이동훈
기출문제집

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

구성

▶ **'이동훈 기출문제집 교육청/사관/경찰 수학Ⅰ+수학Ⅱ'** 에는 교육청, 사관학교, 경찰대가 출제한 전체 문항 중에서 **2015개정 교육과정에 맞는 999개의 문항을 엄선**하여 수록하였습니다.

교육청 : 2002년 3월 ~ 2023년 11월 고3, 고2, 고1 (출제 년도 기준)
사관학교 : 2002학년도 ~ 2024학년도 (학년도 기준)
경찰대 : 1999학년도 ~ 2024학년도 (학년도 기준)

▶ 문항 선정의 기준은 다음과 같습니다.
단순 계산 문제는 제외
교과서의 기본문제 및 전형적인 응용문제는 필요한 문제만 수록
수능, 평가원 기출문제와 지나치게 중복되는 전형적인 응용문제는 필요한 문제만 수록
난문(어려운 4점)이지만 수능과 거리가 먼 문제는 제외

▶ 문항 정렬은 유형별, 난이도순을 따랐습니다.
유형별 문항 구성은 출제 의도를 뚜렷하게 보여줄 것이며,
난이도순은 학습의 효율성을 높일 것입니다.

▶ 모든 해설은 교과서에 근거합니다.
해설은 교과서의 정의/정리/성질/공식/법칙과 수학적 표현만으로 작성되었으며, 수학적으로 엄밀합니다.
핵심적인 풀이와 참고만을 수록하여 문제가 가진 출제의도를 뚜렷이 하였으며, 학습의 효율을 꾀하였습니다.

기호

〈 문제집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 수준별 문항 구분은 다음과 같습니다.

○ : 교과서 예제 또는 그 수준의 문제
○○ : 교과서 연습문제 또는 그 수준의 문제
○○○ : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 상대적으로 난이도 낮음
●●● : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 상대적으로 난이도 높음 (실전이론 필요성 비교적 높음)
★★★ : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 - 최고난문 (실전이론 필요성 매우 강함)

각 단계에 대한 학습법은 이동훈 기출 네이버 카페(cafe.naver.com/2math)에서 읽으실 수 있습니다.

〈 해설집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 해설집에는 다음의 세 방향의 풀이를 모두 수록하기 위하여 노력하였습니다.

(A) 교과서의 '기본개념' 과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(B) 교과서와 수능/평가원 기출문제에서 추론가능 한 '실전이론' 과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(C) 시험장에서 손끝에서 나와야 하는 풀이 (이에 해당하는 풀이에는 시험장 표시를 해두었습니다.)

모든 [풀이] 또는 [풀이1]은 (A) 또는 (C) 또는 이 둘 모두에 해당합니다.
[풀이2], [풀이3], … 은 (A)에 해당할 수도 있고, (B)에 해당할 수도 있습니다. ((C)는 시험장으로 표시)
[참고], [참고1], [참고2], … 는 (A)에 해당할 수도 있고, (B)에 해당할 수도 있습니다. ((C)는 시험장으로 표시)

만약 어떤 문제의 어느 해설에도 시험장 표시가 없다면 [풀이] 또는 [풀이1]이 시험장 풀이입니다.

<u>특히 (C)의 시험장 풀이(시험장)는 간결하므로 다른 풀이가 지나치게 길다고 생각된다면 시험장을 읽을 것을 권합니다.</u>

수능/평가원/교사경 기출문제에서 반복되는 '기본개념', '실전이론', '(실전이론에 따른) 전형적인 풀이 과정' 을 포함한 문제의 해설에는 다음과 같이 ★ 표시를 해두었습니다. (★가 표시된 풀이 또는 참고의 대부분은 개념적으로 중요합니다. 꼭 익혀두세요.)

[풀이] ★
[참고] ★

반드시 익혀야 하는 풀이 또는 참고가 아닌 경우에는 다음과 같이 (선택) 표시를 해두었습니다.

[풀이] (선택)
[참고] (선택)

단원별 알파벳 구성

과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학 Ⅰ	지수함수와 로그함수	A	기하	이차곡선	M
	삼각함수	B		평면벡터	N
	수열	C		공간도형과 공간좌표	P
수학 Ⅱ	함수의 극한과 연속	D	수학	다항식	Q
	미분	E		방정식과 부등식	R
	적분	F		도형의 방정식	S
미적분	수열의 극한	G		집합과 명제	T
	미분법	H		함수	U
	적분법	I		순열과 조합	V
확률과 통계	경우의 수	J	교육과정 外		Z
	확률	K			
	통계	L			

목 차

수학 I

수학 II

A 지수함수와 로그함수

- 2015개정 교육과정

○ 주기 함수 관련 문제 포함
○ 부등식의 영역 관련 문제 제외 또는 변형 수록

A. 거듭제곱근

A001

○○
(2009(6)고2-가형8)

집합 $X=\{-2,\ -1,\ 1,\ 2\}$에 대하여 두 집합 A, B를

$$A=\{\sqrt{x}\,|\,x\in X,\ \sqrt{x}\text{는 실수}\}$$
$$B=\{\sqrt[3]{x}\,|\,x\in X,\ \sqrt[3]{x}\text{는 실수}\}$$

라 하자. 집합 $A\cup B$의 모든 원소의 곱은? [3점]

① $2^{\frac{1}{2}}$ ② $2^{\frac{2}{3}}$ ③ $2^{\frac{5}{6}}$
④ 2 ⑤ $2^{\frac{7}{6}}$

A002

○○
(2009(9)고2-나형5)

1이 아닌 세 양수 a, b, c에 대하여, a^2은 b의 세제곱근이고 c^3은 b의 네제곱근이다.

$\log_a b+\log_b c=\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값은? (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

① 81 ② 82 ③ 83
④ 84 ⑤ 85

A003

○○
(2024경찰대(1차)-공통5)

두 실수 a, b가 다음 조건을 만족시킬 때, a^3-2b의 값은? [4점]

(가) b는 $-\sqrt{8}a$의 제곱근이다.
(나) $\sqrt[3]{a^2}b$는 -16의 세제곱근이다.

① $-2-2\sqrt{2}$ ② -2 ③ $4-2\sqrt{2}$
④ 2 ⑤ $2+2\sqrt{2}$

A004

○○○
(2008(9)고2-가형28)

양의 실수 k에 대하여 k의 네제곱근 중 실수인 것을 a, b $(a>b)$라 하고, k의 세제곱근 중 실수인 것을 c, $-k$의 세제곱근 중 실수인 것을 d라 한다.

이때, $\log_2\frac{c}{a}=\log_2\frac{b}{d}+1$을 만족하는 k의 값을 구하시오. [4점]

A005

○○
(2020(4)고3-나형18)

1이 아닌 세 양수 a, b, c와 1이 아닌 두 자연수 m, n이 다음 조건을 만족시킨다. 모든 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는? [4점]

(가) $\sqrt[3]{a}$는 b의 m제곱근이다.
(나) $\sqrt{b}$는 c의 n제곱근이다.
(다) c는 a^{12}의 네제곱근이다.

① 4 ② 7 ③ 10
④ 13 ⑤ 16

A. 거듭제곱근: 실근 개수

A006
○○ (2022(7)고3-확률과통계19/미적분19/기하19)

$n \geq 2$인 자연수 n에 대하여 $2n^2 - 9n$의 n제곱근 중에서 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $f(3)+f(4)+f(5)+f(6)$의 값을 구하시오. [3점]

A007
○○ (2023(9)고2-공통14)

$4 \leq n \leq 12$인 자연수 n에 대하여 $n^2 - 15n + 50$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 하자.
$f(n) = f(n+1)$을 만족시키는 모든 n의 값의 합은? [4점]

① 15 ② 17 ③ 19
④ 21 ⑤ 23

A008
○○ (2021(9)고2-공통15)

2 이상의 자연수 n에 대하여 $(2n-5)(2n-9)$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 하자. $\sum_{n=2}^{8} f(n)$의 값은? [4점]

① 5 ② 7 ③ 9
④ 11 ⑤ 13

▶ 이 문항은 수열에 속하지만 출제의도를 고려하여 이 단원에 두었습니다.

A009
○○ (2023(7)고3-확률과통계9/미적분9/기하9)

2 이상의 자연수 n에 대하여 x에 대한 방정식

$$(x^n - 8)(x^{2n} - 8) = 0$$

의 모든 실근의 곱이 -4일 때, n의 값은? [4점]

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

A010
○○○ (2017(6)고2-가형17)

두 집합 $A = \{3, 4\}$, $B = \{-9, -3, 3, 9\}$에 대하여 집합 X를
$X = \{x \mid x^a = b,\ a \in A,\ b \in B,\ x는\ 실수\}$
라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $\sqrt[3]{-9} \in X$
ㄴ. 집합 X의 원소의 개수는 8이다.
ㄷ. 집합 X의 원소 중 양수인 모든 원소의 곱은 $\sqrt[4]{3^7}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A011

○○○ (2021(11)고2-공통17)

2 이상의 자연수 n에 대하여 $2^{n-3}-8$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $\sum_{n=2}^{m} f(n)=15$가 되도록 하는 자연수 m의 값은? [4점]

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

▶ 이 문항은 수열에 속하지만 출제의도를 고려하여 이 단원에 두었습니다.

A012

○○○ (2020(3)고3-가형18)

다음은 $1 \le |m| < n \le 10$을 만족시키는 두 정수 m, n에 대하여 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 존재하도록 하는 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하는 과정이다.

〈과정〉

(ⅰ) $m>0$인 경우
n의 값의 관계없이 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 존재한다. 그러므로 $m>0$인 순서쌍 (m, n)의 개수는 (가) 이다.

(ⅱ) $m<0$인 경우
n이 홀수이면 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 항상 존재한다. 한편, n이 짝수이면 m의 n제곱근 중에서 실수인 것은 존재하지 않는다. 그러므로 $m<0$인 순서쌍 (m, n)의 개수는 (나) 이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 존재하도록 하는 순서쌍 (m, n)의 개수는
(가) + (나) 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 수를 각각 p, q라 할 때, $p+q$의 값은? [4점]

① 70 ② 65 ③ 60
④ 55 ⑤ 50

A013

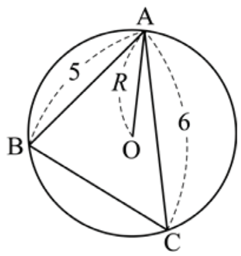
●●● (2022(9)고2-공통28)

2 이상의 자연수 n과 상수 k에 대하여 $n^2-17n+19k$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 하자.
$\sum_{n=2}^{19} f(n)=19$를 만족시키는 자연수 k의 값을 구하시오. [4점]

B. 코사인법칙: 사인법칙(원)

B118
○○
(2007(3)고2-공통27)

그림과 같이 반지름의 길이가 R인 원 O에 내접하는 삼각형 ABC가 있다.



$\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=6$, $\cos A=\dfrac{3}{5}$일 때, $16R$의 값을 구하시오. [4점]

B119
○○
(2021(4)고3-확률과통계20/미적분20/기하20)

$\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}=1:2:\sqrt{2}$인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 28π일 때, 선분 CA의 길이를 구하시오. [4점]

B120
○○
(2011(9)고2-나형8)

$\triangle ABC$에서 $\overline{AB}=\overline{AC}$일 때,

$$\log_2 \sin A-\log_2 \cos B-\log_2 \sin C$$

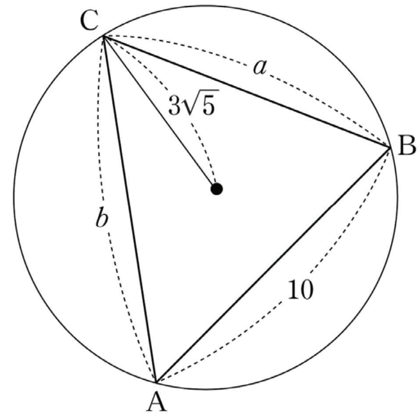
의 값은? [4점]

① $\dfrac{1}{16}$ ② $\dfrac{1}{8}$ ③ $\dfrac{1}{4}$

④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ 1

B121
○○
(2020(3)고3-나형19)

길이가 각각 10, a, b인 세 선분 AB, BC, CA를 각 변으로 하는 예각삼각형 ABC가 있다.
삼각형 ABC의 세 꼭짓점을 지나는 원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{5}$이고 $\dfrac{a^2+b^2-ab\cos C}{ab}=\dfrac{4}{3}$일 때, ab의 값은? [4점]



① 140 ② 150 ③ 160

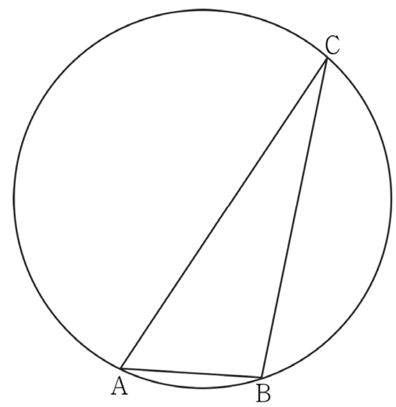
④ 170 ⑤ 180

B122

○○○ (2020(4)고3-가형19)

그림과 같이 원 C에 내접하고 $\overline{AB}=3$, $\angle BAC=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC가 있다.

원 C의 넓이가 $\frac{49}{3}\pi$일 때, 원 C 위의 점 P에 대하여 삼각형 PAC의 넓이의 최댓값은? (단, 점 P는 점 A도 아니고 점 C도 아니다.) [4점]



① $\frac{32}{3}\sqrt{3}$　② $\frac{34}{3}\sqrt{3}$　③ $12\sqrt{3}$
④ $\frac{38}{3}\sqrt{3}$　⑤ $\frac{40}{3}\sqrt{3}$

B123

●●● (2021(11)고2-공통29)

삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\cos A=-\frac{1}{4}$
(나) $\sin B+\sin C=\frac{9}{8}$

삼각형 ABC의 넓이가 $\sqrt{15}$일 때, 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

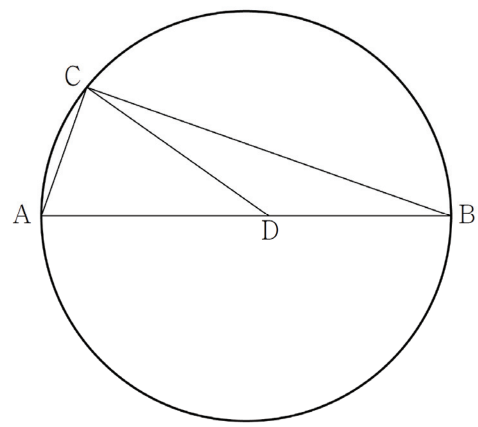
B124

○○ (2021(7)고3-확률과통계20/미적분20/기하20)

그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점 C에 대하여

$$\overline{BC}=12\sqrt{2},\ \cos(\angle CAB)=\frac{1}{3}$$

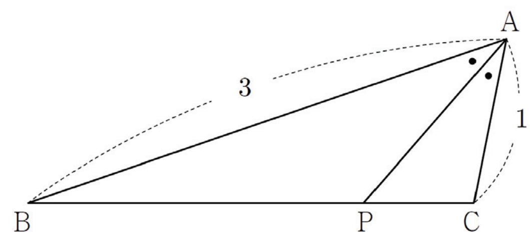
이다. 선분 AB를 $5:4$로 내분하는 점을 D라 할 때, 삼각형 CAD의 외접원의 넓이는 S이다. $\frac{S}{\pi}$의 값을 구하시오. [4점]



B125

○○ (2021(6)고2-공통15)

그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{AC}=1$이고 $\angle BAC=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC가 있다. $\angle BAC$의 이등분선이 선분 BC와 만나는 점을 P라 할 때, 삼각형 APC의 외접원의 넓이는? [4점]



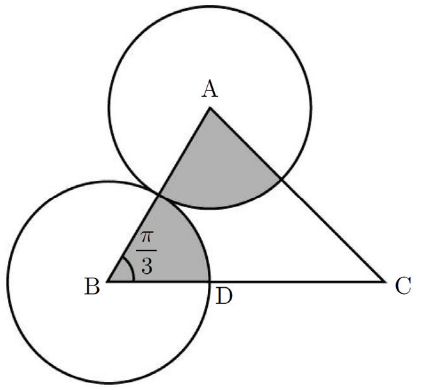
① $\frac{\pi}{4}$　② $\frac{5}{16}\pi$　③ $\frac{3}{8}\pi$
④ $\frac{7}{16}\pi$　⑤ $\frac{\pi}{2}$

B126

○○○
(2010(6)고2-가형28)

그림과 같이 $\triangle$ABC의 두 꼭짓점 A, B를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 같은 두 원이 외접한다.

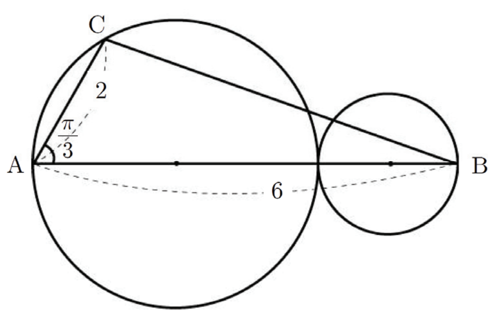
$\angle B=\frac{\pi}{3}$, $\overline{AC}=2\sqrt{6}$, $\overline{CD}=2\sqrt{3}$일 때, $\triangle$ABC의 내부의 두 부채꼴(어두운 부분) 넓이의 합은 $k\pi$이다. $100k$의 값을 구하시오. [4점]



B127

○○
(2010(6)고2-나형9)

그림과 같이 $\overline{AB}=6$, $\overline{AC}=2$, $\angle A=\frac{\pi}{3}$인 $\triangle$ABC의 선분 AB 위에 중심이 있는 서로 외접하는 두 원을 각각 O_1, O_2라 하자. 점 A, C는 원 O_1 위에, 점 B는 원 O_2 위에 있다. $\triangle$ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R, 원 O_1의 반지름의 길이를 r_1, 원 O_2의 반지름의 길이를 r_2라 할 때, $3R^2+r_1^2+r_2^2$의 값은? [4점]



① 21 ② 24 ③ 27
④ 30 ⑤ 33

B128

○○
(2020(9)고2-공통10)

삼각형 ABC에서

$$\frac{2}{\sin A}=\frac{3}{\sin B}=\frac{4}{\sin C}$$

일 때, $\cos C$의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ 0
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

B129

○○○
(2024경찰대(1차)-공통13)

삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\cos^2 A+\cos^2 B-\cos^2 C=1$
(나) $2\sqrt{2}\cos A+2\cos B+\sqrt{2}\cos C=2\sqrt{3}$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 3일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? [4점]

① $4\sqrt{3}$ ② $5\sqrt{2}$ ③ $6\sqrt{2}$
④ $5\sqrt{3}$ ⑤ $6\sqrt{3}$

B130

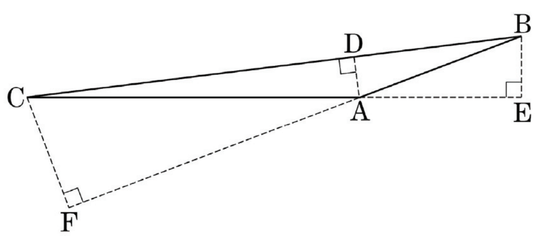
○○○ (2003(4)고3-예체능계30)

삼각형의 세 꼭짓점에서 각각의 대변 또는 그 연장선에 내린 수선의 길이의 비가 $2:3:4$이다. 이 삼각형의 세 내각 중 최대의 각을 θ라 할 때, $\cos\theta=-\frac{p}{q}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

B131

○○○ (2014(3)고2-B형19)

그림과 같이 $A>90^{\circ}$인 삼각형 ABC의 세 꼭짓점 A, B, C에서 세 직선 BC, CA, AB에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 하자. $\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{BE}}:\overline{\mathrm{CF}}=2:3:4$일 때, 삼각형 ABC에서 $\cos C$의 값은? [4점]



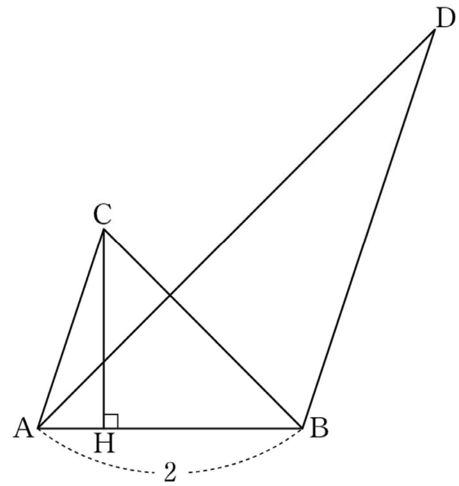
① $\frac{5}{6}$ ② $\frac{41}{48}$ ③ $\frac{7}{8}$

④ $\frac{43}{48}$ ⑤ $\frac{11}{12}$

B132

●●● (2021(3)고3-확률과통계21/미적분21/기하21)

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{AC}}//\overline{\mathrm{BD}}$, $\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{BD}}=1:2$인 두 삼각형 ABC, ABD가 있다. 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발 H는 선분 AB를 $1:3$으로 내분한다.



두 삼각형 ABC, ABD의 외접원의 반지름의 길이를 각각 r, R라 할 때, $4(R^2-r^2)\times\sin^2(\angle\mathrm{CAB})=51$이다. $\overline{\mathrm{AC}}^2$의 값을 구하시오. (단, $\angle\mathrm{CAB}<\frac{\pi}{2}$) [4점]

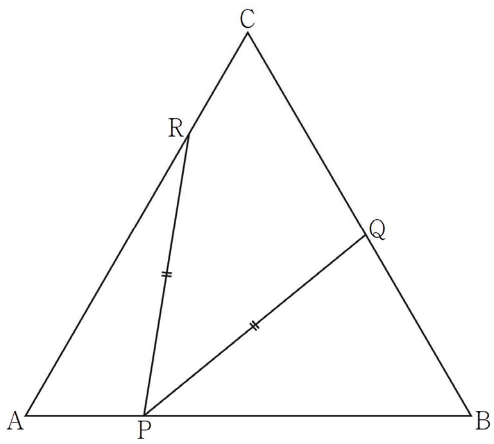
B133

(2020(11)고2-공통21)

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC가 있다. 선분 AB 위의 점 P, 선분 BC 위의 점 Q, 선분 CA 위의 점 R에 대하여 세 점 P, Q, R가

$$\overline{AP}+\overline{BQ}+\overline{CR}=1,\ \overline{PQ}=\overline{PR}$$

를 만족시킬 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, 세 점 P, Q, R는 각각 점 A, 점 B, 점 C가 아니다.) [4점]



ㄱ. $3\overline{AP}+2\overline{BQ}=2$

ㄴ. $\overline{QR}=\sqrt{3}\times\overline{AP}$

ㄷ. 삼각형 PBQ의 외접원의 넓이가 삼각형 CRQ의 외접원의 넓이의 2배일 때, $\overline{AP}=\dfrac{\sqrt{21}-3}{6}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

B134

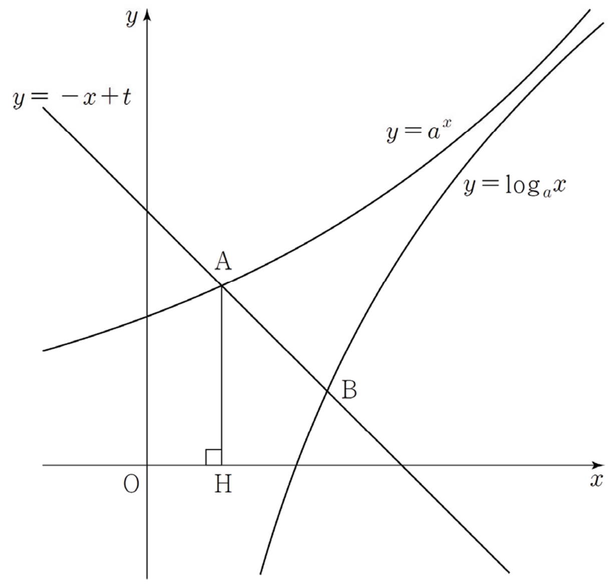
(2020(9)고2-공통29)

그림과 같이 1보다 큰 두 실수 a, t에 대하여 직선 $y=-x+t$가 두 곡선 $y=a^x$, $y=\log_a x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 세 점 A, B, H는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{OH}:\overline{AB}=1:2$

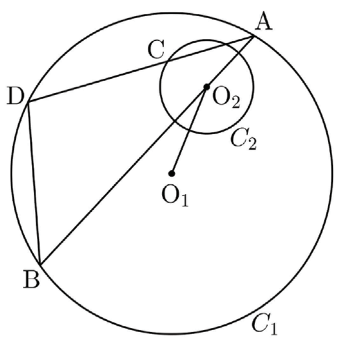
(나) 삼각형 AOB의 외접원의 반지름의 길이는 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이다.

$200(t-a)$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]



B135
(2023사관(1차)-확률과통계13/미적분13/기하13)

그림과 같이 중심이 O_1이고 반지름의 길이가 $r(r>3)$인 원 C_1과 중심이 O_2이고 반지름의 길이가 1인 원 C_2에 대하여 $\overline{O_1O_2}=2$이다. 원 C_1 위를 움직이는 점 A에 대하여 직선 AO_2가 원 C_1과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B라 하자. 원 C_2 위를 움직이는 점 C에 대하여 직선 AC가 원 C_1과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 D라 하자. 다음은 $\overline{BD}$가 최대가 되도록 네 점 A, B, C, D를 정할 때, $\overline{O_1C}^2$을 r에 대한 식으로 나타내는 과정이다.



삼각형 ADB에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{BD}}{\sin A}=$ (가)

이므로 $\overline{BD}$가 최대이려면 직선 AD가 원 C_2와 점 C에서 접해야 한다.

이때 직각삼각형 ACO_2에서 $\sin A=\dfrac{1}{\overline{AO_2}}$이므로

$\overline{BD}=\dfrac{1}{\overline{AO_2}}\times$ (가)

이다.

그러므로 직선 AD가 원 C_2와 점 C에서 접하고 $\overline{AO_2}$가 최소일 때 $\overline{BD}$는 최대이다.

$\overline{AO_2}$의 최솟값은

(나)

이므로 $\overline{BD}$가 최대일 때,

$\overline{O_1C}^2=$ (다)

이다.

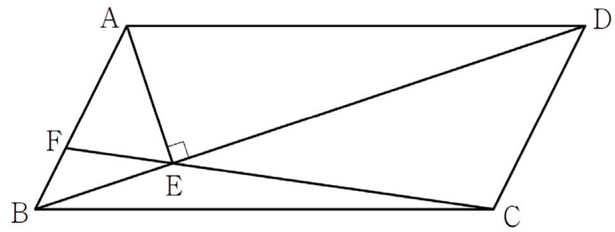
위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(r)$, $g(r)$, $h(r)$라 할 때, $f(4)\times g(5)\times h(6)$의 값은? [4점]

① 216 ② 192 ③ 168 ④ 144 ⑤ 120

B136
(2023(7)고3-확률과통계13/미적분13/기하13)

그림과 같이 평행사변형 ABCD가 있다. 점 A에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 E라 하고, 직선 CE가 선분 AB와 만나는 점을 F라 하자.

$\cos(\angle AFC)=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$, $\overline{EC}=10$이고 삼각형 CDE의 외접원의 반지름의 길이가 $5\sqrt{2}$일 때, 삼각형 AFE의 넓이는? [4점]



① $\dfrac{20}{3}$ ② 7 ③ $\dfrac{22}{3}$ ④ $\dfrac{23}{3}$ ⑤ 8

B. 코사인법칙: 원(원주각)

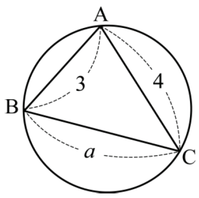
B137

○○
(2006(3)고2-공통19)

그림과 같이

$\overline{AB}=3,\ \overline{BC}=a,\ \overline{AC}=4$

인 삼각형 ABC가 원에 내접하고 있다.



이 원의 반지름의 길이를 R라 할 때, 옳은 내용을 보기에서 모두 고른 것은? [4점]

ㄱ. $a=5$이면 $R=\dfrac{5}{2}$이다.
ㄴ. $R=4$이면 $a=8\sin A$이다.
ㄷ. $1<a\le\sqrt{13}$일 때, $\angle A$의 최댓값은 60°이다.

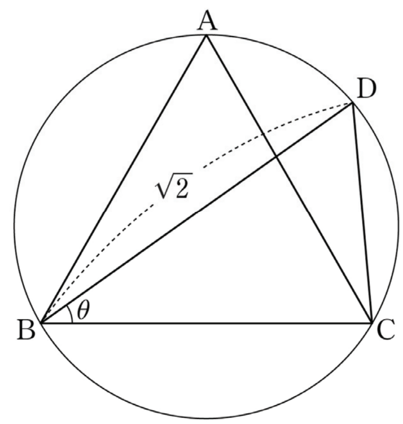
① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

B138

○○
(2020(10)고3-나형19)

정삼각형 ABC가 반지름의 길이가 r인 원에 내접하고 있다. 선분 AC와 선분 BD가 만나고 $\overline{BD}=\sqrt{2}$가 되도록 원 위에서 점 D를 잡는다. $\angle DBC=\theta$라 할 때,

$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이다. 반지름의 길이 r의 값은? [4점]

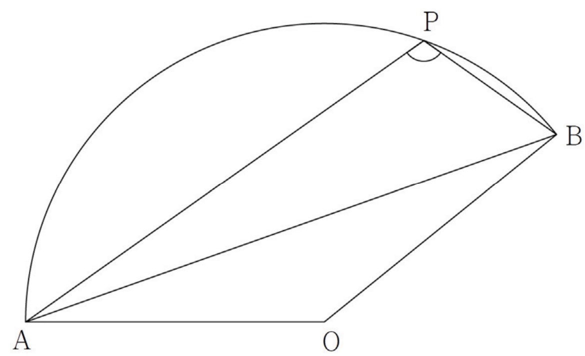


① $\dfrac{6-\sqrt{6}}{5}$　② $\dfrac{6-\sqrt{5}}{5}$　③ $\dfrac{4}{5}$
④ $\dfrac{6-\sqrt{3}}{5}$　⑤ $\dfrac{6-\sqrt{2}}{5}$

B139

○○
(2022(9)고2-공통14)

그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 6인 부채꼴 OAB가 있다. $\overline{AB}=8\sqrt{2}$이고 부채꼴 OAB의 호 AB 위의 한 점 P에 대하여 $\angle BPA>90^\circ$, $\overline{AP}:\overline{BP}=3:1$일 때, 선분 BP의 길이는? [4점]



① $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$　② $\dfrac{5\sqrt{6}}{6}$　③ $\sqrt{6}$
④ $\dfrac{7\sqrt{6}}{6}$　⑤ $\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$

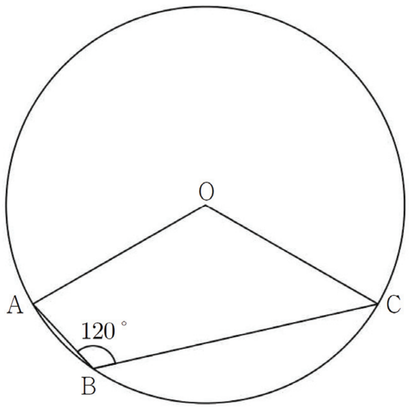
B140

○○○
(2021사관(1차)–가형15)

그림과 같이 반지름의 길이가 4이고 중심이 O인 원 위의 세 점 A, B, C에 대하여

$$\angle ABC = 120^\circ,\ \overline{AB} + \overline{BC} = 2\sqrt{15}$$

일 때, 사각형 OABC의 넓이는? [4점]



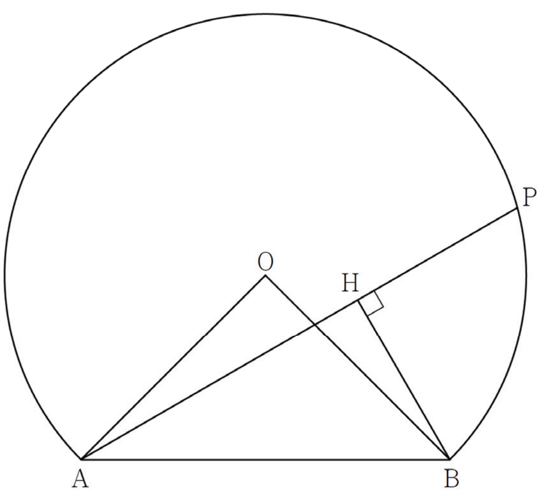
① $5\sqrt{3}$ ② $\dfrac{11\sqrt{3}}{2}$ ③ $6\sqrt{3}$

④ $\dfrac{13\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $7\sqrt{3}$

B141

○○○
(2020(9)고2–공통27)

그림과 같이 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 $\dfrac{3}{2}\pi$인 부채꼴 OBA가 있다. 호 BA 위에 점 P를 $\angle BAP = \dfrac{\pi}{6}$가 되도록 잡고, 점 B에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{OH}^2$의 값은 $m + n\sqrt{3}$이다. $m^2 + n^2$의 값을 구하시오. (단, m, n은 유리수이다.) [4점]

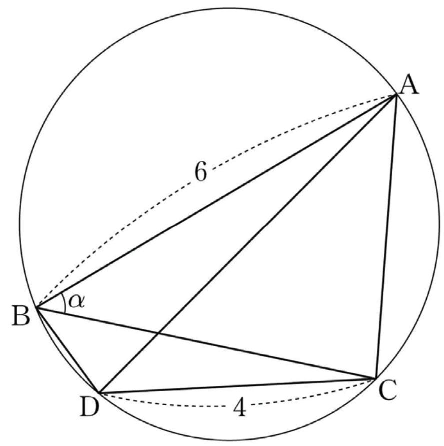


B142

○○○
(2020(3)고3–나형29)

그림과 같이 예각삼각형 ABC가 한 원에 내접하고 있다. $\overline{AB} = 6$이고, $\angle ABC = \alpha$라 할 때 $\cos\alpha = \dfrac{3}{4}$이다.

점 A를 지나지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\overline{CD} = 4$이다. 두 삼각형 ABD, CBD의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, $S_1 : S_2 = 9 : 5$이다. 삼각형 ADC의 넓이를 S라 할 때, S^2의 값을 구하시오. [4점]

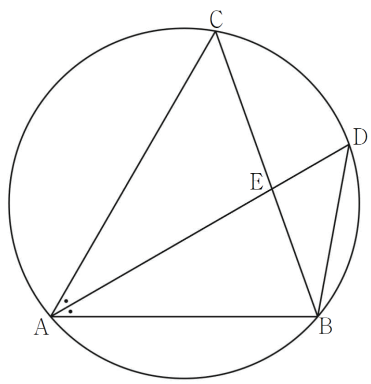


B143
(2022(11)고2–공통20)

반지름의 길이가 $\sqrt{3}$ 인 원 C에 내접하는 삼각형 ABC에 대하여 $\angle$BAC의 이등분선이 원 C와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 D라 하고, 두 선분 BC, AD의 교점을 E라 하자.

$\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{3}$ 일 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

> ㄱ. $\sin(\angle \mathrm{DBE})=\dfrac{1}{2}$
>
> ㄴ. $\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}+9$
>
> ㄷ. 삼각형 ABC의 넓이가 삼각형 BDE의 넓이의 4배가 되도록 하는 모든 $\overline{\mathrm{BE}}$의 값의 합은 $\dfrac{9}{4}$ 이다.



① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

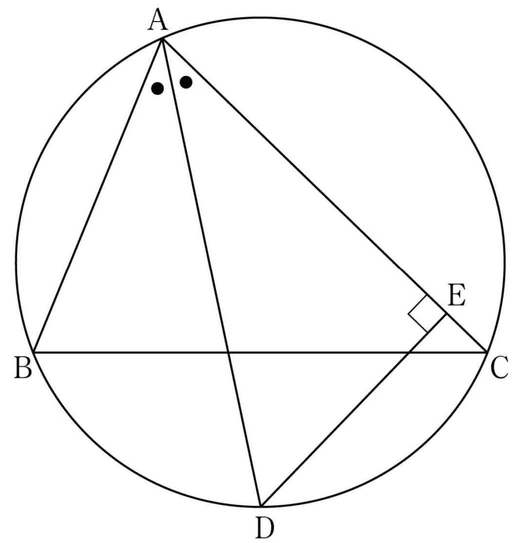
B144
(2021경찰대(1차)–공통20)

$\overline{\mathrm{AB}}=5$, $\overline{\mathrm{BC}}=7$, $\overline{\mathrm{AC}}=6$인 삼각형 ABC가 있다. 두 선분 AB, AC 위에 삼각형 ADE의 외접원이 선분 BC에 접하도록 점 D, E를 각각 잡을 때, 선분 DE의 길이의 최솟값은? [5점]

① $\dfrac{64}{15}$ ② $\dfrac{81}{20}$ ③ 4
④ $\dfrac{121}{30}$ ⑤ $\dfrac{144}{35}$

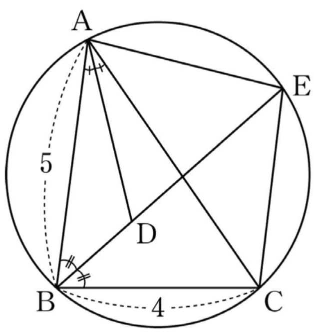
B145
(2021(10)고3–확률과통계21/미적분21/기하21)

$\overline{\mathrm{AB}}=6$, $\overline{\mathrm{AC}}=8$인 예각삼각형 ABC에서 $\angle$A의 이등분선과 삼각형 ABC의 외접원이 만나는 점을 D, 점 D에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 E라 하자. 선분 AE의 길이를 k라 할 때, $12k$의 값을 구하시오. [4점]



B146 (2021(3)고3-확률과통계15/미적분15/기하15)

그림과 같이 $\overline{AB}=5$, $\overline{BC}=4$, $\cos(\angle ABC)=\frac{1}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. $\angle ABC$의 이등분선과 $\angle CAB$의 이등분선이 만나는 점을 D, 선분 BD의 연장선과 삼각형 ABC의 외접원이 만나는 점을 E라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

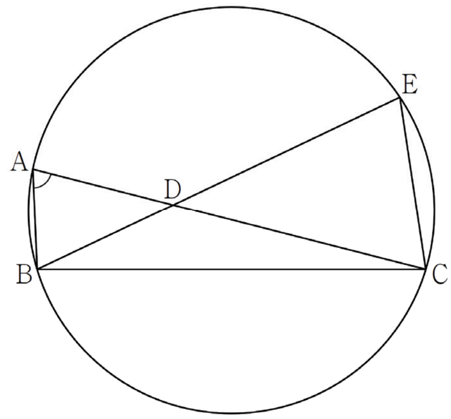


ㄱ. $\overline{AC}=6$
ㄴ. $\overline{EA}=\overline{EC}$
ㄷ. $\overline{ED}=\frac{31}{8}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

B147 (2023(9)고2-공통28)

그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\cos(\angle BAC)=\frac{\sqrt{3}}{6}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 한 점 D에 대하여 직선 BD가 삼각형 ABC의 외접원과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 E라 하자. $\overline{DE}=5$, $\overline{CD}+\overline{CE}=5\sqrt{3}$일 때, 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



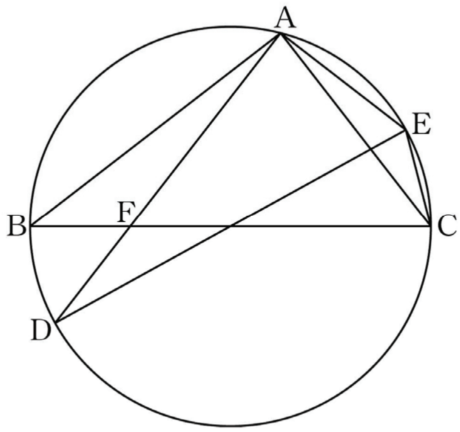
B148

(2023(10)고3-확률과통계21/미적분21/기하21)

그림과 같이 선분 BC를 지름으로 하는 원에 두 삼각형 ABC와 ADE가 모두 내접한다. 두 선분 AD와 BC가 점 F에서 만나고

$\overline{BC}=\overline{DE}=4$, $\overline{BF}=\overline{CE}$, $\sin(\angle CAE)=\frac{1}{4}$

이다. $\overline{AF}=k$일 때, k^2의 값을 구하시오. [4점]

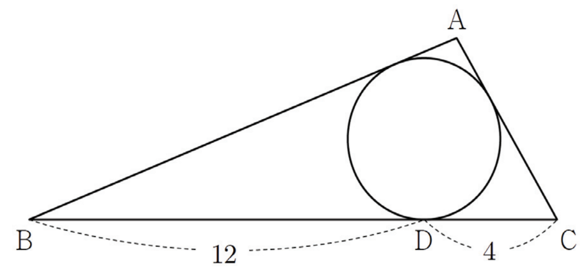


B. 코사인법칙: 원(외접삼각형)

B149

(2021(6)고2-공통18)

반지름의 길이가 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$인 원이 삼각형 ABC에 내접하고 있다. 원이 선분 BC와 만나는 점을 D라 하고 $\overline{BD}=12$, $\overline{DC}=4$일 때, 삼각형 ABC의 둘레의 길이는? [4점]



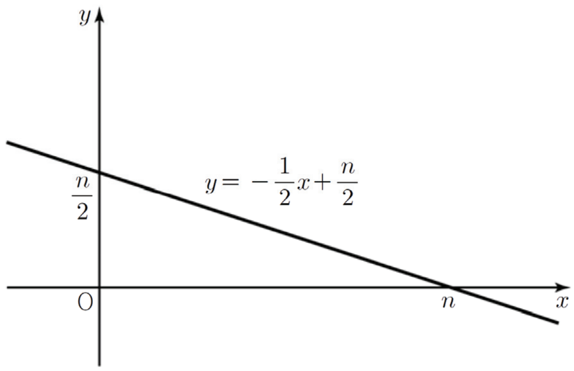
① $\frac{71}{2}$ ② 36 ③ $\frac{73}{2}$

④ 37 ⑤ $\frac{75}{2}$

C166

●●● (2017(6)고2-가형21)

좌표평면에서 자연수 n에 대하여 직선 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{n}{2}$과 x축, y축으로 둘러싸인 영역(경계선 포함)에 속하고 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수를 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{20} a_n$의 값은? [4점]



① 945 ② 946 ③ 947
④ 948 ⑤ 949

C. 수열의 귀납적 정의: 수형도

C167

○○ (2022(3)고3-확률과통계20/미적분20/기하20)

수열 $\{a_n\}$은 $1<a_1<2$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}-2a_n & (a_n<0)\\ a_n-2 & (a_n\geq 0)\end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_7=-1$일 때, $40\times a_1$의 값을 구하시오. [4점]

C168

○○ (2018(3)고3-나형26)

첫째항이 6인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}2-a_n & (a_n\geq 0)\\ a_n+p & (a_n<0)\end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_4=0$이 되도록 하는 모든 실수 p의 값의 합을 구하시오. [4점]

C169

○○ (2019(10)고3-나형29)

첫째항이 짝수인 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+3 & (a_n\text{이 홀수인 경우})\\ \frac{a_n}{2} & (a_n\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_5=5$일 때, 수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 될 수 있는 모든 수의 합을 구하시오. [4점]

C170

○○○ (2018(3)고2-나형26)

$a_3=3$인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n+3}{2} & (a_n\text{이 홀수인 경우})\\ \dfrac{a_n}{2} & (a_n\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$$

이다. $a_1\geq 10$일 때, $\sum_{k=1}^{5}a_k$의 값을 구하시오. [4점]

C171

○○○ (2021(4)고3-확률과통계21/미적분21/기하21)

첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}a_n-2 & (a_n\geq 0)\\ a_n+5 & (a_n<0)\end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_{15}<0$이 되도록 하는 a_1의 최솟값을 구하시오. [4점]

C172

●●● (2022사관(1차)-확률과통계15/미적분15/기하15)

다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_1의 최솟값을 m이라 하자.

(가) 수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 정수이다.
(나) 모든 자연수 n에 대하여
$a_{2n}=a_3\times a_n+1,\ a_{2n+1}=2a_n-a_2$
이다.

$a_1=m$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_9의 값은? [4점]

① -53 ② -51 ③ -49
④ -47 ⑤ -45

C173

●●● (2022(7)고3-확률과통계21/미적분21/기하21)

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\sum_{k=1}^{2n}a_k=17n$
(나) $|a_{n+1}-a_n|=2n-1$

$a_2=9$일 때, $\sum_{n=1}^{10}a_{2n}$의 값을 구하시오. [4점]

C174 ★★★ (2023(10)고3-확률과통계15/미적분15/기하15)

모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{2}a_n+2n & (a_n\text{이 }4\text{의 배수인 경우})\\ a_n+2n & (a_n\text{이 }4\text{의 배수가 아닌 경우})\end{cases}$$
> 이다.
> (나) $a_3>a_5$

$50<a_4+a_5<60$이 되도록 하는 a_1의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은? [4점]

① 224　② 228　③ 232　④ 236　⑤ 240

C175 ★★★ (2023(3)고3-확률과통계15/미적분15/기하15)

모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases}a_{n+1}+a_n & (a_{n+1}+a_n\text{이 홀수인 경우})\\ \frac{1}{2}(a_{n+1}+a_n) & (a_{n+1}+a_n\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_1=1$일 때, $a_6=34$가 되도록 하는 모든 a_2의 값의 합은? [4점]

① 60　② 64　③ 68　④ 72　⑤ 76

C176

★★★ (2023(4)고3-확률과통계15/미적분15/기하15)

다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_1의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $\log_2 \frac{M}{m}$의 값은? [4점]

> (가) 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1} = \begin{cases} 2^{n-2} & (a_n < 1) \\ \log_2 a_n & (a_n \geq 1) \end{cases}$$
> 이다.
> (나) $a_5 + a_6 = 1$

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

C177

★★★ (2023(7)고3-확률과통계15/미적분15/기하15)

모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_1 < 300$
> (나) 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{3}a_n & (\log_3 a_n\text{이 자연수인 경우}) \\ a_n + 6 & (\log_3 a_n\text{이 자연수가 아닌 경우}) \end{cases}$$
> 이다.

$\sum_{k=4}^{7} a_k = 40$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 315 ② 321 ③ 327 ④ 333 ⑤ 339

D. 함수의 연속: 곱으로 정의된 함수(곱이 0)

D059

○○
(2020사관(1차)–나형11)

함수

$$f(x)=\begin{cases} a & (x<1) \\ x+3 & (x\ge 1)\end{cases}$$

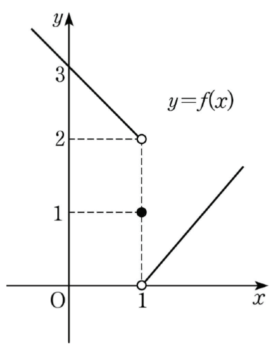
에 대하여 함수 $(x-a)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

D060

○○○
(2014(10)고3–A형14)

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



일차함수 $g(x)$에 대하여 $g(0)=\lim\limits_{x\to 1-}f(x)$이고, $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $g(-1)$의 값은? [4점]

① 0 ② 2 ③ 4
④ 6 ⑤ 8

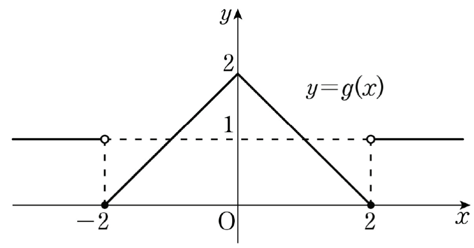
D061

○○
(2019(10)고3–나형14)

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x)=\begin{cases} -|x|+2 & (|x|\le 2) \\ 1 & (|x|>2)\end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이다. 함수 $y=f(x-a)g(x)$의 그래프가 한 점에서만 불연속이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 곱은? [4점]



① -16 ② -12 ③ -8
④ -4 ⑤ -1

D062

○○
(2014(7)고3–A형18)

다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=1,\ \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=k$$

를 만족시키고, 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} x+1 & (x\le 2) \\ 2-x & (x>2)\end{cases}$$

이다. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$가 $x=2$에서 연속이 되도록 하는 상수 k의 값은? [4점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

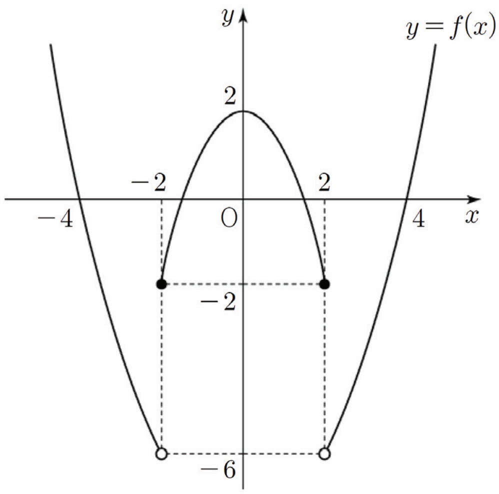
D063

○○ (2016(9)고2-가형17)

실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2-8 & (|x|>2)\\ -x^2+2 & (|x|\le 2)\end{cases}$$

의 그래프가 그림과 같다.



함수 $f(x)f(kx)$가 $x=2$에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 k의 값의 곱은? [4점]

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

D064

○○○ (2024경찰대(1차)-공통12)

함수

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+ax+b}{x-5} & (x\ne 5)\\ 7 & (x=5)\end{cases}$$

에 대하여 두 함수 $g(x)$, $h(x)$를

$$g(x)=\begin{cases}\sqrt{4-f(x)} & (x<1)\\ f(x) & (x\ge 1)\end{cases},$$

$$h(x)=\left|\{f(x)\}^2+\alpha\right|-11$$

이라 하자. 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 함수 $g(x)h(x)$도 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 α의 값의 곱은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① -34 ② -36 ③ -38
④ -40 ⑤ -42

D065

○○○ (2016(11)고2-가형21)

함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}-x+1 & (x\le -1)\\ 1 & (-1<x\le 1)\\ x-1 & (x>1)\end{cases}$$

이고 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. (나) 함수 $f(x)g(x+k)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 상수 k가 존재한다. (단, $k\ne 0$)

$g(0)<0$일 때, $g(2)$의 값은? [4점]

① 3 ② 6 ③ 9
④ 12 ⑤ 15

D066

○○○ (2021(3)고3-확률과통계20/미적분20/기하20)

실수 m에 대하여 직선 $y=mx$와 함수

$$f(x)=2x+3+|x-1|$$

의 그래프의 교점의 개수를 $g(m)$이라 하자. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $h(x)$에 대하여 함수 $g(x)h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $h(5)$의 값을 구하시오. [4점]

D067

★★★ (2017(9)고2-나형30)

세 정수 a, b, c에 대하여 이차함수 $f(x)=a(x-b)^2+c$라 하고, 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\geq 0) \\ f(-x) & (x<0) \end{cases}$$

이라 하자. 실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 곡선 $y=g(x)$와 만나는 서로 다른 점의 개수를 $h(t)$라 할 때, 함수 $h(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $h(2)<h(-1)<h(0)$
(나) 함수 $(t^2-t)h(t)$는 모든 실수 t에서 연속이다.

$80f\left(\dfrac{1}{2}\right)$의 값을 구하시오. [4점]

D068

●●● (2020(11)고2-공통29)

5 이하의 두 자연수 a, b에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를

$$f(x)=x^2-2ax+a^2-a+1,$$

$$g(x)=\begin{cases} x+b & (1<x<3) \\ 7-b & (x\leq 1 \text{ 또는 } x\geq 3) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구하시오. [4점]

E097
★★★
(2023(7)고3-확률과통계14/미적분14/기하14)

최고차항의 계수가 1이고 $f(-3)=f(0)$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<-3 \text{ 또는 } x\geq 0) \\ -f(x) & (-3\leq x<0) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $g(x)g(x-3)$이 $x=k$에서 불연속인 실수 k의 값이 한 개일 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. 함수 $g(x)g(x-3)$은 $x=0$에서 연속이다.
ㄴ. $f(-6)\times f(3)=0$
ㄷ. 함수 $g(x)g(x-3)$이 $x=k$에서 불연속인 실수 k가 음수일 때 집합 $\{x\,|\,f(x)=0,\ x\text{는 실수}\}$의 모든 원소의 합이 -1이면 $g(-1)=-48$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

E. 삼차함수의 그래프 개형: 삼차함수가 직선과 서로 다른 두 점에서 만난다.

E098
○○
(2011사관(1차)-이과7)

좌표평면에서 직선 $y=mx+8$이 곡선 $y=x^3+2x^2-3x$와 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수 m의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

E099
○○○
(2012사관(1차)-문과30)

두 다항함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 $f'(x)=6x^2$이고, $g'(x)=2x$이다. $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 두 점에서 만날 때, $f(0)-g(0)$의 값들의 합은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

▶ 이 문항은 적분에 속하지만 출제의도를 고려하여 이 단원에 두었습니다.

E100
○○○ (2023(10)고3-확률과통계12/미적분12/기하12)

양수 k에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=|x^3-12x+k|$$

라 하자. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a(a\geq 0)$이 만나는 서로 다른 점의 개수가 홀수가 되도록 하는 실수 a의 값이 오직 하나일 때, k의 값은? [4점]

① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

E101
○○○ (2018(7)고3-나형17)

최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(2)=f(5)$ (나) 방정식 $f(x)-p=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되게 하는 실수 p의 최댓값은 $f(2)$이다.

$\int_0^2 f(x)dx$의 값은? [4점]

① 25 ② 28 ③ 31
④ 34 ⑤ 37

▶ 이 문항은 적분에 속하지만 출제의도를 고려하여 이 단원에 두었습니다.

E102
○○○ (2021(3)고3-확률과통계14/미적분14/기하14)

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)+|f'(x)|$$

라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=g(0)=0$ (나) 방정식 $f(x)=0$은 양의 실근을 갖는다. (다) 방정식 $\lvert f(x)\rvert=4$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$g(3)$의 값은? [4점]

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

E103
○○○ (2022(7)고3-확률과통계13/미적분13/기하13)

최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<-2) \\ f(x)+8 & (x\geq -2) \end{cases}$$

라 하자. 방정식 $g(x)=f(-2)$의 실근이 2뿐일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은? [4점]

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4
④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

E104

○○○
(2017(10)고3-나형20)

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'\left(\frac{11}{3}\right)<0$
(나) 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값 35를 갖는다.
(다) 방정식 $f(x)=f(4)$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$f(0)$의 값은? [4점]

① 12 ② 13 ③ 14
④ 15 ⑤ 16

▶ 이 문항은 적분에 속하지만 출제의도를 고려하여 이 단원에 두었습니다.

E105

○○○
(2020(7)고3-나형20)

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(x)=x^2-4x$, $g'(x)=-2x$
(나) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=g(x)$의 그래프는 서로 다른 두 점에서만 만난다.

보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 모두 $x=0$에서 극대이다.
ㄴ. $\{f(0)-g(0)\}\times\{f(2)-g(2)\}=0$
ㄷ. 모든 실수 x에 대하여 $\int_{-1}^{x}\{f(t)-g(t)\}dt\geq 0$ 이면 $\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}dx=2$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

▶ 이 문항은 적분에 속하지만 출제의도를 고려하여 이 단원에 두었습니다.

E106

●●●
(2020(3)고3-나형21)

이차함수 $g(x)=x^2-6x+10$에 대하여 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.
(나) 함수 $(g\circ f)(x)$의 최솟값을 m이라 할 때, 방정식 $g(f(x))=m$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
(다) 방정식 $g(f(x))=17$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 합은? [4점]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

E107

●●●
(2020(4)고3-나형30)

양의 실수 t와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(t)=\frac{f(t)-f(0)}{t}$$

이라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(t)$의 최솟값은 0이다.
(나) x에 대한 방정식 $f'(x)=g(a)$를 만족시키는 x의 값은 a와 $\frac{5}{3}$이다.
(단, $a>\frac{5}{3}$인 상수이다.)

자연수 m에 대하여 집합 A_m을

$$A_m=\{x\,|\,f'(x)=g(m),\ 0<x\leq m\}$$

이라 할 때, $n(A_m)=2$를 만족시키는 모든 자연수 m의 값의 합을 구하시오. [4점]

E108

●●● (2017(11)고2-가형30)

최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$에서 x의 값이 1에서 $t(t>1)$까지 변할 때 평균변화율을 $g(t)$라 정의할 때, 함수 $g(t)$는 $t=2$에서 극댓값 0을 갖는다. 함수 $g(t)$의 최솟값이 존재할 때, 방정식 $f(x)=f(1)$의 서로 다른 실근의 합의 최솟값을 구하시오. [4점]

E109

★★★ (2021사관(1차)-나형30)

양수 a에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x(x+a)^2 & (x<0) \\ x(x-a)^2 & (x \ge 0) \end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=4x+t$의 서로 다른 교점의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(t)$의 최댓값은 5이다.
(나) 함수 $g(t)$가 $t=\alpha$에서 불연속인 α의 개수는 2이다.

$f'(0)$의 값을 구하시오. [4점]

E110 ★★★ (2022(7)고3-확률과통계22/미적분22/기하22)

삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 할 때, 함수 $h(x)$를

$h(x)=|f(x)|+g(x)$

라 하자. 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 곡선 $y=h(x)$ 위의 점 $(k,\ 0)(k\neq 0)$에서의 접선의 방정식은 $y=0$이다. (나) 방정식 $h(x)=0$의 실근 중에서 가장 큰 값은 12이다.

$h(3)=-\dfrac{9}{2}$일 때, $k\times\{h(6)-h(11)\}$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [4점]

E111 ★★★ (2023(10)고3-확률과통계22/미적분22/기하22)

삼차함수 $f(x)$에 대하여 구간 $(0,\ \infty)$에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} x^3-8x^2+16x & (0<x\leq 4) \\ f(x) & (x>4) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 구간 $(0,\ \infty)$에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킬 때, $g(10)=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

(가) $g\left(\dfrac{21}{2}\right)=0$ (나) 점 $(-2,\ 0)$에서 곡선 $y=g(x)$에 그은, 기울기가 0이 아닌 접선이 오직 하나 존재한다.

F. 정적분 계산: 평행이동/대칭이동

F082

○○
(2023경찰대(1차)-공통5)

사차함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극값 2를 갖고, $f(x)$가 x^3으로 나누어떨어질 때, $\int_0^2 f(x-1)dx$의 값은? [4점]

① $-\frac{12}{5}$ ② $-\frac{7}{5}$ ③ $-\frac{2}{5}$
④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{8}{5}$

F083

○○
(2021사관(1차)-나형28)

양수 a와 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \le x < 1$일 때, $f(x)=2x^2+ax$이다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1)=f(x)+a^2$이다.

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때,
곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [4점]

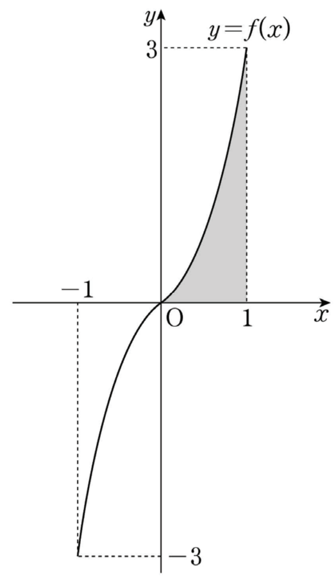
F084

○○○
(2020(3)고3-나형30)

닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 정의된 연속함수 $f(x)$는 정의역에서 증가하고 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$가 성립할 때, 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 $g(x)=f(x)$이다.
(나) 닫힌구간 $[2n-1,\ 2n+1]$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $2n$만큼, y축의 방향으로 $6n$만큼 평행이동한 그래프이다. (단, n은 자연수이다.)

$f(1)=3$이고 $\int_0^1 f(x)dx=1$일 때, $\int_3^6 g(x)dx$의 값을 구하시오. [4점]



F085

(2023(3)고3-확률과통계20/미적분20/기하20)

최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=1$인 삼차함수 $f(x)$와 양의 실수 p에 대하여 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $g'(0)=0$
>
> (나) $g(x)=\begin{cases} f(x-p)-f(-p) & (x<0) \\ f(x+p)-f(p) & (x \geq 0) \end{cases}$

$\int_0^p g(x)dx=20$일 때, $f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

F086

(2001(1차)경찰대-공통14)

함수 $f(x)$가 다음 두 식

$$f(x+2)=-f(x),\ \int_0^2 f(x)dx=1$$

을 만족할 때, $\int_{-2}^4 f(x)dx$의 값을 구하면? [3점]

F087

(2016(7)고3-나형30)

다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^4}=1$
>
> (나) $f(1)=f'(1)=1$

$-1\leq n\leq 4$인 정수 n에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x-n)+n(n\leq x<n+1)$$

이라 하자. 함수 $g(x)$가 열린구간 $(-1,\ 5)$에서 미분가능할 때, $\int_0^4 g(x)dx=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

F088

★★★ (2023(4)고3-확률과통계22/미적분22/기하22)

두 상수 a, $b(b\neq 1)$과 이차함수 $f(x)$에 대하여
함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, 도함수 $g'(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
(나) $\lvert x\rvert<2$일 때, $g(x)=\int_0^x(-t+a)dt$이고 $\lvert x\rvert\geq 2$일 때, $\lvert g'(x)\rvert=f(x)$이다.
(다) 함수 $g(x)$는 $x=1$, $x=b$에서 극값을 갖는다.

$g(k)=0$을 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합이 $p+q\sqrt{3}$일 때, $p\times q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이다.) [4점]

F. 정적분 계산: 주기성

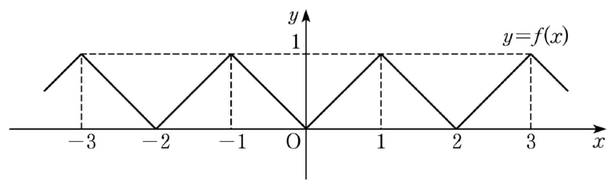
F089

○○ (2014(10)고3-A형19)

모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x+2)=f(x)$
(나) $f(x)=\lvert x\rvert$ $(-1\leq x<1)$

함수 $g(x)=\int_{-2}^{x}f(t)dt$라 할 때,
실수 a에 대하여 $g(a+4)-g(a)$의 값은? [4점]



① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

F090

○○○ (2020(7)고3-나형28)

모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$, $f(x+3)=f(x)$이고 $\int_{-1}^{2}\{f(x)+x^2-1\}^2dx$의 값이 최소가 되도록 하는 연속함수 $f(x)$에 대하여 $\int_{-1}^{26}f(x)dx$의 값을 구하시오. [4점]

F. 정적분 계산: 대소비교

F091

●●●

(2018(7)고3-나형20)

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f'(-x)=-f'(x)$$

를 만족시킨다. $f'(1)=0$, $f(1)=2$일 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $f'(-1)=0$

ㄴ. 모든 실수 k에 대하여

$$\int_{-k}^{0} f(x)dx=\int_{0}^{k} f(x)dx$$

ㄷ. $0<t<1$인 모든 실수 t에 대하여

$$\int_{-t}^{t} f(x)dx<6t$$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

F092

★★★

(2023(7)고3-확률과통계22/미적분22/기하22)

최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)-x-f(t)+t$$

라 할 때, 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 하자. 두 함수 $f(x)$와 $h(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{t\to -1}\{h(t)-h(-1)\}=\lim_{t\to 1}\{h(t)-h(1)\}=2$

(나) $\int_{0}^{\alpha} f(x)dx=\int_{0}^{\alpha} |f(x)|dx$를 만족시키는 실수 α의 최솟값은 -1이다.

(다) 모든 실수 x에 대하여

$$\frac{d}{dx}\int_{0}^{x}\{f(u)-ku\}du\geq 0$$

이 되도록 하는 실수 k의 최댓값은 $f'(\sqrt{2})$이다.

$f(6)$의 값을 구하시오. [4점]

이동훈
기출문제집

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

빠른 답지

단원별 알파벳구성

과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학 Ⅰ	지수함수와 로그함수	A	기하	이차곡선	M
	삼각함수	B		평면벡터	N
	수열	C		공간도형과 공간좌표	P
수학 Ⅱ	함수의 극한과 연속	D	수학	다항식	Q
	미분	E		방정식과 부등식	R
	적분	F		도형의 방정식	S
미적분	수열의 극한	G		집합과 명제	T
	미분법	H		함수	U
	적분법	I		순열과 조합	V
확률과 통계	경우의 수	J	교육과정 外		Z
	확률	K			
	통계	L			

A 지수함수와 로그함수

1	⑤	2	⑤	3	③	4	64	5	①
6	4	7	③	8	③	9	②	10	⑤
11	②	12	②	13	3	14	③	15	②
16	17	17	③	18	62	19	16	20	⑤
21	⑤	22	①	23	④	24	②	25	②
26	①	27	②	28	②	29	973	30	56
31	②	32	①	33	④	34	③	35	②
36	81	37	250	38	②	39	④	40	①
41	②	42	①	43	②	44	6	45	③
46	②	47	16	48	20	49	④	50	12
51	③	52	④	53	①	54	28	55	⑤
56	64	57	⑤	58	25	59	⑤	60	45
61	46	62	②	63	12	64	①	65	7
66	193	67	217	68	72	69	127	70	⑤
71	⑤	72	②	73	①	74	35	75	②
76	③	77	④	78	③	79	⑤	80	31
81	⑤	82	③	83	⑤	84	4	85	③
86	③	87	8	88	③	89	③	90	③
91	④	92	①	93	③	94	②	95	③
96	②	97	①	98	③	99	⑤	100	60
101	78	102	④	103	②	104	①	105	①
106	128	107	3	108	⑤	109	④	110	①
111	④	112	④	113	⑤	114	⑤	115	③
116	⑤	117	③	118	③	119	75	120	②
121	⑤	122	⑤	123	54	124	40	125	⑤
126	①	127	6	128	4	129	⑤	130	11
131	②	132	②	133	①	134	②	135	③
136	③	137	9	138	13	139	⑤	140	⑤
141	③	142	③	143	⑤	144	②	145	③
146	④	147	③	148	④	149	⑤	150	24
151	12	152	③	153	⑤	154	②	155	⑤
156	②	157	⑤	158	③	159	②	160	①
161	③	162	②	163	⑤	164	②	165	5
166	③	167	①	168	⑤	169	②	170	④
171	19	172	10	173	④	174	5	175	⑤
176	②	177	5	178	②	179	③	180	49
181	⑤	182	①	183	16	184	16	185	4
186	75	187	⑤	188	①	189	10	190	⑤
191	52	192	9	193	12	194	②	195	②
196	②	197	④	198	②	199	25	200	12
201	④	202	③	203	25	204	⑤	205	12
206	⑤	207	②	208	②	209	①	210	③
211	24	212	②	213	4	214	③	215	15
216	①	217	④	218	⑤	219	16	220	①

B 삼각함수

1	②	2	④	3	③	4	①	5	④
6	③	7	①	8	②	9	⑤	10	②
11	②	12	10	13	①	14	③	15	⑤
16	⑤	17	①	18	④	19	13	20	8
21	13	22	14	23	①	24	5	25	④
26	④	27	①	28	③	29	40	30	10
31	①	32	③	33	⑤	34	④	35	10
36	⑤	37	⑤	38	①	39	49	40	59
41	②	42	9	43	④	44	⑤	45	②
46	④	47	⑤	48	②	49	⑤	50	①
51	①	52	④	53	④	54	80	55	③
56	②	57	③	58	7	59	14	60	④
61	②	62	⑤	63	①	64	②	65	29
66	③	67	30	68	③	69	②	70	④
71	⑤	72	③	73	53	74	③	75	③
76	③	77	①	78	③	79	③	80	480
81	10	82	⑤	83	⑤	84	④	85	74
86	35	87	②	88	②	89	②	90	110
91	686	92	169	93	192	94	①	95	②
96	②	97	①	98	②	99	③	100	⑤
101	①	102	192	103	⑤	104	27	105	②
106	③	107	②	108	①	109	④	110	①
111	③	112	③	113	⑤	114	③	115	17
116	②	117	11	118	50	119	7	120	⑤
121	②	122	①	123	71	124	27	125	④
126	150	127	⑤	128	②	129	③	130	35
131	④	132	15	133	④	134	50	135	④
136	①	137	⑤	138	①	139	⑤	140	⑤
141	20	142	63	143	⑤	144	⑤	145	84
146	②	147	191	148	6	149	②	150	②
151	50	152	②	153	⑤	154	①	155	103
156	36	157	⑤	158	13	159	④	160	④
161	22								

C 수열

1	5	2	③	3	29	4	⑤	5	③
6	⑤	7	26	8	24	9	⑤	10	①
11	200	12	④	13	④	14	③	15	35
16	8	17	③	18	②	19	⑤	20	105
21	③	22	26	23	13	24	②	25	64
26	200	27	315	28	150	29	①	30	29
31	⑤	32	④	33	⑤	34	435	35	17
36	④	37	26	38	③	39	①	40	273
41	①	42	30	43	④	44	33	45	①
46	④	47	⑤	48	④	49	13	50	④
51	170	52	③	53	③	54	⑤	55	①
56	18	57	544	58	④	59	13	60	162
61	⑤	62	①	63	②	64	118	65	192
66	①	67	512	68	③	69	42	70	513
71	④	72	⑤	73	③	74	67	75	11
76	②	77	⑤	78	18	79	①	80	④
81	324	82	③	83	①	84	80	85	27
86	⑤	87	117	88	84	89	③	90	⑤
91	64	92	10	93	④	94	①	95	④
96	②	97	②	98	②	99	242	100	128
101	④	102	①	103	②	104	⑤	105	②
106	②	107	④	108	⑤	109	⑤	110	477
111	9	112	146	113	②	114	②	115	③
116	⑤	117	184	118	④	119	③	120	②
121	16	122	④	123	5	124	⑤	125	①
126	①	127	⑤	128	④	129	①	130	358
131	④	132	②	133	675	134	⑤	135	③
136	164	137	370	138	395	139	④	140	③
141	①	142	553	143	616	144	670	145	308
146	525	147	④	148	①	149	120	150	95
151	①	152	③	153	③	154	51	155	⑤
156	⑤	157	183	158	③	159	120	160	214
161	⑤	162	②	163	132	164	⑤	165	427
166	①	167	70	168	8	169	142	170	27
171	5	172	①	173	180	174	②	175	③
176	④	177	④	178	87	179	②	180	③
181	①	182	⑤	183	496	184	271	185	570
186	282	187	③	188	65	189	64	190	⑤
191	⑤	192	②	193	①	194	79	195	③
196	②	197	③	198	123	199	7	200	235
201	③	202	①	203	①	204	603	205	⑤
206	③	207	195	208	②	209	225	210	②
211	①	212	②	213	252	214	③	215	⑤
216	②	217	①	218	⑤	219	⑤	220	②
221	②	222	③	223	④	224	③	225	③
226	②	227	④	228	③	229	①	230	⑤
231	①	232	②	233	①	234	①	235	④
236	③	237	⑤	238	①	239	⑤	240	③
241	③	242	②	243	⑤	244	⑤	245	②
246	⑤	247	④	248	⑤	249	③		

D 함수의 극한과 연속

1	④	2	④	3	①	4	①	5	④
6	③	7	④	8	②	9	④	10	21
11	①	12	8	13	③	14	60	15	②
16	④	17	④	18	⑤	19	②	20	④
21	2	22	④	23	⑤	24	④	25	④
26	15	27	②	28	4	29	①	30	②
31	①	32	19	33	28	34	311	35	④
36	①	37	③	38	19	39	5	40	⑤
41	③	42	②	43	②	44	480	45	③
46	②	47	15	48	6	49	32	50	①
51	12	52	7	53	①	54	16	55	⑤
56	③	57	56	58	44	59	⑤	60	③
61	①	62	②	63	③	64	④	65	⑤
66	8	67	60	68	7	69	③	70	③
71	4	72	④	73	②	74	①		

E 미분

1	②	2	②	3	①	4	④	5	③
6	③	7	25	8	③	9	①	10	⑤
11	③	12	②	13	11	14	56	15	30
16	①	17	⑤	18	②	19	②	20	③
21	18	22	③	23	16	24	⑤	25	54
26	③	27	31	28	②	29	①	30	50
31	118	32	②	33	③	34	32	35	③
36	④	37	11	38	64	39	②	40	16
41	②	42	④	43	④	44	⑤	45	240
46	②	47	48	48	45	49	②	50	⑤
51	①	52	22	53	②	54	③	55	④
56	④	57	④	58	⑤	59	④	60	①
61	①	62	④	63	④	64	20	65	①
66	⑤	67	②	68	③	69	②	70	③
71	24	72	⑤	73	③	74	⑤	75	4
76	26	77	①	78	19	79	226	80	③
81	⑤	82	④	83	①	84	①	85	③
86	9	87	④	88	39	89	④	90	⑤
91	82	92	56	93	③	94	64	95	①
96	①	97	⑤	98	③	99	28	100	⑤
101	②	102	①	103	③	104	④	105	⑤
106	①	107	35	108	8	109	36	110	121
111	29	112	⑤	113	①	114	②	115	30
116	196	117	②	118	①	119	③	120	②
121	3	122	4	123	④	124	⑤	125	20
126	③	127	①	128	①	129	23	130	54
131	9	132	108	133	⑤	134	④	135	①
136	①	137	②	138	①	139	17	140	⑤
141	②	142	②	143	②	144	④	145	⑤
146	⑤	147	21	148	82	149	③	150	③
151	④	152	②	153	130	154	36	155	729
156	①	157	⑤	158	①	159	⑤	160	⑤
161	①	162	③	163	①	164	③	165	③
166	59	167	12	168	160	169	④	170	⑤
171	⑤	172	②	173	34	174	③	175	②
176	6	177	③	178	①	179	③		

F 적분

1	12	2	⑤	3	①	4	①	5	⑤
6	③	7	②	8	⑤	9	50	10	①
11	④	12	4	13	57	14	③	15	24
16	①	17	①	18	②	19	27	20	250
21	⑤	22	80	23	⑤	24	②	25	①
26	⑤	27	80	28	⑤	29	251	30	③
31	③	32	⑤	33	②	34	②	35	432
36	④	37	20	38	⑤	39	①	40	②
41	②	42	②	43	8	44	16	45	30
46	①	47	②	48	20	49	④	50	⑤
51	②	52	13	53	290	54	35	55	②
56	⑤	57	37	58	②	59	⑤	60	⑤
61	①	62	⑤	63	④	64	21	65	⑤
66	⑤	67	④	68	②	69	③	70	②
71	③	72	④	73	34	74	25	75	54
76	③	77	③	78	①	79	④	80	④
81	⑤	82	①	83	17	84	41	85	66
86	−1	87	137	88	32	89	②	90	12
91	⑤	92	182	93	200	94	54	95	17
96	④	97	36	98	③	99	2	100	27
101	340	102	11	103	②	104	32	105	②
106	64	107	18	108	②	109	③	110	②
111	⑤	112	①	113	11	114	8	115	16
116	14								

해설 목차

수학 I

수학 II

A 지수함수와 로그함수

1	⑤	2	⑤	3	③	4	64	5	①
6	4	7	③	8	③	9	②	10	⑤
11	②	12	②	13	3	14	③	15	②
16	17	17	③	18	62	19	16	20	⑤
21	⑤	22	①	23	④	24	②	25	②
26	①	27	②	28	②	29	973	30	56
31	②	32	①	33	④	34	③	35	②
36	81	37	250	38	②	39	④	40	①
41	②	42	①	43	②	44	6	45	③
46	②	47	16	48	20	49	④	50	12
51	③	52	④	53	①	54	28	55	⑤
56	64	57	⑤	58	25	59	⑤	60	45
61	46	62	②	63	12	64	①	65	7
66	193	67	217	68	72	69	127	70	⑤
71	⑤	72	②	73	①	74	35	75	②
76	③	77	④	78	③	79	⑤	80	31
81	⑤	82	③	83	⑤	84	4	85	③
86	③	87	8	88	③	89	③	90	③
91	④	92	①	93	③	94	②	95	③
96	②	97	①	98	③	99	⑤	100	60
101	78	102	④	103	②	104	①	105	①
106	128	107	3	108	⑤	109	④	110	①
111	④	112	④	113	⑤	114	⑤	115	③
116	⑤	117	③	118	③	119	75	120	②
121	⑤	122	⑤	123	54	124	40	125	⑤
126	①	127	6	128	4	129	⑤	130	11
131	②	132	②	133	①	134	②	135	③
136	③	137	9	138	13	139	⑤	140	⑤
141	③	142	③	143	⑤	144	②	145	③
146	④	147	③	148	④	149	⑤	150	24
151	12	152	③	153	⑤	154	②	155	⑤
156	②	157	⑤	158	③	159	②	160	①
161	③	162	②	163	⑤	164	②	165	5
166	③	167	①	168	⑤	169	②	170	④
171	19	172	10	173	④	174	5	175	⑤
176	②	177	5	178	②	179	③	180	49
181	⑤	182	①	183	16	184	16	185	4
186	75	187	⑤	188	①	189	10	190	⑤
191	52	192	9	193	12	194	②	195	②
196	②	197	④	198	②	199	25	200	12

201	④	202	③	203	25	204	⑤	205	12
206	⑤	207	②	208	②	209	①	210	③
211	24	212	②	213	4	214	③	215	15
216	①	217	④	218	⑤	219	16	220	①

A001 | 답 ⑤

[풀이] ★

-2의 제곱근 중에서 실수는 없다.

