후 첨삭
	2주차	세미 파이널 2 (대학별 성향파악2 + 전범위 모의)		
	3주차	세미 파이널 3 (주요대학 최근 핵심문항 적용연습)		
	4주차 (종강)	세미 파이널 4 (주요대학 최근 핵심문항 적용연습)		
10월	1주~2주차	연세/시립/홍익 학교별 Final (추석연휴 포함 진행)	학교별 Final	예상문제 모의고사 +
	~	수능 집중학습 후 수능 후 학교별 Final 준비	학교별 Final	학교별 자료집
11월	3~5주차	메디컬/한양/성균/중앙/인하 등등 수능후 학교별 Final	학교별 Final	학교별 자료집

- 오르비학원에서는 수리논술/수능수학 모두 온라인수업으로도 수강 가능합니다.

기대T 2024학년도 현장수업/온라인 라이브 수업 안내

수리논술 정규반 및 학교별 Final		수능수학
3월	정규반 시즌1	실전개념 + 기출 기본4점 ~ 쉬운 준킬러 최근 기출에 최적화된 수능실전개념 확립
4월	정규반 시즌2	
5월		기출 준킬러 + N제 준킬러
6월	정규반 시즌3	수능 최적화에 필요한 다양한 문제접근법을 연마
7월		기출+N제 준킬러&킬러 + 기출 Final 액시스
8월	Semi Final	현수능 최대 주적 '낮섭'에 대처하는 최종단계
9월		실전모의고사 Final
10월	수능전 Final (연세, 시립, 홍익)	오직 고득점만을 위한
11월	수능후 Final (대다수 학교)	모든 도구들을 최종정리
출강	오르비학원, 대치 명인학원	오르비학원, 이투스
	수리논술/수능수학 모두 오르비학원에서 온라인 수업도 진행합니다.	
아래 QR코드를 통해 자세한 커리큘럼 설명, 학교별 Final 계획을 확인할 수 있습니다.		
QR Code		

기대T 2024학년도 수리논술 수업 및 교재 상세안내

수업명 (교재)	수업안내 및 교재설명
정규반 시즌1 (1편)	- 수리논술에 빈출되면서 수능과 괴리감이 적은 주제들 위주로 정리하는 수업과 교재 - 수리논술 준비기간 3개월 이하 메디컬 지원자 / 제대로 다시 시작해보고픈 이공계 지원자 수강추천
정규반 시즌2 (2편)	- 수리논술에서 60% 이상의 비중을 차지하는 수리논술용 미적분 을 집중적으로 해석하는 수업과 교재 - 수리논술에도 존재하는 행동영역 연습 으로 고난도 미적분 문제의 체감난이도를 낮춰주는 수업 - '이걸 내가 어떻게 생각해?' 라는 생각을 부술 수 있는 납득가능하고 감탄할만한 문제접근법 제시
정규반 시즌3 (3편)	- 상위권 대학의 수리논술 합격 당락 을 가르는 고난도 주제들을 총정리 하는 수업과 교재 - 다음 학교의 논술 합격을 진심으로 원하거나, 다음 학교 중 원서 세 곳 이상 지원예정인 학생에게 추천 (메디컬, 연세, 한양, 시립, 서강, 중앙, 경희, 이화, 숙명, 세종, 서울과기대, 인하) - (강의 한정) 선택확통, 선택기하 중 수리논술에 나올만한 부분만 집중적으로 공략하는 강의
Semi Final	- 본인에게 유리한 출제 스타일인 학교를 탐색 하여 지원부터 이기고 들어갈 수 있도록 태어난 새로운 수업 - 주요대학 최신기출 (작년 기출+올해 모의) 중 주요문항 선별을 통해 학교별 출제성향 파악 - 정규반에서 배운 개념을 최신 기출에 적용연습 해볼 수 있는 일석이조 수업
학교별 Final	- 정규반과 세미파이널에서 배운 지식을 학교별 스타일에 맞도록 빛어내는 수업 - 학교별 빈출주제 예상문제 모의고사 응시 및 고승률 문제접근 Tip 을 배울 수 있는 기출선별자료집 제공
참석	- 수업형태 (현강, 온라인) 상관없이 모든 학생들의 참석이 진행됩니다. - 1차 서면참석 후 강사의 2차 대면참석 (온라인은 대면참석영상 제공)으로, 완벽한 참석 시스템 제공

