10일의 기적

(확률과통계 해설지)

Part A. 올해기출 최종점검 2·3점 문제 (30문항)

Part B. 올해기출 최종점검 3·4점 문제 (15문항)

Part C. 올해기출 최종점검 고난도 문제 (3문항)

인간은 과정 앞에 무적이고, 결과 앞에 무력하다.
내가 매일 최선을 다하는 것만이
내가 이루어 내야 할 유일한 일이다. -김지석

김지석수학연구소

확률과통계

1. 경우의 수

PART B

❋ 4점 ❋

중복순열

[2023년 4월 (확률과 통계) 29번]

1. 두 집합

$X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$,
$Y=\{1, 2, 3, 4, 5\}$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 X에서 Y로의 함수 f의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $f(4)=f(1)+f(2)+f(3)$ (나) $2f(4)=f(5)+f(6)+f(7)+f(8)$

교육청 해설

[정답] 523

$f(k)=x_k$ $(k=1, 2, \cdots, 8)$이라 하면

x_k는 5 이하의 자연수이다.

구하는 함수 f의 개수는 두 방정식

$x_4=x_1+x_2+x_3$, $2x_4=x_5+x_6+x_7+x_8$을

만족시키는

5 이하의 자연수 x_1, x_2, $\cdots$, x_8의

모든 순서쌍 $(x_1, x_2, \cdots, x_8)$의 개수와 같다.

$x_1+x_2+x_3 \geq 3$이므로

조건 (가)에 의하여 $3 \leq x_4 \leq 5$

(ⅰ) $x_4=3$인 경우

방정식 $x_1+x_2+x_3=3$을 만족시키는

5 이하의 자연수 x_1, x_2, x_3의

순서쌍(x_1, x_2, x_3)은 $(1, 1, 1)$의 1가지이다.

방정식 $x_5+x_6+x_7+x_8=6$을 만족시키는

5 이하의 자연수 x_5, x_6, x_7, x_8의

모든 순서쌍 (x_5, x_6, x_7, x_8)의 개수는

서로 다른 4개에서 2개를 택하는 중복조합의

수와 같으므로 ${}_4\mathrm{H}_2={}_5\mathrm{C}_2=10$

그러므로 함수 f의 개수는 $1\times10=10$

(ⅱ) $x_4=4$인 경우

방정식 $x_1+x_2+x_3=4$를 만족시키는

5 이하의 자연수 x_1, x_2, x_3의

순서쌍(x_1, x_2, x_3)은 $(1, 1, 2)$, $(1, 2, 1)$,

$(2, 1, 1)$의 3가지이다.

방정식 $x_5+x_6+x_7+x_8=8$을 만족시키는

5 이하의 자연수 x_5, x_6, x_7, x_8의

모든 순서쌍 (x_5, x_6, x_7, x_8)의 개수는

서로 다른 4개에서 4개를 택하는 중복조합의

수와 같으므로 ${}_4\mathrm{H}_4={}_7\mathrm{C}_4=35$

그러므로 함수 f의 개수는 $3\times35=105$

(ⅲ) $x_4=5$인 경우

방정식 $x_1+x_2+x_3=5$를 만족시키는 5

이하의

자연수 x_1, x_2, x_3의 모든 순서쌍

(x_1, x_2, x_3)의 개수는 서로 다른 3개에서

2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$

방정식 $x_5+x_6+x_7+x_8=10$을 만족시키는 5

이하의 자연수 x_5, x_6, x_7, x_8의 모든 순서쌍

(x_5, x_6, x_7, x_8)의 개수는 방정식

$x_5+x_6+x_7+x_8=10$을

만족시키는 자연수 x_5, x_6, x_7, x_8의

모든 순서쌍 (x_5, x_6, x_7, x_8)에서 $x_k \geq 6$인

자연수 k $(k=5, 6, 7, 8)$이 존재하는

모든 순서쌍 (x_5, x_6, x_7, x_8)을 제외한 개수와

같다.

방정식 $x_5+x_6+x_7+x_8=10$을 만족시키는

자연수 x_5, x_6, x_7, x_8의 모든 순서쌍

(x_5, x_6, x_7, x_8)의 개수는 서로 다른 4개에서

6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{H}_6={}_9\mathrm{C}_6=84$

방정식 $x_5+x_6+x_7+x_8=10$을 만족시키는

자연수 x_5, x_6, x_7, x_8 중 6 이상의 자연수가

존재하는 모든 순서쌍 (x_5, x_6, x_7, x_8)의

개수는

네 수 6, 2, 1, 1을 일렬로 나열하는 경우의

수와

네 수 7, 1, 1, 1을 일렬로 나열하는 경우의

수의 합과 같으므로 $\dfrac{4!}{2!}+\dfrac{4!}{3!}=16$

그러므로 함수 f의 개수는 $6\times(84-16)=408$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는

$10+105+408=523$

[2023년 6월 (확률과 통계) 28번]

2. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수는? [4점]

(가) $f(1) \times f(3) \times f(5)$는 홀수이다.
(나) $f(2) < f(4)$
(다) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3이다.