-1의 제곱근 중에서 실수는 없다.

1의 제곱근 중에서 양의 실수는 1이다.

2의 제곱근 중에서 양의 실수는 $\sqrt{2}$이다.

집합 A는

$A=\{1,\ \sqrt{2}\}$

-2의 세제곱근 중에서 실수는 $-\sqrt[3]{2}$이다.

-1의 세제곱근 중에서 실수는 -1이다.

1의 세제곱근 중에서 실수는 1이다.

2의 세제곱근 중에서 실수는 $\sqrt[3]{2}$이다.

집합 B는

$B=\{-\sqrt[3]{2},\ -1,\ 1,\ \sqrt[3]{2}\}$

집합 $A\cup B$는

$A\cup B$

$=\{-\sqrt[3]{2},\ -1,\ 1,\ \sqrt[3]{2},\ \sqrt{2}\}$

이므로 구하는 값은

$2^{2\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}=2^{\frac{7}{6}}$

답 ⑤

A002 | 답 ⑤

[풀이]

a^2은 $x^3=b$의 실근이므로

$(a^2)^3=b$

c^3은 $x^4=b$의 실근이므로

$(c^3)^4=b$

로그의 성질에 의하여

$\therefore\ \dfrac{q}{p}=\log_a(a^2)^3+\log_{(c^3)^4}c$

$=\log_a a^6+\log_{c^{12}}c$

$=6+\dfrac{1}{12}=\dfrac{73}{12}$

$\therefore\ p+q=85$

답 ⑤

A003 | 답 ③

[풀이]

(가): $b^2=-\sqrt{8}a$, 즉 $b^4=8a^2$

(나): $(\sqrt[3]{a^2}b)^3=-16$, 즉 $a^2b^3=-16$

위의 두 등식을 연립하면

$\frac{b^4}{8}b^3=-16$, $b^7=-2^7$, $b=-2$, $a=-\sqrt{2}$

$\therefore$ $a^3-2b=-2\sqrt{2}+4$

답 ③

A004 | 답 64

[풀이] ★

방정식 $x^4=k(>0)$의 네 근 중에서 실수인 두 근은 각각

$-\sqrt[4]{k}(=b)$, $\sqrt[4]{k}(=a)$

방정식 $x^3=k(>0)$의 실근은

$\sqrt[3]{k}(=c)$

방정식 $x^3=-k(<0)$의 실근은

$\sqrt[3]{-k}(=-\sqrt[3]{k}=d)$

정리하면

$a=\sqrt[4]{k}$, $b=-\sqrt[4]{k}$, $c=\sqrt[3]{k}$, $d=-\sqrt[3]{k}$

문제에서 주어진 등식에 대입하면

$$\log_2\frac{\sqrt[3]{k}}{\sqrt[4]{k}}=\log_2\frac{-\sqrt[4]{k}}{-\sqrt[3]{k}}+1$$

지수법칙에 의하여

$$\log_2 k^{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}=\log_2 k^{\frac{1}{4}-\frac{1}{3}}+1$$

로그의 성질에 의하여

$$\frac{1}{12}\log_2 k=-\frac{1}{12}\log_2 k+1$$

정리하면

$\log_2 k=6$

로그의 정의에 의하여

$\therefore$ $k=2^6=64$

답 64

A005 | 답 ①

[풀이]

문제에서 주어진 세 조건에 의하여

$\sqrt[3]{a}=\sqrt[m]{b}$, $\sqrt{b}=\sqrt[n]{c}$, $c=\sqrt[4]{a^{12}}$

즉,

$c=a^3$, $a=b^{\frac{3}{m}}$, $b=c^{\frac{2}{n}}$ 이므로

$c=a^3=b^{\frac{9}{m}}=c^{\frac{18}{mn}}$ 에서

$\frac{18}{mn}=1$, 즉 $mn=18$

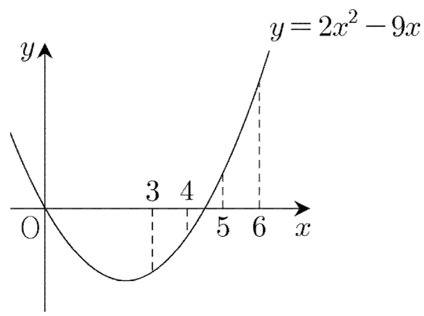
m이 가질 수 있는 값은 2, 3, 6, 9 뿐이므로

순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는 4이다.

답 ①

A006 | 답 4

[풀이]



$x=3$, 4, 5, 6일 때,

함수 $y=2x^2-9x$의 부호가 각각 음($-$), 음($-$), 양($+$), 양($+$)이므로

$f(3)=1$, (음수의 3제곱근 중 실수인 것의 개수는 1이다.)

$f(4)=0$, (음수의 4제곱근 중 실수인 것의 개수는 0이다.)

$f(5)=1$, (양수의 5제곱근 중 실수인 것의 개수는 1이다.)

$f(6)=2$ (양수의 6제곱근 중 실수인 것의 개수는 2이다.)

$\therefore$ $f(3)+f(4)+f(5)+f(6)$

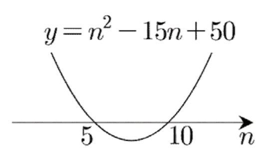
$=1+0+1+2=4$

답 4

A007 | 답 ③

[풀이]

$n^2-15n+50=(n-5)(n-10)$ $\cdots(*)$



$f(4)=2$ $(\because (*)>0)$

$f(5)=1$ $(\because (*)=0)$

$f(6)=0$ $(\because (*)<0)$

$f(7)=1$ $(\because (*)<0)$

$f(8)=0$ $(\because (*)<0)$

$f(9)=1$ ($\because$ (*)<0)

$f(10)=1$ ($\because$ (*)$=0$)

$f(11)=1$ ($\because$ (*)>0)

$f(12)=2$ ($\because$ (*)>0)

$f(n)=f(n+1)$인 n은 9, 10 뿐이다.

따라서 구하는 값은 19이다.

답 ③

A008 | 답 ③

[풀이]

2 이상의 자연수 n에 대하여

$(2n-5)(2n-9)\neq 0$

이제 다음의 두 경우를 생각하자.

- $(2n-5)(2n-9)>0 \Leftrightarrow n<\frac{5}{2}$ 또는 $n>\frac{9}{2}$

$\Leftrightarrow n=2,\ 5,\ 6,\ \cdots$

이므로

$f(2)=2,\ f(6)=f(8)=2,\ f(5)=f(7)=1$

- $(2n-5)(2n-9)<0 \Leftrightarrow \frac{5}{2}<n<\frac{9}{2}$

$\Leftrightarrow n=3,\ 4$

이므로

$f(3)=1,\ f(4)=0$

$\therefore\ \sum_{n=2}^{8} f(n)=2+1+0+1+2+1+2=9$

답 ③

A009 | 답 ②

[풀이]

문제에서 주어진 방정식을 풀면

$x^n=8,\ x^{2n}=8$

n이 홀수: $x=8^{\frac{1}{n}},\ x=\pm 8^{\frac{1}{2n}}$ (○)

모든 실근의 곱은 음수($-$)이다.

n이 짝수: $x=\pm 8^{\frac{1}{n}},\ x=\pm 8^{\frac{1}{2n}}$ (×)

모든 실근의 곱은 양수($+$)이다.

모든 실근의 곱은 -4이므로

$8^{\frac{1}{n}}\times 8^{\frac{1}{2n}}\times(-8^{\frac{1}{2n}})$

$=-8^{\frac{2}{n}}=-4,\ \frac{6}{n}=2,\ \therefore\ n=3$

답 ②

A010 | 답 ⑤

[풀이]

집합 X의 원소는 b의 a제곱근 중에서 실수인 것이다.

$a=3$일 때, x의 값은

$\sqrt[3]{-9}(=-\sqrt[3]{9}),\ \sqrt[3]{-3}(=-\sqrt[3]{3}),\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt[3]{9}$

$a=4$일 때, x의 값은

$\pm\sqrt[4]{3},\ \pm\sqrt[4]{9}$

▸ ㄱ. (참)

$\sqrt[3]{-9}$는 집합 X의 원소이다.

▸ ㄴ. (참)

집합 X의 원소의 개수는 8이다.

▸ ㄷ. (참)

집합 X의 원소 중 양수인 모든 원소의 곱은

$\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{9}\times\sqrt[4]{3}\times\sqrt[4]{9}$

$=3^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{2}{3}}\times 3^{\frac{1}{4}}\times 3^{\frac{2}{4}}=3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{2}{4}}=3^{\frac{7}{4}}=\sqrt[4]{3^7}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

A011 | 답 ②

[풀이]

$2^{n-3}-8=0(\cdots(*))$을 풀면 $n=6$

$n<6$이면 (*)<0

$n=6$이면 (*)$=0$

$n>6$이면 (*)>0

이므로

$f(2)=0,\ f(3)=1,\ f(4)=0,\ f(5)=1,$

$f(6)=1,$

$f(7)=f(9)=\ \cdots\ =1,\ f(8)=f(10)=\ \cdots\ =2$

$\sum_{n=2}^{m} f(n)$

$=0+1+0+1+1+1+2+1+2+1+2+1+2$

이때, 마지막 2는 $f(14)$이다.

$\therefore\ m=14$

답 ②

A012 | 답 ②

[풀이]

〈과정〉

(ⅰ) $m>0$인 경우

n의 값과 관계없이 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 존재한

다. 그러므로 $m>0$인 순서쌍 (m, n)의 개수는 $1 \le m < n \le 10$에서 ${}_{10}\mathrm{C}_2 = \boxed{45}$이다. 즉, 10 이하의 자연수 중에서 서로 다른 두 개를 택하는 경우의 수이다.

(ii) $m<0$인 경우

n이 홀수이면 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 항상 존재한다. 한편, n이 짝수이면 m의 n제곱근 중에서 실수인 것은 존재하지 않는다. 그러므로 $m<0$인 순서쌍 (m, n)의 개수는 $1 \le -m < n \le 10$에서 $2+4+6+8=\boxed{20}$이다. 왜냐하면

$n=3$: $m=-1, -2$

$n=5$: $m=-1, -2, -3, -4$

$n=7$: $m=-1, -2, \cdots, -6$

$n=9$: $m=-1, -2, \cdots, -8$

(i), (ii)에 의하여 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 존재하도록 하는 순서쌍 (m, n)의 개수는 $\boxed{45}+\boxed{20}=65$이다.

(가): $p=45$

(나): $q=20$

$\therefore\ p+q=45+20=65$

답 ②

A013 | 답 3

[풀이]

n에 대한 이차방정식

$$n^2-17n+19k \qquad \cdots(*)$$

의 대칭축은 $n=\frac{17}{2}=8.5$이다.

$f(n)$이 가질 수 있는 값은 0, 1, 2뿐이다.

n이 홀수일 때, (*)의 부호와 관계없이 $f(n)=1$

n이 짝수일 때, (*)의 부호가 양(+)이면 $f(n)=2$, (*)의 부호가 음(−)이면 $f(n)=0$이다. (그리고 (*)의 부호가 0이면 $f(n)=1$이다.)

$n=8$, 9일 때, (*)의 부호가 양(+)이면

$f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(18)+f(19)$

$=2+1+2+1+\cdots+1+2+1$

$=(2+1)\times 9=27(\neq 19)$

에서

$19=27-8=27-(2+2+2+2)$

이때, $f(6)$, $f(8)$, $f(10)$, $f(12)$의 값이 모두 0이면 된다.

즉, $4^2-17\times 4+19k>0$, $5^2-17\times 5+19k<0$

$\frac{52}{19}<k<\frac{60}{19}$

$\therefore\ k=3$

답 3

A014 | 답 ③

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

거듭제곱근의 성질에 의하여

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\sqrt{a}}}=\sqrt{\frac{a}{\sqrt{a}}}$

$=\sqrt{\frac{\sqrt{a}\sqrt{a}}{\sqrt{a}}}=\sqrt{\sqrt{a}}=\sqrt[4]{a}$

▸ ㄴ. (거짓)

$(\sqrt[3]{a})^4=\sqrt[3]{a^4}\neq\sqrt[12]{a}$

예를 들어 $a=8$일 때,

$(\sqrt[3]{a})^4=16\neq\sqrt[4]{2}=\sqrt[12]{a}$

($\because$ 유리수가 무리수일 수 없다. 이 역도 성립한다.)

▸ ㄷ. (참)

$\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}=\sqrt[3]{\sqrt{a^4}\sqrt{a}}=\sqrt[3]{\sqrt{a^5}}=\sqrt[6]{a^5}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

A015 | 답 ②

[풀이]

지수법칙에 의하여

$a^2b\times\sqrt[3]{\frac{b^2}{a}}=a^2b\times a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}=a^{2-\frac{1}{3}}b^{1+\frac{2}{3}}=a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{5}{3}}$

답 ②

A016 | 답 17

[풀이]

지수법칙에 의하여

$\left\{\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{\sqrt[3]{a^4}}}\times\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^{-4}}\right\}^6$

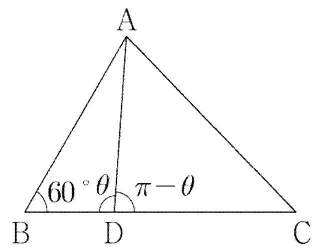
$=\left(\sqrt{\frac{a^3}{a^{\frac{4}{3}}}}\times\sqrt{a^4}\right)^6$

$=\left(a^{\frac{1}{2}\left(3-\frac{4}{3}\right)}\times a^{\frac{4}{2}}\right)^6$

$=a^{6\left(\frac{5}{6}+2\right)}=a^{17}$

$\therefore\ k=17$

답 17



삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos 60^\circ = \dfrac{p^2+6^2-q^2}{2\times p\times 6}$,

$p^2-6p-q^2+36=0$ $\cdots$ ㉠

두 삼각형 ABD, ACD 각각에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{p}{\sin\theta}=2r_1$, $\dfrac{q}{\sin(\pi-\theta)}=2r_2$

$\dfrac{r_2}{r_1}=\dfrac{q}{p}=\dfrac{\sqrt{13}}{3}$, 즉 $q=\dfrac{\sqrt{13}}{3}p$ $\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$p^2-6p-\dfrac{13}{9}p^2+36=0$, $2p^2+27p-18\times 9=0$,

$(2p-9)(p+18)=0$, $p=\dfrac{9}{2}$

$\therefore$ $p+q=11$

답 11

B118 | 답 50

[풀이]

코사인법칙에 의하여

$\overline{\text{BC}}^2=5^2+6^2-2\times 5\times 6\times\cos A$

$=25(\because \cos A=\dfrac{3}{5})$, 즉 $\overline{\text{BC}}=5$

사인법칙에 의하여

$\therefore$ $16R=\dfrac{8\overline{\text{BC}}}{\sin A}=\dfrac{8\times 5}{\frac{4}{5}}=50$

답 50

B119 | 답 7

[풀이]

이 삼각형의 세 변의 길이를 각각

$\overline{\text{AB}}=k$, $\overline{\text{BC}}=2k$, $\overline{\text{CA}}=\sqrt{2}k$

로 두자.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos(\angle\text{ABC})=\dfrac{k^2+(2k)^2-(\sqrt{2}k)^2}{2\times k\times 2k}=\dfrac{3}{4}$

$\sin(\angle\text{ABC})=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

외접원의 반지름의 길이를 R이라고 하면

$R^2\pi=28\pi$이므로 $R=2\sqrt{7}$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{b}{\frac{\sqrt{7}}{4}}=4\sqrt{7}$, $b=7$

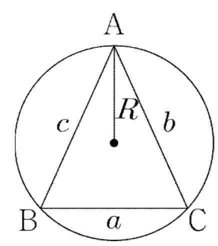
$\therefore$ $\overline{\text{CA}}=7$

답 7

B120 | 답 ⑤

[풀이]

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라고 하자. 그리고 삼각형 ABC의 세 변의 길이가 아래 그림과 같다고 하자. 이때, $b=c$이다.



사인법칙에 의하여

$\sin A=\dfrac{a}{2R}$, $\sin C=\dfrac{c}{2R}$

코사인법칙에 의하여

$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{a}{2c}$

$\therefore$ $\log_2\sin A-\log_2\cos B-\log_2\sin C$

$=\log_2\dfrac{A}{BC}=\log_2\dfrac{\frac{a}{2R}}{\frac{a}{2c}\times\frac{c}{2R}}$

$=\log_2 2=1$

답 ⑤

B121 | 답 ②

[풀이]

사인법칙에 의하여

$\dfrac{10}{\sin C}=6\sqrt{5}$, 즉 $\sin C=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$, $\cos C=\dfrac{2}{3}$

코사인법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-10^2}{2ab} = \frac{2}{3} \qquad \cdots ㉠$$

$\cos C = \frac{2}{3}$를 문제에서 주어진 등식에 대입하면

$$\frac{a^2+b^2-ab\times\frac{2}{3}}{ab} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{a^2+b^2}{ab} = 2, \text{ 즉 } a^2+b^2 = 2ab \qquad \cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\frac{2ab-10^2}{2ab} = \frac{2}{3}$$

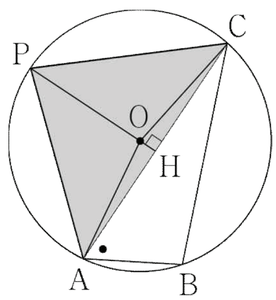
$\therefore\ ab = 150$

답 ②

B122 | 답 ①

[풀이]

원 C의 반지름의 길이를 R, 점 P에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라고 하자. (아래 그림처럼 삼각형 PAC의 넓이가 최대일 때, 세 점 P, O, H는 한 직선 위에 있다.)



(단, ●$=60^\circ$)

원의 넓이의 공식에 의하여

$$\pi R^2 = \frac{49}{3}\pi, \quad R = \frac{7}{\sqrt{3}}$$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin 60^\circ} = 2R, \quad \overline{BC} = 7$$

$\overline{AC} = x$로 두자.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos 60^\circ = \frac{3^2+x^2-7^2}{2\times3\times x}, \quad x^2-3x-40=0,$$

$(x+5)(x-8)=0, \quad x=8$

이제 삼각형 PAC의 넓이가 최대일 때를 생각하자.

삼각형 OHC에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{OH} = \sqrt{\frac{49}{3}-16} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \overline{PH} = \frac{8}{\sqrt{3}}$$

따라서 삼각형 PAC의 넓이의 최댓값은

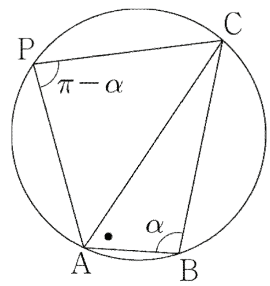
$$\frac{1}{2}\frac{8}{\sqrt{3}}8 = \frac{32\sqrt{3}}{3}$$

답 ①

[참고]

삼각형 PAC의 넓이의 최댓값을 다음과 같이 구할 수도 있다.

$\angle \mathrm{ABC} = \alpha$로 두자. 이때, 사각형 ABCP는 원에 내접하므로 $\angle \mathrm{CPA} = \pi - \alpha$이다.



(단, •$=60^\circ$)

삼각형 PAC의 넓이가 최대이므로

$\overline{PA} = \overline{PC}(=k)$

이다. 왜냐하면 점 P에서의 접선은 직선 AC와 평행하기 때문이다.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\alpha = \frac{3^2+7^2-8^2}{2\times3\times7} = -\frac{1}{7}, \quad \sin\alpha = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

삼각형 PAC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\pi-\alpha) = \frac{2k^2-8^2}{2k^2} = \frac{1}{7}, \quad k^2 = \frac{112}{3}$$

따라서 삼각형 PAC의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2}k^2\sin(\pi-\alpha) = \frac{56}{3}\sin\alpha = \frac{32\sqrt{3}}{3}$$

B123 | 답 71

[풀이]

삼각형 ABC의 세 변의 길이를 a, b, c, 외접원의 반지름의 길이를 R이라고 하자.

조건 (가)에서

$$\sin A = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = -\frac{1}{4} \qquad \cdots ㉠$$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$a=\dfrac{\sqrt{15}}{2}R,$ $\cdots$㉡

$\sin B=\dfrac{b}{2R},\ \sin C=\dfrac{c}{2R}$

조건 (나)에서

$\sin B+\sin C=\dfrac{b+c}{2R}=\dfrac{9}{8},$ 즉 $b+c=\dfrac{9}{4}R$ $\cdots$㉢

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면

$$\dfrac{(b+c)^2-2bc-a^2}{2bc}$$

$$=\dfrac{\left(\dfrac{9}{4}R\right)^2-2bc-\left(\dfrac{\sqrt{15}}{2}R\right)^2}{2bc}=-\dfrac{1}{4}$$

즉, $bc=\dfrac{7}{8}R^2$

$(\triangle\mathrm{ABC}$의 넓이$)=\dfrac{1}{2}bc\sin A$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{7}{8}R^2\times\dfrac{\sqrt{15}}{4}=\sqrt{15},\ R^2=\dfrac{64}{7}$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는

$\pi R^2=\dfrac{64}{7}\pi$

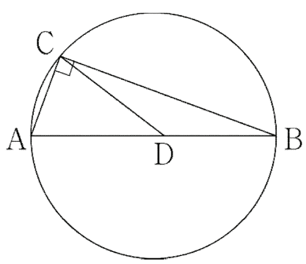
$\therefore\ p+q=71$

답 71

B124 | 답 27

[풀이]

선분 AB는 원의 지름이므로 $\angle\mathrm{ACB}=90^\circ$ 이다.



직각삼각형 ABC의 세 변의 길이의 비는

$3:1:2\sqrt{2}$ 이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=18,\ \overline{\mathrm{AD}}=18\times\dfrac{5}{9}=10,\ \overline{\mathrm{AC}}=6$

삼각형 CAD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{CD}}^2=6^2+10^2-2\times6\times10\times\cos(\angle\mathrm{CAB})$

$=136-120\times\dfrac{1}{3}=96,\ \overline{\mathrm{CD}}=4\sqrt{6}$

삼각형 CAD에서 사인법칙에 의하여

$$\dfrac{4\sqrt{6}}{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}=2R,\ R=3\sqrt{3}$$

$\therefore\ \dfrac{S}{\pi}=(3\sqrt{3})^2=27$

답 27

B125 | 답 ④

[풀이]

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{BC}}^2=3^2+1^2-2\times3\times1\times\cos\dfrac{\pi}{3}=7$

즉, $\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{7}$

$\overline{\mathrm{BP}}:\overline{\mathrm{PC}}=3:1$이므로 $\overline{\mathrm{PC}}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

$\angle\mathrm{PAC}=30^\circ$ 이므로

삼각형 APC에서 사인법칙에 의하여

$$\dfrac{\dfrac{\sqrt{7}}{4}}{\sin30^\circ}=2R,\ R=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$$

따라서 구하는 넓이를 S라고 하면

$\therefore\ S=\dfrac{7}{16}\pi$

답 ④

[참고]

선분 PC의 길이를 다음과 같이 구해도 좋다.

$\overline{\mathrm{AP}}=x$로 두자.

$(\triangle\mathrm{ABC}$의 넓이$)=\dfrac{1}{2}\times3\times1\times\sin60^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\times3\times x\times\sin30^\circ+\dfrac{1}{2}\times x\times1\times\sin30^\circ$

즉, $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}=\dfrac{3x}{4}+\dfrac{x}{4},\ x=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

삼각형 APC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{PC}}^2=\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2+1^2-2\times\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\times1\times\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{7}{16}$

즉, $\overline{\mathrm{PC}}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

B126 | 답 150

[풀이1]

사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 문제를 해결하자.

서로 합동인 두 원의 반지름의 길이를 r이라고 하자.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\overline{AB}\,\overline{BC}\cos\frac{\pi}{3}$

$=(2r)^2+(r+2\sqrt{3})^2-2(2r)(r+2\sqrt{3})\frac{1}{2}$

즉, $24=3r^2+12$, $r=2(r>0)$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AB}}{\sin C}=\frac{\overline{AC}}{\sin B}$, 즉 $\frac{4}{\sin C}=\frac{2\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$,

$\sin C=\frac{\pi}{4}$, $\angle CAB=\pi-\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{5}{12}\pi$

따라서 두 부채꼴의 넓이의 합은

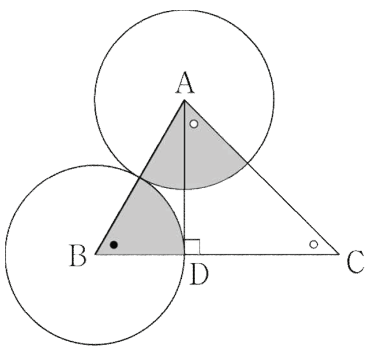
$\frac{1}{2}\times 2^2\times\left(\frac{\pi}{3}+\frac{5}{12}\pi\right)=\frac{3}{2}\pi$

$\therefore\ 100k=150$

답 150

[풀이2]

사인법칙과 코사인법칙을 이용하지 않고 문제를 해결하자.



(단, ●$=60^\circ$, ○$=45^\circ$)

점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발은 D이다.

왜냐하면 $\overline{AB}:\overline{BD}=2:1$이고, $\angle ABD=60^\circ$이기 때문이다.

이때, 삼각형 ABD는 직각삼각형이고, 삼각형 ADC는 직각이등변삼각형이다.

따라서 두 부채꼴의 넓이의 합은

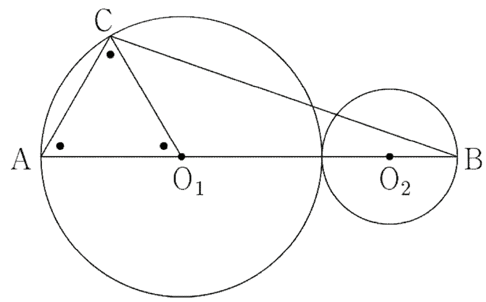
$\frac{1}{2}\times 2^2\times\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{2}\pi$

$\therefore\ 100k=150$

답 150

B127 | 답 ⑤

[풀이]



(단, ●$=60^\circ$)

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=6^2+2^2-2\times6\times2\times\cos\frac{\pi}{3}=28$

즉, $\overline{BC}=2\sqrt{7}$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2R$, $R=\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$

위의 그림에서 삼각형 AO_1C는 정삼각형이므로

원 O_1의 반지름의 길이는 2이고, 원 O_2의 반지름의 길이는 1이다.

$\therefore\ 3R^2+r_1^2+r_2^2=28+4+1=33$

답 ⑤

B128 | 답 ②

[풀이]

삼각형 ABC의 세 변의 길이를 각각 a, b, c라고 하면

사인법칙에 의하여

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

이므로 $a:b:c=2:3:4$이다.

$a=2k$, $b=3k$, $c=4k$로 두면

코사인법칙에 의하여

$\therefore\ \cos C=\frac{(2k)^2+(3k)^2-(4k)^2}{2\times2k\times3k}=-\frac{1}{4}$

답 ②

B129 | 답 ③

[풀이]

$\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$라고 하자.

사인법칙에 의하여

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=6$

$\sin A=\dfrac{a}{6}$, $\sin B=\dfrac{b}{6}$, $\sin C=\dfrac{c}{6}$

(가): $\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$

$(\because 1-\cos^2\theta=\sin^2\theta)$

$a^2+b^2=c^2$ $\cdots$ ㉠

즉, 삼각형 ABC는 $\angle C=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

이때, 선분 $\overline{\mathrm{AB}}$는 외접원의 지름이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=6(=c)$

(나): $2\sqrt{2}\times\dfrac{b}{6}+2\times\dfrac{a}{6}+\sqrt{2}\times 0=2\sqrt{3}$

$\sqrt{2}b+a=6\sqrt{3}$ $\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$(6\sqrt{3}-\sqrt{2}b)^2+b^2=36$,

$b^2-4\sqrt{6}b+24=0$, $(b-2\sqrt{6})^2=0$,

$b=2\sqrt{6}$, $a=2\sqrt{3}$

$\therefore$ ($\triangle$ABC의 넓이)

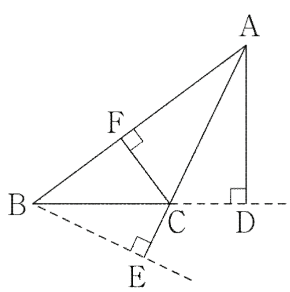
$=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 2\sqrt{6}=6\sqrt{2}$

답 ③

B130 | 답 35

[풀이] ★

세 점 A, B, C에서 세 대변 (또는 그 연장선)에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라고 하자.



삼각형 ABC의 넓이를 S라고 하면

$S=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{AD}}\,\overline{\mathrm{BC}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{BE}}\,\overline{\mathrm{AC}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{CF}}\,\overline{\mathrm{AB}}$

즉, $\overline{\mathrm{AD}}=\dfrac{2S}{\overline{\mathrm{BC}}}$, $\overline{\mathrm{BE}}=\dfrac{2S}{\overline{\mathrm{AC}}}$, $\overline{\mathrm{CF}}=\dfrac{2S}{\overline{\mathrm{AB}}}$

주어진 조건에 의하여

$\dfrac{2S}{\overline{\mathrm{AB}}}:\dfrac{2S}{\overline{\mathrm{AC}}}:\dfrac{2S}{\overline{\mathrm{BC}}}=2:3:4$

즉, $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{BC}}=\dfrac{1}{2}:\dfrac{1}{3}:\dfrac{1}{4}=6k:4k:3k$

$\angle\mathrm{BCA}=\theta$이므로 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\dfrac{(4k)^2+(3k)^2-(6k)^2}{2\times 4k\times 3k}=-\dfrac{11}{24}$

$\therefore$ $p+q=35$

답 35

B131 | 답 ④

[풀이]

$\overline{\mathrm{BC}}=a$, $\overline{\mathrm{CA}}=b$, $\overline{\mathrm{AB}}=c$,

$\triangle$ABC의 넓이를 S라고 하자.

$S=\dfrac{1}{2}a\overline{\mathrm{AD}}=\dfrac{1}{2}b\overline{\mathrm{BE}}=\dfrac{1}{2}c\overline{\mathrm{CF}}$

$\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{BE}}:\overline{\mathrm{CF}}=\dfrac{2S}{a}:\dfrac{2S}{b}:\dfrac{2S}{c}=2:3:4$

이므로

$a:b:c=6:4:3$

이제 $a=6k$, $b=4k$, $c=3k$로 두자.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\therefore$ $\cos C=\dfrac{(6k)^2+(4k)^2-(3k)^2}{2\times 6k\times 4k}=\dfrac{43}{48}$

답 ④

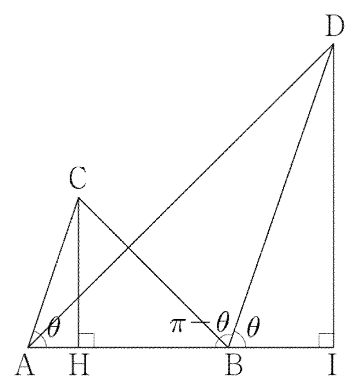
B132 | 답 15

[풀이]

점 D에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 I라 하자. 이때, 두 삼각형 CAH, DBI는 서로 닮음이고, 그 닮음비는 1 : 2이다.

$\angle\mathrm{CAH}=\theta$로 두면 $\angle\mathrm{DBI}=\theta$, $\angle\mathrm{ABD}=\pi-\theta$이다.

그리고 $\overline{\mathrm{AC}}=p$로 두면 $\overline{\mathrm{BD}}=2p$이다.



문제에서 주어진 조건에 의하여

$\overline{\mathrm{AH}}=\dfrac{1}{2}\left(=\dfrac{1}{4}\overline{\mathrm{AB}}\right)$, $\overline{\mathrm{HB}}=\dfrac{3}{2}$

두 삼각형 ABC, ABD에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\theta}=2r$, $\dfrac{\overline{\mathrm{AD}}}{\sin(\pi-\theta)}=2R$

$4(R^2-r^2)\sin^2\theta = \overline{AD}^2 - \overline{BC}^2 = 51$

즉, $\overline{AD}^2 - \overline{BC}^2 = 51$

한편 두 삼각형 ABC, ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2 = p^2 + 2^2 - 2\times p \times 2 \times \cos\theta$,

$= p^2 + 2$

$(\because \cos\theta = \frac{1}{2p})$

$\overline{AD}^2 = (2p)^2 + 2^2 - 2\times 2p \times 2 \times \cos(\pi - \theta)$

$= 4p^2 + 8$

$(\because \cos(\pi-\theta) = -\cos\theta)$

이므로

$3p^2 + 6 = 51$, $p^2 = 15$

$\therefore\ \overline{AC}^2 = 15$

답 15

B133 | 답 ④

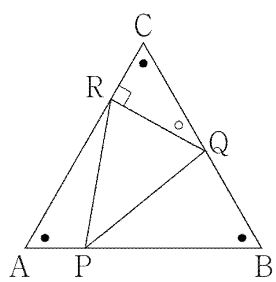
[풀이]

$\overline{AP} = p$, $\overline{BQ} = q$, $\overline{CR} = r$로 두자.

이때,

$\overline{PB} = 1-p$, $\overline{QC} = 1-q$, $\overline{RA} = 1-r$

이고, $p+q+r=1$ $\cdots(*)$



(단, ●$=60^\circ$, ○$=30^\circ$)

▸ ㄱ. (거짓)

두 삼각형 APR, PBQ에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{PR}^2 = p^2 + (1-r)^2 - 2p(1-r)\cos 60^\circ$

$= p^2 + (p+q)^2 - p(p+q)$ $(\because (*))$

$\overline{PQ}^2 = (1-p)^2 + q^2 - 2(1-p)q\cos 60^\circ$

$= (1-p)^2 + q^2 - (1-p)q$

$\overline{PQ} = \overline{PR}$이므로

$p^2 + (p+q)^2 - p(p+q)$

$= (1-p)^2 + q^2 - (1-p)q$

정리하면

$2p + q = 1$, 즉 $2\overline{AP} + \overline{BQ} = 1$ $\cdots$ ㉠

그런데

$3\overline{AP} + 2\overline{BQ}$

$= 3p + 2q = 3p + 2(1-2p) = 2 - p < 2$

이므로

$\therefore\ 3\overline{AP} + 2\overline{BQ} \neq 2$

▸ ㄴ. (참)

(*), ㉠을 연립하면

$\overline{CQ} = 1 - q = 2p$,

$\overline{CR} = r = 1 - p - q = 1 - p - (1-2p) = p$

그리고 $\angle QCR = 60^\circ$ 이므로

삼각형 CRQ는 직각삼각형이고,

$\overline{QR} = \sqrt{3}p$

$\therefore\ \overline{QR} = \sqrt{3} \times \overline{AP} (= \sqrt{3}p)$

▸ ㄷ. (참)

두 삼각형 PBQ, CRQ의 외접원의 반지름의 길이를 각각 R_1, R_2라고 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{PQ}}{\sin 60^\circ} = 2R_1$, $R_2 = \frac{1}{2}\overline{CQ} = p$

즉, $R_1 = \frac{\overline{PQ}}{\sqrt{3}}$, $R_2 = p$

그런데 $R_1 = \sqrt{2}R_2$이므로

$\overline{PQ} = \sqrt{6}p$

보기 ㄱ에서 유도된 등식에서

$\overline{PQ}^2 = (1-p)^2 + q^2 - (1-p)q$

$= (1-p)^2 + (1-2p)^2 - (1-p)(1-2p)$

$= 6p^2$ $(\because q = 1-2p)$

정리하면

$3p^2 + 3p - 1 = 0$

$\therefore\ p = \frac{-3+\sqrt{21}}{6}$

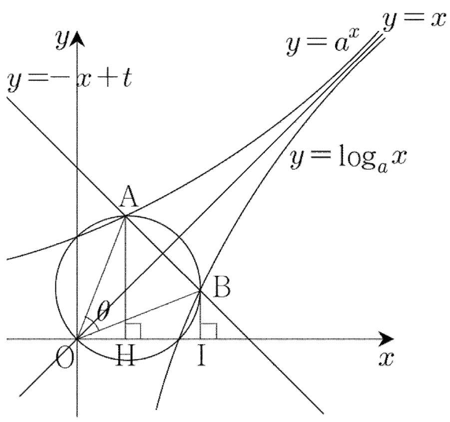
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

B134 | 답 50

[풀이]

점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 I라고 하자.