목차

CHAPTER.1

다항함수

12P

1. 다항함수 공통성질
2. 이차함수 성질 및 증명
3. 삼차함수 성질 및 증명
4. 실전문제 풀어보기

CHAPTER.2

극한과 연속

42P

1. 극한
2. 함수의 연속
3. 최대최소 정리와 활용
4. 사잇값 정리와 활용
5. 실전문제 풀어보기

CHAPTER.3

미분

66P

1. 미분가능성
2. 미분의 활용
3. 평균값의 정리의 기본 활용
4. 평균값의 정리의 실전 활용
5. 실전문제 풀어보기

CHAPTER.4

적분

106P

1. 부정적분에서의 치환적분
2. 정적분에서의 치환적분
3. 나머지 적분 종합
4. 실전문제 풀어보기

CHAPTER.5

최근 기출 갈무리

136P

CHAPTER.1

수많은 다항함수 성질 중 수리논술에 주로 쓰이는 성질들을 위주로 정리합니다.

수능에선 결과만 알고 사용해도 별 이상 없더라도, 논술에선 결과를 이끌어내는 과정 자체가 하나의 문제로 출제되기 때문에 책에 있는 모든 내용을 이해하며 넘어가봅시다.

CHAPTER.2

극한~미분 단원에 이어지는 수능형 오개념을 고친 후, 수능에서 많이 구경 못해본 낯선 정리인 최대최소 정리와 사잇값 정리의 다양한 활용법에 대해 익히도록 합니다.

CHAPTER.3

미분가능성과 관련된 오개념을 고치고, 미분의 활용 뿐만 아니라 수리논술을 출제하는 대부분 학교들의 최애 소재인 '평균값의 정리'의 다양한 활용법에 대해 익히도록 합니다.

CHAPTER.4

수리논술에 필수적인 적분 테크닉에 대해 배웁니다. 3편에서 학습할 고난도 적분문제를 풀기 위해 필요한 기본기에 해당하므로, 교재의 가이드에 잘 따라 학습하길 권장합니다.

CHAPTER.5

본 교재에서 배운 개념들을 활용해서 최근 3개년 사이의 주요문항을 풀어보는 Chapter입니다.

함수의 극한과 수열의 극한이 각각 수학2와 미적분에 나뉘어져 있지만, 수열도 결국에는 함수¹²⁾이므로 본 수리논술 책에서는 두 극한을 한 번에 다루도록 하겠다.

또한 정답만 내면 장땡인 수능수학에서 제일 많은 오개념을 갖고 오는 Part이기 때문에, 당분간은 극한과 미분에 대한 오개념과의 전쟁을 준비해야한다.

우선 함수의 극한 기초문제를 풀어보자.

예제 1



함수 $f(x)$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 2$ 일 때, $f(2)$ 의 값을 구하시오.

연습지

해설

1

“분모가 0으로 가니까 분자도 0으로 가고, 뭐야 그냥 $f(2)=0$ 이네 ㅋㅋ”

라고 생각한다면, 완벽히 틀린 풀이이다.

‘분모가 0으로 가니까 분자도 0으로 가서’ 알 수 있는 사실은 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$ 이라는 사실 뿐이다.

$f(x)$ 의 $x = 2$ 에서의 ‘연속성’이 보장되지 않았기 때문에 $f(2)$ 의 값을 알 수 없다.

따라서 $f(2)$ 의 값을 알 수 없다. 가 정답이다.

(만약 $f(x)$ 의 $x = 2$ 에서의 연속성이 보장된 상태였다면 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 0$ 이 되어 $f(2) = 0$ 이다.)

12) 정의역이 자연수 전체의 집합이고, 치역이 실수 전체의 집합인 함수

| 극한의 이해

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ 는 두 의미를 내포한다.

- x 는 a 로 한없이 다가간다. 이 때, x 는 a 가 아니다.

그래서 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$ 로 풀 수 있는 근거¹³⁾가 된다.

- $f(x)$ 는 b 로 한없이 다가간다. 이 때, 그 값이 b 일 수도 있고 b 가 아닐 수도 있다.

수능수학 합성함수 극한문제 3점 문항을 풀 수 있는 수준이라면 충분히 이해하고 있을테니 넘어가겠다.

1. 극한값 구하기 1 : 기본형태 (수열, 함수 공용)

수능-내신에서 많이 쓰이는 제일 기본적인 문제형태이다.

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 등을 구하라고 할 때, a_n 과 $f(x)$ 의 식을 직접 구하여 극한 안에 넣고 단순 계산.

예제 2

★★★★☆

수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 = 5, a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 2$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값에 대해 논하시오.