① 128 ② 132 ③ 136
④ 140 ⑤ 144

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

⑤

$f(1) \times f(3) \times f(5)$
i) 홀A×홀B×홀C
ii) 홀A×홀B
iii) 홀A

i) 홀A×홀B×홀C
홀A, 홀B, 홀C를 선택하는 경우의 수
({1,2,3}중 3개 선택)
‣ ${}_3C_3$
홀A, 홀B, 홀C와 f(1), f(3), f(5)를 대응시키는
경우의 수
‣ 3!
$f(2) < f(4)$를 선택하는 경우의 수
({1,2,3}중 2개 선택)
‣ ${}_3C_2$

∴ ${}_3C_3 \times 3! \times {}_3C_2$

ii) 홀A×홀B
홀A, 홀B를 선택하는 경우의 수 ({1,2,3}중 2개 선택)
‣ ${}_3C_2$
홀A, 홀B와 f(1), f(3), f(5)를 대응시키는 경우의 수
(f(1), f(3), f(5)가 한 숫자에만 대응 되는 경우 제외)
‣ ${}_2\Pi_3 - 2$
$f(2) < f(4)$를 선택하는 경우의 수
({홀A,홀B}중 1개 선택 & 나머지 3 숫자 중 하나 선택)
‣ 2×3

∴ ${}_3C_2 \times ({}_2\Pi_3 - 2) \times 2 \times 3$

iii) 홀A
홀A를 선택하는 경우의 수 ({1,2,3}중 1개 선택)
‣ ${}_3C_1$
홀A와 f(1), f(3), f(5)를 대응시키는 경우의 수
‣ 1
$f(2) < f(4)$를 선택하는 경우의 수
(홀A 제외한 나머지 4 숫자 중 2개 선택)
‣ ${}_4C_2$

∴ ${}_3C_1 \times 1 \times {}_4C_2$

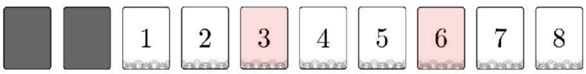
∴ 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수는
$${}_3C_3 \times 3! \times {}_3C_2 + {}_3C_2 \times ({}_2\Pi_3 - 2) \times 2 \times 3 + {}_3C_1 \times 1 \times {}_4C_2 = 144$$

같은 것을 포함한 순열

[2023년 6월 (확률과 통계) 29번]

3. 그림과 같이 2장의 검은색 카드와 1부터 8까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 8장의 흰색 카드가 있다. 이 카드를 모두 한 번씩 사용하여 왼쪽에서 오른쪽으로 일렬로 배열할 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오. [4점]
(단, 검은색 카드는 서로 구별하지 않는다.)

(가) 흰색 카드에 적힌 수가 작은 수부터 크기 순으로 왼쪽에서 오른쪽으로 배열되도록 카드가 놓여 있다.
(나) 검은색 카드 사이에는 흰색 카드가 2장 이상 놓여 있다.
(다) 검은색 카드 사이에는 3의 배수가 적힌 흰색 카드가 1장 이상 놓여 있다.



수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

25

(step1) 조건 (가)

검은 카드의 왼쪽에 있는 흰 카드의 장수를 a,
두 검은 카드의 사이에 있는 흰 카드의 장수를 b,
검은 카드의 오른쪽에 있는 흰 카드의 장수를 c라 하자.

$a+b+c=8$

(step2) 조건 (나)

$b \geq 2 \Leftrightarrow b=b'+2 \ (b' \geq 0)$

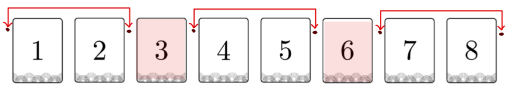
$a+b+c=8$

$\Leftrightarrow a+b'+c=6$의 경우의 수 $(a,\ b',\ c \geq 0)$

‣ ${}_3H_6$

(step3) 조건 (다) 여사건 경우의 수

검은 카드 사이에 3배수가 0개인 경우 제외



‣ 3

$\therefore \ {}_3H_6-3=25$

[2023년 4월 (확률과 통계) 28번]

4. 숫자 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 8장의 카드가 있다. 이 8장의 카드 중에서 7장을 택하여 이 7장의 카드 모두를 일렬로 나열할 때, 서로 이웃한 2장의 카드에 적혀 있는 수의 곱 모두가 짝수가 되도록 나열하는 경우의 수는? [4점]
(단, 같은 숫자가 적힌 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.)

① 264 ② 268 ③ 272
④ 276 ⑤ 280

교육청 해설

[정답] ①
8장의 카드에서 7장의 카드를 택하는 경우는 짝수가 적혀 있는 카드가 4장 또는 3장 선택되는 경우이다.

(i) 짝수가 적혀 있는 카드가 4장 선택된 경우
짝수 2, 2, 2, 4가 적혀 있는 4장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{3!}=4$
짝수가 적힌 4장의 카드를 □로 나타내면 홀수가 적힌 카드끼리는 서로 이웃하지 않아야 하므로
다음 그림과 같이 ∨로 표시된 다섯 곳 중 세 곳에 홀수가 적힌 3장의 카드가 나열되어야 한다.

∨□∨□∨□∨□∨

홀수가 적혀 있는 3장의 카드는
1, 3, 3이 적힌 카드이거나
1, 1, 3이 적힌 카드이므로
홀수가 적힌 3장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_5C_3\times2\times\frac{3!}{2!}=60$
구하는 경우의 수는 $4\times60=240$

(ii) 짝수가 적혀 있는 카드가 3장 선택된 경우
짝수가 적혀 있는 3장의 카드는
2, 2, 2가 적힌 카드이거나
2, 2, 4가 적힌 카드이므로
짝수가 적힌 3장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $1+\frac{3!}{2!}=4$
이 각각에 대하여 짝수가 적힌 3장의 카드를 □로 나타내면 홀수가 적힌 카드끼리는 서로 이웃하지 않아야 하므로
다음 그림과 같이 ∨로 표시된 네 곳에 홀수가 적힌 4장의 카드가 나열되어야 한다.