조건 (가)에서

$\overline{\mathrm{OH}}=k$로 두면 $\overline{\mathrm{AB}}=2k$이므로

$\overline{\mathrm{OI}}=k+\sqrt{2}k$, $\overline{\mathrm{BI}}=k$

($\because$ 점 A의 x좌표와 점 B의 y좌표는 같다.)

직각삼각형 BOI에서

$\overline{\mathrm{OB}}^2=\{(1+\sqrt{2})^2+1^2\}k^2=(4+2\sqrt{2})k^2$

두 점 A, B는 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이므로

$\overline{\mathrm{OA}}^2=(4+2\sqrt{2})k^2$

삼각형 AOB에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\dfrac{2(4+2\sqrt{2})k^2-(2k)^2}{2\times(4+2\sqrt{2})k^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 즉

$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

삼각형 AOB에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{2k}{\sin\theta}=2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $k=\dfrac{1}{2}$, $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$

점 A는 직선 $y=-x+t$ 위에 있으므로

$t=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

점 A는 곡선 $y=a^x$ 위에 있으므로

$a^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$, $a=\dfrac{3+2\sqrt{2}}{4}$

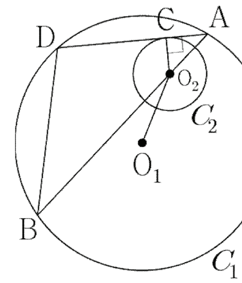
$\therefore\ 200(t-a)=200\times\dfrac{1}{4}=50$

답 50

B135

| 답 ④

[풀이]



삼각형 ADB에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin A}=\boxed{2r}$

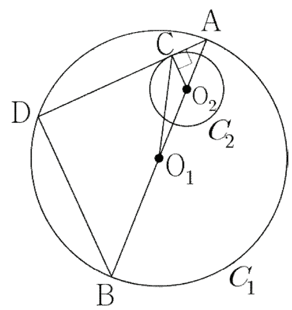
이므로 $\overline{\mathrm{BD}}$가 최대이려면 직선 AD가 원 C_2와 점 C에서 접해야 한다.

($\because$ 직선 AD가 점 C에서 원 C_2에 접한다. $\Leftrightarrow$ $\angle\mathrm{BAD}$의 크기가 최대이다.)

이때 직각삼각형 $\mathrm{ACO_2}$에서 $\sin A=\dfrac{1}{\overline{\mathrm{AO_2}}}$이므로

$\overline{\mathrm{BD}}=\dfrac{1}{\overline{\mathrm{AO_2}}}\times\boxed{2r}$

이다.



그러므로 직선 AD가 원 C_2와 점 C에서 접하고 $\overline{\mathrm{AO_2}}$가 최소일 때 $\overline{\mathrm{BD}}$는 최대이다.

$\overline{\mathrm{AO_2}}$의 최솟값은

$\boxed{r-2}$ $(=\overline{\mathrm{AO_1}}-\overline{\mathrm{O_2O_1}})$

(위의 그림처럼 세 점 A, $\mathrm{O_2}$, $\mathrm{O_1}$이 한 직선 위에 있을 때이다.)

이므로 $\overline{\mathrm{BD}}$가 최대일 때, 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{O_1C}}^2=r^2+(r-2)^2-1^2$

$-2\times r\times\sqrt{(r-2)^2-1^2}\times\dfrac{\sqrt{(r-2)^2-1^2}}{r-2}$

$=\boxed{r^2+(r-2)^2-1-2\times\dfrac{r}{r-2}\times\{(r-2)^2-1\}}$

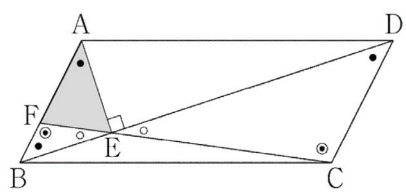
이다.

(가): $f(r)=2r$

(나): $g(r) = r-2$
(다): $h(r)$
$= r^2 + (r-2)^2 - 1 - 2\times\dfrac{r}{r-2}\times\{(r-2)^2-1\}$
$\therefore\ f(4)\times g(5)\times h(6) = 8\times 3\times 6 = 144$
답 ④

B136 | 답 ①

[풀이]



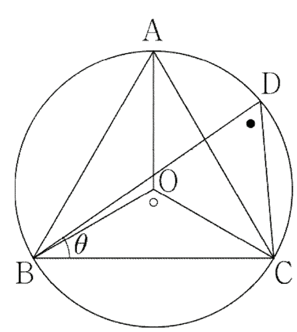
(단, ●$=45^\circ$)
삼각형 CDE에서 사인법칙에 의하여
$\dfrac{10}{\sin(\angle CDE)} = 10\sqrt{2}$, $\sin(\angle CDE) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
$\angle CDE = 45^\circ$ (=●)
평행선의 성질에 의하여
$\angle ABD = 45^\circ$ (=●)$=\angle CDE$ (엇각)
직각삼각형 ABE에서
$\angle EAB = 45^\circ$ (=●)
평행선의 성질에 의하여
$\angle ECD = \angle EFB$(=◉)
$\cos(\angle ECD) = \cos(\pi - \angle AFC)$
$= -\cos(\angle AFC) = -\dfrac{\sqrt{10}}{10}$에서
$\sin(\angle ECD) = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$
삼각형 CDE에서 사인법칙에 의하여
$\dfrac{\overline{DE}}{\frac{3}{\sqrt{10}}} = 10\sqrt{2}$, $\overline{DE} = 6\sqrt{5}$
$\overline{CD} = x$로 두자.
삼각형 CDE에서 코사인법칙에 의하여
$10^2 = (6\sqrt{5})^2 + x^2 - 2\times 6\sqrt{5}\times x\times\cos45^\circ$
$x^2 - 6\sqrt{10}x + 80 = 0$,
$(x-2\sqrt{10})(x-4\sqrt{10}) = 0$,
$x = 2\sqrt{10}\ (\because x < 10)$
$\overline{AE} = k$로 두자.
$\overline{AB} = \sqrt{2}k = 2\sqrt{10}$, $k = 2\sqrt{5}$
서로 닮음인 두 삼각형 DEC, BEF의 닮음비는
$3:1(=\overline{DE}:\overline{EB})$이므로
$\overline{AF} = \dfrac{2}{3}\times 2\sqrt{10} = \dfrac{4}{3}\sqrt{10}$
$\therefore$ ($\triangle$AFE의 넓이)
$= \dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{3}\sqrt{10}\times 2\sqrt{5}\times\sin45^\circ$
$= \dfrac{20}{3}$
답 ①

B137 | 답 ⑤

[풀이]
▸ ㄱ. (참)
$a=5$이면 삼각형 ABC는 $\angle A = 90^\circ$인 직각삼각형이다.
이때, 선분 BC가 원의 지름이므로
$R = \dfrac{a}{2} = \dfrac{5}{2}$
▸ ㄴ. (참)
삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여
$\dfrac{a}{\sin A} = 2R$, 즉 $a = 8\sin A$
▸ ㄷ. (참)
삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여
$\cos(\angle A) = \dfrac{3^2+4^2-a^2}{2\times3\times4} = \dfrac{25-a^2}{24}$
$\dfrac{1}{2} \le \dfrac{25-a^2}{24} < 1$이므로 $\angle A$의 최댓값은 60°이다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.
답 ⑤

B138 | 답 ①

[풀이]
한 변의 길이가 r인 정삼각형의 외접원의 반지름의 길이는
$\sqrt{3}r$이므로
$\overline{BC} = \sqrt{3}r$



(단, ●$=60^\circ$, ○$=120^\circ$)

원주각과 중심각의 관계에 의하여

●$=60^\circ$

삼각형 DBC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\sqrt{3}r}{\sin 60^\circ}=\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin\theta},\ \overline{\mathrm{DC}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}r$$

삼각형 DBC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{DC}}^2=(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}r)^2-2\sqrt{2}\sqrt{3}r\times\cos\theta$$

즉, $\frac{4}{3}r^2=2+3r^2-4r$ ($\because \cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}$)

$5r^2-12r+6=0$

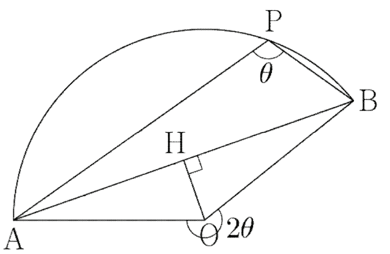
$\therefore\ r=\frac{6-\sqrt{6}}{5}$

답 ①

B139 | 답 ⑤

[풀이]

점 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H, $\overline{\mathrm{AP}}=3k$, $\overline{\mathrm{BP}}=k$로 두자. 이때, 점 H는 선분 AB의 중점이다.



원주각과 중심각의 관계에 의하여

$\angle\mathrm{AOB}=2\times\angle\mathrm{APB}=2\theta$ (위의 그림)

$\angle\mathrm{AOH}=\pi-\theta$

직각삼각형 AOH에서

$\overline{\mathrm{AH}}=6\sin(\pi-\theta)=6\sin\theta$

$\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AH}}=12\sin\theta=8\sqrt{2}$,

$\sin\theta=\frac{2}{3}\sqrt{2}$, $\cos\theta=-\frac{1}{3}$

삼각형 ABP에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=-\frac{1}{3}=\frac{k^2+(3k)^2-(8\sqrt{2})^2}{2\times k\times 3k}$, $k^2=\frac{32}{3}$

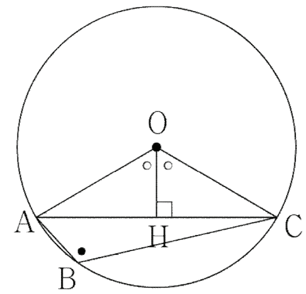
$\therefore\ \overline{\mathrm{BP}}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$

답 ⑤

B140 | 답 ⑤

[풀이]

점 O에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라고 하자. 그리고 두 선분 AB, BC의 길이를 각각 p, q라고 하자.



(단, ○$=60^\circ$, ●$=120^\circ$)

중심각과 원주각의 관계에 의하여

호 AC의 중심각의 크기가 240°이므로

$\angle\mathrm{COA}=120^\circ$ $(=360^\circ-240^\circ)$

직각삼각형 OAH에서

$\overline{\mathrm{AH}}=2\sqrt{3}$이므로 $\overline{\mathrm{AC}}=4\sqrt{3}$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$(4\sqrt{3})^2=p^2+q^2-2pq\cos 120^\circ$

$48=(p+q)^2-pq$

즉, $pq=12$ ($\because p+q=2\sqrt{15}$)

$\therefore$ (□OABC의 넓이)

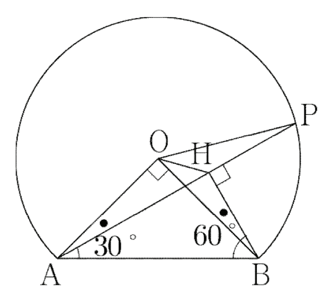
$=\frac{1}{2}\times4^2\times\sin 120^\circ+\frac{1}{2}\times pq\times\sin 120^\circ$

$=4\sqrt{3}+3\sqrt{3}=7\sqrt{3}$

답 ⑤

B141 | 답 20

[풀이]



(단, ●$=15^\circ$)

위의 그림과 같이

$\angle\mathrm{OAH}=\angle\mathrm{OBH}=15^\circ$

두 삼각형 OAH, OBH에서 코사인법칙에 의하여

$\cos 15^\circ$

$$=\frac{2^2+(\sqrt{6})^2-\overline{\mathrm{OH}}^2}{2\times2\times\sqrt{6}}=\frac{2^2+(\sqrt{2})^2-\overline{\mathrm{OH}}^2}{2\times2\times\sqrt{2}}$$

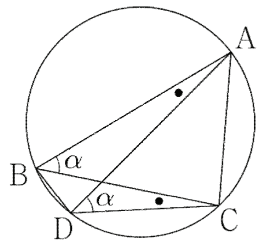
$\therefore\ \overline{\mathrm{OH}}^2=4-2\sqrt{3}$

$\therefore\ m^2+n^2=20$

답 20

B142 | 답 63

[풀이]



원주각의 성질에 의하여

$\angle \mathrm{ADC}=\alpha=\angle \mathrm{ABC}$,

$\angle \mathrm{BAD}=\angle \mathrm{BCD}=\bullet$

$\overline{\mathrm{AD}}=p$, $\overline{\mathrm{BC}}=q$라고 하면

$S_1 : S_2 = 6p : 4q = 9 : 5$, 즉

$\frac{p}{q}=\frac{6}{5}(=\frac{6k}{5k}$로 두자.)

코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AC}}^2=6^2+q^2-2\times 6\times q\times \cos\alpha$

$=36+25k^2-45k$

$\overline{\mathrm{AC}}^2=4^2+p^2-2\times 4\times p\times \cos\alpha$

$=16+36k^2-36k$

$(\because\ p=6k,\ q=5k,\ \cos\alpha=\frac{3}{4})$

두 등식을 변변히 빼서 정리하면

$11k^2+9k-20=0$, $(11k+20)(k-1)=0$

풀면 $k=1$, $p=6$

$S=\frac{1}{2}\times p\times 4\times \sin\alpha$

$=\frac{1}{2}\times 6\times 4\times \frac{\sqrt{7}}{4}=3\sqrt{7}$

$\therefore\ S^2=63$

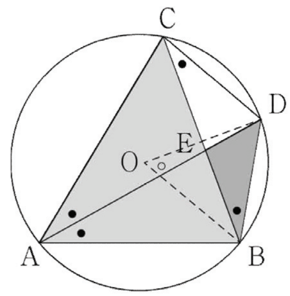
답 63

B143 | 답 ⑤

[풀이]

원 C의 중심을 O라고 하자.

ㄱ. (참)



(단, $\bullet=30^\circ$, $\circ=60^\circ$)

원주각과 중심각의 관계에 의하여

$\angle \mathrm{DOB}=2\angle \mathrm{DAB}=60^\circ$

사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin(\angle \mathrm{DAB})}=2R$, 즉 $\frac{\sqrt{3}}{\sin(\angle \mathrm{DAB})}=2\times\sqrt{3}$

$\sin(\angle \mathrm{DAB})=\frac{1}{2}=\sin(\angle \mathrm{DBE})$

$(\because\ \overset{\frown}{\mathrm{CD}}=\overset{\frown}{\mathrm{DB}})$

ㄴ. (참)

이등변삼각형 DCB에서 $\overline{\mathrm{BC}}=3(=\sqrt{3}\times\sqrt{3})$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$3^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2-2\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}\cos 60^\circ$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}+9$

ㄷ. (참)

네 선분 AE, BE, DE, CE의 길이를 각각 a, b, c, d라고 하자.

그리고 $\angle \mathrm{AEB}=\theta$로 두자.

$ac=bd$ $\cdots$㉠

$(\triangle \mathrm{ABC}$의 넓이$)=\frac{1}{2}a(b+d)\sin\theta$

$=4\times\frac{1}{2}bc\sin\theta=4\times(\triangle \mathrm{BDE}$의 넓이$)$

$3a=4bc\ (\because\ b+d=3)$ $\cdots$㉡

㉠, ㉡에서

$3\frac{bd}{c}=4bc$, $3d=4c^2$, $3(3-b)=4c^2$ $\cdots$㉢

삼각형 BDE에서 코사인법칙에 의하여

$c^2=b^2+3-2\sqrt{3}b\cos 30^\circ$, 즉

$c^2=b^2+3-3b$ $\cdots$㉣

㉢, ㉣을 연립하면

$3(3-b)=4b^2+12-12b$, $4b^2-9b+3=0$

따라서 구하는 값은 $\frac{9}{4}$이다.

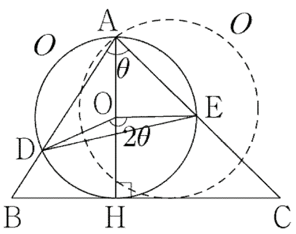
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

B144 | 답 ⑤

[풀이] ★

점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H, 원의 중심을 O라고 하자.



$\angle$CAB$=\theta$로 두면

중심각과 원주각의 관계에 의하여

$\angle$EOD$=2\theta$(상수)

선분 DE의 길이는 원 O의 반지름의 길이가 최소일 때 최소가 된다.

따라서 원 O의 지름이 AH일 때 선분 DE의 길이는 최소가 된다.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{5^2+6^2-7^2}{2\times5\times6}=\frac{1}{5},\ \sin\theta=\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$(\triangle\text{ABC의 넓이})=\frac{1}{2}\times\overline{\text{AH}}\times7=\frac{1}{2}\times5\times6\times\sin\theta$$

즉, $\overline{\text{AH}}=\dfrac{12\sqrt{6}}{7}$

삼각형 ADE에서 사인법칙에 의하여

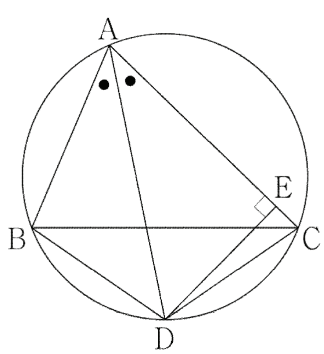
$\dfrac{\overline{\text{DE}}}{\sin\theta}=\overline{\text{AH}}$, 즉

$$\therefore\ \overline{\text{DE}}=\frac{12\sqrt{6}}{7}\times\frac{2\sqrt{6}}{5}=\frac{144}{35}$$

답 ⑤

B145 | 답 84

[풀이]



$\bullet=\theta$, $\overline{\text{AD}}=a$로 두자.

두 호 BD, DC에 대한 원주각이 같으므로

$\overline{\text{BD}}=\overline{\text{DC}}(=b$로 두자.)

두 삼각형 ABD, ADC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{6^2+a^2-b^2}{2\times6\times a}=\frac{8^2+a^2-b^2}{2\times8\times a}$$

정리하면

$a^2-b^2=48$, $\cos\theta=\dfrac{7}{a}$, $a\cos\theta=7$

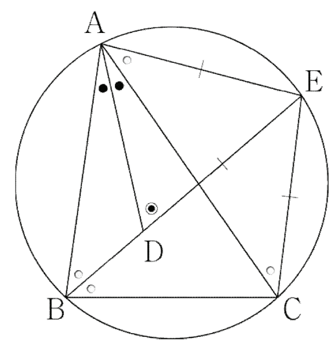
$\therefore\ 12k=12a\cos\theta=12\times7=84$

답 84

B146 | 답 ②

[풀이]

원주각의 성질, 삼각형의 외각의 정의, 이등변삼각형의 성질을 이용하면 다음과 같이 각의 크기(○, ◉)를 결정할 수 있다.



(단, ◉$=$○$+$●)

▸ ㄱ. (참)

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\text{AC}}^2=5^2+4^2-2\times5\times4\times\cos(\angle\text{ABC})$

$=36$

$\therefore\ \overline{\text{AC}}=6$

▸ ㄴ. (참)

원의 중심을 O라고 하자.

$\angle$ABE$=\angle$EBC이므로

$\angle$AOE$=\angle$EOC

$\therefore\ \overline{\text{EA}}=\overline{\text{EC}}$

▸ ㄷ. (거짓)

$\overline{\text{ED}}=x$로 두면 $\overline{\text{EA}}=\overline{\text{EC}}=x$이다.

삼각형 AEC에서 코사인법칙에 의하여

$6^2=x^2+x^2-2x^2\cos(\angle\text{AEC})$

$36=2x^2+\dfrac{x^2}{4}$($\because$ $\angle$AEC$=180^\circ-\angle$ABC)

$x=4$

$\therefore\ \overline{\text{ED}}=4$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

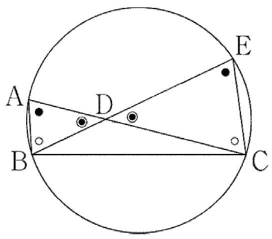
답 ②

B147 | 답 191

[풀이]

원주각의 성질과 맞꼭지각의 성질에 의하여 아래 그림과 같이 각의 크기(●, ○, ◉)가 결정된다.

$\overline{\mathrm{CD}}=a$, $\overline{\mathrm{CE}}=b$로 두자.



삼각형 DCE에서 코사인법칙에 의하여

$$a^2=5^2+b^2-2\times5\times b\times\frac{\sqrt{3}}{6}$$

위의 등식에 $a=5\sqrt{3}-b$를 대입하면

$$(5\sqrt{3}-b)^2=5^2+b^2-2\times5\times b\times\frac{\sqrt{3}}{6}$$

풀면

$b=2\sqrt{3}$, $a=3\sqrt{3}$

서로 닮음인 두 삼각형 ABD, ECD의 닮음비는

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{EC}}=1:\sqrt{3}$이므로 $\overline{\mathrm{AD}}=\dfrac{5}{\sqrt{3}}$,

$\overline{\mathrm{AC}}=\dfrac{14}{3}\sqrt{3}$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{BC}}^2=2^2+\left(\frac{14}{\sqrt{3}}\right)^2-2\times2\times\frac{14}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$=60$, $\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{15}$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{2\sqrt{15}}{\dfrac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}}=2R,\ R=\frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{11}}$$

구하는 원의 넓이는

$$\pi R^2=\frac{180}{11}$$

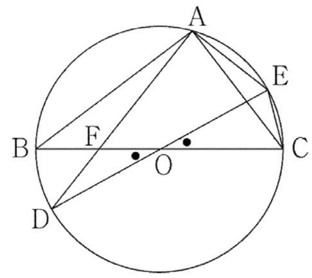
$\therefore\ p+q=191$

답 191

B148 | 답 6

[풀이]

원의 중심을 O라고 하자.



삼각형 ACE에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{CE}}}{\frac{1}{4}}=4$, $\overline{\mathrm{CE}}=1(=\overline{\mathrm{BF}})$, $\overline{\mathrm{FC}}=3$

삼각형 OCE에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle\mathrm{EOC})=\frac{2^2+2^2-1^2}{2\times2\times2}=\frac{7}{8}$$

이제 $\overline{\mathrm{FD}}=x$로 두자.

삼각형 FDO에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle\mathrm{DOF})=\frac{1^2+2^2-x^2}{2\times1\times2}=\frac{7}{8}$$

($\because\ \angle\mathrm{EOC}=\angle\mathrm{DOF}$ (맞꼭지각의 성질))

$$x=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$\overline{\mathrm{AF}}\times\overline{\mathrm{FD}}=\overline{\mathrm{BF}}\times\overline{\mathrm{FC}}$, 즉

$\overline{\mathrm{AF}}\times\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=1\times3$, $\overline{\mathrm{AF}}=\sqrt{6}$

$\therefore\ k^2=6$

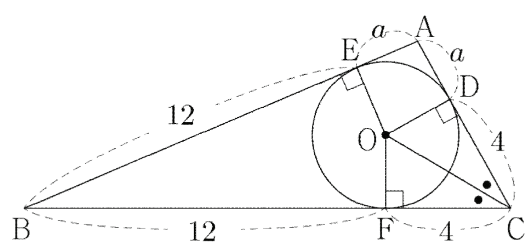
답 6

B149 | 답 ②

[풀이]

내접원의 중심을 O, 점 O에서 삼각형의 세 변에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라고 하자. (아래 그림)

그리고 $\overline{\mathrm{AD}}=a$로 두자.



(단, $\bullet=30^\circ$)

직각삼각형 OCF에서 삼각비의 정의에 의하여

$\tan(\angle\mathrm{OCF})=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, 즉 $\angle\mathrm{OCF}=30^\circ\ (=\bullet)$

내접원의 정의에 의하여

$\angle\mathrm{OCD}=30^\circ\ (=\bullet)$이므로 $\angle\mathrm{ACB}=60^\circ$

$= 2 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + 3 \times \frac{10 \times 11}{2} + 10$

$= 945$

답 ①

C167 | 답 70

[풀이]

$a_1 \geq 0$이므로 $a_2 = a_1 - 2$

$a_2 < 0$이므로 $a_3 = -2(a_1 - 2)$

$a_3 \geq 0$이므로 $a_4 = 2 - 2a_1$

$a_4 < 0$이므로 $a_5 = -2(2 - 2a_1)$

$a_5 \geq 0$이므로 $a_6 = 4a_1 - 6$

$a_6 \geq 0(a_1 \geq \frac{3}{2})$인 경우: $a_7 = 4a_1 - 8 = -1$,

$a_1 = \frac{7}{4}(\geq \frac{3}{2})$

$a_6 < 0(a_1 < \frac{3}{2})$인 경우: $a_7 = -2(4a_1 - 6) = -1$,

$a_1 = \frac{13}{8}(> \frac{3}{2})$

$\therefore\ 40a_1 = 70$

답 70

C168 | 답 8

[풀이]

문제에서 주어진 수열의 귀납적 정의에 의하여

$a_1 = 6 > 0$이므로 $a_2 = 2 - a_1 = -4$

$a_2 = -4 < 0$이므로 $a_3 = a_2 + p = p - 4$

- (1) $p \geq 4$인 경우

$a_4 = 2 - a_3 = 6 - p = 0$에서 $p = 6(> 4)$

- (2) $p < 4$인 경우

$a_4 = a_3 + p = 2p - 4 = 0$에서 $p = 2(< 4)$

(1), (2)에서 p는 2 또는 6이다.

따라서 구하는 값은 8이다.

답 8

C169 | 답 142

[풀이]

문제에서 주어진 귀납적 정의에 의하여

$a_5 = 5$ ⇨ $a_4 = 10\ (a_4 \neq 2)$

⇨ $a_3 = 7$ 또는 $a_3 = 20$

⇨ $a_2 = 14\ (a_2 \neq 4)$ 또는 $a_2 = 17$ 또는 $a_2 = 40$

⇨ $a_1 = 28$ 또는 $a_1 = 34$ 또는 $a_1 = 80$

따라서 구하는 값은

$28 + 34 + 80 = 142$

답 142

C170 | 답 27

[풀이]

a_2가 홀수이면

$a_3 = \frac{a_2 + 3}{2} = 3$에서 $a_2 = 3$

a_2가 짝수이면

$a_3 = \frac{a_2}{2} = 3$에서 $a_2 = 6$

즉, $a_2 = 3$ 또는 $a_2 = 6$

$a_2 = 3$이고, a_1이 홀수이면

$a_2 = \frac{a_1 + 3}{2} = 3$에서 $a_1 = 3$ (×)

$a_2 = 3$이고, a_1이 짝수이면

$a_2 = \frac{a_1}{2} = 3$에서 $a_1 = 6$ (×)

$a_2 = 6$이고, a_1이 홀수이면

$a_2 = \frac{a_1 + 3}{2} = 6$에서 $a_1 = 9$ (×)

$a_2 = 6$이고, a_1이 짝수이면

$a_2 = \frac{a_1}{2} = 6$에서 $a_1 = 12$ (◯)

수열 $\{a_n\}$은

$a_1 = 12,\ a_2 = 6,\ a_3 = 3,\ a_4 = 3,\ \cdots$

이므로 3 이상인 자연수 n에 대하여

$a_n = 3$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{5} a_k = 12 + 6 + 3 + 3 + 3 = 27$

답 27

C171 | 답 5

[풀이]

$a_1 = 1$일 때 수열 $\{a_n\}$은

$1,\ -1,\ 4,\ 2,\ 0,\ -2,\ 3,\ 1(= a_1),\ \cdots$

$a_{15} = a_8 = a_1 = 1$

$a_1=2$일 때 수열 $\{a_n\}$은

$2,\ 0,\ -2,\ 3,\ 1,\ -1,\ 4,\ 2(=a_1),\ \cdots$

$a_{15}=a_8=a_1=2$

$a_1=3$일 때 수열 $\{a_n\}$은

$3,\ 1,\ -1,\ 4,\ 2,\ 0,\ -2,\ 3(=a_1),\ \cdots$

$a_{15}=a_8=a_1=3$

$a_1=4$일 때 수열 $\{a_n\}$은

$4,\ 2,\ 0,\ -2,\ 3,\ 1,\ -1,\ 4(=a_1),\ \cdots$

$a_{15}=a_8=a_1=4$

$a_1=5$일 때 수열 $\{a_n\}$은

$5,\ 3,\ 1,\ -1,\ 4,\ 2,\ 0,\ -2,\ 3(=a_2),\ \cdots$

$a_{15}=a_8=-2<0$

$a_{15}<0$이 되도록 하는 a_1의 최솟값은 5이다.

답 5

C172 | 답 ①

[풀이]

문제에서 주어진 귀납적 정의에 의하여

$a_2=a_3\times a_1+1,\ a_3=2a_1-a_2$ $\cdots$㉠

연립하면

$2a_1-a_3=a_3a_1+1,$

$a_3=\dfrac{2a_1-1}{a_1+1}=2-\dfrac{3}{a_1+1}$

a_3은 정수이므로

$a_1+1=-3,\ -1,\ 1,\ 3$

$a_1=-4,\ -2,\ 0,\ 2$에서 $m=-4(=a_1)$

$a_1=-4$를 ㉠에 대입하면

$a_2=-4a_3+1,\ a_3=-8-a_2$

연립하면

$a_2=-11,\ a_3=3$

$\therefore\ a_9=2a_4-a_2=2(a_3a_2+1)-a_2$

$=2(-33+1)+11=-53$

답 ①

C173 | 답 180

[풀이]

문제에서 주어진 두 조건 (가), (나)를 이용하여 수열 $\{a_n\}$을 나열하자.

(가), (나)에 $n=1$을 대입하면

$a_1+a_2=17,\ |a_2-a_1|=1\ \ (\&a_2=9)$

$a_1=8,\ |9-8|=1(\bigcirc)$

$\therefore\ a_1=8$

(가)에 $n=2$, (나)에 $n=2,\ 3$을 대입하면

$a_1+a_2+a_3+a_4=34,\ |a_3-a_2|=3,\ |a_4-a_3|=5$

$(\&a_1=8,\ a_2=9)$

$a_3+a_4=17,\ |a_3-9|=3,\ |a_4-a_3|=5$

연립하면

$a_3=6,\ a_4=11\ \ (|11-6|=5(\bigcirc))$

$a_3=12,\ a_4=5\ \ (|12-5|=7\neq 5(\times))$

$\therefore\ a_3=6,\ a_4=11$

(가)에 $n=3$, (나)에 $n=4,\ 5$를 대입하면

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=51,$

$|a_5-a_4|=7,\ |a_6-a_5|=9$

$(\&a_1=8,\ a_2=9,\ a_3=6,\ a_4=11)$

$a_5+a_6=17,\ |a_5-11|=7,\ |a_6-a_5|=9$

$a_5=4,\ a_6=13\ \ (|13-4|=9(\bigcirc))$

$a_5=18,\ a_6=-1\ \ (|-1-18|=19\neq 9(\times))$

$\therefore\ a_5=4,\ a_6=13$

두 수열 $\{a_{2n-1}\}$, $\{a_{2n}\}$을 쓰면

$8,\ 6,\ 4,\ \cdots$ (공차가 -2인 등차수열)

$9,\ 11,\ 13,\ \cdots$ (공차가 2인 등차수열)

$\therefore\ \displaystyle\sum_{n=1}^{10}a_{2n}=\frac{2\times 9+9\times 2}{2}\times 10=180$

답 180

C174 | 답 ②

[풀이]

a_4가 4의 배수○: $a_5=\dfrac{1}{2}a_4+8$에서

$50<a_4+a_5=\dfrac{3}{2}a_4+8<60$

$28<a_4<34.\dot{6},\ a_4=32$

a_4가 4의 배수×: $a_5=a_4+8$에서

$50<a_4+a_5=2a_4+8<60$

$21<a_4<26,\ a_4=22,\ 23,\ 25$

이제 문제에서 주어진 귀납적 정의를 이용하여 수열 $\{a_n\}$을 나열하자.

<table>
<tr><th>a_1</th><th>a_2</th><th>a_3</th><th>a_4</th><th>a_5</th></tr>
<tr><td>188</td><td rowspan="2">96</td><td rowspan="3">52</td><td rowspan="7">32</td><td rowspan="7">24</td></tr>
<tr><td>94</td></tr>
<tr><td>×</td><td>×</td></tr>
<tr><td>84</td><td rowspan="2">44</td><td rowspan="4">26</td></tr>
<tr><td>42</td></tr>
<tr><td>40</td><td rowspan="2">22</td></tr>
<tr><td>×</td></tr>
<tr><td>108</td><td rowspan="2">56</td><td rowspan="3">32</td><td rowspan="3">22</td><td rowspan="3">30</td></tr>
<tr><td>54</td></tr>
<tr><td>×</td><td>×</td></tr>
<tr><td>×</td><td>×</td><td>×</td><td>23</td><td>31</td></tr>
<tr><td>×</td><td>×</td><td>×</td><td>25</td><td>33</td></tr>
</table>

$\therefore\ M+m=188+40=228$

답 ②

C175 ㅣ답 ③

[풀이]

a_6이 짝수이므로 a_4+a_5는 짝수이다.

즉, a_4, a_5는 모두 홀수이거나 모두 짝수이다.

a_1이 홀수이고, a_4, a_5가 모두 짝수인 경우는 불가능하다. (아래 표)

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	
홀	홀	홀	짝	홀		×
홀	홀	짝	홀			×
홀	짝	홀	홀			×

가능한 경우를 표로 정리하면 다음과 같다.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	
홀	홀	홀	홀	홀	짝	○
홀	홀	짝	홀	홀	짝	○
홀	짝	홀	홀	홀	짝	○
홀	짝	짝	홀	홀	짝	×

맨 위에서부터 (경우1), (경우2), (경우3) 이라고 하자.

(경우1)

$1,\ 2p-1,\ p,\ \dfrac{3p-1}{2},\ \dfrac{5p-1}{4},\ \dfrac{11p-3}{8}(=34)$

$\therefore\ p=25$

(경우2)

$1,\ 2p-1,\ p,\ 3p-1,\ 4p-1,\ \dfrac{7p-2}{2}(=34)$

$\therefore\ p=10$

(경우3)

$1,\ 2p,\ 2p+1,\ 4p+1,\ 3p+1,\ \dfrac{7p+2}{2}(=34)$

만족시키는 자연수 p는 존재하지 않는다.

이상에서 구하는 값은

$49+19=68$

답 ③

C176 ㅣ답 ④

[풀이]

$a_1<1$이라고 가정하자.

$a_2=2^{1-2}=\dfrac{1}{2}(<1)$,

$a_3=2^{2-2}=1$,

$a_4=\log_2 1=0$,

$a_5=2^{4-2}=4$,

$a_6=\log_2 4=2$,

$\vdots$

$a_5+a_6=6\neq 1$이므로 이는 가정에 모순이다.

따라서 $a_1\geq 1$이다.

$a_1=1$이라고 가정하자.

$a_2=\log_2 1=0$,

$a_3=2^{2-2}=1$,

$a_4=\log_2 1=0$,

$a_5=2^{4-2}=4$,

$a_6=\log_2 4=2$,

$\vdots$

$a_5+a_6=6\neq 1$이므로 이는 가정에 모순이다.

따라서 $a_1>1$이다.

(나): $a_6=1-a_5$

만약 $a_5<1$이면 $a_6=2^{5-2}=8=1-a_5$,

$a_5=-7$ $\cdots$(경우1)

만약 $a_5\geq 1$이면 $a_6=\log_2 a_5=1-a_5$,

$a_5=1$ $\cdots$(경우2)

($\because$ 곡선 $y=\log_2 x$와 직선 $y=1-x$의 교점은 유일하고, 이 점의 좌표는 $(1,\ 0)$이다.)

- (경우1)

$a_5=-7,\ a_6=8$

$a_4<1$: $a_5=2^{4-2}=4\neq -7$ (×)

$a_4\geq 1$: $a_5=\log_2 a_4=-7,\ a_4=2^{-7}<1$ (×)

이 경우에 해당하는 수열 $\{a_n\}$은 존재하지 않는다.

- (경우2)

$a_5=1,\ a_6=0$

$a_4 < 1$: $a_5 = 2^{4-2} = 4 \neq 1$ (×)

$a_4 \geq 1$: $a_5 = \log_2 a_4 = 1$, $a_4 = 2$

$a_3 < 1$: $a_4 = 2^{3-2} = 2$ (○) ⋯㉠

$a_3 \geq 1$: $a_4 = \log_2 a_3 = 2$, $a_3 = 4$ (○) ⋯㉡

㉠: $a_2 < 1$이면 $a_3 = 2^{2-2} = 1$ (×)

$a_2 \geq 1$이면 $a_3 = \log_2 a_2 < 1$, $a_2 < 2$, 즉 $1 \leq a_2 < 2$

$a_1 > 1$에서 $a_2 = \log_2 a_1$, $2 \leq a_1 < 4$

㉡: $a_2 < 1$이면 $a_3 = 2^{2-2} = 1$ (×)

$a_2 \geq 1$이면 $a_3 = \log_2 a_2 = 4$, $a_2 = 16$

$a_1 > 1$에서 $a_2 = \log_2 a_1 = 16$, $a_1 = 2^{16}$

이상에서 a_1의 범위는

$2 \leq a_1 < 4$ 또는 $a_1 = 2^{16}$

$\therefore \log_2 \dfrac{M}{m} = \log_2 2^{15} = 15$

답 ④

C177 | 답 ④

[풀이]

$\log_3 a_1$이 자연수 p라고 하자.