연습지

13) 극한 내부의 분모, 분자의 $(x-1)$ 이 0이 아니기 때문에 나눌 수 있는 근거

해설
2

$a_n - 4 = b_n$ 이라 두면¹⁴⁾ $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 2 \Leftrightarrow b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n$ 에서 수열 $\{b_n\}$ 은 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이다.

(cf. 1편에서 학습했던 테크닉인데, 이것이 낯설다면 반드시 1편→2편→3편 순으로 학습하기 바란다.)

따라서 $b_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $a_n = 4 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4$ 이다.

| 수열의 수렴성

이전 문제를 풀 때 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ 라 하고 $\alpha = \frac{1}{2}\alpha + 2$, $\alpha = 4$ 로 구한 학생들이 대다수일 것이다.

하지만 이렇게 풀면 수리논술에서는 0점이다.

이 풀이는 ‘수열이 수렴한다.’는 조건이 있을 때에만 가능한 풀이임을 명심하자.

맨날 이렇게 풀어도 수능에서 한번도 문제가 생기지 않았던 이유는, 수능은 정답이 항상 존재하는 시험이라서 극한값이 반드시 존재할 수 밖에 없는 환경이었기 때문이다.

2. 극한값 구하기 2 : 샌드위치 정리 (수열, 함수 공용)

$f(x) < h(x) < g(x)$ 관계를 만족시키는 세 연속함수 f, g, h 와 임의의 실수 a 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} h(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

위낙 통용되는 정리가기 때문에 샌드위치 정리라고 답안에 작성해도 무방하나, 걱정이 되는 친구들은 교과서에 실려있는 이름인 ‘극한의 대소관계’라 해주면 된다.

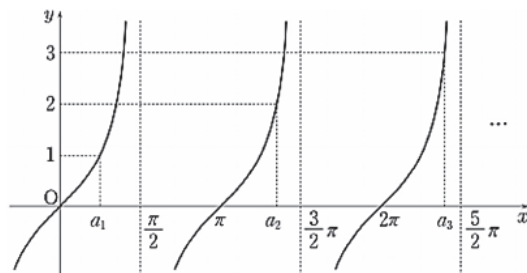
$a_n, f(x)$ 의 범위를 구하고 샌드위치정리 적용하여 정답을 구하는게 일반적 풀이.

예제 3



2014 수능 18번

자연수 n 에 대하여 직선 $y = n$ 과 함수 $y = \tan x$ 의 그래프가 제1사분면에서 만나는 점의 x 좌표를 작은 수 부터 크기순으로 나열할 때, n 번째 수를 a_n 이라 하자. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$ 의 값을 구하시오.



14) 1편 수열 편에서 배운 Idea를 활용했다.

3. 극한값 구하기 3 : 수렴 부등식 활용 (수열 전용)

모든 자연수 n 에 대하여

$$|a_{n+1} - L| < c \times |a_n - L|$$

을 만족시키는 상수 $0 \leq c < 1$ 가 존재할 때 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값을 구하는 방식이다.

$n = 1, 2, \dots$ 를 대입하면

$$|a_2 - L| < c \times |a_1 - L|$$

$$|a_3 - L| < c \times |a_2 - L|$$

...

$$|a_n - L| < c \times |a_{n-1} - L|$$

이고, 모든 양변을 곱한 후 식 정리를 해주면 $|a_n - L| < c^{n-1} \times |a_1 - L|$ 이다.

양변에 $\lim_{n \rightarrow \infty}$ 을 취하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} c^{n-1} = 0$ 이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - L| \leq 0$ 에서

$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - L) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ 임을 알 수 있다.

예제 4

★★★★☆

유명예제

$a_1 = 4$ 인 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{4}{a_n} \right)$ 이 만족할 때, 다음 물음에 답하시오.

[4-1] 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n > 2$ 임을 보여라.

[4-2] $a_{n+1} - 2 < \frac{1}{2}(a_n - 2)$ 임을 보여라.

[4-3] $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값을 구하시오.

연습지

4. 극한값 구하기 4 : 다변수극한 (함수 전용)

지금까지 변수가 하나뿐인 극한을 풀라고 요구했다면, 이번 Theme에서는 두 개 이상의 변수가 다른 변수로 깔끔하게 정리되지 않는 상황의 문제에 대해 다뤄보겠다.

가령 해당 문제의 예를 들면 다음과 같다.

예제 5

★★★★☆

2015 고려대

제시문

$s < t$ 인 두 실수 s, t 에 대하여 두 점 $A(s, s^2)$ 과 $B(t, t^2)$ 은 곡선 $y = x^2$ 위를 움직인다.