∨□∨□∨□∨

홀수 1, 1, 3, 3이 적혀 있는 4장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!2!}=6$
구하는 경우의 수는 $4\times6=24$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는
$240+24=264$

[2023년 3월 (확률과 통계) 29번]

5. 숫자 1, 2, 3 중에서 중복을 허락하여 다음 조건을 만족시키도록 여섯 개를 선택한 후, 선택한 숫자 여섯 개를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수를 구하시오. [4점]

(가) 숫자 1, 2, 3을 각각 한 개 이상씩 선택한다.
(나) 선택한 여섯 개의 수의 합이 4의 배수이다.

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

120

조건 (가)를 만족시키도록 선택한 6개의 수를 각각

1, 2, 3, a, b, c라 하면 $1 \le a,b,c \le 3$이므로

$9 \le 1+2+3+a+b+c \le 15$

이 중 4의 배수는 12뿐이므로

$1+2+3+a+b+c=12$

$\Leftrightarrow$ $a+b+c=6$

ⅰ) $a,b,c=1,\ 2,\ 3$인 경우

6개의 숫자 1, 1, 2, 2, 3, 3을 배열하는 경우의 수

▸ $\dfrac{6!}{2!\times2!\times2!}=90$

ⅱ) $a,b,c=2,\ 2,\ 2$인 경우

6개의 숫자 1, 2, 2, 2, 2, 3을 배열하는 경우의 수

▸ $\dfrac{6!}{4!}=30$

$\therefore$ $90+30=120$

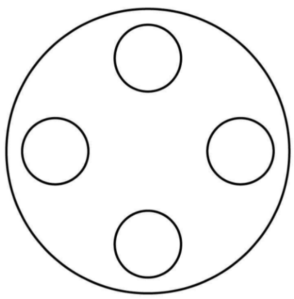
중복조합

[2023년 3월 (확률과 통계) 28번]

6. 원 모양의 식탁에 같은 종류의 비어 있는 4개의 접시가 일정한 간격을 두고 원형으로 놓여 있다. 이 4개의 접시에 서로 다른 종류의 빵 5개와 같은 종류의 사탕 5개를 다음 조건을 만족시키도록 남김없이 나누어 담는 경우의 수는? [4점]
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

(가) 각 접시에는 1개 이상의 빵을 담는다.
(나) 각 접시에 담는 빵의 개수와 사탕의 개수의 합은 3 이하이다.

① 420　② 450　③ 480
④ 510　⑤ 540



수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

⑤

상황이 복잡할 때는 바로 계산하려고 하지 말고
빵과 사탕의 개수별로 케이스를 나눈다!

i) 합계	3	3	3	1
다른 빵	2	1	1	1
같은 사탕	1	2	2	0

다른 빵 2개 선택하는 경우의 수
▸ ${}_5C_2$
1개 접시에 담을 빵을 1개 선택하는 경우의 수
▸ ${}_3C_1$
3개/3개 접시에 빵을 1개씩 담는 경우의 수
▸ 1 ↳ 접시구별X
같은 사탕을 정해진 개수대로 담는 경우의 수
▸ 1
4개의 접시 원순열 경우의 수
▸ 3!
$\therefore\ {}_5C_2 \times {}_3C_1 \times 1 \times 1 \times 3!$

ii) 합계	3	3	2	2
다른 빵	2	1	1	1
같은 사탕	1	2	1	1

다른 빵 2개 선택하는 경우의 수
▸ ${}_5C_2$
남은 3개짜리 접시에 담을 빵을 1개 선택하는 경우의 수
▸ ${}_3C_1$
2개/2개 접시에 빵을 1개씩 담는 경우의 수
▸ 1 ↳ 접시구별X
같은 사탕을 정해진 개수대로 담는 경우의 수
▸ 1
4개의 접시 원순열 경우의 수
▸ 3!
$\therefore\ {}_5C_2 \times {}_3C_1 \times 1 \times 1 \times 3!$

iii) 합계	3	3	2	2
다른 빵	1	1	2	1
같은 사탕	2	2	0	1

다른 빵 2개 선택하는 경우의 수
▸ ${}_5C_2$
남은 2개짜리 접시에 담을 빵을 1개 선택하는 경우의 수
▸ ${}_3C_1$
3개/3개 접시에 빵을 1개씩 담는 경우의 수
▸ 1 ↳ 접시구별X
같은 사탕을 정해진 개수대로 담는 경우의 수
▸ 1
4개의 접시 원순열 경우의 수
▸ 3!
$\therefore\ {}_5C_2 \times {}_3C_1 \times 1 \times 1 \times 3!$

∴ i , ii , iii) 모든 경우의 수의 합은
${}_5C_2 \times {}_3C_1 \times 1 \times 1 \times 3! \times 3 = 540$

[2023년 3월 (확률과 통계) 30번]

7. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) \le f(x_2)$이다.
(나) $f(2) \ne 1$이고 $f(4) \times f(5) < 20$이다.