수열 $\{a_n\}$을 나열하면

3^p, 3^{p-1}, 3^{p-2}, ⋯, 27, 9, 3, 1, 7, 13, 19, 25, ⋯

연이은 네 개의 수의 합이 40인 경우를 모두 쓰면

$27+9+3+1=40$ ⋯(경우1)

$1+7+13+19=40$ ⋯(경우2)

• (경우1)

만약 $a_1 = 3^6$이면

$\{a_n\}$: 3^6, 3^5, 3^4, $3^3(=a_4)$, 3^2, 3, $1(=a_7)$, ⋯

이때, 조건 (나)는 성립하지만 $a_1 > 300$이므로 조건 (가)는 성립하지 않는다.

따라서 a_1은 3의 거듭제곱이 아니다.

이제 가능한 경우를 모두 쓰면

$\{a_n\}$: 3^5-6, 3^5, 3^4, $3^3(=a_4)$, 3^2, 3, $1(=a_7)$, ⋯

이때, $a_1 = 237$

$\{a_n\}$: 3^4-12, 3^4-6, 3^4, $3^3(=a_4)$, 3^2, 3, $1(=a_7)$, ⋯

이때, $a_1 = 69$

• (경우2)

$\{a_n\}$: 27, 9, 3, $1(=a_4)$, 7, 13, $19(=a_7)$, ⋯

에서 $a_1 = 27$

따라서 구하는 값은 $237+69+27=333$

답 ④

C178 | 답 87

[풀이]

문제에서 주어진 수열을 다시 쓰면

1, 2,	(2개)
1, 2, 2,	(3개)
1, 2, 2, 2,	(4개)
1, 2, 2, 2, 2,	(5개)
⋮	
1, 2, 2, ⋯, 2(제90항)	(13개)
1, 2, ⋯, 2(제100항), ⋯, 2	(14개)

곱을 S라고 하면

$S = 2^{1+2+3+\cdots+12+9} = 2^{87}$

$\therefore p = 87$

답 87

C179 | 답 ②

[풀이]

문제에서 주어진 수열은 자연수 k가 k번 나오므로

1, 2, 2, 3, ⋯, 2006, 2007, ⋯

2006이 마지막에 오는 항은

$1+2+3+\cdots+2006 = \dfrac{2006 \times 2007}{2}$

$= 1003 \times 2007$번째이다.

1003×2007을 5로 나눈 나머지는 21을 5로 나눈 나머지 1과 같으므로 2007은 반직선 b에서 처음으로 나타난다.

답 ②

C180 | 답 ③

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

$a_{2n-1} = 2n-1$, $a_{2n} = 2n-1$이므로

$a_{100} = 99$

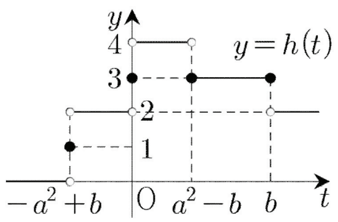
▸ ㄴ. (거짓)

$S_{100} - a_{100}$

$= 2(1+3+5+\cdots+99) - 99$

$= 2 \times \dfrac{1+99}{2} \times 50 - 99$

$= 4901$



$t > b$일 때, $h(t) - 2 = 0$이고,

$t < -a^2 + b + k$일 때, $h(t-k) = 0$이므로

$k > a^2$일 때, 함수

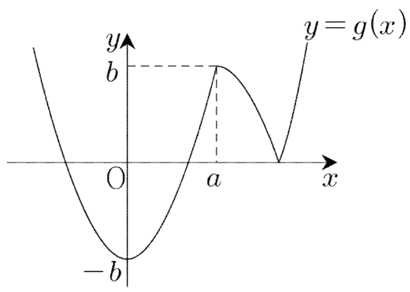
$\{h(t) - 2\}h(t-k)$

는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

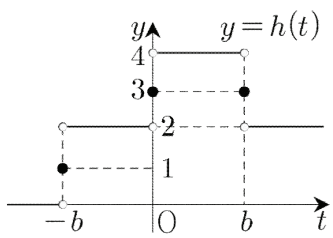
이는 문제에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

• (3) $b < a^2$, $a^2 - b = b$인 경우

함수 $g(x)$의 그래프는



함수 $h(t)$의 그래프는



$t > b$일 때, $h(t) - 2 = 0$이고,

$t < -b + k$일 때, $h(t-k) = 0$이므로

$k > 2b$일 때, 함수

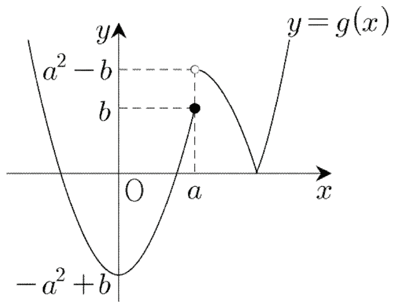
$\{h(t) - 2\}h(t-k)$

는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

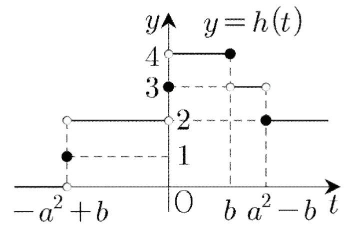
이는 문제에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

• (4) $b < a^2$, $a^2 - b > b$인 경우

함수 $g(x)$의 그래프는



함수 $h(t)$의 그래프는



$t > a^2 - b$일 때, $h(t) - 2 = 0$이고,

$t < -a^2 + b + k$일 때, $h(t-k) = 0$이므로

$k \geq 2(a^2 - b)$일 때, 함수

$\{h(t) - 2\}h(t-k)$

는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$2(a^2 - b) = 24$이면 문제에서 주어진 조건을 만족시킨다.

(1)~(4)에서

$2(a^2 - b) = 24$, $a^2 - b = 12$, $a^2 - 12 = b > 0$,

$a^2 > 12$

그리고 $a^2 - b > b$, $a^2 > 2b = 2a^2 - 24$, $a^2 < 24$

$12 < a^2 < 24$

a는 자연수이므로 $a = 4$, $b = 4$

$\therefore\ 10a + b = 44$

답 44

D059 | 답 ⑤

[풀이]

• (1) 함수 $f(x)$가 $x = 1$에서 연속인 경우

$f(1) = \lim_{x \to 1-} f(x)$, $4 = a$

함수 $(x-a)f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

• (2) 함수 $f(x)$가 $x = 1$에서 불연속인 경우 $(a \neq 4)$

함수 $f(x)$는 $x = 1$에서 좌극한, 우극한, 함숫값을 갖지만 불연속이므로 함수 $(x-a)f(x)$가 $x = 1$에서 연속일 필요충분조건은 $a = 1$이다. 왜냐하면 $a = 1$일 때, 함수 $y = x - a$의 $x = 1$에서의 극한값과 함숫값은 모두 0이기 때문이다.

(1), (2)에서 구하는 값은

$4 + 1 = 5$

답 ⑤

D060 | 답 ③

[풀이1]

다항함수는 연속함수이므로 일차함수 $g(x)$는 연속함수이다.

함수 $f(x)$가 두 구간 $(-\infty, 1)$, $(1, \infty)$에서 연속이므로,

함수 $f(x)g(x)$는 두 구간 $(-\infty, 1)$, $(1, \infty)$에서 연속이다.

함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이어야 한다.
함수 $f(x)g(x)$의 $x=1$에서의 우극한은
$\lim_{x\to1+} f(x)g(x)=0\times g(1)=0$
함수 $f(x)g(x)$의 $x=1$에서의 좌극한은
$\lim_{x\to1-} f(x)g(x)=2\times g(1)=2g(1)$
함수 $f(x)g(x)$의 $x=1$에서의 함숫값은
$f(1)g(1)=g(1)$
함수의 연속의 정의에 의하여
$0=2g(1)=g(1)$ 즉, $g(1)=0$ …㉠
$g(0)=\lim_{x\to1-} f(x)=2$ …㉡
함수 $g(x)$의 방정식을
$g(x)=ax+b(a\neq0)$
㉠, ㉡에 의하여
$g(1)=a+b=0$, $g(0)=b=2$
연립방정식을 풀면
$a=-2$, $b=2$
함수 $g(x)$의 방정식은
$g(x)=-2x+2$
$\therefore\ g(-1)=4$
답 ③

[풀이2] 시험장
$g(0)=2$ …㉠
$g(x)$: 연속
$f(x)$: $x=1$에서만 불연속
(단, $x=1$에서의 좌극한, 함숫값, 우극한 존재함)
$f(x)g(x)$: 연속
$\Rightarrow g(1)=0$ …㉡
㉠, ㉡에서
$g(0)=2$, $g(1)=0$
$g(x)=-2x+2$
$\therefore\ g(-1)=4$
답 ③

D061 | 답 ①

[풀이]
함수 $g(x)$는 $x=\pm2$에서 좌극한, 우극한, 함숫값이 모두 존재하지만 연속이 아니므로 함수 $f(x)g(x)$가 $x=\pm2$에서 연속일 필요충분조건은 $f(-2)=0$, $f(2)=0$이다.
인수정리에 의하여
$f(x)=(x+2)(x-2)$
함수 $f(x)$의 그래프는 x축의 방향으로 a만큼 평행이동시키면 함수 $f(x-a)$의 그래프와 일치하므로 다음이 성립한다.
$a=4$이면 함수 $f(x-a)g(x)$는 $x=2$에서 연속이지만, $x=-2$에서 불연속이다.
$a=-4$이면 함수 $f(x-a)g(x)$는 $x=-2$에서 연속이지만, $x=2$에서 불연속이다.
따라서 구하는 값은
$4\times(-4)=-16$
답 ①

D062 | 답 ②

[풀이1] 시험장
문제에서 주어진 두 등식에서 다음을 빠르게 유도할 수 있다.
$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=1 \Rightarrow f(x)=x^2+\cdots$
$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=k \Rightarrow f(1)=0,\ f'(1)=k$
이제 $f(2)=0$임을 보이자.
$f(x)$: 연속
$g(x)$: $x=2$에서만 불연속
(단, $x=2$에서의 좌극한, 우극한, 함숫값은 모두 존재)
$h(x)$: 연속
$\Rightarrow f(2)=0$
이상을 정리하면
$f(x)=x^2+\cdots$, $f(1)=0$, $f(2)=0$, $f'(1)=k$
인수정리에 의하여
$f(x)=(x-1)(x-2)$
$f'(x)=2x-3$, $f'(1)=-1=k$
$\therefore\ k=-1$
답 ②

D063 | 답 ③

[풀이]
함수 $f(x)$가 $x=2$에서 좌극한, 우극한, 함숫값이 모두 존재하지만 연속이 아니므로
함수 $f(x)f(kx)$가 $x=2$에서 연속일 필요충분조건은
$f(2k)=0$이다. (이때, 함수 $f(x)$는 $x=2k$에서 연속이다.)
방정식 $f(x)=0$을 풀면
$x=\pm4$, $x=\pm\sqrt{2}$
$2k=\pm4$, $\pm\sqrt{2}$에서 $k=\pm2$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$
따라서 구하는 값은

$2(-2)\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=2$

답 ③

D064 | 답 ④

[풀이]

함수 $f(x)$는 $x=5$에서 연속이므로

$\lim_{x\to5}f(x)=f(5)$, 즉

$\lim_{x\to5}\dfrac{x^2+ax+b}{x-5}$

(이때, (분자)$=25+5a+b=0$에서 $b=-25-5a$)

$=\lim_{x\to5}\dfrac{(x-5)(x+a+5)}{x-5}$

$=\lim_{x\to5}(x+a+5)=a+10=7$, $a=-3$, $b=-10$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x+2$

이므로 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$g(x)=\begin{cases}\sqrt{2-x} & (x<1)\\ x+2 & (x\geq1)\end{cases}$

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 불연속이므로

함수 $g(x)h(x)$가 $x=1$에서 연속일 필요충분조건은

$h(1)=0$, 즉 $|9+\alpha|-11=0$

$\alpha=-9\pm11$, 즉 $\alpha=2$ 또는 $\alpha=-20$

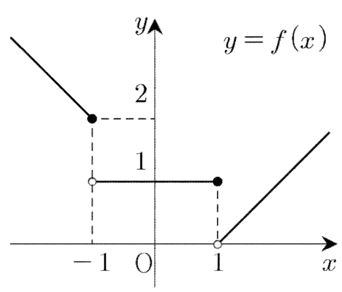
따라서 구하는 값은 -40이다.

답 ④

D065 | 답 ⑤

[풀이]

함수 $f(x)$의 그래프는



조건 (가)에서 다음과 같은 결과를 얻는다.

함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 불연속이고

함수 $f(x)g(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 연속이므로

$g(-1)=g(1)=0$

이어야 한다.

조건 (나)에서 다음과 같은 결과를 얻는다.

함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 불연속이고

함수 $f(x)g(x+k)$는 $x=-1$, $x=1$에서 연속이므로

$g(-1+k)=g(1+k)=0$

이어야 한다.

함수 $g(x)$는 삼차함수이므로 네 수

-1, 1, $-1+k$, $1+k$ $\cdots$ ㉠

가 모두 다를 수 없다. 다시 말하면 어떤 두 수는 서로 같아야 한다.

$-1+k=1$이면 $k=2$ (←경우1)

$1+k=-1$이면 $k=-2$ (←경우2)

- (경우1) $k=2$인 경우

㉠을 다시 쓰면

-1, 1, 1, 3

함수 $g(x)$의 방정식은

$g(x)=(x+1)(x-1)(x-3)$

그런데 $g(0)=3>0$이므로

문제에서 주어진 조건이 성립하지 않는다.

- (경우2) $k=-2$인 경우

㉠을 다시 쓰면

-1, 1, -3, -1

함수 $g(x)$의 방정식은

$g(x)=(x+1)(x-1)(x+3)$

$g(0)=-3<0$이므로

문제에서 주어진 조건이 성립한다.

따라서 함수 $g(x)$의 방정식은

$g(x)=(x+1)(x-1)(x+3)$

$\therefore\ g(2)=15$

답 ⑤

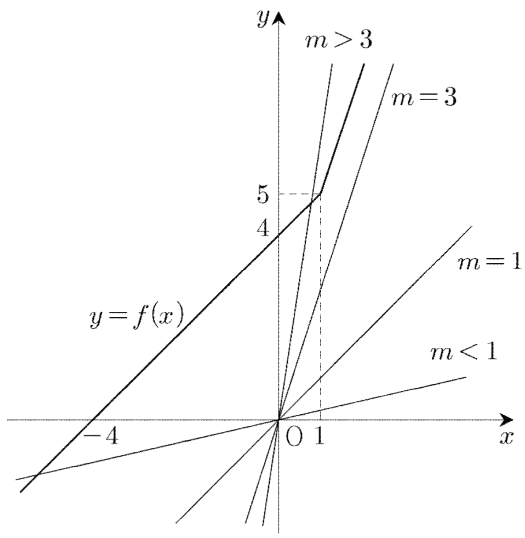
D066 | 답 8

[풀이]

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=\begin{cases}3x+2 & (x\geq1)\\ x+4 & (x<1)\end{cases}$

함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=mx$를 한 평면 위에 나타나면 다음과 같다.



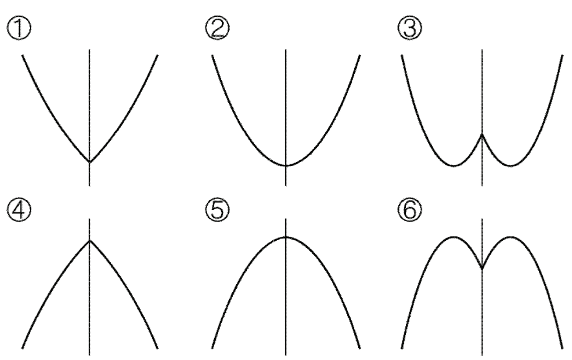
함수 $g(m)$의 방정식은

$$g(m)=\begin{cases}1 & (m<1,\ m>3)\\ 0 & (1\le m\le 3)\end{cases}$$

함수 $g(m)$은 $m=1$, $m=3$에서 불연속이므로
$h(x)=(x-1)(x-3)$
이면 함수 $g(x)h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
이때, $h(1)=h(3)=0$이다.
$\therefore\ h(5)=8$
답 8

D067 | 답 60

[풀이] ★
a의 부호와 함수 $f(x)$의 대칭축의 위치에 따라서 함수 $g(x)$의 그래프의 개형을 다음과 같이 여섯 개의 서로 다른 경우로 나누어 생각할 수 있다. (아래 그림에서 대칭축은 모두 y축이다.)



①: $a>0$, $b<0$ ②: $a>0$, $b=0$
③: $a>0$, $b>0$ ④: $a<0$, $b<0$
⑤: $a<0$, $b=0$ ⑥: $a<0$, $b>0$
①과 ②의 경우: 함수 $h(t)$는 증가함수이다. 이는 조건 (가)를 만족시키지 않는다.
④와 ⑤의 경우: 함수 $h(t)$는 감소함수이다. 이는 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

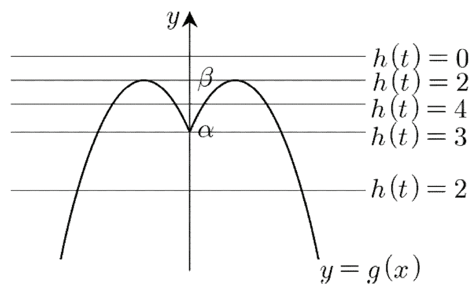
③의 경우: $h(t)$가 가질 수 있는 서로 다른 값들을 모두 쓰면 0, 2, 3, 4이다.

$h(2)$	$h(-1)$	$h(0)$
2	3	4
0	3	4
0	2	4
0	2	3

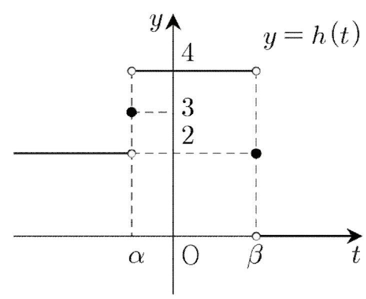
위의 네 가지 경우가 모두 불가능하다.
⑥의 경우: $h(t)$가 가질 수 있는 서로 다른 값들을 모두 쓰면 0, 2, 3, 4이다.

$h(2)$	$h(-1)$	$h(0)$
2	3	4
0	3	4
0	2	4
0	2	3

위의 네 가지의 경우가 모두 가능하다.
따라서 함수 $g(x)$의 그래프의 개형은 ⑥과 같아야 한다.



(단, $g(0)=\alpha$이고, β는 함수 $g(x)$의 최댓값이다.)
함수 $h(t)$의 그래프의 개형은



(단, $-1\le\alpha\le 0$, $0<\beta\le 2$)
조건 (나)에서 함수 $(t^2-t)h(t)$는 $t=\alpha$와 $t=\beta$에서 연속이어야 한다.

$$\lim_{t\to\alpha+}(t^2-t)h(t)=4(\alpha^2-\alpha)$$

$$(\alpha^2-\alpha)h(\alpha)=3(\alpha^2-\alpha)$$

함수의 연속의 정의에 의하여
$4(\alpha^2-\alpha)=3(\alpha^2-\alpha)$ 즉, $\alpha^2-\alpha=0$
풀면 $\alpha=0$
마찬가지의 방법으로 $\beta=1$이다.
함수 $f(x)$의 그래프는 원점을 지나고, 꼭짓점의 y좌표는 1이

다.

$f(0)=ab^2+c=0$

$f(b)=c=1$

정리하면

$c=1,\ ab^2=-1(a<0,\ b>0)$

그런데 $a,\ b$는 정수이므로 $a=-1,\ b=1$이다.

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=-(x-1)^2+1$

$\therefore\ 80f\left(\frac{1}{2}\right)=60$

답 60

D068 | 답 7

[풀이]

함수 $g(x)$가

$x=1$에서 연속: $1+b=7-b,\ b=3$

$x=3$에서 연속: $3+b=7-b,\ b=2$

• (1) 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속인 경우

함수 $g(x)$는 $x=3$에서 불연속이므로

$f(3)=0$, 즉 $f(3)=a^2-7a+10=0$

$(a-2)(a-5)=0,\ a=2$ 또는 $a=5$

순서쌍 $(a,\ b)$는 $(2,\ 3)$, $(5,\ 3)$

• (2) 함수 $g(x)$가 $x=3$에서 연속인 경우

함수 $g(x)$는 $x=1$에서 불연속이므로

$f(1)=0$, 즉 $f(1)=a^2-3a+2=0$

$(a-1)(a-2)=0,\ a=1$ 또는 $a=2$

순서쌍 $(a,\ b)$는 $(1,\ 2)$, $(2,\ 2)$

• (3) 함수 $g(x)$가 $x=1,\ x=3$에서 모두 불연속인 경우

함수 $f(x)$의 대칭축은 $x=\frac{1+3}{2}=2=a$이고,

$f(x)=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$에서

$f(1)=f(3)=0$

이므로 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(2,\ 1)$, $(2,\ 4)$, $(2,\ 5)$

(1), (2), (3)에서 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 7이다.

답 7

D069 | 답 ③

[풀이]

함수 $g(x)$의 방정식을

$g(x)=x^2+ax+b$

함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$의 방정식은

$$\frac{g(x)}{f(x)}=\begin{cases}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-4x+5} & (x\le 2)\\ \dfrac{x^2+ax+b}{x-2} & (x>2)\end{cases}$$

(이때,

$x^2-4x+5=(x-2)^2+1>0$

임을 상기하자.)

함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$는 $x=2$에서 연속이어야 한다.

$\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 2+}\frac{x^2+ax+b}{x-2}$,

$\frac{g(2)}{f(2)}=4+2a+b$

에서

$\lim_{x\to 2+}\frac{x^2+ax+b}{x-2}=4+2a+b$ $\cdots$ ㉠

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{x\to 2+}(x^2+ax+b)$

$=\lim_{x\to 2+}\frac{x^2+ax+b}{x-2}\times(x-2)$

$=\lim_{x\to 2+}\frac{x^2+ax+b}{x-2}\times\lim_{x\to 2+}(x-2)$

$=(4+2a+b)\times 0=0$

즉,

$\lim_{x\to 2+}(x^2+ax+b)=4+2a+b=0$

에서 $b=-2a-4$

이를 ㉠에 대입하여 정리하면

$\lim_{x\to 2+}\frac{x^2+ax+b}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2+}\frac{(x-2)(x+2+a)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2+}(x+2+a)$

$=4+a=0$ 즉, $a=-4,\ b=4$

함수 $g(x)$의 방정식은

$g(x)=x^2-4x+4$

$\therefore\ g(5)=9$

답 ③

$\lim_{x\to 3+} g(x)g(x-3) = \lim_{x\to 3-} g(x)g(x-3)$

$= g(3)g(0)$, 즉

$f(3)f(0) = -f(3)f(0)$, $f(0)=0$ 또는 $f(3)=0$

$\lim_{x\to -3+} g(x)g(x-3) = -f(-3)f(-6)$

$\lim_{x\to -3-} g(x)g(x-3) = f(-3)f(-6)$

$g(-3)g(-6) = -f(-3)f(-6)$

$-f(-3)f(-6) \neq f(-3)f(-6)$,

$f(-3) \neq 0$, $f(-6) \neq 0$

그런데 $f(-3)=f(0)\neq 0$이므로

$f(3)=0$

(2) 함수 $g(x)g(x-3)$가 $x=3$에서만 불연속

$x=-3$에서 연속이므로

$f(-3)=0$ 또는 $f(-6)=0$

($\because$ (1)과 마찬가지의 방법)

$x=3$에서 불연속이므로

$f(0)\neq 0$, $f(3)\neq 0$

그런데 $f(-3)=f(0)\neq 0$이므로

$f(-6)=0$

(1), (2)에서

$f(3)=0$ 또는 $f(-6)=0$

$\therefore$ $f(-6)\times f(3)=0$

▸ ㄷ. (참)

$k=-3$이므로 $f(3)=0$ ($\because$ ㄴ)

함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x)=(x+3)x(x-\alpha)+f(0)$

$f(x)=0(\cdots(*))$

$\Leftrightarrow$ $x^3+(3-\alpha)x^2-3\alpha x+f(0)=0$

만약 위의 삼차방정식이 1개의 실근(3)과 2개의 허근을 가지면 모든 실근의 합은 3이다. 이는 가정에 모순이다.

(1) 방정식 (*)이 서로 다른 세 실근을 갖는 경우

$\alpha-3=-1$, $\alpha=2$

$f(3)=6\times 3\times 1+f(0)=0$, $f(0)=-18$

$f(x)=(x-3)(x^2+4x+6)=0$

그런데 $x^2+4x+6=(x+2)^2+2\geq 2$이므로

이는 가정에 모순이다.

(2) 방정식 (*)이 중근을 갖는 경우

방정식 (*)이 3, $\beta(\neq 3)$을 근으로 갖는다고 하자.

$3+\beta=-1$, $\beta=-4$

$f(x)=(x-3)^2(x+4)$ (○)

($\because f(0)=36=f(-3)$)

$f(x)=(x-3)(x+4)^2$ (×)

($\because f(0)=-48\neq -6=f(-3)$)

$\therefore$ $g(-1)=-f(-1)=-16\times 3=-48$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

E098 | 답 ③

[풀이]

다음의 필요충분조건을 생각하자.

'직선 $y=mx+8$과 곡선 $y=x^3+2x^2-3x$는 서로 다른 두 점에서 만난다.'

$\Leftrightarrow$

'직선 $y=mx+8$과 곡선 $y=x^3+2x^2-3x$는 접한다.'

직선 $y=mx+8$이 곡선 $y=x^3+2x^2-3x$에 접할 때, 접점의 x좌표를 t로 두자.

(접점의 y좌표)

$=mt+8=t^3+2t^2-3t$ $\cdots$ ㉠

(접선의 기울기)

$=m=3t^2+4t-3$ $\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$t^3+t^2+4=0$

좌변을 인수분해하면

$(t+2)(t^2-t+2)=0$

풀면

$t=-2$

$(\because t^2-t+2=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\neq 0)$

이를 ㉡에 대입하면

$\therefore$ $m=1$

답 ③

E099 | 답 28

[풀이]

$h(x)=f(x)-g(x)$로 두면

다음의 필요충분조건이 성립한다.

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 두 점에서 만난다.

$\Leftrightarrow$

곡선 $y=h(x)$와 x축은 두 점에서 만난다.

함수 $h(x)$의 도함수는

$h'(x)=6x^2-2x=6x\left(x-\frac{1}{3}\right)$

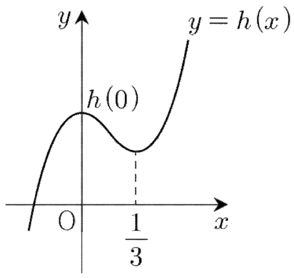
방정식 $h'(x)=0$을 풀면

$x=0$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $h(x)$의 그래프는



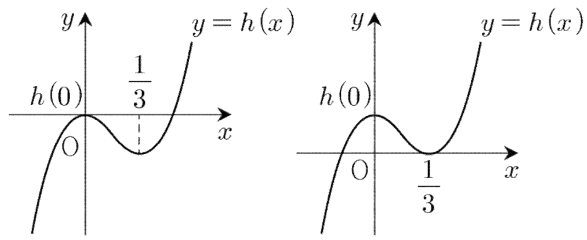
부정적분을 하면

$h(x)=\int h'(x)dx=2x^3-x^2+C$

(단, C는 적분상수)

$h(0)=C$이므로

$h(x)=2x^3-x^2+h(0)$



곡선 $y=h(x)$가 x축과 두 점에서 만나기 위해서는

$h(0)=0$ 또는 $h\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{27}+h(0)=0$

정리하면

$h(0)=0$ 또는 $h(0)=\frac{1}{27}$

따라서 $f(0)-g(0)$의 모든 값들만의 합은 $\frac{1}{27}$이다.

$p=27,\ q=1$이므로

$\therefore\ p+q=28$

답 28

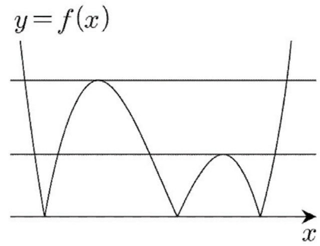
E100 | 답 ⑤

[풀이]

함수 $y=x^3-12x$의 그래프는 $x=\pm 2$에서 극값을 갖고, 원점에 대하여 대칭이다.

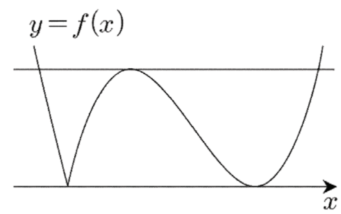
k의 값을 변화시키면서 함수 $f(x)$의 그래프를 그려보자.

(경우1)



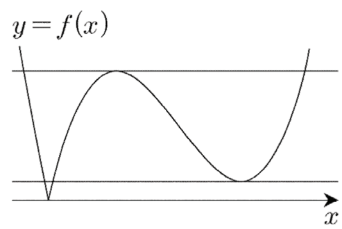
교점의 개수가 홀수인 음이 아닌 실수 a의 값은 3개다.

(경우2)



교점의 개수가 홀수인 음이 아닌 실수 a의 값은 1개다.

(경우3)



교점의 개수가 홀수인 음이 아닌 실수 a의 값은 3개다.

이상에서 곡선 $y=x^3-12x+k$의 극솟값은 0이다.

즉, $y|_{x=2}=k-16=0$

$\therefore\ k=16$

답 ⑤

E101 | 답 ②

[풀이]

조건 (가)에 의하여

$f(x)-f(2)=(x-2)(x-5)(x-\alpha)$

이므로 함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=(x-2)(x-5)(x-\alpha)+f(2)$

조건 (나)에 의하여

실수 p는 함수 $f(x)$의 극댓값 또는 극솟값이다.

그런데 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 $f(2)$는 함수 $f(x)$의 극댓값이다. 그러므로 $f'(2)=0$이다.

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=(x-5)(x-\alpha)+(x-2)(x-\alpha)$
$+(x-2)(x-5)$

이므로

$f'(2)=-3(2-\alpha)=0$에서 $\alpha=2$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=(x-2)^2(x-5)+f(2)$
$f(0)=-20+f(2)=0$에서 $f(2)=20$
함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=(x-2)^2(x-5)+20$
$=x^3-9x^2+24x$
정적분의 정의(미적분의 기본 정리)에 의하여

$$\therefore \int_0^2 f(x)dx$$

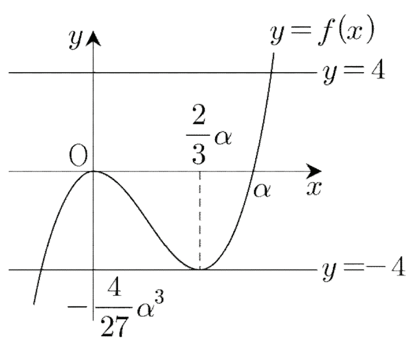
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-3x^3+12x^2\right]_0^2$$

$=4-24+48=28$

답 ②

E102 | 답 ①

[풀이]
조건 (가)에서
$g(0)=f(0)+|f'(0)|$, $f'(0)=0$
인수 정리에 의하여
$f(x)=x^2(x-\alpha)$
이때, $f'(x)=3x\left(x-\frac{2}{3}\alpha\right)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖고, $x=\frac{2}{3}\alpha$에서 극솟값을 갖는다. ($\because$ 조건 (나)에서 $\alpha>0$)
조건 (다)에서 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.

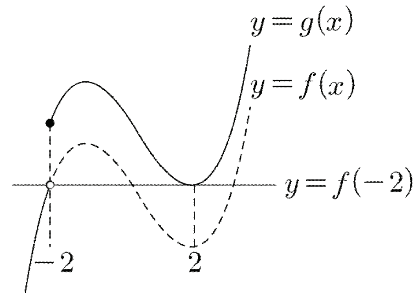


$f\left(\frac{2}{3}\alpha\right)=-\frac{4}{27}\alpha^3=-4$, $\alpha=3$
$\therefore$ $g(3)=f(3)+|f'(3)|=0+9=9$

답 ①

E103 | 답 ③

[풀이]
아래 그림과 같이 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프가 그려지면 방정식 $g(x)=f(-2)$의 실근은 2뿐이다. 이때, $f'(2)=0$, $g(2)=f(2)+8$(즉, $f(-2)-f(2)=8$)이다.



함수 $f(x)$의 방정식을

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+\frac{1}{2}$$

$f'(x)=3x^2+2ax+b$
$f(-2)-f(2)=-16-4b=8$, $b=-6$

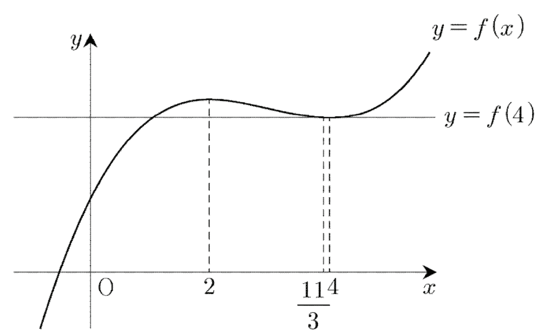
$$f'(2)=12+4a+b=0,\ a=-\frac{3}{2}$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-3x-6=0$, $(x+1)(x-2)=0$
함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 4를 갖는다.

답 ③

E104 | 답 ④

[풀이]
조건 (나)에 의하여
$f'(2)=0$, $f(2)=35$
조건 (다)에 의하여 다음의 두 경우가 가능하다.
$f'(4)=0$, $f(4)=f(2)$ $\cdots$(경우1)
$f'(4)\neq 0$, $f(4)=f(2)$ $\cdots$(경우2)
▸ (경우1)

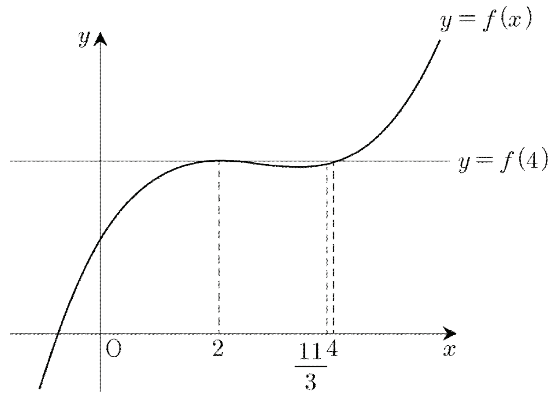


인수정리에 의하여
$f'(x)=3(x-2)(x-4)$
위의 그림에서 $f'\left(\frac{11}{3}\right)<0$이므로 조건 (가)는 성립한다.
부정적분을 하면

$$f(x)=\int f'(x)dx=x^3-9x^2+24x+C$$

(단, C는 적분상수)
조건 (나)에 의하여

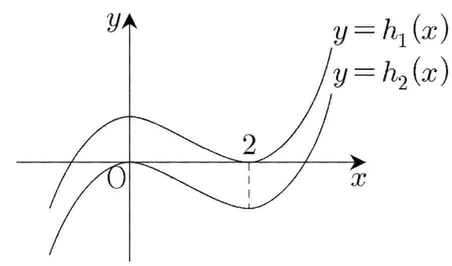
$f(2) = 20 + C = 35$ 즉, $C = 15$
함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + 15$
▸ (경우2)



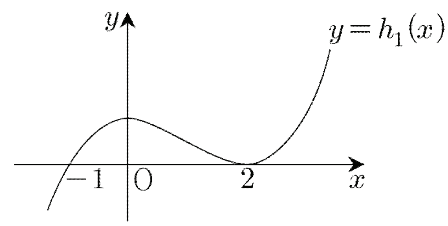
인수정리에 의하여
$f(x) - f(4) = (x-2)^2(x-4)$
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x) = 2(x-2)(x-4) + (x-2)^2$
$= (x-2)(3x-10)$
$f'\left(\frac{11}{3}\right) = \frac{5}{3} > 0$
조건 (가)는 성립하지 않는다.
따라서 (경우1)만이 가능하다.
$\therefore\ f(0) = 15$
답 ④

E105 | 답 ⑤

[풀이]
▸ ㄱ. (참)
$x = 0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x = 0$에서 극댓값을 갖는다.
$x = 0$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $g(x)$는 $x = 0$에서 극댓값을 갖는다.
▸ ㄴ. (참)
$h(x) = f(x) - g(x)$로 두자.
조건 (나)에서 곡선 $y = h(x)$는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.
$h'(x) = f'(x) - g'(x) = x^2 - 2x$
이므로 함수 h는 h_1 또는 h_2이다. (아래 그림)



위의 그림에서
$h(0) = 0$ 또는 $h(2) = 0$
$\Leftrightarrow$
$f(0) - g(0) = 0$ 또는 $f(2) - g(2) = 0$
$\Leftrightarrow$
$\{f(0) - g(0)\} \times \{f(2) - g(2)\} = 0$
▸ ㄷ. (참)
$\int_{-1}^{x} h(t)dt \geq 0$이므로 함수 h는 h_1이다.