제시문에서 두 점 A 와 B 가 $\overline{AB} = 1$ 을 만족하며 움직일 때, 선분 AB 와 곡선 $y = x^2$ 으로 둘러싸인 영역의 넓이를 $F(s)$ 라 하자. 극한값 $\lim_{s \rightarrow \infty} s^3 F(s)$ 를 구하여라.

연습지

TIP

문제는 s 에 대한 극한인데, 극한을 보내야하는 식엔 s 뿐만아니라 t 까지 등장한다.
이런 경우,

- ① 위 문제처럼 s 가 무한으로 갈 때 t 는 어디로 갈지 관찰하여 극한을 동시에 먹여주거나
- ② 두 문자를 적당한 꼴로 엮어서, 그 꼴이 어디로 다가가는지 관찰하는 방식이 필요하다.

이 문제는 ②에 해당하는 문제이다.

해설
5

$$\overline{AB}^2 = (t-s)^2 + (t^2-s^2)^2 = 1$$

$$\therefore (t-s)^2 \{1 + (t+s)^2\} = 1$$

$$\therefore (t-s)^2 = \frac{1}{1 + (t+s)^2}$$

또한 직선 AB 의 방정식은

$$y = (t+s)(x-s) + s^2 = (t+s)x - st \text{ 이므로}$$

$$F(s) = \int_s^t -(x-s)(x-t)dx = \frac{1}{6}(t-s)^3 \text{ 15)}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{s \rightarrow \infty} s^3 F(s) &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^3(t-s)^3}{6} \\ &= \frac{1}{6} \lim_{s \rightarrow \infty} \{s^2(t-s)^2\}^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{6} \lim_{s \rightarrow \infty} \left\{ \frac{s^2}{1 + (t+s)^2} \right\}^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

한편, $s \rightarrow \infty$ 일 때 $0 < s < t$ 이므로 $0 < s^2 < t^2 \therefore t^2 - s^2 > 0$

$$\overline{AB}^2 = (t-s)^2 + (t^2-s^2)^2 = 1 \text{에서 } (t^2-s^2)^2 > 0 \text{이므로 } (t-s)^2 < 1$$

$$\therefore t-s < 1 \therefore s < t < s+1$$

양변을 s 로 나누면 $1 < \frac{t}{s} < 1 + \frac{1}{s}$ 이고, $\lim_{s \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{s}\right) = 1$ 이므로 샌드위치 정리에 의하여

$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{t}{s} = 1$ 이다. 따라서 구하는 극한값은

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s^3 F(s) = \frac{1}{6} \lim_{s \rightarrow \infty} \left\{ \frac{s^2}{1 + (t+s)^2} \right\}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{6} \lim_{s \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\frac{1}{s^2} + \left(\frac{t}{s} + 1\right)^2} \right\}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{2^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{48}$$

15) 문제에서 해당 적분이 차지하는 볼륨이 작기 때문에, 계산을 생략 후 바로 써도 괜찮다.

두 예각 θ, α 에 대하여 $\tan\alpha = k \times \tan\theta$ 를 만족시킨다. (단, k 는 양수이다.)

$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \alpha} \frac{\frac{\pi}{2} - \theta}{\frac{\pi}{2} - \alpha}$ 의 값을 구하시오.

연습지

이번 문제는 한 문자가 다른 문자로 표현되는 경우이다. 잘 정리한 후 대입하여 극한을 구하는 일반적인 과정을 따라주면 된다.

함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 미분가능하고 $f'(x)$ 가 $(-\infty, \infty)$ 에서 연속이다.

(단, 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \neq -1$ 이고, $f(1) = 1, f'(1) = \alpha$ 이다.)

임의의 실수 s 에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $P(s, f(s))$ 에서의 접선에 수직이면서 점 P 를 지나는 직선이

$y = x$ 와 만나는 점을 (t, t) 라고 하자. 이때 극한값 $\lim_{s \rightarrow 1} \frac{t-1}{s-1}$ 을 α 에 관한 식으로 나타내시오.

연습지

4. 평균값의 정리 실전활용 Tip.4 : 형태가 약간 뒤틀린 평균값정리 눈에 익혀두기

| 적분의 평균값 정리 ver.1

$f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, $\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = f(c)$ 를 만족시키는 c ($a < c < b$)가 적어도 하나 존재한다.