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

45

$f(4)\times f(5)<20$가 성립하지 않는 경우는
① $f(4)=4,\ f(5)=5$
② $f(4)=5,\ f(5)=5$
두 가지이다.
$f(2)=5$이면 $f(4)=f(5)=5$이므로 $f(2)\ne 5$
∴ $f(2)=2$ or 3 or 4

ⅰ) $f(2)=2$인 경우
$f(1)=1$ or 2이므로 $f(1)$의 경우의 수
▸ 2
$2\le f(3)\le f(4)\le f(5)\le 5$인
$f(3),\ f(4),\ f(5)$의 경우의 수
▸ ${}_4\mathrm{H}_3$
이 중 $f(4)=4,\ f(5)=5$일 때
$f(3)=2$ or 3 or 4 경우의 수
▸ 3
이 중 $f(4)=5,\ f(5)=5$일 때
$f(3)=2$ or 3 or 4 or 5 경우의 수
▸ 4
∴ $2\times\{{}_4\mathrm{H}_3-(3+4)\}=26$

ⅱ) $f(2)=3$인 경우
$f(1)=1$ or 2 or 3 이므로 $f(1)$의 경우의 수
▸ 3
$3\le f(3)\le f(4)\le f(5)\le 5$인
$f(3),\ f(4),\ f(5)$의 경우의 수
▸ ${}_3\mathrm{H}_3$
이 중 $f(4)=4,\ f(5)=5$일 때
$f(3)=3$ or 4 경우의 수
▸ 2
이 중 $f(4)=5,\ f(5)=5$일 때
$f(3)=3$ or 4 or 5 경우의 수
▸ 3
∴ $3\times\{{}_3\mathrm{H}_3-(2+3)\}=15$

ⅲ) $f(2)=4$인 경우
$f(1)=1$ or 2 or 3 or 4이므로 $f(1)$의 경우의 수
▸ 4
$f(4)\times f(5)<20$이 성립하려면
$f(3)=f(4)=f(5)=4$뿐이다.
▸ 1
∴ $4\times1=4$

∴ ⅰ, ⅱ, ⅲ) 모든 경우의 수의 합은
26+15+4=45

[2023년 10월 (확률과 통계) 29번]

8. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $a \leq b \leq c \leq 8$ (나) $(a-b)(b-c)=0$

교육청 해설

[정답] 64

조건 (가)를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는
${}_{8}\mathrm{H}_{3} = {}_{8+3-1}\mathrm{C}_{3} = {}_{10}\mathrm{C}_{3} = 120$
이때 조건 (나)를 만족시키지 않는 경우는
$(a-b)(b-c) \neq 0$
즉, $a < b < c \leq 8$ …… ㉠
㉠을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는
${}_{8}\mathrm{C}_{3} = 56$
따라서 구하는 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는
$120 - 56 = 64$

확률과통계

2. 확률

PART B

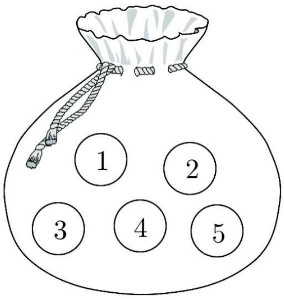
❄ 4점 ❄

조건부 확률

[2023년 7월 (확률과 통계) 28번]

9. 1부터 5까지의 자연수가 하나씩 적힌 5개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 공을 임의로 한 개씩 5번 꺼내어 n $(1 \le n \le 5)$번째 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 a_n이라 하자. $a_k \le k$를 만족시키는 자연수 k $(1 \le k \le 5)$의 최솟값이 3일 때, $a_1 + a_2 = a_4 + a_5$일 확률은? [4점]
(단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.)

① $\frac{4}{19}$ ② $\frac{5}{19}$ ③ $\frac{6}{19}$
④ $\frac{7}{19}$ ⑤ $\frac{8}{19}$



교육청 해설

[정답] ①

$a_k \le k$를 만족시키는 자연수 k $(1 \le k \le 5)$의 최솟값이 3인 사건을 A, $a_1 + a_2 = a_4 + a_5$인 사건을 B라 하자. $a_k \le k$를 만족시키는 자연수 $k(1 \le k \le 5)$의 최솟값이 3이면, $a_1 > 1$, $a_2 > 2$, $a_3 \le 3$이다.

(Ⅰ) $a_3 = 1$이고 $a_1 > 1$, $a_2 > 2$일 확률은

$$\frac{3 \times 3 \times 2!}{5!} = \frac{3}{20}$$

(Ⅱ) $a_3 = 2$이고 $a_1 > 1$, $a_2 > 2$일 확률은

$$\frac{3 \times 2 \times 2!}{5!} = \frac{1}{10}$$

(Ⅲ) $a_3 = 3$이고 $a_1 > 1$, $a_2 > 2$일 확률은

$$\frac{2 \times 2 \times 2!}{5!} = \frac{1}{15}$$

(Ⅰ), (Ⅱ), (Ⅲ)에 의하여

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{3}{20}+\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{15}=\dfrac{9+6+4}{60}=\dfrac{19}{60}$

$a_1+a_2=a_4+a_5$이면

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=15$에서

$a_3=15-2(a_1+a_2)=2\{7-(a_1+a_2)\}+1$

이므로 a_3의 값은 홀수이다.

(ⅰ) $a_3=1$인 경우

$a_1+a_2=7$이므로 순서쌍 $(a_1,\ a_2)$는 $(2,\ 5)$, $(3,\ 4)$, $(4,\ 3)$

(ⅱ) $a_3=3$인 경우

$a_1+a_2=6$이므로 순서쌍 $(a_1,\ a_2)$는 $(2,\ 4)$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{(3+1)\times 2!}{5!}=\dfrac{1}{15}$

따라서 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{1}{15}}{\frac{19}{60}}=\dfrac{4}{19}$

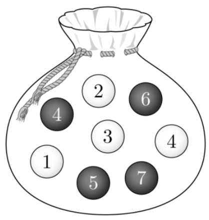
[2023년 6월 (확률과 통계) 30번]

10. 주머니에 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 흰 공 4개와 숫자 4, 5, 6, 7이 하나씩 적혀 있는 검은 공 4개가 들어 있다. 이 주머니를 사용하여 다음 규칙에 따라 점수를 얻는 시행을 한다.