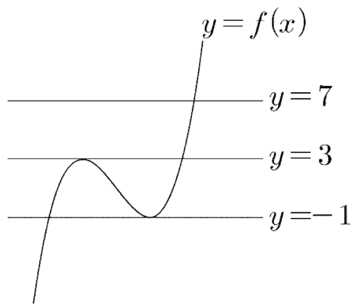


$h'(x) = x^2 - 2x$
$h(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + C$
$h(2) = -\frac{4}{3} + C = 0$, $C = \frac{4}{3}$
$\therefore\ \int_{-1}^{1} \{f(x) - g(x)\}dx$
$= \int_{-1}^{1} h(x)dx$
$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}x\right]_{-1}^{1}$
$= 2$
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.
답 ⑤

E106 | 답 ①

[풀이]
(가): 삼차함수 $f(x)$는 극값을 갖는다.
(나):
$g(x) = (x-3)^2 + 1 \geq 1$
(단, 등호는 $x = 3$일 때 성립한다.)
이므로 $m = 1$이다.

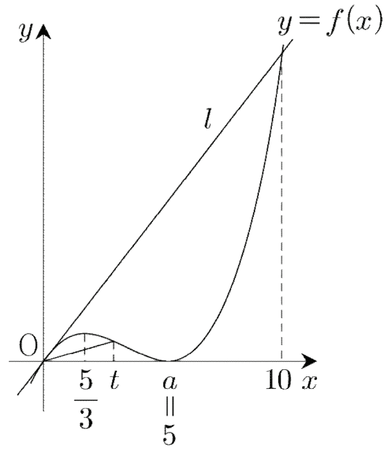
다음의 필요충분조건이 성립한다.
$g(f(x))=1$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
$\Leftrightarrow$
$f(x)=3$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
$\Leftrightarrow$
함수 $f(x)$의 두 개의 극값 중에서 하나는 3이다.
(다):
$g(x)=17 \Leftrightarrow (x+1)(x-7)=0$
$\Leftrightarrow x=-1$ 또는 $x=7$
따라서 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $x=-1$, $y=7$의 교점의 개수는 모두 3이다.
이상에서 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



따라서 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 합은 $2(=3+(-1))$이다.
답 ①

E107 | 답 35

[풀이] ★
$g(t)=\dfrac{f(t)-f(0)}{t-0}$
=(두 점 $(0,\ f(0))$, $(t,\ f(t))$를 잇는 직선의 기울기)
(단, $t>0$)
조건 (가)에 의하여 곡선 $y=f(x)$는 $x=b$에서 극솟값 $f(0)$을 가져야 한다.(그렇지 않으면 즉, $f(b)<f(0)$ 또는 $f(b)>f(0)$이면 함수 $g(t)$는 0을 최솟값으로 가질 수 없다.) 따라서 아래 그림처럼 곡선 $y=f(x)$가 원점을 지나고, $x=b$(즉, $x=a$)에서 극솟값 0을 갖는다고 해도 좋다. (그래도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.)



조건 (나)에서
$f'(a)=g(a)$ (즉, 순간변화율=평균변화율)
이므로 $b=a$임을 알 수 있다.
따라서 함수 $f(x)$는 위의 그림처럼 $x=a$일 때 극솟값 0을 갖는다.
삼차함수의 비율관계에 의하여
$a=\dfrac{5}{3}\times 3=5$
(이때, $f(x)=x(x-a)^2$으로 두고 $f'\left(\dfrac{5}{3}\right)=0$임을 이용하여 a의 값을 유도해도 좋다.)
한편 함수 $f(x)=x(x-5)^2$의 그래프 위의 원점에서의 접선의 방정식은
l: $y=25x$
이고, 이 직선의 방정식과 함수 $f(x)$의 방정식을 연립하면
$x=10$
이제 집합 A_m에서 주어진 등식을 다시 쓰면
$f'(x)=\dfrac{f(m)}{m}$
=(원점과 점 $(m,\ f(m))$을 잇는 직선의 기울기)
(단, $0<x\le m$)
평균값의 정리에 의하여
위의 등식을 만족시키는 x의 개수는
$m<5$이면 1,
$5\le m<10$이면 2,
$m\ge 10$이면 1
이다.
따라서 모든 자연수 m의 값의 합은
$5+6+7+8+9=35$
답 35

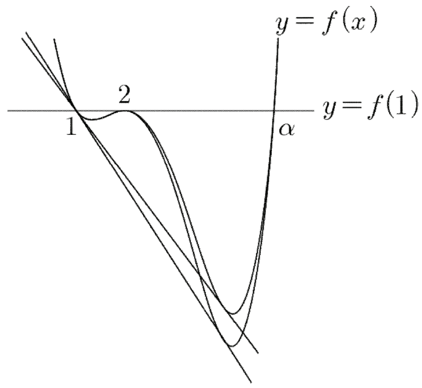
E108 | 답 8

[풀이1] 시험장

▸ 함수 $g(t)$가 $t=2$에서 극댓값 0을 가지므로 $f(1)=f(2)$이고, 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값을 가져야 한다.

▸ 함수 $g(t)$가 최솟값을 가지므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선이 곡선 $y=f(x)$과 '점 $(1,\ f(1))$이 아닌 점' 에서 만나야 한다. (접하거나, 서로 다른 두 개의 점에서 만난다.)

위의 두 조건을 모두 만족시키도록
함수 $f(x)$의 그래프를 그리면



(단, $\alpha>2$, $f(\alpha)=f(1)$)
인수정리에 의하여
$f(x)-f(1)=k(x-1)(x-2)^2(x-\alpha)$
(단, $k>0$)
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 방정식은
$y=k(1-\alpha)(x-1)+f(1)$
이 직선과 곡선 $y=f(x)$의 방정식을 연립하면
$x=1$ 또는 $(x-2)^2(x-\alpha)=1-\alpha$
구간 $(2,\ \infty)$에서 곡선 $y=(x-2)^2(x-\alpha)$와
직선 $y=1-\alpha$가 만나야 하므로
(삼차함수의 극솟값) $\le 1-\alpha$

즉, $4\left(\dfrac{2-\alpha}{3}\right)^3 \le 1-\alpha$

$4\alpha^3-24\alpha^2+21\alpha-5\ge 0$
$(\alpha-5)(2\alpha-1)^2\ge 0$
풀면 $\alpha\ge 5$ ($\because \alpha>2$)
방정식 $f(x)=f(1)$을 다시 쓰면
$k(x-1)(x-2)^2(x-\alpha)=0$
풀면 $x=1$ 또는 2 또는 α
α가 최소일 때, $1+2+\alpha$의 값은 최솟값 8을 갖는다.

답 8

[풀이2] (이과생을 위한 풀이)
함수 $g(t)$는

$$g(t)=\frac{f(t)-f(1)}{t-1} \quad \cdots (*)$$

함수 $g(t)$의 도함수는

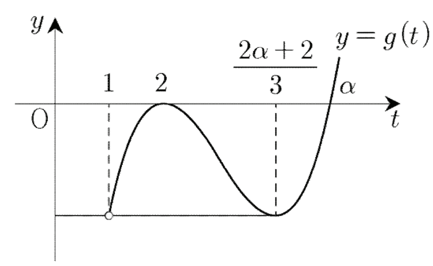
$$g'(t)=\frac{f'(t)(t-1)-f(t)}{(t-1)^2}$$

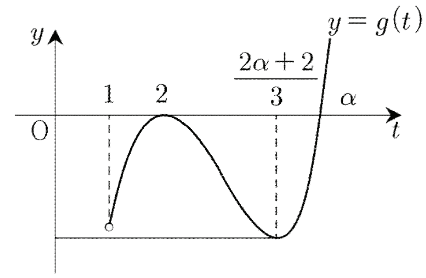
함수 $g(t)$는 $t=2$에서 극댓값 0을 가지므로
$g(2)=f(2)-f(1)=0$
$g'(2)=f'(2)-f(2)=0$
즉, $f(2)=f'(2)=f(1)$
인수정리에 의하여
$f(x)-f(1)=k(x-1)(x-2)^2(x-\alpha)$
(단, $k>0$, α는 상수)
함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=k(x-1)(x-2)^2(x-\alpha)+f(1)$
이를 (*)에 대입하면
$g(t)=k(t-2)^2(t-\alpha)$ (단, $k>0$)
삼차함수 $g(t)$가 $t=2$에서 극댓값을 가져야 하므로 $\alpha>2$이다.
함수 $g(t)$의 도함수는
$g'(t)=k(t-2)(3t-2\alpha-2)$
방정식 $g'(t)=0$을 풀면

$t=2$ 또는 $t=\dfrac{2\alpha+2}{3}$

$t=\dfrac{2\alpha+2}{3}$의 좌우에서 $g'(t)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 함수 $g(t)$는 $t=\dfrac{2\alpha+2}{3}$에서 극솟값을 갖는다.

함수 $g(t)$의 그래프는





위의 그림처럼 정의역이 열린구간 $(1,\ \infty)$인
함수 $g(t)$가 최솟값을 갖기 위해서는

$g(1)\ge$ (함수 $g(t)$의 극솟값) $=g\left(\dfrac{2\alpha+2}{3}\right)$

즉, $1-\alpha \geq \dfrac{4}{27}(2-\alpha)^3$

정리하면

$4\alpha^3-24\alpha^2+21\alpha-5 \geq 0$

$(\alpha-5)(2\alpha-1)^2 \geq 0$

풀면 $\alpha \geq 5(\because \alpha > 2)$

방정식 $f(x)=f(1)$을 다시 쓰면

$k(x-1)(x-2)^2(x-\alpha)=0$

풀면

$x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=\alpha$

α가 최소일 때, $1+2+\alpha$의 값은 최소가 된다.

따라서 구하는 값은 8이다.

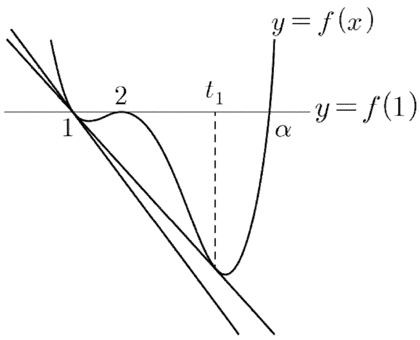
답 8

[참고]

다음과 같은 관찰을 해보자.

- $2<\alpha<5$인 경우

아래 그림처럼 점 $(1, 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점의 x좌표를 t_1이라고 하자.



t의 값을 변화시키면서 평균변화율 $g(t)$의 값의 변화를 관찰하면 다음과 같다.

$1<t<2$일 때, $g(t)$의 값은 증가한다.

$2<t<t_1$일 때, $g(t)$의 값은 감소한다.

$t_1<t<\alpha$일 때, $g(t)$의 값은 증가한다.

$t=2$일 때, 함수 $g(t)$는 극댓값 0을 갖고,

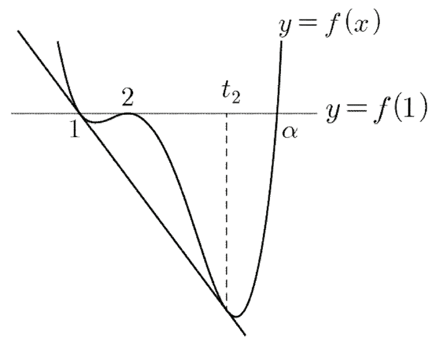
$t=t_1$일 때, 함수 $g(t)$는 극솟값 $f'(t_1)$을 갖는다.

그런데 $f'(t_1)>f'(1)$이고, $g(t)>f'(1)$

이므로 함수 $g(t)$는 최솟값을 갖지 않는다.

- $\alpha=5$인 경우

점 $(1, 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점의 x좌표를 t_2라고 하자.



t의 값을 변화시키면서 평균변화율 $g(t)$의 값의 변화를 관찰하면 다음과 같다.

$1<t<2$일 때, $g(t)$의 값은 증가한다.

$2<t<t_2$일 때, $g(t)$의 값은 감소한다.

$t_2<t<\alpha$일 때, $g(t)$의 값은 증가한다.

$t=2$일 때, 함수 $g(t)$는 극댓값 0을 갖고,

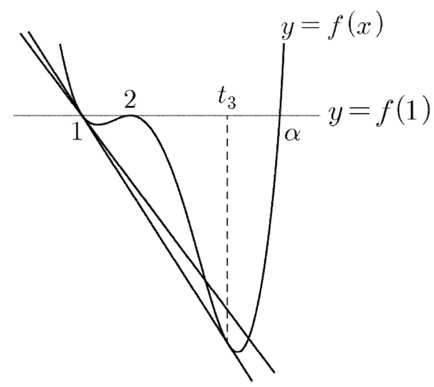
$t=t_2$일 때, 함수 $g(t)$는 극솟값 $f'(t_2)$를 갖는다.

$g(t) \geq f'(t_2)=f'(1)$

이므로 함수 $g(t)$는 최솟값을 갖는다.

- $\alpha>5$인 경우

점 $(1, 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점의 x좌표를 t_3이라고 하자.



t의 값을 변화시키면서 평균변화율 $g(t)$의 값의 변화를 관찰하면 다음과 같다.

$1<t<2$일 때, $g(t)$의 값은 증가한다.

$2<t<t_3$일 때, $g(t)$의 값은 감소한다.

$t_3<t<\alpha$일 때, $g(t)$의 값은 증가한다.

$t=2$일 때, 함수 $g(t)$는 극댓값 0을 갖고,

$t=t_3$일 때, 함수 $g(t)$는 극솟값 $f'(t_3)$을 갖는다.

$g(t) \geq f'(t_3)$이고, $f'(t_3)<f'(1)$

이므로 함수 $g(t)$는 최솟값을 갖는다.

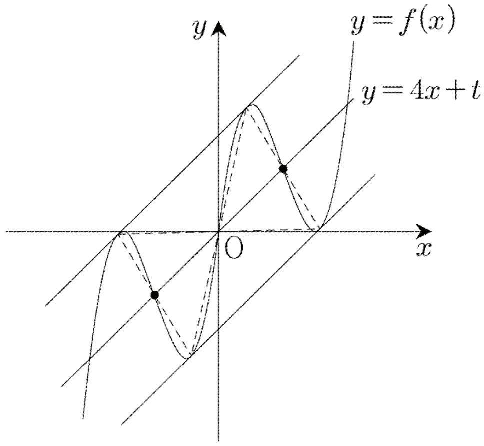
E109 | 답 36

[풀이] ★

모든 실수 x에 대하여

$f(-x)=-f(x)$

이므로 곡선 $y=f(x)$는 원점에 대하여 대칭이다.



곡선 $y=f(x)$가 위의 그림처럼 그려지면 이 곡선과 직선 $y=4x+t$의 위치관계는 다음과 같다.

t: $-\infty$ ⇨ ∞

$g(t)$: 1 ⇨ 3 ⇨ 5(최댓값) ⇨ 3 ⇨ 1

이때, 함수 $g(t)$는 불연속함수이고, 이 함수가 불연속인 점의 개수는 2이다.

$h(x)=f(x)-(4x+t)$

$$=\begin{cases} x(x+a)^2-4x-t & (x<0) \\ x(x-a)^2-4x-t & (x\geq 0) \end{cases}$$

함수 $h(x)$의 도함수는

$$h'(x)=\begin{cases} 3x^2+4ax+a^2-4 & (x<0) \\ 3x^2-4ax+a^2-4 & (x>0) \end{cases}$$

모든 실수 x에 대하여

$h'(-x)=h'(x)$

이므로 함수 $h'(x)$는 y축에 대하여 대칭이다.

$x>0$일 때, 방정식 $h'(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 각각 α, β라고 하면

$x<0$일 때, 방정식 $h'(x)=0$의 서로 다른 두 실근은 각각 $-\alpha$, $-\beta$이다.

(단, $\alpha<\beta$)

위의 그림처럼 원점과 점 $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)$을 잇는 직선의 기울기는 4이다.

그런데 이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{2}{3}a$$

이므로

$$\frac{\frac{2}{3}a\left(\frac{2}{3}a-a\right)^2}{\frac{2}{3}a}=4,\ a^2=36$$

$x>0$일 때, 함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=(x-a)^2+2x(x-a)$

이므로

$$\therefore\ f'(0)=\lim_{x\to 0+}f'(x)=a^2=36$$

답 36

E110 | 답 121

[풀이]

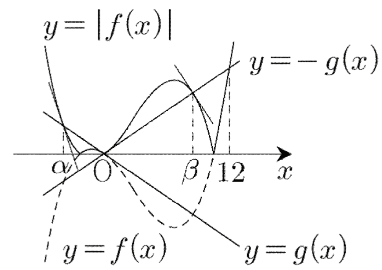
문제에서 주어진 조건에 의하여

$f(0)=0$이고, $g(x)=f'(0)x$

$h(3)=|f(3)|+g(3)<0$에서 $g(3)<0$

직선 $y=g(x)$는 두 점 $(0,\ 0)$, $(3,\ g(3))$(단, $g(3)<0$)을 지나므로 제2사분면과 제4사분면을 지난다.

함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수라고 가정하자.



(단, $-f(\alpha)=g(\alpha)$, $-f(\beta)=g(\beta)$, $\alpha<0<\beta$)

조건 (가):

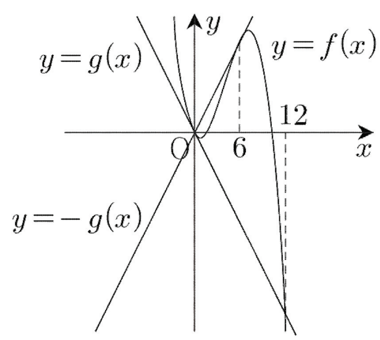
$f(k)<0$일 때,

$-f(k)+g(k)=0$, $-f'(k)+g'(k)=0$

$k=\alpha$, β일 때 전자의 등식은 만족시키지만, 후자의 등식은 만족시키지 않는다. 왜냐하면

$g'(k)<0$이지만 $f'(k)>0$이기 때문이다.

따라서 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수는 음수이다.



조건 (가):

$k\geq 0$일 때,

$f(k)=-g(k)$, $f'(k)=-g'(k)=-f'(0)$

이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(k,\ f(k))$에서의 접선은

$y=-f'(0)x$

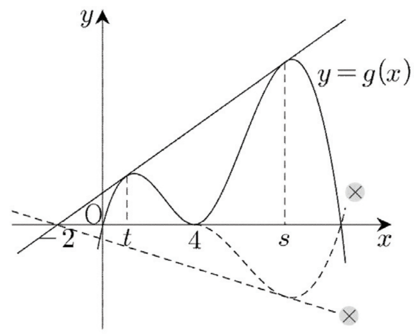
이다. (따라서 위의 그림처럼 함수 $f(x)$의 그래프가 그려진다.)

이제 k의 값을 구하자.

$f(x)-g(x)=ax^2(x-12)\ (a<0)$
x가 k에 아주 가까운 실수일 때,
$h(x)=f(x)+g(x)=ax^2(x-12)+2f'(0)x$
$h'(x)=2ax(x-12)+ax^2+2f'(0)$
$h(k)=ak^2(k-12)+2f'(0)k=0$,
(즉, $2f'(0)=-ak(k-12)$)
$h'(k)=2ak(k-12)+ak^2+2f'(0)=0$
위의 두 등식을 연립하면
$ak(k-12)+ak^2=0$, $k-12+k=0$,
$\therefore\ k=6$, $f'(0)=18a$
$h(3)=f(3)+g(3)$
$=-81a+6f'(0)$
$=-81a+108a$
$=27a=-\dfrac{9}{2}$, $a=-\dfrac{1}{6}$
$h(x)=\left|-\dfrac{1}{6}x^2(x-12)-3x\right|-3x$
$\therefore\ k\times\{h(6)-h(11)\}$
$=-6\times h(11)\ (\because h(6)=0)$
$=-6\times\left\{-\dfrac{1}{6}\times 11^2+33-33\right\}$
$=121$
답 121

E111 | 답 29

[풀이]
$0<x<4$일 때,
$g'(x)=3x^2-16x+16=(3x-4)(x-4)$
$g'(x)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{4}{3}$ 또는 $x=4$
함수 $g(x)$가 $x=4$에서 연속이고 미분가능하므로
$f(4)=f'(4)=0$
(가): $f\left(\dfrac{21}{2}\right)=0$
(나): 만약 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수(+)이면 아래 그림처럼 접선의 개수는 2이다.
따라서 $f(x)$의 최고차항의 계수는 음수(−)이다.
문제에서 주어진 조건을 모두 만족시키는 함수 $g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$0<x<4$에서 접점의 x좌표를 t라고 하자.
접선의 방정식은
$y=(3t^2-16t+16)(x-t)+t^3-8t^2+16t$
이 직선이 $(-2,\ 0)$을 지나므로
$0=(3t^2-16t+16)(-2-t)+t^3-8t^2+16t$
$(t-1)(t+4)(t-4)=0$, $t=1\ (\because 0<t<4)$
이때, 접선의 방정식은
$y=3x+6$
이제 $f(x)=a(x-4)^2(2x-21)$로 두자. (단, $a<0$)
$f'(x)=2a(x-4)(3x-25)$
$x>4$에서 접점의 x좌표를 s라고 하자.
접선의 방정식은
$y=2a(s-4)(3s-25)(x-s)+a(s-4)^2(2s-21)$
이 직선이 $(-2,\ 0)$을 지나므로
$0=2a(s-4)(3s-25)(-2-s)$
$+a(s-4)^2(2s-21)$,
$0=2(3s-25)(-2-s)+(s-4)(2s-21)$,
$4s^2-9s-184=0$, $(4s+23)(s-8)=0$
$s=8\ (\because s>4)$
$f'(8)=2a\times 4\times(-1)=3$, $a=-\dfrac{3}{8}$
$f(10)=-\dfrac{3}{8}\times 36\times(-1)=\dfrac{27}{2}$
$\therefore\ p+q=29$
답 29

E112 | 답 ⑤

[풀이]
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x)=3x^2-3$
방정식 $f'(x)=0$을 풀면
$x=-1$ 또는 $x=1$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 정리하면 다음과 같다.

F081 | 답 ⑤

[풀이]

함수 $f(x)$는 $x=k$에서 연속이므로

$\lim_{x\to k-} f(x) = \lim_{x\to k+} f(x)$, 즉

$ak = -k^2+4bk-3b^2$ $\cdots$ ㉠

함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x) = \begin{cases} a & (x<k) \\ -2x+4b & (x>k) \end{cases}$$

함수 $f(x)$가 $x=k$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to k-} f'(x) = \lim_{x\to k+} f'(x)$, 즉

$a=-2k+4b$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$(-2k+4b)k = -k^2+4bk-3b^2$,

$k^2=3b^2$, $k=\sqrt{3}b$, $a=(4-2\sqrt{3})b$

▸ ㄱ. (참)

$a=1$이면 $f'(k) = \lim_{x\to k-} f'(x) = 1$

▸ ㄴ. (참)

$k=3$이면 $b=\sqrt{3}$이므로

$a=(4-2\sqrt{3})\times\sqrt{3} = -6+4\sqrt{3}$

▸ ㄷ. (참)

$f(k)=f'(k)$

$\Leftrightarrow -k^2+4bk-3b^2=a$

$\Leftrightarrow -(\sqrt{3}b)^2+4b\times\sqrt{3}b-3b^2$

$=(4-2\sqrt{3})b$

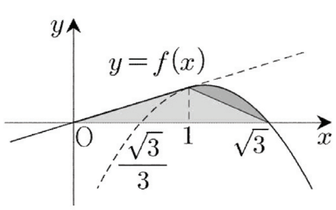
$(\because k=\sqrt{3}b,\ a=(4-2\sqrt{3})b)$

$\therefore\ b=\frac{1}{\sqrt{3}},\ k=1$

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{4}{\sqrt{3}}-2\right)x & (x<1) \\ -x^2+\frac{4}{\sqrt{3}}x-1 & (x\ge 1) \end{cases}$$

(이때, $-x^2+4bx-3b^2 = -(x-b)(x-3b)$)

함수 $f(x)$의 그래프는



구하는 넓이를 S라고 하면

$S=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\left(\frac{4}{\sqrt{3}}-2\right)+\frac{1}{6}(\sqrt{3}-1)^3$

$=2-\sqrt{3}+\frac{3\sqrt{3}-9+3\sqrt{3}-1}{6}$

$=\frac{1}{3}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

F082 | 답 ①

[풀이]

인수정리에 의하여

$f(x)=kx^3(x-\alpha)$ (단, $k\ne 0$)

$f'(x)=4kx^3-3k\alpha x^2 = 4kx^2\left(x-\frac{3}{4}\alpha\right)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0,\ x=\frac{3}{4}\alpha$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극값 2를 가지므로

$\frac{3}{4}\alpha=1,\ f(1)=k(1-\alpha)=2$

$\alpha=\frac{4}{3},\ k=-6$

구간

$\therefore \int_0^2 f(x-1)dx$

$=\int_{-1}^1 f(x)dx$

($\because$ 함수 $f(x-1)$의 그래프와 적분구간 $[0,\ 2]$를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동시킨 것이다.)

$=\int_{-1}^1 -6x^3\left(x-\frac{4}{3}\right)dx$

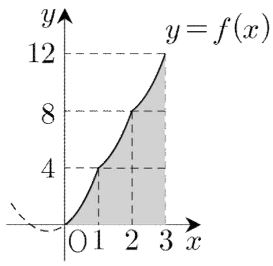
$=-12\int_0^1 x^4dx = -12\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = -\frac{12}{5}$

답 ①

F083 | 답 17

[풀이]

조건 (나)에 의하여 구간 $[0,\ 1)$에서 함수 $f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 a^2만큼 평행이동시키면 구간 $[1,\ 2)$에서 함수 $f(x)$의 그래프와 일치한다. 나머지 구간 $[2,\ \infty)$에서도 마찬가지의 방법으로 함수 $f(x)$의 그래프를 그릴 수 있다.



함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1-} f(x)=f(1)$, 즉 $2+a=a^2$

$a^2-a-2=0$, $(a-2)(a+1)=0$, $a=2$

구하는 넓이를 S라고 하면

$$S=3\int_0^1 f(x)dx+4\times 3$$

$$=3\left[\frac{2}{3}x^3+x^2\right]_0^1+12$$

$$=17$$

답 17

F084 | 답 41

[풀이]

모든 실수 x에 대하여

$f(-x)=-f(x)$

이므로 곡선 $y=f(x)$는 원점에 대하여 대칭이다.

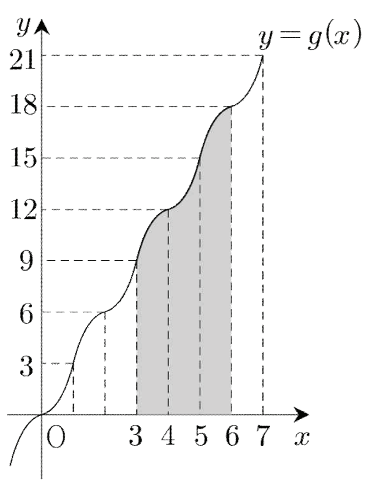
조건 (나)에서

$n=1$: $g(x)=f(x-2)+6$ (구간 $[1, 3]$)

$n=2$: $g(x)=f(x-4)+12$ (구간 $[3, 5]$)

⋮

이므로 함수 $g(x)$의 그래프는 아래와 같다.



$$\therefore \int_3^6 g(x)dx$$

$$=\int_3^5 g(x)dx+\int_5^6 g(x)dx$$

$$=12\times 2+\{15\times 1+(3-1)\}$$

$$=24+17=41$$

답 41

F085 | 답 66

[풀이]

(가)+(나):

곡선 $y=f(x-p)-f(-p)$ 위의 점 $(0, 0)$에서의 접선의 기울기는 0이므로

곡선 $y=f(x)-f(-p)$ 위의 점 $(-p, 0)$에서의 접선의 기울기는 0이다.

(이때, 모든 곡선과 점을 x축의 방향으로 $-p$만큼 평행이동시킨 것이다.)

즉, $f'(-p)=0$

마찬가지의 방법으로

$f'(p)=0$

요컨대 함수 $f(x)$는 $x=\pm p$에서 극값을 가지므로

$f'(x)=3(x+p)(x-p)=3x^2-3p^2$

$f(x)=x^3-3p^2x+1$ ($\because f(0)=1$)

$$\int_0^p g(x)dx=\int_0^p \{f(x+p)-f(p)\}dx$$

$$=\int_p^{2p}\{f(x)-f(p)\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}p^2x^2+x\right]_p^{2p}-pf(p)$$

$$=\frac{15}{4}p^4-\frac{9}{2}p^4+p-p^4+3p^4-p$$

$$=\frac{5}{4}p^4=20,\ p=2$$

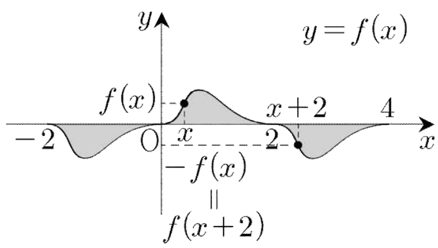
$\therefore$ $f(5)=66$

답 66

F086 | 답 −1

[풀이] 시험장

문제에서 주어진 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$의 그래프를 그리면 아래 그림과 같다.



위의 그림에서

$\therefore \int_{-2}^{4} f(x)dx = -1+1+(-1) = -1$

답 -1

F087 | 답 137

[풀이] 시험장

(가): $f(x) = x^4 + \cdots$

구간 $[0,\ 1)$에서의 함수 $f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 n만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동시키면

구간 $[n,\ n+1)$에서의 함수 $g(x)$의 그래프와 일치한다.

그런데 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

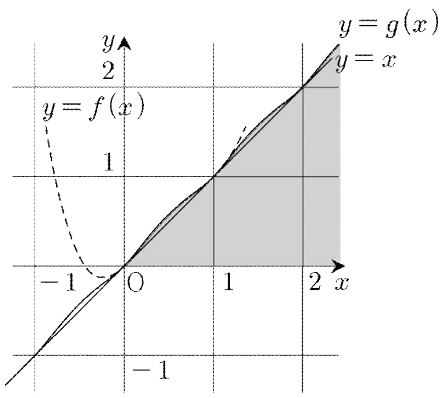
연속성: $f(0) = f(1) - 1 = 0$, 즉 $f(0) = 0$

미분가능성: $f'(1) = f'(0) = 1$

인수정리에 의하여

$f(x) - x = x^2(x-1)^2$

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는 아래 그림과 같다.



$\therefore \dfrac{q}{p} = \int_0^4 g(x)dx$

$= 4\int_0^1 f(x)dx + \dfrac{1}{2} \times (1+3+5+7)$

$= 4\left[\dfrac{1}{5}x^5 - \dfrac{1}{2}x^4 + \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2\right]_0^1 + 6$

$= \dfrac{32}{15} + 6 = \dfrac{122}{15}$

답 137

F088 | 답 32

[풀이]

(가)+(나)+(다):

$-2 < x < 2$일 때,

$g'(x) = -x + a = -x + 1$

($\because$ 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극값을 가지므로

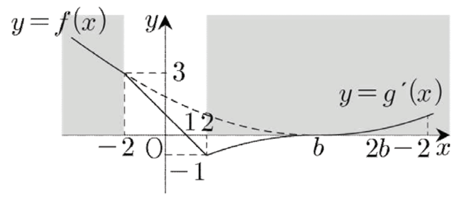
$g'(1) = -1 + a = 0$, $a = 1$)

$x \le -2$ 또는 $x \ge 2$일 때,

$g'(x) = \pm f(x)$이고, $f(x) \ge 0$

이때, 함수 $f(x)$의 그래프는 제3사분면, 제4사분면을 지나지 않으므로 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수는 양수이다.

함수 $g'(x)$는 $x = \pm 2$에서 연속이므로 곡선 $y = f(x)$는 점 $(-2,\ 3)$, $(2,\ 1)$을 반드시 지난다. 이때, 점 $(2,\ 1)$은 (함수 $g(x)$의 그래프가 지나는) 점 $(2,\ -1)$을 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.



위의 그림처럼

$f(x) = m(x-b)^2$ (단, $m > 0$)

이어야 함수 $g(x)$는 $x = b$에서 극값을 가진다.

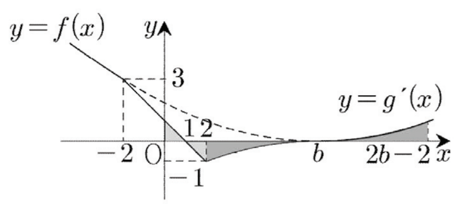
$f(-2) = m(-2-b)^2 = 3$,

$f(2) = m(2-b)^2 = 1$

위의 두 식을 변변히 나누면

$\dfrac{(2+b)^2}{(2-b)^2} = 3$, $b^2 - 8b + 4 = 0$,

$b = 4 + 2\sqrt{3}$



$g(0) = 0$($\because$ (나))이고, 위의 그림에서 어둡게 색칠된 두 삼각형의 넓이가 같으므로 $g(2) = 0$이다.

$g(2) = 0$이고, 위의 그림에서 더 어둡게 색칠된 두 도형의 넓이가 같으므로 $g(2b-2) = 0$이다.

그리고 $x \le 0$, $x \ge 2b-2$일 때, $g'(x) > 0$이므로

$g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ 또는 $x = 2$ 또는 $x = 2b-2$

$0 + 2 + (2b-2) = 8 + 4\sqrt{3}$

$\therefore\ p \times q = 32$

답 32

F089 | 답 ②

[풀이1]

정적분의 성질에 의하여

$g(a+4)-g(a)$

$=\int_{-2}^{a+4} f(t)dt-\int_{-2}^{a} f(t)dt$

$=\int_{a}^{a+4} f(t)dt$

$=\int_{0}^{4} f(t)dt$ ($\because$ (가)에서 함수 $f(x)$의 주기는 2)

$=2$ ($\because$ 조건(가)+(나))

답 ②

F090 | 답 12

[풀이]

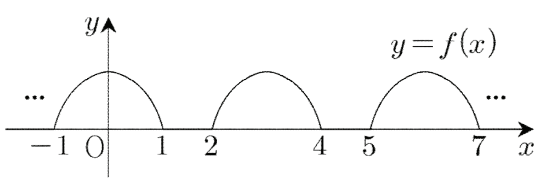
문제에서 주어진 정적분 값이 최소가 되려면

구간 $[-1,\ 1]$에서 $f(x)+x^2-1=0$, 즉

$f(x)=1-x^2$

그리고 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 구간 $[1,\ 2]$에서 $f(x)=0$이면 된다. (그래야 이 구간에서의 정적분 값도 최소가 된다.)

주기가 3인 함수 $f(x)$의 그래프는



$26=2+8\times3$이므로

$\therefore \int_{-1}^{26} f(x)dx$

$=9\times\int_{-1}^{2} f(x)dx$

$=9\times2\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$

$=12$

답 12

F091 | 답 ⑤

[풀이]

함수 $f(x)$가 사차함수이므로 함수 $f'(x)$는 삼차함수이다.

그런데 모든 실수 x에 대하여

$f'(-x)=-f'(x)$

가 성립하므로 삼차함수 $f'(x)$는 원점에 대하여 대칭이다.

함수 $f'(x)$의 방정식을

$f'(x)=4x^3+ax$

문제에서 주어진 조건 $f'(1)=0$에 의하여

$f'(1)=a+4=0$에서 $a=-4$

함수 $f'(x)$의 방정식은

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

부정적분을 하면

$f(x)=\int f'(x)dx=x^4-2x^2+C$

(단, C는 적분상수)

문제에서 주어진 조건 $f(1)=2$에 의하여

$f(1)=-1+C=2$에서 $C=3$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x^4-2x^2+3$

▸ ㄱ. (참)

문제에서 주어진 항등식에 $x=1$을 대입하면

$f'(-1)=-f'(1)=0$

▸ ㄴ. (참)

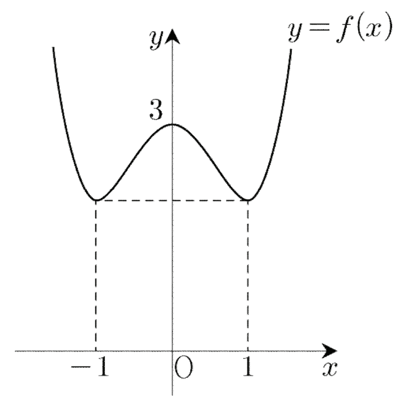
방정식 $f'(x)=0$을 풀면

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 정리하면 다음과 같다.

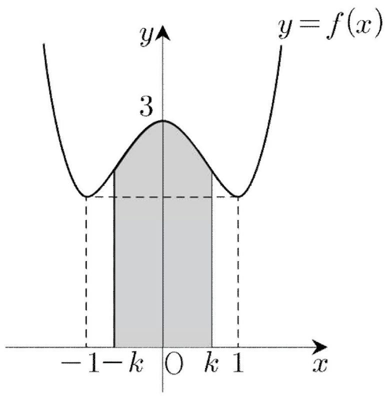
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	2 극소	↗	3 극대	↘	2 극소	↗

함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.

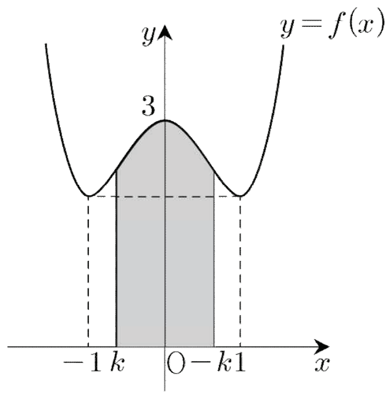


위의 그림처럼 함수 $f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

$k>0$일 때, 아래 그림에서 보기에서 주어진 등식이 항상 성립함을 확인할 수 있다.



$k=0$일 때, 보기에서 주어진 등식의 좌변과 우변은 모두 0이므로 등호가 성립한다.
$k<0$일 때, 아래 그림에서 보기에서 주어진 등식이 항상 성립함을 확인할 수 있다.