증명

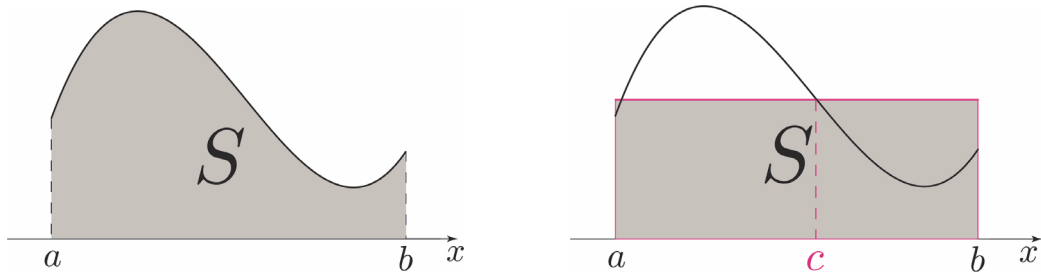
$f(x)$ 의 부정적분을 $F(x)$ 라 하면 $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ 이므로

$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = f(c) \Leftrightarrow \frac{F(b) - F(a)}{b-a} = f(c)$ 이다. 따라서 함수 $F(x)$ 에 대한 평균값의 정리를 증명하면 되는데, 앞서 룰의 정리를 이용하여 증명했었다.

굳이 적분의 평균값 정리 ver.1을 기존의 평균값의 정리와 구분하여 사용하지 말자. 적분 기호만 쓰였을 뿐, 함수 $F(x)$ 에 대한 평균값의 정리 모양과 다를 바가 없기 때문이다.

| 적분의 평균값 정리의 그래프적 의미 (참고)

위의 식을 정리하면 $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$ 이다. 좌변은 $y = f(x)$ 의 그래프와 x 축 사이의 넓이를 의미하고, 우변은 $b-a$ 와 $f(c)$ 를 각각 가로길이, 세로길이를 하는 직사각형 넓이를 의미한다.



예제 18

★★★★☆

2018 서울과기대 기출

자연수 n 에 대하여 0이 아닌 실수 a_0, a_1, \dots, a_n 이 $\frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{5} + \dots + \frac{a_n}{2n+1} = 0$ 을 만족시킨다.

이때, 방정식 $a_0 + a_1x^2 + a_2x^4 + \dots + a_nx^{2n} = 0$ 의 실근의 개수가 2 이상임을 보이시오.

| 적분의 평균값 정리 ver.2

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 $g(x) > 0$ 일 때,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \times \int_a^b g(x)dx$$

를 만족시키는 c ($a < c < b$)가 적어도 하나 존재한다.

증명

최대최소정리에 의하여 함수 $f(x)$ 는 최솟값 $m = f(c_1)$ 과 최댓값 $M = f(c_2)$ 을 갖는다.³⁴⁾

따라서 $m \leq f(x) \leq M$ 이고, 양변에 $g(x)$ 를 곱한 후 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 정적분을 하면

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx$$

이고, 양변을 $\int_a^b g(x)dx$ 로 나누면 $f(c_1) = m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M = f(c_2)$ 임을 알 수 있다.

사잇값 정리에 의하여 $\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = f(c)$ 인 c 가 c_1, c_2 사이에 존재하므로, 이를 정리하면

$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \times \int_a^b g(x)dx$ 인 c ($a < c < b$)가 적어도 하나 존재함을 알 수 있다.

TIP

증명과정을 아래처럼 간단히 정리해두면 좋다.

최대최소정리 → $g(x)$ 곱하기 → 정적분 → 적분값 나누기 → 사잇값 정리

또한 $g(x) = 1$ 일 때, ver.2의 식은

$$\int_a^b f(x)dx = f(c) \times \int_a^b 1dx = f(c) \times (b-a) \Leftrightarrow \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = f(c) \text{로, ver.1이 나온다.}$$

34) 원래는 롤의 정리 증명 때처럼, $f(x)$ 가 상수함수인 케이스도 나눠서 증명해주는 것이 일반적인 증명이나, 이 증명이 부족하진 않다.

예제 19



사잇값 정리를 이용하여

$$\int_0^\pi e^x \sin x \, dx = \text{sinc} \int_0^\pi e^x \, dx$$

를 만족하는 실수 c 가 구간 $(0, \pi)$ 에 존재함을 보이시오.

연습지

예제 20



[20-1] 평균값의 정리를 이용하여

$$\int_0^\pi e^x \sin x \, dx = \pi e^c \text{sinc}$$

를 만족하는 실수 c 가 구간 $(0, \pi)$ 에 존재함을 보이시오.

[20-2] $\int_0^\pi e^x \sin x \, dx = \pi e^c \text{sinc}$ 을 만족하고 구간 $(0, \pi)$ 에 존재하는 모든 실수 c 의 합을 구하시오.

연습지