> 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내어 꺼낸 공이 서로 다른 색이면 12를 점수로 얻고, 꺼낸 공이 서로 같은 색이면 꺼낸 두 공에 적힌 수의 곱을 점수로 얻는다.

이 시행을 한 번 하여 얻은 점수가 24 이하의 짝수일 확률이 $\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. [4점]

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

51

	①	②	③	④	❹	❺	❻	❼
①		2	~~3~~	4	12	12	12	12
②			6	8	12	12	12	12
③				12	12	12	12	12
④					12	12	12	12
❹						20	24	~~28~~
❺							~~30~~	~~35~~
❻								~~42~~
❼								

$\therefore\ \dfrac{{}_8\mathrm{C}_2-5}{{}_8\mathrm{C}_2}=\dfrac{23}{28}$

Analysis

주사위 2개 → 표를 그린다.

전체 경우가 6×6=36이기 때문에

모든 경우를 다 해버리는 게 가장 쉽고 빠르다!

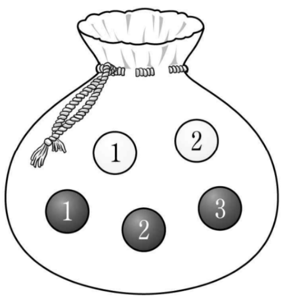
주사위나 주머니에서 숫자 뽑기나 별반 다르지 않다.

[2023년 10월 (확률과 통계) 30번]

11. 주머니에 숫자 1, 2가 하나씩 적혀 있는 흰 공 2개와 숫자 1, 2, 3이 하나씩 적혀 있는 검은 공 3개가 들어 있다. 이 주머니를 사용하여 다음 시행을 한다.

주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내어 꺼낸 공이 서로 같은 색이면 꺼낸 공 중 임의로 1개의 공을 주머니에 다시 넣고, 꺼낸 공이 서로 다른 색이면 꺼낸 공을 주머니에 다시 넣지 않는다.

이 시행을 한 번 한 후 주머니에 들어 있는 모든 공에 적힌 수의 합이 3의 배수일 때, 주머니에서 꺼낸 2개의 공이 서로 다른 색일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. [4점]
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



교육청 해설

[정답] 5

시행을 한 번 한 후 주머니에 들어 있는 모든 공에 적힌 수의 합이 3의 배수인 사건을 A, 주머니에서 꺼낸 2개의 공이 서로 다른 색인 사건을 B라 하자. 주머니에 들어 있는 모든 공에 적힌 수의 합이 9이므로 이 시행을 한 번 한 후 주머니에 들어 있는 공에 적힌 수의 합이 3의 배수가 되는 경우는 꺼낸 2개의 공의 색깔에 따라 다음과 같이 두 가지이다.

(ⅰ) 꺼낸 2개의 공이 서로 다른 색인 경우

꺼낸 2개의 공이 (①, ❷) 또는 (②, ❶)이어야 하므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{5}$$

(ⅱ) 꺼낸 2개의 공이 서로 같은 색인 경우

꺼낸 2개의 공이 (❶, ❸)이고 이 두 개의 공 중 ❶을 주머니에 다시 넣거나, 꺼낸 2개의 공이 (❷, ❸)이고 이 두 개의 공 중 ❷를 주머니에 다시 넣어야 하므로

$$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{1}{{}_5\mathrm{C}_2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{{}_5\mathrm{C}_2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B^C)}$$

$$=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{5}{5}+\frac{1}{10}}=\frac{2}{3}$$

따라서 $p=3$, $q=2$이므로

$p+q=5$

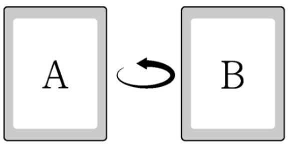
독립시행

[2023년 9월 (확률과 통계) 29번]

12. 앞면에는 문자 A, 뒷면에는 문자 B가 적힌 한 장의 카드가 있다. 이 카드와 한 개의 동전을 사용하여 다음 시행을 한다.

> 동전을 두 번 던져 앞면이 나온 횟수가 2이면 카드를 한 번 뒤집고, 앞면이 나온 횟수가 0 또는 1이면 카드를 그대로 둔다.

처음에 문자 A가 보이도록 카드가 놓여 있을 때, 이 시행을 5번 반복한 후 문자 B가 보이도록 카드가 놓일 확률은 p이다. $128 \times p$의 값을 구하시오. [4점]



앞면 뒷면

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

62

동전을 두 번 던져

앞면이 나온 횟수가 2일 확률 ▸ $\frac{1}{4}$

앞면이 나온 횟수가 0 또는 1일 확률 ▸ $\frac{3}{4}$

홀수번 뒤집으면 문자 B가 보이게 된다.