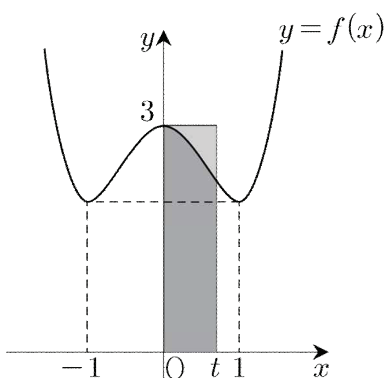


따라서 모든 실수 k에 대하여

$$\int_{-k}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{k} f(x)dx$$

이다.

▸ ㄷ. (참)



함수 $f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로

$$\int_{-t}^{t} f(x)dx = 2\int_{0}^{t} f(x)dx$$

$<2\times$(이웃한 두 변의 길이가 각각 t, 3인 직사각형의 넓이)
$=2\times 3t=6t$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

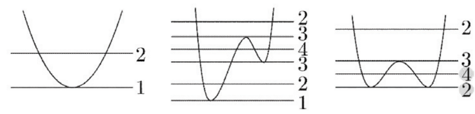
답 ⑤

F092 | 답 182

[풀이]

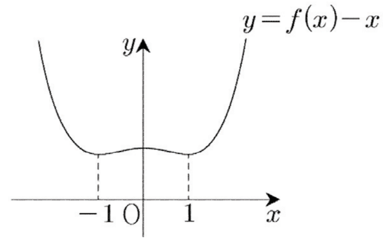
$h(t)=$(사차함수 $f(x)-x$와 직선 $y=f(t)-t$의 교점의 개수)

사차함수와 (만나는) x축에 평행한 직선의 교점의 개수를 써보면 다음과 같다.



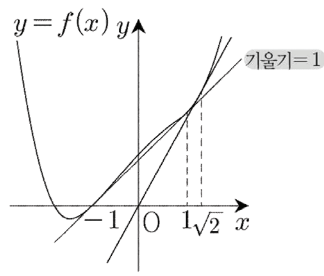
이웃한 두 수의 차이가 2인 경우가 포함된 그래프는 맨 오른쪽뿐이다.

(가): 함수 $f(x)-x$는 $x=-1$, $x=1$에서 극솟값을 갖는다. 그리고 y축에 대하여 대칭이다.



(나): $\alpha<0$일 때, 구간 $[\alpha,\ 0]$에서 $f(x)\ge 0$이고, α의 최솟값은 -1이므로 $f(-1)=0$이다.

따라서 함수 $f(x)$의 그래프는



(다): $f(x)-kx\ge 0 \Leftrightarrow f(x)\ge kx$

이때, k의 최댓값은 $f'(\sqrt{2})$이므로

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(\sqrt{2},\ f(\sqrt{2}))$에서의 접선은 원점을 지나야 한다.

함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x)-x=a(x+1)^2(x-1)^2+b$

(단, a, b는 상수)

$f(-1)=b-1=0$에서 $b=1$

$f'(x)=2a(x+1)(x-1)^2$
$+2a(x+1)^2(x-1)+1$

$f'(\sqrt{2})=2a(\sqrt{2}-1)+2a(\sqrt{2}+1)+1$

$=4\sqrt{2}a+1=\dfrac{a+1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{f(\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$

(즉, 순간변화율=평균변화율)

$a=\dfrac{1}{7}$

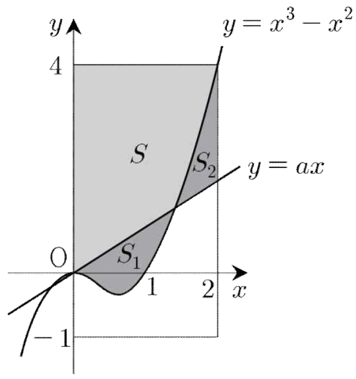
$\therefore\ f(6)=\dfrac{1}{7}\times 49\times 25+1+6=182$

답 182

F093 | 답 200

[풀이]

곡선과 직선으로 둘러싸인 세 도형의 넓이를 아래 그림처럼 S, S_1, S_2라고 하자.



문제에서 주어진 조건에서

$A=S+S_1$, $C=S+S_2$

$A-C=S_1-S_2=0$

이므로

$S_1=S_2$

즉, $\displaystyle\int_0^2 (x^3-x^2-ax)dx=0$이다.

정적분의 정의(미적분의 기본 정리)에 의하여

$$\int_0^2 (x^3-x^2-ax)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2\right]_0^2$$

$$=4-\frac{8}{3}-2a=0 \text{ 즉, } a=\frac{2}{3}$$

$\therefore\ 300a=200$

답 200

F094 | 답 54

[풀이]

직선 l의 방정식을

$l:\ y=mx+n$

으로 두자.

문제에서 주어진 조건에 의하여

$$\int_0^6 (mx+n)dx=\int_0^6 f(x)dx$$

정적분의 성질에 의하여

$$\int_0^6 \{f(x)-mx-n\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^3-\frac{m}{2}x^2-nx\right]_0^6$$

$$=-18-3m-n=0$$

즉, $n=-3m-18$

이를 직선 l의 방정식에 대입하여 정리하면

$l:\ y=m(x-3)-18$

직선 l이 m의 값에 관계없이 항상 지나는 점은 $(3,\ -18)$이다.

즉, 점 D의 좌표는 $\mathrm{D}(3,\ -18)$이다.

따라서 삼각형 ODC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times 6\times 18=54$$

답 54

F095 | 답 17

[풀이]

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표를 α라고 하자.

문제에서 주어진 조건에서 $S_1=S_2$이므로

$$\int_0^\alpha (f(x)-k)dx=\int_\alpha^1 (k-f(x))dx$$

즉, $\displaystyle\int_0^\alpha (f(x)-k)dx-\int_\alpha^1 (k-f(x))dx=0$

정적분의 성질에 의하여

$$\int_0^\alpha (f(x)-k)dx+\int_\alpha^1 (f(x)-k)dx=0$$

이므로

$$\int_0^1 (f(x)-k)dx=0$$

정적분의 정의(미적분의 기본 정리)에 의하여

$$\int_0^1 (f(x)-k)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}(x+1)^4+(8-k)x\right]_0^1$$

$$=\frac{17}{4}-k=0 \text{ 즉, } k=\frac{17}{4}$$

$\therefore\ 4k=17$

답 17

이동훈
기출문제집

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

구성

▸ **'이동훈 기출문제집 교육청/사관/경찰 미적분'** 에는 교육청, 사관학교, 경찰대가 출제한 전체 문항 중에서 **2015개정 교육과정에 맞는 479개의 문항을 엄선**하여 수록하였습니다.

교육청 : 2002년 3월 ~ 2023년 11월 고3, 고2, 고1 (출제 년도 기준)
사관학교 : 2002학년도 ~ 2024학년도 (학년도 기준)
경찰대 : 1999학년도 ~ 2024학년도 (학년도 기준)

▸ 문항 선정의 기준은 다음과 같습니다.
단순 계산 문제는 제외
교과서의 기본문제 및 전형적인 응용문제는 필요한 문제만 수록
수능, 평가원 기출문제와 지나치게 중복되는 전형적인 응용문제는 필요한 문제만 수록
난문(어려운 4점)이지만 수능과 거리가 먼 문제는 제외

▸ 문항 정렬은 유형별, 난이도순을 따랐습니다.
유형별 문항 구성은 출제 의도를 뚜렷하게 보여줄 것이며,
난이도순은 학습의 효율성을 높일 것입니다.

▸ 모든 해설은 교과서에 근거합니다.
해설은 교과서의 정의/정리/성질/공식/법칙과 수학적 표현만으로 작성되었으며, 수학적으로 엄밀합니다.
핵심적인 풀이와 참고만을 수록하여 문제가 가진 출제의도를 뚜렷이 하였으며, 학습의 효율을 꾀하였습니다.

기호

〈 문제집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 수준별 문항 구분은 다음과 같습니다.

○ : 교과서 예제 또는 그 수준의 문제
○○ : 교과서 연습문제 또는 그 수준의 문제
○○○ : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 상대적으로 난이도 낮음
●●● : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 상대적으로 난이도 높음 (실전이론 필요성 비교적 높음)
★★★ : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 - 최고난문 (실전이론 필요성 매우 강함)

각 단계에 대한 학습법은 이동훈 기출 네이버 카페(cafe.naver.com/2math)에서 읽으실 수 있습니다.

〈 해설집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 해설집에는 다음의 세 방향의 풀이를 모두 수록하기 위하여 노력하였습니다.

(A) 교과서의 '기본개념' 과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(B) 교과서와 수능/평가원 기출문제에서 추론가능 한 '실전이론' 과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(C) 시험장에서 손끝에서 나와야 하는 풀이 (이에 해당하는 풀이에는 시험장 표시를 해두었습니다.)

모든 [풀이] 또는 [풀이1]은 (A) 또는 (C) 또는 이 둘 모두에 해당합니다.
[풀이2], [풀이3], … 은 (A)에 해당할 수도 있고, (B)에 해당할 수도 있습니다. ((C)는 시험장으로 표시)
[참고], [참고1], [참고2], … 는 (A)에 해당할 수도 있고, (B)에 해당할 수도 있습니다. ((C)는 시험장으로 표시)

만약 어떤 문제의 어느 해설에도 시험장 표시가 없다면 [풀이] 또는 [풀이1]이 시험장 풀이입니다.

특히 (C)의 시험장 풀이(시험장)는 간결하므로 다른 풀이가 지나치게 길다고 생각된다면 시험장을 읽을 것을 권합니다.

수능/평가원/교사경 기출문제에서 반복되는 '기본개념', '실전이론', '(실전이론에 따른) 전형적인 풀이 과정' 을 포함한 문제의 해설에는 다음과 같이 ★ 표시를 해두었습니다. (★가 표시된 풀이 또는 참고의 대부분은 개념적으로 중요합니다. 꼭 익혀두세요.)

[풀이] ★
[참고] ★

반드시 익혀야 하는 풀이 또는 참고가 아닌 경우에는 다음과 같이 (선택) 표시를 해두었습니다.

[풀이] (선택)
[참고] (선택)

단원별 알파벳 구성

과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학 Ⅰ	지수함수와 로그함수	A	기하	이차곡선	M
	삼각함수	B		평면벡터	N
	수열	C		공간도형과 공간좌표	P
수학 Ⅱ	함수의 극한과 연속	D	수학	다항식	Q
	미분	E		방정식과 부등식	R
	적분	F		도형의 방정식	S
미적분	수열의 극한	G		집합과 명제	T
	미분법	H		함수	U
	적분법	I		순열과 조합	V
확률과 통계	경우의 수	J	교육과정 外		Z
	확률	K			
	통계	L			

목 차

미적분

G 수열의 극한

- 2015개정 교육과정

○ 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 구하는 공식은 수학Ⅰ 삼각함수 단원을 따름
○ 삼각형, 사각형, 원, 부채꼴의 기하학적 성질은 개정 중학교 수학 교과서를 따름
○ 주기 함수 관련 문제 포함
○ 부등식의 영역 관련 문제 제외 또는 변형 수록
○ 사인법칙, 코사인법칙 관련 문제 포함
○ 라디안 표현이 포함된 문제 포함

G. 등비급수(기하): 두 원의 위치 관계

G128

○○
(2007(4)고3-가형17)

반지름의 길이가 1인 원 C가 있다.

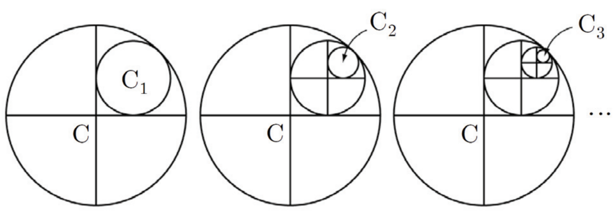
원 C를 사분원으로 나누어 한 사분원에 내접하는 원을 C_1,

원 C_1을 사분원으로 나누어 한 사분원에 내접하는 원을 C_2,

원 C_2를 사분원으로 나누어 한 사분원에 내접하는 원을 C_3,

⋮

이와 같은 과정을 계속하여 얻어진 원 C_n의 반지름의 길이를 r_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} r_k$의 값은? [4점]



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1+\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

④ $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$ ⑤ 1

G129

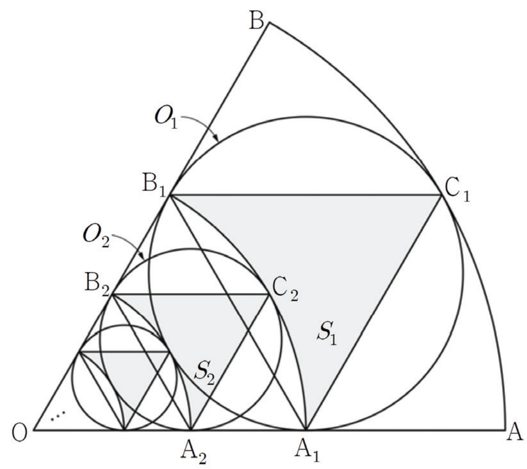
○○○
(2015(4)고3-B형18)

그림과 같이 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$이고 반지름의 길이가 6인 부채꼴 OAB가 있다.

부채꼴 OAB에 내접하는 원 O_1이 두 선분 OA, OB, 호 AB와 만나는 점을 각각 A_1, B_1, C_1이라 하고, 부채꼴 $\mathrm{OA}_1\mathrm{B}_1$의 외부와 삼각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{C}_1\mathrm{B}_1$의 내부의 공통부분의 넓이를 S_1이라 하자.

부채꼴 $\mathrm{OA}_1\mathrm{B}_1$에 내접하는 원 O_2가 두 선분 OA_1, OB_1, 호 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$과 만나는 점을 각각 A_2, B_2, C_2라 하고, 부채꼴 $\mathrm{OA}_2\mathrm{B}_2$의 외부와 삼각형 $\mathrm{A}_2\mathrm{C}_2\mathrm{B}_2$의 내부의 공통부분의 넓이를 S_2라 하자.

위와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 부채꼴 $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$의 외부와 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n\mathrm{B}_n$의 내부의 공통부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $8\sqrt{3}-3\pi$ ② $8\sqrt{3}-2\pi$ ③ $9\sqrt{3}-3\pi$

④ $9\sqrt{3}-2\pi$ ⑤ $10\sqrt{3}-3\pi$

G130

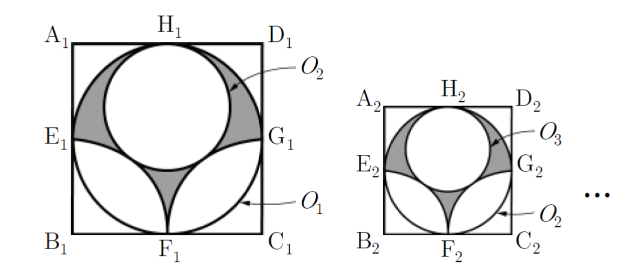
(2011(4)고3-가형18/나형18)

그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원 O_1에 외접하는 정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$의 네 변 $\mathrm{A_1B_1}$, $\mathrm{B_1C_1}$, $\mathrm{C_1D_1}$, $\mathrm{D_1A_1}$의 중점을 각각 $\mathrm{E_1}$, $\mathrm{F_1}$, $\mathrm{G_1}$, $\mathrm{H_1}$이라 하자.

점 $\mathrm{B_1}$을 중심으로 하고 선분 $\mathrm{B_1F_1}$을 반지름으로 하는 부채꼴 $\mathrm{B_1F_1E_1}$의 호 $\mathrm{E_1F_1}$과 점 $\mathrm{C_1}$을 중심으로 하고 선분 $\mathrm{C_1F_1}$을 반지름으로 하는 부채꼴 $\mathrm{C_1F_1G_1}$의 호 $\mathrm{G_1F_1}$과 원 O_1의 호 $\mathrm{E_1H_1G_1}$로 둘러싸인 도형을 R_1이라 하자. R_1에 내접하는 원을 O_2라 하고 도형 R_1의 넓이에서 원 O_2의 넓이를 뺀 값을 S_1이라 하자.

원 O_2에 외접하는 정사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$의 네 변 $\mathrm{A_2B_2}$, $\mathrm{B_2C_2}$, $\mathrm{C_2D_2}$, $\mathrm{D_2A_2}$의 중점을 각각 $\mathrm{E_2}$, $\mathrm{F_2}$, $\mathrm{G_2}$, $\mathrm{H_2}$라 하자. 점 $\mathrm{B_2}$를 중심으로 하고 선분 $\mathrm{B_2F_2}$를 반지름으로 하는 부채꼴 $\mathrm{B_2F_2E_2}$의 호 $\mathrm{E_2F_2}$과 점 $\mathrm{C_2}$를 중심으로 하고 선분 $\mathrm{C_2F_2}$를 반지름으로 하는 부채꼴 $\mathrm{C_2F_2G_2}$의 호 $\mathrm{G_2F_2}$과 원 O_2의 호 $\mathrm{E_2H_2G_2}$로 둘러싸인 도형을 R_2라 하자. R_2에 내접하는 원을 O_3이라 하고 도형 R_2의 넓이에서 원 O_3의 넓이를 뺀 값을 S_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 호 $\mathrm{E}_n\mathrm{F}_n$, 호 $\mathrm{G}_n\mathrm{F}_n$, 호 $\mathrm{E}_n\mathrm{H}_n\mathrm{G}_n$으로 둘러싸인 도형을 R_n이라 하고 R_n에 내접하는 원을 O_{n+1}이라 하자. 도형 R_n의 넓이에서 원 O_{n+1}의 넓이를 뺀 값을 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $\dfrac{9-2\pi}{3}$ ② $\dfrac{18-4\pi}{5}$ ③ $\dfrac{9-2\pi}{2}$

④ $\dfrac{18-4\pi}{3}$ ⑤ $9-2\pi$

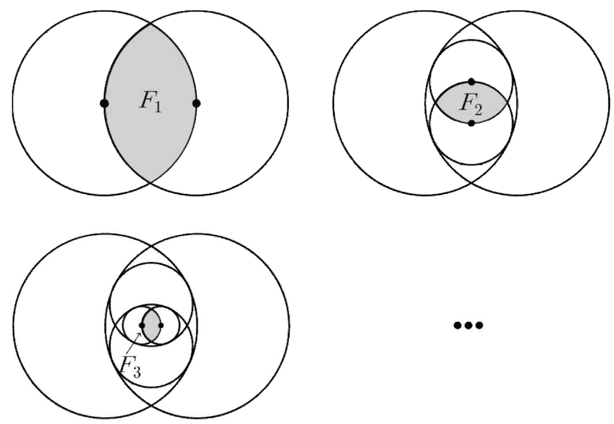
G131

(2013사관(1차)-이과24)

그림과 같이 반지름의 길이가 3인 두 원을 서로의 중심을 지나도록 그렸을 때, 두 원의 내부에서 겹친 부분이 나타내는 도형을 F_1이라 하자.

F_1의 내부에 반지름의 길이가 같고 서로의 중심을 지나는 두 원을 F_1과 접하면서 반지름의 길이가 최대가 되도록 그렸을 때, 그려진 두 원의 내부에서 겹친 부분이 나타내는 도형을 F_2라 하자.

F_2의 내부에 반지름의 길이가 같고 서로의 중심을 지나는 두 원을 F_2와 접하면서 반지름의 길이가 최대가 되도록 그렸을 때, 그려진 두 원의 내부에서 겹친 부분이 나타내는 도형을 F_3이라 하자.



이와 같은 방법으로 계속하여 도형 F_n을 그려 나갈 때, F_n의 둘레의 길이를 l_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은? [4점]

① $2\pi(1+\sqrt{7})$ ② $\dfrac{8\pi}{3}(1+\sqrt{7})$ ③ $\dfrac{4\pi}{3}(2+\sqrt{7})$

④ $2\pi(2+\sqrt{7})$ ⑤ $\dfrac{5\pi}{3}(2+\sqrt{7})$

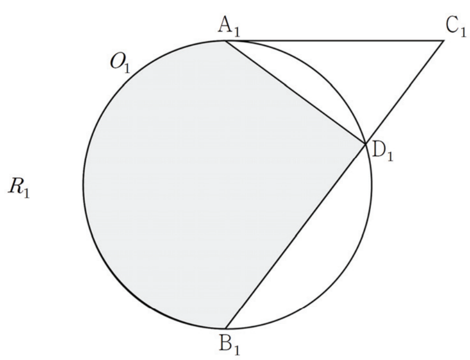
G132

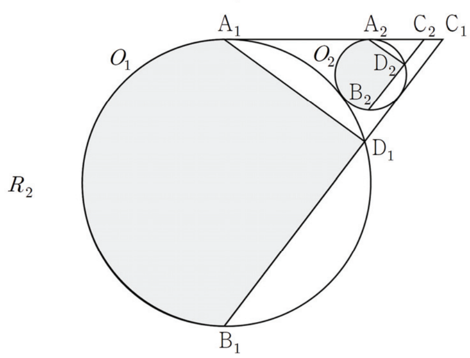
(2021(4)고3-미적분28)

그림과 같이 길이가 4인 선분 A_1B_1을 지름으로 하는 원 O_1이 있다. 원 O_1의 외부에 $\angle B_1A_1C_1 = \frac{\pi}{2}$, $\overline{A_1B_1} : \overline{A_1C_1} = 4 : 3$이 되도록 점 C_1을 잡고 두 선분 A_1C_1, B_1C_1을 그린다. 원 O_1과 선분 B_1C_1의 교점 중 B_1이 아닌 점을 D_1이라 하고, 점 D_1을 포함하지 않는 호 A_1B_1과 두 선분 A_1D_1, B_1D_1로 둘러싸인 부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 호 A_1D_1과 두 선분 A_1C_1, C_1D_1에 동시에 접하는 원 O_2를 그리고 선분 A_1C_1과 원 O_2의 교점을 A_2, 점 A_2를 지나고 직선 A_1B_1과 평행한 직선이 원 O_2와 만나는 점 중 A_2가 아닌 점을 B_2라 하자. 그림 R_1에서 얻은 것과 같은 방법으로 두 점 C_2, D_2를 잡고, 점 D_2를 포함하지 않는 호 A_2B_2와 두 선분 A_2D_2, B_2D_2로 둘러싸인 부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n \to \infty} S_n$의 값은? [4점]





⋮ ⋮

① $\frac{32}{15}\pi + \frac{256}{125}$ ② $\frac{9}{4}\pi + \frac{54}{25}$ ③ $\frac{32}{15}\pi + \frac{512}{125}$

④ $\frac{9}{4}\pi + \frac{108}{25}$ ⑤ $\frac{8}{3}\pi + \frac{128}{25}$

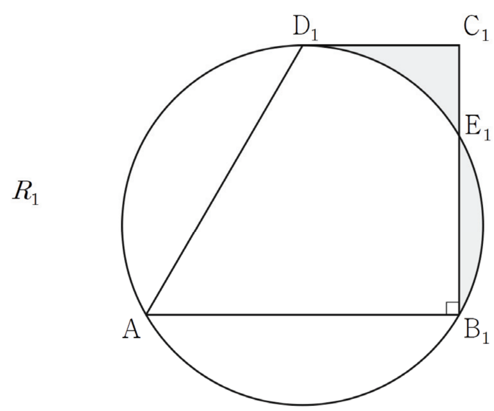
G133

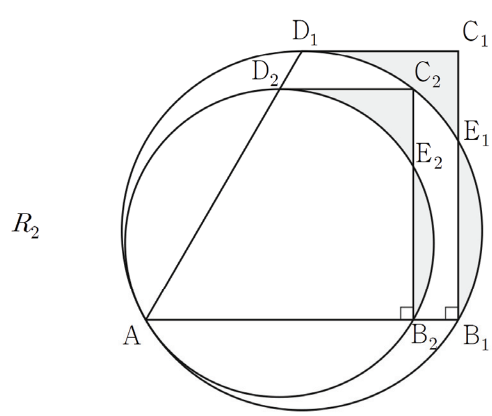
(2023(4)고3-미적분28)

그림과 같이 $\overline{AB_1} = 2$, $\overline{B_1C_1} = \sqrt{3}$, $\overline{C_1D_1} = 1$이고 $\angle C_1B_1A = \frac{\pi}{2}$인 사다리꼴 $AB_1C_1D_1$이 있다. 세 점 A, B_1, D_1을 지나는 원이 선분 B_1C_1과 만나는 점 중 B_1이 아닌 점을 E_1이라 할 때, 두 선분 C_1D_1, C_1E_1과 호 E_1D_1로 둘러싸인 부분과 선분 B_1E_1과 호 B_1E_1로 둘러싸인 부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 선분 AB_1 위의 점 B_2, 호 E_1D_1 위의 점 C_2, 선분 AD_1 위의 점 D_2와 점 A를 꼭짓점으로 하고 $\overline{B_2C_2} : \overline{C_2D_2} = \sqrt{3} : 1$이고 $\angle C_2B_2A = \frac{\pi}{2}$인 사다리꼴 $AB_2C_2D_2$를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 점 E_2를 잡고, 사다리꼴 $AB_2C_2D_2$에 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n \to \infty} S_n$의 값은? [4점]





⋮ ⋮

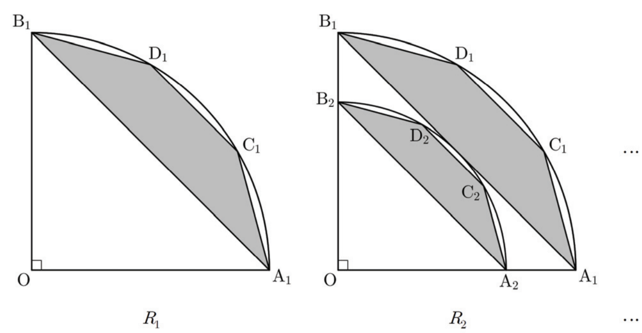
① $\frac{49}{144}\sqrt{3}$ ② $\frac{49}{122}\sqrt{3}$ ③ $\frac{49}{100}\sqrt{3}$
④ $\frac{49}{78}\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{7}{8}\sqrt{3}$

G. 등비급수(기하): 원과 접선

G134

○○
(2024사관(1차)-미적분26)

그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OA_1B_1이 있다. 호 A_1B_1의 삼등분점 중 점 A_1에 가까운 점을 C_1, 점 B_1에 가까운 점을 D_1이라 하고, 사각형 $A_1C_1D_1B_1$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 중심이 O이고 선분 A_1B_1에 접하는 원이 선분 OA_1과 만나는 점을 A_2, 선분 OB_1과 만나는 점을 B_2라 하고, 중심이 O, 반지름의 길이가 $\overline{OA_2}$, 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OA_2B_2를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 두 점 C_2, D_2를 잡고, 사각형 $A_2C_2D_2B_2$에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{13}{24}$ ③ $\frac{7}{12}$
④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

G135

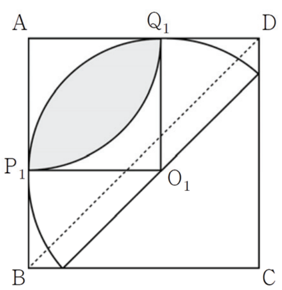
○○○
(2017(6)고2-가형20)

그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD의 내부에 지름의 양 끝점이 각각 변 BC, 변 CD 위에 있고, 지름이 선분 BD와 평행한 반원을 내접하게 그린다. 이 반원의 중심을 $\mathrm{O_1}$이라 하고 반원이 두 변 AB, AD와 만나는 점을 각각 $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{Q_1}$이라 하자.

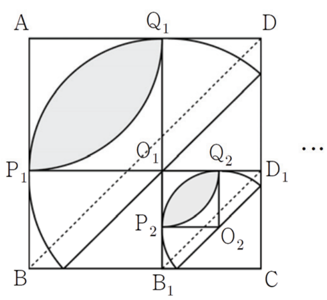
중심이 A, 반지름이 선분 $\mathrm{AP_1}$, 중심각이 $\angle \mathrm{P_1AQ_1}$인 부채꼴의 내부와 이 반원의 내부의 공통부분인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에 있는 점 $\mathrm{O_1}$에서 두 변 BC, CD 위에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{B_1}$, $\mathrm{D_1}$이라 하고 네 점 $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{B_1}$, C, $\mathrm{D_1}$을 꼭짓점으로 하는 정사각형 $\mathrm{O_1B_1CD_1}$을 그린다. 정사각형 $\mathrm{O_1B_1CD_1}$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n = (p\sqrt{2}-q)(\pi-2)$이다. 두 유리수 p, q에 대하여 $p+q$의 값은? [4점]



R_1



R_2 …

① 15　② 16　③ 17
④ 18　⑤ 19

G136

○○○
(2021(10)고3-미적분26)

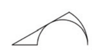
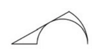
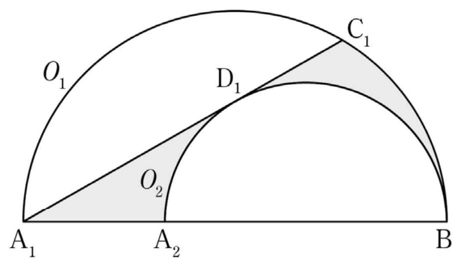
그림과 같이 길이가 2인 선분 $\mathrm{A_1B}$를 지름으로 하는 반원 O_1이 있다. 호 $\mathrm{BA_1}$ 위에 점 $\mathrm{C_1}$을 $\angle \mathrm{BA_1C_1} = \frac{\pi}{6}$가 되도록 잡고, 선분 $\mathrm{A_2B}$를 지름으로 하는 반원 O_2가 선분 $\mathrm{A_1C_1}$과 접하도록 선분 $\mathrm{A_1B}$ 위에 점 $\mathrm{A_2}$를 잡는다. 반원 O_2와 선분 $\mathrm{A_1C_1}$의 접점을 $\mathrm{D_1}$이라 할 때, 두 선분 $\mathrm{A_1A_2}$, $\mathrm{A_1D_1}$과 호 $\mathrm{D_1A_2}$로 둘러싸인 부분과 선분 $\mathrm{C_1D_1}$과 두 호 $\mathrm{BC_1}$, $\mathrm{BD_1}$로 둘러싸인 부분인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

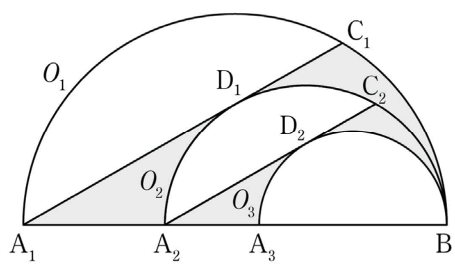
그림 R_1에서 호 $\mathrm{BA_2}$ 위에 점 $\mathrm{C_2}$를 $\angle \mathrm{BA_2C_2} = \frac{\pi}{6}$가 되도록 잡고, 선분 $\mathrm{A_3B}$를 지름으로 하는 반원 O_3이 선분 $\mathrm{A_2C_2}$와 접하도록 선분 $\mathrm{A_2B}$ 위에 점 $\mathrm{A_3}$을 잡는다. 반원 O_3과 선분 $\mathrm{A_2C_2}$의 접점을 $\mathrm{D_2}$라 할 때, 두 선분 $\mathrm{A_2A_3}$, $\mathrm{A_2D_2}$와 호 $\mathrm{D_2A_3}$으로 둘러싸인 부분과 선분 $\mathrm{C_2D_2}$와 두 호 $\mathrm{BC_2}$, $\mathrm{BD_2}$로 둘러싸인 부분인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]

R_1



R_2



⋮　　⋮

① $\frac{4\sqrt{3}-\pi}{10}$　② $\frac{9\sqrt{3}-2\pi}{20}$　③ $\frac{8\sqrt{3}-\pi}{20}$
④ $\frac{5\sqrt{3}-\pi}{10}$　⑤ $\frac{9\sqrt{3}-\pi}{20}$

G137

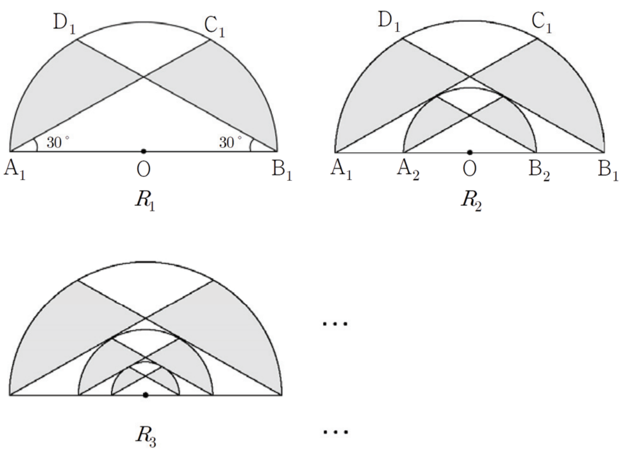
○○○
(2016(6)고2–가형20)

중심이 O이고 길이가 4인 선분 A_1B_1을 지름으로 하는 반원이 있다. 그림과 같이 반원 위에 $\angle C_1A_1B_1 = 30^\circ$, $\angle D_1B_1A_1 = 30^\circ$가 되도록 두 점 C_1, D_1을 각각 정하고, 두 선분 A_1C_1, B_1D_1과 두 호 B_1C_1, A_1D_1로 둘러싸인 모양에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 중심이 O이고 두 선분 A_1C_1, B_1D_1에 접하는 원이 선분 A_1B_1과 만나는 점을 각각 A_2, B_2라 하자. 선분 A_2B_2를 지름으로 하는 반원에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 모양에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때,

$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a\pi + b\sqrt{3}}{9}$이다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 정수이다.) [4점]



① 8　② 9　③ 10
④ 11　⑤ 12

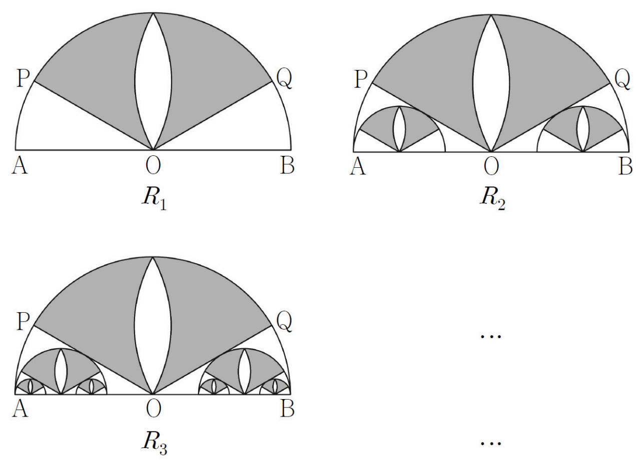
G138

○○○
(2017(9)고2–가형20)

그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB의 중점을 O라 하고, 호 AB 위에 두 점 P, Q를 $\angle POA = \angle BOQ = 30^\circ$가 되도록 잡는다.

부채꼴 POQ의 내부에서 점 P를 중심으로 하고 선분 PO를 반지름으로 하는 원의 내부와 점 Q를 중심으로 하고 선분 QO를 반지름으로 하는 원의 내부의 공통부분을 제외한 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 지름의 양 끝점이 선분 AB 위에 있고 선분 PO와 선분 QO에 각각 접하는 가장 큰 반원을 그린다. 새로 그려진 2개의 반원에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 모양의 도형을 각각 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $\frac{15\sqrt{3}}{7}$　② $\frac{16\sqrt{3}}{7}$　③ $\frac{17\sqrt{3}}{7}$
④ $\frac{18\sqrt{3}}{7}$　⑤ $\frac{19\sqrt{3}}{7}$

G139

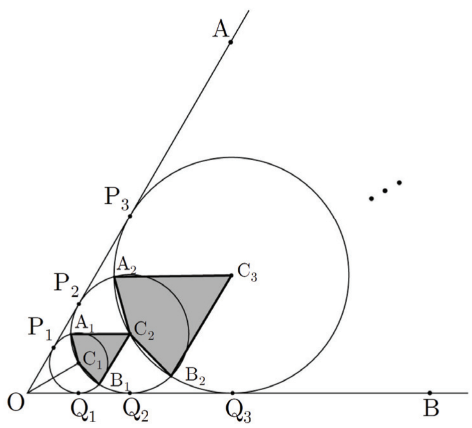
●●●
(2010(4)고3-가형17)

그림과 같이 크기가 60°인 $\angle AOB$의 이등분선 위에 $\overline{OC_1}=2$인 점 C_1을 잡아 점 C_1을 중심으로 하고 반직선 OA와 OB에 접하는 원 C_1을 그릴 때, 원 C_1과 반직선 OA, OB와의 접점을 각각 P_1, Q_1이라 하자.

점 C_1을 지나고 반직선 OA와 OB에 접하는 두 원 중에서 큰 원의 중심을 C_2, 원 C_2와 반직선 OA, OB와의 접점을 각각 P_2, Q_2라 하고, 원 C_1과 원 C_2가 만나는 점을 각각 A_1, B_1이라 할 때, 사각형 $A_1C_1B_1C_2$의 넓이를 S_1이라 하자.