i) 5번 중 1번 뒤집을 확률

▸ ${}_5C_1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^4$

ii) 5번 중 3번 뒤집을 확률

▸ ${}_5C_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2$

iii) 5번 중 5번 뒤집을 확률

▸ ${}_5C_5\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^0$

$$\therefore\ {}_5C_1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^4+{}_5C_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2+{}_5C_5\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^0$$

$$=\frac{31}{64}$$

$$\therefore\ p=\frac{31}{64}$$

$$\therefore\ 128p=128\times\frac{31}{64}=62$$

확률과통계

3. 통계

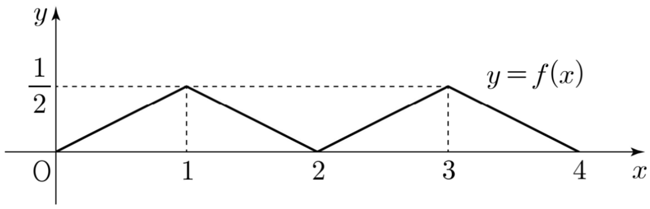
PART B

❄ 4점 ❄

확률밀도함수

[2023년 7월 (확률과 통계) 29번]

13. 두 연속확률변수 X와 Y가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le 4$, $0 \le Y \le 4$이고, X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$, $g(x)$이다. 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



확률변수 Y의 확률밀도함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[0, 4]$에서 연속이고 $0 \le x \le 4$인 모든 실수 x에 대하여

$$\{g(x)-f(x)\}\{g(x)-a\}=0 \ (a\text{는 상수})$$

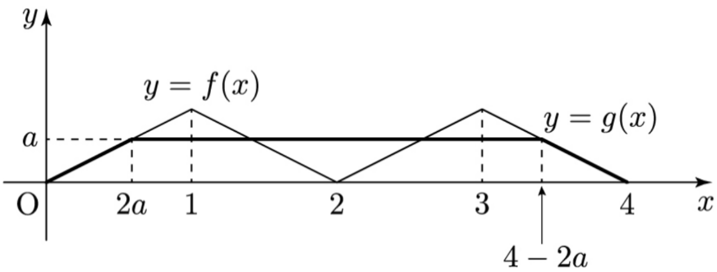
를 만족시킨다. 두 확률변수 X와 Y가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\mathrm{P}(0 \le Y \le 1) < \mathrm{P}(0 \le X \le 1)$
(나) $\mathrm{P}(3 \le Y \le 4) < \mathrm{P}(3 \le X \le 4)$

$\mathrm{P}(0 \le Y \le 5a) = p - q\sqrt{2}$일 때, $p \times q$의 값을 구하시오. [4점]
(단, p, q는 자연수이다.)

교육청 해설

[정답] 24
$\{g(x)-f(x)\}\{g(x)-a\}=0$이므로
$g(x)=f(x)$ 또는 $g(x)=a$
조건 (가)와 (나)에 의하여
확률밀도함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$\mathrm{P}(0 \le Y \le 4) = 1$이므로

$\frac{1}{2} \times 2a \times a + (4-4a) \times a + \frac{1}{2} \times 2a \times a = 1$

$2a^2 - 4a + 1 = 0$, $a = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$

$0 < a < \frac{1}{2}$이므로 $a = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$, $1 < 5a < 2$

$\mathrm{P}(0 \le Y \le 5a)$
$= \mathrm{P}(0 \le Y \le 2a) + \mathrm{P}(2a \le Y \le 5a)$
$= \frac{1}{2} \times 2a \times a + 3a \times a = 4a^2$
$= 4 \times \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 6 - 4\sqrt{2}$

따라서 $p=6$, $q=4$이므로 $p \times q = 24$

정규분포

[2023년 10월 (확률과 통계) 28번]

14. 정규분포를 따르는 두 확률변수 X, Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$, $g(x)$이다. $\mathrm{V}(X)=\mathrm{V}(Y)$이고, 양수 a에 대하여

$f(a)=f(3a)=g(2a)$,
$\mathrm{P}(Y \le 2a)=0.6915$

일 때, $\mathrm{P}(0 \le X \le 3a)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.5328 ② 0.6247 ③ 0.6687
④ 0.7745 ⑤ 0.8185

교육청 해설

[정답] ①

$\mathrm{E}(X)=m_1$, $\mathrm{E}(Y)=m_2$, $\mathrm{V}(X)=\mathrm{V}(Y)=\sigma^2$으로 놓으면 두 확률변수 X, Y는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(m_1, \sigma^2)$, $\mathrm{N}(m_2, \sigma^2)$을 따른다.

함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=m_1$에 대하여 대칭이고, $f(a)=f(3a)$이므로

$$m_1=\frac{a+3a}{2}=2a$$

함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 평행이동하면 함수 $y=g(x)$의 그래프와 일치하고, $f(a)=f(3a)=g(2a)$이므로

$g(0)=g(2a)$또는 $g(2a)=g(4a)$

이때 함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=m_2$에 대하여 대칭이므로

$$m_2=\frac{0+2a}{2}=a \text{ 또는 } m_2=\frac{2a+4a}{2}=3a$$

$\mathrm{P}(Y \le 2a)=0.6915>0.5$이므로 $m_2<2a$이다.

$a>0$이므로 $m_2=a$

확률변수 Z가 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따를 때

$$\mathrm{P}(Y \le 2a)=\mathrm{P}\left(Z \le \frac{2a-a}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z \le \frac{a}{\sigma}\right)$$
$$=0.5+\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{a}{\sigma}\right)=0.6915$$

$\mathrm{P}(0 \le Z \le 0.5)=0.1915$이므로

$\frac{a}{\sigma}=0.5$, 즉 $\sigma=2a$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(0 \le X \le 3a)&=\mathrm{P}\left(\frac{0-2a}{2a} \le Z \le \frac{3a-2a}{2a}\right)\\&=\mathrm{P}(-1 \le Z \le 0.5)\\&=\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 0.5)\\&=0.3413+0.1915\\&=0.5328\end{aligned}$$

표본평균

[2023년 9월 (확률과 통계) 28번]

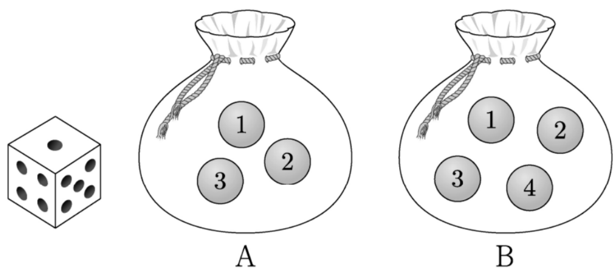
15. 주머니 A에는 숫자 1, 2, 3이 하나씩 적힌 3개의 공이 들어 있고, 주머니 B에는 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적힌 4개의 공이 들어 있다. 두 주머니 A, B와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 3의 배수이면 주머니 A에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내고, 나온 눈의 수가 3의 배수가 아니면 주머니 B에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낸다. 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 수의 차를 기록한 후, 공을 꺼낸 주머니에 이 2개의 공을 다시 넣는다.

이 시행을 2번 반복하여 기록한 두 개의 수의 평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}(\overline{X}=2)$의 값은? [4점]

① $\frac{11}{81}$ ② $\frac{13}{81}$ ③ $\frac{5}{27}$

④ $\frac{17}{81}$ ⑤ $\frac{19}{81}$



수의 차 X	1	2	3
주머니 A ${}_3C_2=3$	(1,2) (2,3)	(1,3)	
주머니 B ${}_4C_2=6$	(1,2) (2,3) (3,4)	(1,3) (2,4)	(1,4)

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{3}{6}=\frac{5}{9}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{9}$

$\mathrm{P}(\overline{X}=2)$

$=\mathrm{P}(X=1)\times\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=2)\times\mathrm{P}(X=2)$

$+\mathrm{P}(X=3)\times\mathrm{P}(X=1)$

$=\frac{5}{9}\times\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\times\frac{5}{9}=\frac{19}{81}$

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

⑤

주사위를 한 번 던져

3배수일 확률 ▸ $\frac{1}{3}$

3배수 아닐 확률 ▸ $\frac{2}{3}$

확률과통계

1. 경우의 수

PART C

❈ 4점 ❈

고난도

중복순열

[2023년 4월 (확률과 통계) 30번]

16. 세 문자 a, b, c 중에서 중복을 허락하여 각각 5개 이하씩 모두 7개를 택해 다음 조건을 만족시키는 7자리의 문자열을 만들려고 한다.

> (가) 한 문자가 연달아 3개 이어지고 그 문자는 a뿐이다.
> (나) 어느 한 문자도 연달아 4개 이상 이어지지 않는다.

예를 들어, $baaacca$, $ccbbaaa$는 조건을 만족시키는 문자열이고 $aabbcca$, $aaabccc$, $ccbaaaa$는 조건을 만족시키지 않는 문자열이다. 만들 수 있는 모든 문자열의 개수를 구하시오. [4점]

교육청 해설

[정답] 188

문자열 aaa와 이웃한 자리를 △,
문자열 aaa와 이웃하지 않는 자리를 □로
나타내면
조건 (가)를 만족시키는 문자열의 형태는
aaa △□□□, △aaaΔ□□, □△aaa △□,
□□△aaa△, □□□△aaa의 5가지이고
조건 (나)에 의하여 △에 나열될 수 있는 문자는
b 또는 c이다.

(ⅰ) aaa△□□□일 때

(a) △에 b가 나열된 경우
3개의 □에 세 문자를 나열하는 경우의 수는
서로 다른 3개에서 3개를 택하는
중복순열의 수와 같으므로 ${}_3\Pi_3 = 27$
이때
조건을 만족시키지 않는 문자열은
$aaabbba$, $aaabbbb$, $aaabbbc$, $aaabaaa$,
$aaabccc$의 5가지이다.
그러므로
만들 수 있는 문자열의 개수는
$27-5=22$

(b) △에 c가 나열된 경우
(a)와 같은 방법으로 구하면 만들 수 있는 문자열의 개수는 22
(a), (b)에 의하여 만들 수 있는 문자열의 개수는 $22+22=44$

(ⅱ) △aaa△□□일 때
2개의 △에 a가 아닌 두 문자를 나열하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_2\Pi_2 = 4$
2개의 □에 세 문자를 나열하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_3\Pi_2 = 9$
이때
조건을 만족시키지 않는 문자열은
$baaabbb$, baaaccc, $caaabbb$, $caaaccc$의
4가지이다.
그러므로
만들 수 있는 문자열의 개수는
$4\times9-4=32$

(ⅲ) □△aaa△□일 때
2개의 △에 a가 아닌 두 문자를 나열하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_2\Pi_2 = 4$
2개의 □에 세 문자를 나열하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_3\Pi_2 = 9$
그러므로
만들 수 있는 문자열의 개수는
$4\times9=36$

(ⅳ) □□△aaa△일 때
(ⅱ)와 같은 방법으로 구하면
만들 수 있는 문자열의 개수는 32

(ⅴ) □□□△aaa일 때
(ⅰ)과 같은 방법으로 구하면
만들 수 있는 문자열의 개수는 44

(ⅰ)~(ⅴ)에 의하여 만들 수 있는
모든 문자열의 개수는 $44+32+36+32+44=188$

중복조합

[2023년 9월 (확률과 통계) 30번]

17. 다음 조건을 만족시키는 13 이하의 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) $a \leq b \leq c \leq d$
> (나) $a \times d$는 홀수이고, $b+c$는 짝수이다.

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

336

조건 (나)를 만족시키는 (a, b, c, d)는
ⅰ) (홀, 홀, 홀, 홀) 또는 ⅱ) (홀, 짝, 짝, 홀)

ⅰ) (홀, 홀, 홀, 홀)인 경우
7개의 홀수 중에서 중복을 허락하여 4개를 선택
▸ ${}_7H_4$

ⅱ) (홀, 짝, 짝, 홀)인 경우
ⅱ-1) $d-a=12$일 때 ▸ 1가지 1
ex) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13
a, d 사이에서 중복 허락하여 짝수 2개 고르는 경우의 수
▸ ${}_6H_2$
$\therefore 1 \times {}_6H_2$

ⅱ-2) $d-a=10$일 때 ▸ 2가지 1 2
ex) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13
a, d 사이에서 중복 허락하여 짝수 2개 고르는 경우의 수
▸ ${}_5H_2$
$\therefore 2 \times {}_5H_2$

ⅱ-3) $d-a=8$일 때 ▸ 3가지 1 2 3
ex) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13
a, d 사이에서 중복 허락하여 짝수 2개 고르는 경우의 수
▸ ${}_4H_2$
$\therefore 3 \times {}_4H_2$

이와 같은 방법으로
${}_7H_4 + (1\,{}_6H_2 + 2\,{}_5H_2 + 3\,{}_4H_2 + 4\,{}_3H_2 + 5\,{}_2H_2 + 6\,{}_1H_2)$
$= 210 + 126 = 336$

[다른 풀이]
ⅱ) (홀, 짝, 짝, 홀)인 경우
6개의 짝수 중에서 중복을 허락하여 4개의 수 x_1, x_2, x_3, x_4를 선택한 후
$a = x_1 - 1$, $b = x_2$, $c = x_3$, $d = x_4 + 1$로 설정하면 된다.
▸ ${}_6H_4 = 126$

[2023년 7월 (확률과 통계) 30번]

18. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to X$의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) $f(7)-f(1)=3$
> (나) 5 이하의 모든 자연수 n에 대하여 $f(n) \le f(n+2)$이다.
> (다) $\frac{1}{3}|f(2)-f(1)|$과 $\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{4} f(2k-1)$의 값은 모두 자연수이다.

교육청 해설

[정답] 150

조건 (가)에 의하여 순서쌍 $(f(1), f(7))$은
$(1, 4)$, $(2, 5)$, $(3, 6)$, $(4, 7)$
조건 (나)에 의하여 $f(1) \le f(3) \le f(5) \le f(7)$
이고 $f(2) \le f(4) \le f(6)$
조건 (다)에 의하여 $|f(2)-f(1)|$과
$f(1)+f(3)+f(5)+f(7)$의 값은
모두 3의 배수인 자연수이다.

(ⅰ) $f(1)=1$, $f(7)=4$인 경우
$f(3)+f(5)=4$ 또는 $f(3)+f(5)=7$
순서쌍 $(f(3), f(5))$는
$(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 4)$
$f(1)=1$이므로 $f(2)=4$ 또는 $f(2)=7$
$f(2)=4$이면
순서쌍 $(f(4), f(6))$의 개수는 ${}_4\mathrm{H}_2$,
$f(2)=7$이면
순서쌍 $(f(4), f(6))$의 개수는 ${}_1\mathrm{H}_2$
${}_4\mathrm{H}_2+{}_1\mathrm{H}_2=10+1=11$
그러므로 $3\times 11=33$

(ⅱ) $f(1)=2$, $f(7)=5$인 경우
$f(3)+f(5)=5$ 또는 $f(3)+f(5)=8$
순서쌍 $(f(3), f(5))$는 $(2, 3)$, $(3, 5)$, $(4, 4)$
$f(1)=2$이므로 $f(2)=5$
순서쌍 $(f(4), f(6))$의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_2=6$
그러므로 $3\times 6=18$

(ⅲ) $f(1)=3$, $f(7)=6$인 경우
$f(3)+f(5)=6$ 또는 $f(3)+f(5)=9$
또는 $f(3)+f(5)=12$
순서쌍 $(f(3), f(5))$는
$(3, 3)$, $(3, 6)$, $(4, 5)$, $(6, 6)$
$f(1)=3$이므로 $f(2)=6$
순서쌍 $(f(4), f(6))$의 개수는 ${}_2\mathrm{H}_2=3$
그러므로 $4\times 3=12$

(ⅳ) $f(1)=4$, $f(7)=7$인 경우
$f(3)+f(5)=10$ 또는 $f(3)+f(5)=13$
순서쌍 $(f(3), f(5))$는
$(4, 6)$, $(5, 5)$, $(6, 7)$
$f(1)=4$이므로 $f(2)=1$ 또는 $f(2)=7$
$f(2)=1$이면
순서쌍 $(f(4), f(6))$의 개수는 ${}_7\mathrm{H}_2$
$f(2)=7$이면
순서쌍 $(f(4), f(6))$의 개수는 ${}_1\mathrm{H}_2$
${}_7\mathrm{H}_2+{}_1\mathrm{H}_2=28+1=29$
그러므로 $3\times 29=87$

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ), (ⅳ)에 의하여
$33+18+12+87=150$