점 C_2를 지나고 반직선 OA와 OB에 접하는 두 원 중에서 큰 원의 중심을 C_3, 원 C_3과 반직선 OA, OB와의 접점을 각각 P_3, Q_3라 하고, 원 C_2와 원 C_3이 만나는 점을 각각 A_2, B_2라 할 때, 사각형 $A_2C_2B_2C_3$의 넓이를 S_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 도형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{4^n+3^n}$의 값은? [4점]



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{15}}{8}$

G. 등비급수(기하): 직각삼각형과 내접원

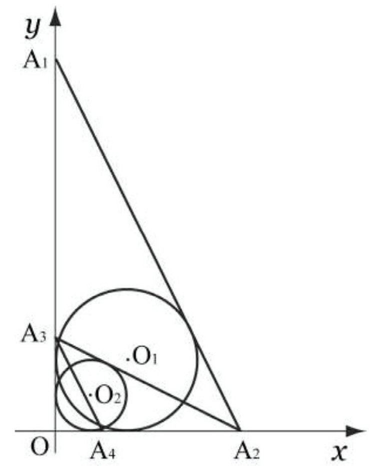
G140

○○
(2009(7)고3-가형24)

그림과 같이 세 점 $O(0,\ 0)$, $A_1(0,\ 4)$, $A_2(2,\ 0)$으로 이루어진 $\triangle OA_1A_2$에 내접하는 원을 O_1이라 하자. y축 위의 점 A_3이 선분 A_1A_2의 기울기와 선분 A_2A_3의 기울기의 곱이 1이 되도록 하는 점일 때, $\triangle OA_2A_3$에 내접하는 원을 O_2라 하자.

x축 위의 점 A_4가 선분 A_2A_3의 기울기와 선분 A_3A_4의 기울기의 곱이 1이 되도록 하는 점일 때, $\triangle OA_3A_4$에 내접하는 원을 O_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 생기는 $\triangle OA_nA_{n+1}$에 내접하는 원을 O_n이라 하고, O_n의 반지름의 길이가 r_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}r_n=a-2\sqrt{b}$ (a, b는 자연수)이다. $a+b$의 값을 구하시오. [4점]



H170

★★★ (2021(10)고3-미적분30)

서로 다른 두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=-\frac{ax^3+bx}{x^2+1}$$

라 하자. 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\neq 0$이고, 두 함수 $g(x)=f(x)-f^{-1}(x)$, $h(x)=(g\circ f)(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(2)=h(0)$
(나) $g'(2)=-5h'(2)$

$4(b-a)$의 값을 구하시오. [4점]

H. 그래프 개형: $y=x^ne^x$

H171

●●● (2018사관(1차)-가형28)

함수 $f(x)=(x^3-a)e^x$과 실수 t에 대하여 방정식 $f(x)=t$의 실근의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 불연속인 점의 개수가 2가 되도록 하는 10 이하의 모든 자연수 a의 값의 합을 구하시오.
(단, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$이다.) [4점]

H172

●●● (2016(3)고3-가형30)

함수 $f(x)=x^2e^{ax}\ (a<0)$에 대하여 부등식 $f(x)\geq t\ (t>0)$을 만족시키는 x의 최댓값을 $g(t)$라 정의하자. 함수 $g(t)$가 $t=\dfrac{16}{e^2}$에서 불연속일 때, $100a^2$의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$) [4점]

H173

●●● (2023(10)고3-미적분30)

두 정수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=(x^2+ax+b)e^{-x}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 극값을 갖는다. (나) 함수 $\lvert f(x)\rvert$가 $x=k$에서 극대 또는 극소인 모든 k의 값의 합은 3이다.

$f(10)=pe^{-10}$일 때, p의 값을 구하시오. [4점]

H174

★★★ (2022(7)고3-미적분30)

최고차항의 계수가 3보다 크고 실수 전체의 집합에서 최솟값이 양수인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$g(x)=e^x f(x)$

이다. 양수 k에 대하여 집합 $\{x \mid g(x)=k,\ x는\ 실수\}$의 모든 원소의 합을 $h(k)$라 할 때, 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $h(k)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $h(k)$가 $k=t$에서 불연속인 t의 개수는 1이다. (나) $\lim_{k\to 3e+} h(k)-\lim_{k\to 3e-} h(k)=2$

$g(-6)\times g(2)$의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x\to -\infty} x^2e^x=0$) [4점]

H175

★★★
(2017(7)고3-가형30)

상수항을 포함한 모든 항의 계수가 유리수인 이차함수 $f(x)$가 있다. 함수 $g(x)$가

$$g(x)=|f'(x)|e^{f(x)}$$

일 때, 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다.
> (나) 함수 $g(x)$의 최댓값은 $4\sqrt{e}$이다.
> (다) 방정식 $g(x)=4\sqrt{e}$의 근은 모두 유리수이다.

$|f(-1)|$의 값을 구하시오. [4점]

H. 그래프 개형: $y=\dfrac{f(x)}{x}$

H176

○○
(2012사관(1차)-이과20)

함수 $f(x)=\dfrac{1}{x}\ln x$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

> ㄱ. 함수 $f(x)$의 최댓값은 $\dfrac{1}{e}$이다.
> ㄴ. $2011^{2012}>2012^{2011}$
> ㄷ. 열린구간 $(0,\ e)$에서 $y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록하다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

H. 그래프 개형: $y=x\sin x$

H177

●●●
(2014사관(1차)-B형20)

함수 $f(x)=x\sin x$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다. ㄴ. 직선 $y=x$는 곡선 $y=f(x)$에 접한다. ㄷ. 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 갖는 a가 구간 $\left(\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3\pi}{4}\right)$에 존재한다.

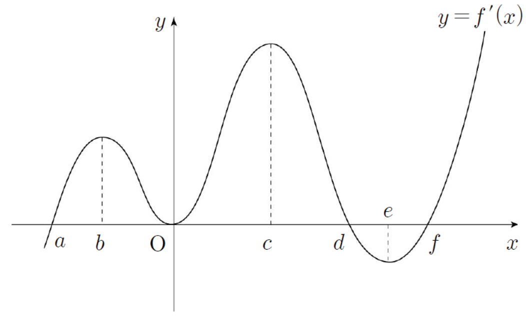
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

H. 그래프 개형: 그 외

H178

○○
(2012(7)고3-가형13)

다항함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]



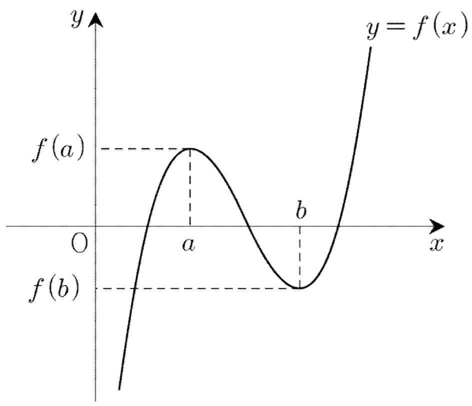
ㄱ. 구간 $[a,\ f]$에서 $f(x)$의 변곡점은 4개다. ㄴ. 구간 $[a,\ e]$에서 $f(x)$가 극대가 되는 x의 개수는 1이다. ㄷ. 구간 $[a,\ e]$에서 $f(x)$의 최댓값은 $f(c)$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

H179

○○ (2012사관(1차)-이과14)

그림과 같이 $x=a$에서 극댓값, $x=b$에서 극솟값을 가지는 삼차함수 $f(x)$가 있다. $(0<a<b)$



함수 $g(x)=e^{-x^2}f(x)$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

ㄱ. $g'(0)>0$ ㄴ. $f'(a)+g'(a)>0$ ㄷ. $g(b)g'(b)>0$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

H180

○○ (2010(7)고3-가형19)

함수 $f(x)=\dfrac{x-\dfrac{1}{2}}{(x^2-2x+2)^2}$에 대한 설명으로 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$에서의 접선과 원점 사이의 거리는 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$이다. ㄴ. 함수 $f(x)$의 최솟값은 $-\dfrac{1}{8}$이다. ㄷ. 방정식 $f(x)-f(10)=0$와 서로 다른 실근의 개수는 2개다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

H181

○○ (2011(10)고3-가형17)

양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=e^x+\dfrac{1}{x}$이 $x=\alpha$에서 극값을 가질 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, e는 자연로그의 밑이다.) [4점]

ㄱ. $e^{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha^2}$ ㄴ. 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이 존재한다. ㄷ. 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 최솟값을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

H182

○○ (2013사관(1차)-이과20)

$x>0$에서 정의된 함수 $f(x)=\dfrac{(\ln x)^6}{x^2}$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

(단, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\ln x)^6}{x^2}=0$이다.) [4점]

ㄱ. $x=e^3$에서 극댓값을 갖는다. ㄴ. $x=e$에서 극솟값을 갖는다. ㄷ. $x>0$에서 방정식 $f(x)=1$의 실근의 개수는 3이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

H183

(2020(10)고3-가형20)

자연수 n에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{nx}{x^n+1} & (x\neq-1) \\ -2 & (x=-1) \end{cases}$$

일 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

> ㄱ. $n=3$일 때, 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -1)$에서 증가한다.
> ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이 되도록 하는 n에 대하여 방정식 $f(x)=2$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
> ㄷ. 구간 $(-1, \infty)$에서 함수 $f(x)$가 극솟값을 갖도록 하는 10 이하의 모든 자연수 n의 값의 합은 24이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

H184

(2021사관(1차)-가형20)

세 상수 a, b, c $(a>0,\ c>0)$에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} -ax^2+6ex+b & (x<c) \\ a(\ln x)^2-6\ln x & (x\geq c) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
> (나) 함수 $f(x)$의 역함수가 존재한다.

$f\left(\dfrac{1}{2e}\right)$의 값은? [4점]

① $-4\left(e^2+\dfrac{1}{4e^2}\right)$ ② $-4\left(e^2-\dfrac{1}{4e^2}\right)$
③ $-3\left(e^2+\dfrac{1}{4e^2}\right)$ ④ $-3\left(e^2-\dfrac{1}{4e^2}\right)$
⑤ $-2\left(e^2+\dfrac{1}{4e^2}\right)$

H. 그래프 개형: 합성함수

H185

○○○
(2018(7)고3-가형19)

자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 $f(x)=x^n-1$, $g(x)=\log_3(x^4+2n)$이다.

함수 $h(x)$가 $h(x)=g(f(x))$일 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

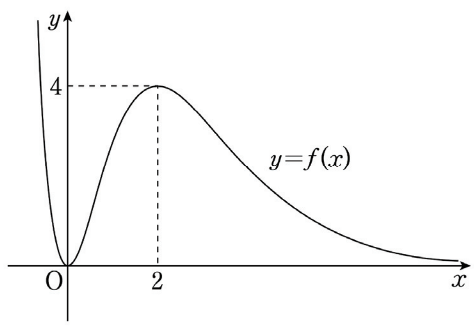
ㄱ. $h'(1)=0$ ㄴ. 열린구간 $(0,\ 1)$에서 함수 $h(x)$는 증가한다. ㄷ. $x>0$일 때, 방정식 $h(x)=n$의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

H186

●●●
교육청 기출

그림은 함수 $f(x)=x^2e^{-x+2}$의 그래프이다.



함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{15}{e^2}$의 교점의 개수는? (단, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$) [4점]

① 2　② 3　③ 4
④ 5　⑤ 6

H187

●●●
(2021사관(1차)-가형30)

두 함수 $f(x)=x^2-ax+b\,(a>0)$, $g(x)=x^2e^{-\frac{x}{2}}$에 대하여 상수 k와 함수 $h(x)=(f\circ g)(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $h(0)<h(4)$ (나) 방정식 $\lvert h(x)\rvert=k$의 서로 다른 실근의 개수는 7이고, 그 중 가장 큰 실근을 α라 할 때 함수 $h(x)$는 $x=\alpha$에서 극소이다.

$f(1)=-\dfrac{7}{32}$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+16b$의 값을 구하시오.

(단, $\dfrac{5}{2}<e<3$이고, $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$이다.) [4점]

H188

★★★
(2023(7)고3-미적분30)

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\sin|\pi f(x)|$$

라 하자. 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표 중 양수인 것을 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. 함수 $g(x)$와 자연수 m이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=a_4$와 $x=a_8$에서 극대이다.
(나) $f(a_m)=f(0)$

$f(a_k)\le f(m)$을 만족시키는 자연수 k의 최댓값을 구하시오. [4점]

H. 그래프 개형: 볼록성과 직선의 기울기 대소 관계

H189

○○
(2016(3)고3-가형19)

함수 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

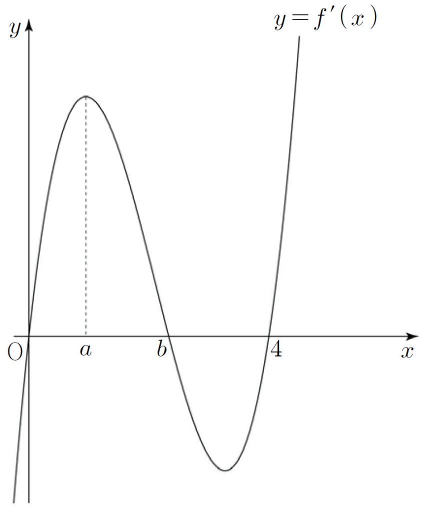
ㄱ. $f'(0)=1$
ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge-\dfrac{1}{2}$이다.
ㄷ. $0<a<b<1$일 때, $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}>1$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

H190

○○○
(2015(9)고2-가형21)

최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같다. 함수 $f'(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 가질 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $f'(0)=f'(b)=f'(4)=0$이다.) [4점]



ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극솟값을 갖는다.

ㄴ. $a<t<b$일 때, $\dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}>\dfrac{f(t)-f(b)}{t-b}$이다.

ㄷ. $\displaystyle\int_a^4 f'(x)dx=0$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f(a)$는 서로 다른 세 점에서 만난다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

H191

○○○
(2016(7)고3-가형20)

두 함수 $f(x)=\ln x$, $g(x)=\ln\dfrac{1}{x}$의 그래프가 만나는 점을 P라 할 때 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. 점 P의 좌표는 $(1,\ 0)$이다.

ㄴ. 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 위의 점 P에서의 각각의 접선은 서로 수직이다.

ㄷ. $t>1$일 때, $-1<\dfrac{f(t)g(t)}{(t-1)^2}<0$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

I. 정적분

I009

★★★ (2018(4)고3-가형30)

함수 $f(x)=e^x(ax^3+bx^2)$과 양의 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[-t,\ t]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값을 $M(t)$, 최솟값을 $m(t)$라 할 때, 두 함수 $M(t)$, $m(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 양의 실수 t에 대하여 $M(t)=f(t)$이다.
(나) 양수 k에 대하여 닫힌구간 $[k,\ k+2]$에 있는 임의의 실수 t에 대해서만 $m(t)=f(-t)$가 성립한다.
(다) $\displaystyle\int_1^5 \{e^t \times m(t)\}dt=\frac{7}{3}-8e$

$f(k+1)=\dfrac{q}{p}e^{k+1}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, a와 b는 0이 아닌 상수, p와 q는 서로소인 자연수이고, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^x}=0$이다.) [4점]

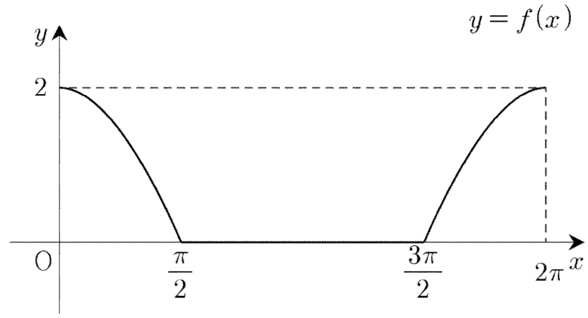
I. 정적분: 치환적분법

I010

○○ (2003사관(1차)-이과24)

아래 그림은 $0 \le x \le 2\pi$에서 정의된 함수 $f(x)=\cos x+|\cos x|$의 그래프이다. 이 때,

$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} f\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)dx$의 값은? [4점]



① $\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ③ 1

④ $\sqrt{3}$ ⑤ $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

I011

○○○ (2006(10)고3-가형28)

$a_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx\,(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의할 때, 옳은 내용을 보기에서 모두 고른 것은? [4점]

ㄱ. $a_1+a_3=\dfrac{1}{2}$
ㄴ. $a_1+a_2+a_3+a_4=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}$
ㄷ. $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} a_k=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{51}$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

I012

○○○ (2017사관(1차)-가형16)

자연수 n에 대하여

$$S_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}$$

이라 할 때, 다음은 $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값을 구하는 과정이다.

〈과정〉

$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^{n-1}x^{2n-2}$

$= \boxed{(가)} - (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{1+x^2}$ 이므로

$S_n = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{1}{2n-1}$

$= \displaystyle\int_0^1 \{1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^{n-1}x^{2n-2}\}dx$

$= \displaystyle\int_0^1 \boxed{(가)}\,dx - (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx$

이다. 한편, $0 \le \dfrac{x^{2n}}{1+x^2} \le x^{2n}$이므로

$0 \le \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx \le \int_0^1 x^{2n}dx = \boxed{(나)}$

이다. 따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx = 0$이므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \boxed{(가)}\,dx$이다.

$x = \tan\theta\left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \boxed{(가)}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2\theta}{1+\tan^2\theta}d\theta$

$= \boxed{(다)}$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(x)$, $g(n)$, (다)에 알맞은 수를 k라 할 때, $k \times f(2) \times g(2)$의 값은? [4점]

① $\dfrac{\pi}{40}$　② $\dfrac{\pi}{60}$　③ $\dfrac{\pi}{80}$

④ $\dfrac{\pi}{100}$　⑤ $\dfrac{\pi}{120}$

I013

○○○ (2019(4)고3-가형27)

실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 있다.

$g(x)$가 $f(x)$의 역함수이고 $g(2)=1$, $g(5)=5$일 때,

$\displaystyle\int_1^5 \frac{40}{g'(f(x))\{f(x)\}^2}dx$의 값을 구하시오. [5점]

I014

○○○ (2017(10)고3-가형14)

미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다. $f(1)=3$, $g(1)=3$일 때,

$$\int_1^3 \left\{\frac{f(x)}{f'(g(x))} + \frac{g(x)}{g'(f(x))}\right\}dx$$

의 값은? [4점]

① -8　② -4　③ 0

④ 4　⑤ 8

I015

●●● (2022사관(1차)-미적분29)

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $-1 \leq x \leq 1$에서 $f(x) < 0$이다.
(나) $\int_{-1}^{0} \lvert f(x)\sin x \rvert dx = 2$, $\int_{0}^{1} \lvert f(x)\sin x \rvert dx = 3$

함수 $g(x) = \int_{-1}^{x} \lvert f(t)\sin t \rvert dt$에 대하여

$\int_{-1}^{1} f(-x)g(-x)\sin x dx = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

I. 정적분: 치환적분법(응용)

I016

○○○ (2023사관(1차)-미적분28)

$0 < a < 1$인 실수 a에 대하여 구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$에서 정의된 두 함수

$y = \sin x$, $y = a\tan x$

의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(a)$라 할 때, $f'\left(\frac{1}{e^2}\right)$의 값은? [4점]

① $-\frac{5}{2}$ ② -2 ③ $-\frac{3}{2}$

④ -1 ⑤ $-\frac{1}{2}$

I017

○○○ (2018(4)고3-가형27)

자연수 n에 대하여 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

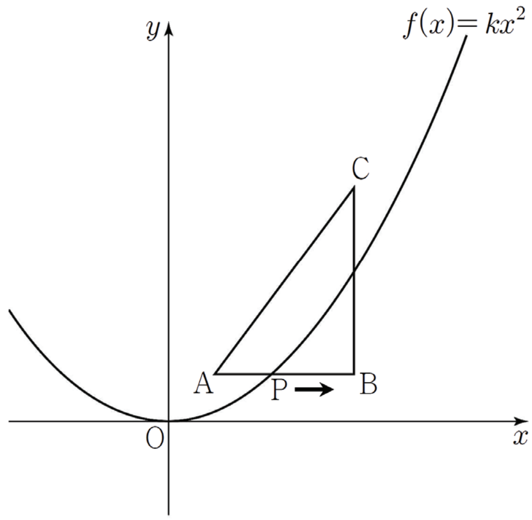
$$f(x) = \int_{1}^{x} \frac{n - \ln t}{t} dt$$

의 최댓값을 $g(n)$이라 하자. $\sum_{n=1}^{12} g(n)$의 값을 구하시오. [4점]

I018

(2017(4)고3-가형20)

그림과 같이 세 점 A(1, 1), B(4, 1), C(4, 5)를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. 점 P는 점 A를 출발하여 삼각형 ABC의 변을 따라 점 B를 지나 점 C까지 매초 1의 일정한 속력으로 움직이고 이차함수 $f(x)=kx^2$의 그래프가 점 P를 지난다. t초 후 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기를 $g(t)$라 하자. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



ㄱ. $0\le t<3$일 때 점 P의 좌표는 $(t+1,\ 1)$이다.
ㄴ. $g(t)=\dfrac{2}{t+1}\ (0\le t<3)$
ㄷ. $\displaystyle\int_0^7 g(t)dt=6+4\ln 2$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

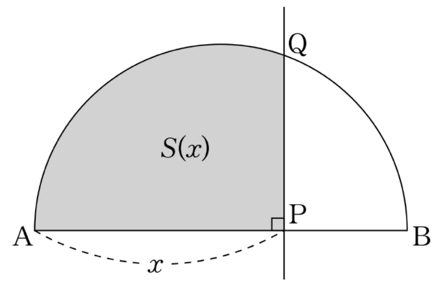
I019

(2017(10)고3-가형30)

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB 위의 점 P를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 선분 AB를 지름으로 하는 반원과 만나는 점을 Q라 하자.
$\overline{\mathrm{AP}}=x$라 할 때, $S(x)$를 다음과 같이 정의한다.
$0<x<2$일 때 $S(x)$는 두 선분 AP, PQ와 호 AQ로 둘러싸인 도형의 넓이이고, $x=2$일 때 $S(x)$는 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 넓이이다.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\{S(1+\sin\theta)-S(1+\cos\theta)\}d\theta=p+q\pi^2$$

일 때, $\dfrac{30p}{q}$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이다.) [4점]



I020

★★★
(2020(7)고3-가형30)

함수 $f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$와 0이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=e^{af(x)}+bf(x)\ (0<x<12)$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 $x=\alpha$에서 극대 또는 극소인 모든 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \cdots,\ \alpha_m\ (m\text{은 자연수})$$

라 할 때, m 이하의 자연수 n에 대하여 α_n은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) n이 홀수일 때, $\alpha_n=n$이다.
(나) n이 짝수일 때, $g(\alpha_n)=0$이다.

함수 $g(x)$가 서로 다른 두 개의 극댓값을 갖고 그 합이 e^3+e^{-3}일 때,

$$m\pi\int_{\alpha_3}^{\alpha_4}g(x)\cos\frac{\pi}{2}x\,dx=pe^3+qe$$

이다. $p-q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 정수이다.) [4점]

I021

★★★
(2020(10)고3-가형30)

최고차항의 계수가 $k(k>0)$인 이차함수 $f(x)$에 대하여 $f(0)=f(-2)$, $f(0)\neq0$이다.
함수

$$g(x)=(ax+b)e^{f(x)}\,(a<0)$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $(x+1)\{g(x)-mx-m\}\le0$ 을 만족시키는 실수 m의 최솟값은 -2이다.
(나) $\int_0^1 g(x)dx=\int_{-2f(0)}^{1}g(x)dx=\frac{e-e^4}{k}$

$f(ab)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [4점]

I. 정적분: 부분적분법

I022

○○
(2015(4)고3-B형17)

자연수 n에 대하여 함수 $f(n)=\int_1^n x^3 e^{x^2}dx$라 할 때,

$\dfrac{f(5)}{f(3)}$의 값은? [4점]

① e^{14}　② $2e^{16}$　③ $3e^{16}$
④ $4e^{18}$　⑤ $5e^{18}$

I023

○○
(2017사관(1차)-가형18)

함수 $f(x)=\int_1^x e^{t^3}dt$에 대하여 $\int_0^1 xf(x)dx$의 값은? [4점]

① $\dfrac{1-e}{2}$　② $\dfrac{1-e}{3}$　③ $\dfrac{1-e}{4}$
④ $\dfrac{1-e}{5}$　⑤ $\dfrac{1-e}{6}$

I024

○○
(2023(7)고3-미적분26)

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속이고

$$\int_1^2 (x-1)f'\left(\frac{x}{2}\right)dx=2$$

를 만족시킨다. $f(1)=4$일 때, $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx$의 값은? [3점]

① $\dfrac{3}{4}$　② 1　③ $\dfrac{5}{4}$
④ $\dfrac{3}{2}$　⑤ $\dfrac{7}{4}$

I025

○○○
(2015(10)고3-B형27)

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=2$
(나) $\int_0^1 (x-1)f'(x+1)dx=-4$

$\int_1^2 f(x)dx$의 값을 구하시오. (단, $f'(x)$는 연속함수이다.) [4점]

I026

○○○
(2017(3)고3-가형16)

연속함수 $f(x)$가

$$\int_{-1}^1 f(x)dx=12,\ \int_0^1 xf(x)dx=\int_0^{-1} xf(x)dx$$

를 만족시킨다. $\int_{-1}^x f(t)dt=F(x)$라 할 때,

$\int_{-1}^1 F(x)dx$의 값은? [4점]

① 6　② 8　③ 10
④ 12　⑤ 14

I027

(2017(3)고3-가형21)

구간 $[0,\ 1]$에서 정의된 연속함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt\,(0\le x\le 1)$$

은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $F(x)=f(x)-x$
(나) $\int_0^1 F(x)dx=e-\frac{5}{2}$

보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $F(1)=e$
ㄴ. $\int_0^1 xF(x)dx=\frac{1}{6}$
ㄷ. $\int_0^1 \{F(x)\}^2dx=\frac{1}{2}e^2-2e+\frac{11}{6}$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

I028

(2018(7)고3-가형20)

양수 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 양의 실수 x에 대하여 $g(x)=\int_1^x \frac{f(t^2+1)}{t}dt$
(나) $\int_2^5 f(x)dx=16$

$g(2)=3$일 때, $\int_1^2 xg(x)dx$의 값은? [4점]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

I029

(2023(7)고3-미적분29)

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x<1$일 때, $f'(x)=-2x+4$이다.
(나) $x\ge 0$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x^2+1)=ae^{2x}+bx$이다. (단, a, b는 상수이다.)

$\int_0^5 f(x)dx=pe^4-q$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 유리수이다.) [4점]

I030
(2023(10)고3-미적분28)

함수

$$f(x)=\sin x\cos x\times e^{a\sin x+b\cos x}$$

이 다음 조건을 만족시키도록 하는 서로 다른 두 실수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$에 대하여 $a-b$의 최솟값은? [4점]

(가) $ab=0$
(나) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\frac{1}{a^2+b^2}-2e^{a+b}$

① $-\frac{5}{2}$ ② -2 ③ $-\frac{3}{2}$ ④ -1 ⑤ $-\frac{1}{2}$

I. 정적분: 부분적분법(응용)

I031
(2019(3)고3-가형17)

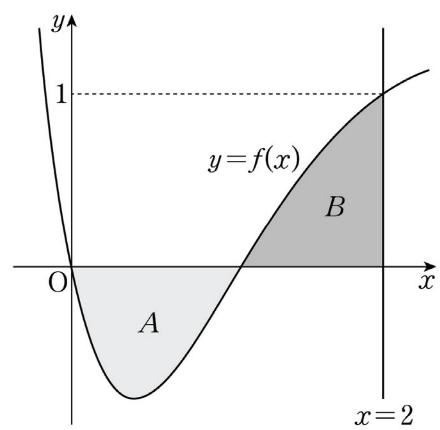
두 함수 $f(x)=ax^2(a>0)$, $g(x)=\ln x$의 그래프가 한 점 P에서 만나고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기와 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기가 서로 같다. 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단, a는 상수이다.) [4점]

① $\frac{2\sqrt{e}-3}{6}$ ② $\frac{2\sqrt{e}-3}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{e}-1}{2}$ ④ $\frac{4\sqrt{e}-3}{6}$ ⑤ $\sqrt{e}-1$

I032
(2020(10)고3-가형27)

실수 전체의 집합에서 도함수가 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 $f(0)=0$, $f(2)=1$이다. 그림과 같이 $0\le x\le 2$에서 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 두 부분의 넓이를 각각 A, B라 하자. $A=B$일 때,

$\int_0^2 (2x+3)f'(x)dx$의 값을 구하시오. [4점]



이동훈
기출문제집

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

빠른 답지

단원별 알파벳구성

과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학 Ⅰ	지수함수와 로그함수	A	기하	이차곡선	M
	삼각함수	B		평면벡터	N
	수열	C		공간도형과 공간좌표	P
수학 Ⅱ	함수의 극한과 연속	D	수학	다항식	Q
	미분	E		방정식과 부등식	R
	적분	F		도형의 방정식	S
미적분	수열의 극한	G		집합과 명제	T
	미분법	H		함수	U
	적분법	I		순열과 조합	V
확률과 통계	경우의 수	J	교육과정 外		Z
	확률	K			
	통계	L			

G 수열의 극한

1	③	2	①	3	③	4	①	5	⑤
6	50	7	①	8	④	9	②	10	⑤
11	⑤	12	10	13	4	14	15	15	④
16	③	17	①	18	④	19	②	20	③
21	④	22	③	23	24	24	④	25	④
26	③	27	③	28	40	29	④	30	①
31	②	32	25	33	125	34	④	35	6
36	①	37	④	38	⑤	39	4	40	80
41	12	42	5	43	①	44	③	45	⑤
46	③	47	④	48	④	49	192	50	④
51	④	52	③	53	②	54	①	55	②
56	②	57	④	58	⑤	59	③	60	②
61	253	62	④	63	13	64	27	65	28
66	25	67	②	68	②	69	25	70	①
71	②	72	⑤	73	①	74	②	75	3
76	12	77	②	78	②	79	⑤	80	③
81	②	82	④	83	①	84	③	85	④
86	②	87	②	88	②	89	④	90	7
91	18	92	③	93	⑤	94	①	95	24
96	①	97	12	98	④	99	①	100	③
101	①	102	③	103	①	104	④	105	125
106	④	107	④	108	②	109	10	110	19
111	④	112	⑤	113	①	114	①	115	④
116	①	117	①	118	④	119	②	120	④
121	①	122	125	123	①	124	⑤	125	③
126	④	127	②	128	③	129	③	130	②
131	①	132	③	133	④	134	①	135	②
136	②	137	①	138	④	139	⑤	140	11
141	②	142	②	143	②	144	47	145	②
146	②	147	②	148	③	149	12	150	①
151	④	152	③	153	②	154	④	155	①
156	①	157	⑤	158	②	159	④	160	②
161	⑤	162	③	163	①	164	⑤	165	④
166	59								

H 미분법

1	①	2	③	3	④	4	⑤	5	②
6	23	7	③	8	107	9	③	10	⑤
11	③	12	②	13	⑤	14	⑤	15	①
16	②	17	5	18	③	19	①	20	79
21	14	22	①	23	61	24	18	25	48
26	30	27	20	28	②	29	②	30	3
31	9	32	32	33	⑤	34	18	35	②
36	③	37	③	38	20	39	③	40	④
41	135	42	③	43	①	44	④	45	④
46	③	47	4	48	①	49	①	50	④
51	25	52	9	53	②	54	18	55	17
56	⑤	57	⑤	58	②	59	④	60	②
61	②	62	30	63	②	64	②	65	③
66	49	67	208	68	4	69	②	70	④
71	④	72	①	73	⑤	74	③	75	8
76	5	77	①	78	120	79	②	80	④
81	20	82	③	83	⑤	84	⑤	85	③
86	③	87	③	88	④	89	⑤	90	20
91	③	92	⑤	93	⑤	94	13	95	②
96	②	97	③	98	②	99	⑤	100	②
101	①	102	③	103	⑤	104	⑤	105	10
106	④	107	8	108	10	109	10	110	25
111	6	112	②	113	⑤	114	①	115	①
116	③	117	②	118	503	119	④	120	71
121	③	122	⑤	123	①	124	3	125	①
126	③	127	②	128	②	129	①	130	4
131	30	132	8	133	④	134	②	135	①
136	②	137	64	138	37	139	①	140	9
141	50	142	⑤	143	15	144	77	145	⑤
146	25	147	③	148	⑤	149	④	150	12
151	③	152	④	153	③	154	95	155	①
156	①	157	③	158	③	159	9	160	⑤
161	3	162	13	163	64	164	④	165	⑤
166	⑤	167	④	168	③	169	②	170	10
171	49	172	25	173	91	174	129	175	71
176	⑤	177	⑤	178	③	179	①	180	⑤
181	④	182	③	183	②	184	③	185	③
186	③	187	6	188	208	189	③	190	⑤
191	⑤	192	④	193	27	194	④	195	④
196	34	197	32	198	25	199	4	200	40

201	①	202	⑤	203	⑤	204	6

Ⅰ 적분법

1	④	2	72	3	⑤	4	④	5	②
6	⑤	7	⑤	8	④	9	49	10	③
11	③	12	④	13	12	14	①	15	19
16	②	17	325	18	⑤	19	80	20	48
21	25	22	③	23	⑤	24	④	25	6
26	④	27	④	28	①	29	12	30	④
31	②	32	7	33	586	34	26	35	②
36	①	37	12	38	③	39	③	40	8
41	51	42	②	43	40	44	102	45	①
46	⑤	47	①	48	④	49	②	50	⑤
51	⑤	52	③	53	④	54	③	55	①
56	16	57	36	58	③	59	18	60	125
61	③	62	33	63	②	64	④	65	②
66	5	67	⑤	68	①	69	①	70	①
71	②	72	⑤	73	⑤	74	②	75	54
76	⑤	77	10	78	11	79	100	80	11
81	88	82	50	83	④	84	④	85	②
86	13	87	④	88	14	89	④	90	⑤
91	24	92	⑤	93	②	94	350	95	③
96	③	97	③	98	⑤	99	④	100	④
101	12	102	①	103	①	104	7	105	⑤
106	④	107	①	108	④	109	⑤		

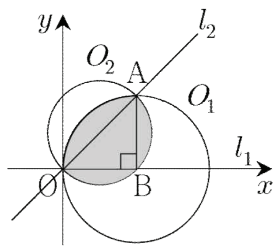
해설 목차

미적분

G126 | 답 ④

[풀이]

두 원 O_1, O_2의 두 교점 중에서 O가 아닌 점을 A, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 B라고 하자. 이때, 점 B는 원 O_1의 중점이다.



$S_1=$(호 AO와 현 AO로 둘러싸인 활꼴의 넓이)

$+\frac{1}{2}\times$(원 O_2의 넓이)

$=\frac{9}{4}\pi-\frac{9}{2}+\frac{9}{4}\pi=\frac{9}{2}\pi-\frac{9}{2}$

두 원 O_1, O_2의 닮음비는 $1:\frac{1}{\sqrt{2}}$이므로

$S_2=\frac{1}{2}S_1$ (그리고 $S_{n+1}=\frac{1}{2}S_n$)

등비급수의 합의 공식에 의하여

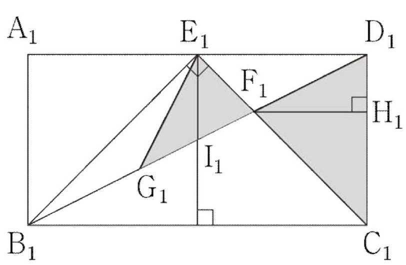
$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{9}{2}\pi-\frac{9}{2}}{1-\frac{1}{2}}=9\pi-9$$

답 ④

G127 | 답 ②

[풀이]

점 F_1에서 선분 D_1C_1에 내린 수선의 발을 H_1, 점 E_1을 지나고 직선 B_1C_1에 수직인 직선이 선분 B_1D_1과 만나는 점을 I_1이라고 하자.



직각삼각형 $E_1B_1F_1$에서 $\overline{G_1E_1}=\overline{G_1F_1}$이므로

세 점 E_1, B_1, F_1은 중심이 G_1이고 지름이 $\overline{B_1F_1}$인 원 위에 있다.

닮음인 두 삼각형 $F_1E_1I_1$, $F_1C_1D_1$의 닮음비는 $1:2$이므로

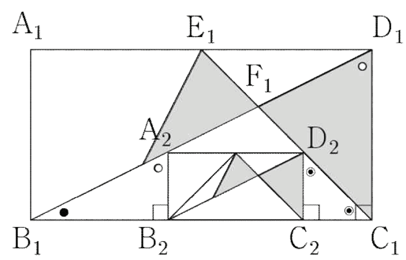
$\overline{E_1F_1}=\frac{\sqrt{2}}{3}$, $\overline{F_1H_1}=\frac{2}{3}$

$S_1=\frac{1}{2}\times(\triangle E_1B_1F_1$의 넓이$)+(\triangle F_1C_1D_1$의 넓이$)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{2}\times1\times\frac{2}{3}$

$=\frac{1}{2}$

직사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 이웃한 두 변의 길이를 각각 x, $2x$로 두자.



(단, ◉$=45^\circ$)

$\overline{B_1C_1}=\overline{B_1B_2}+\overline{B_2C_2}+\overline{C_2C_1}$

즉, $2=2x+2x+x$, $x=\frac{2}{5}$

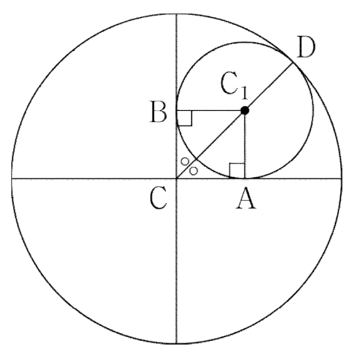
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{25}{42}$$

답 ②

G128 | 답 ③

[풀이]

아래 그림처럼 원 C_1이 사분원과 만나는 세 점을 각각 A, B, D라고 하자.



(단, ○$=45^\circ$)

직각이등변삼각형 C_1CA에서 특수각의 삼각비에 의하여

$\overline{CC_1}=\sqrt{2}r_1$

원의 정의에 의하여

$\overline{CD}=\overline{CC_1}+\overline{C_1D}=\sqrt{2}r_1+r_1=1$

정리하면

$r_1 = \sqrt{2}-1$

마찬가지의 방법으로 2 이상의 자연수 n에 대하여

$r_n = (\sqrt{2}+1)r_{n+1}$

이므로

$r_{n+1} = (\sqrt{2}-1)r_n$

수열 $\{r_n\}$은 첫째항이 $\sqrt{2}-1$이고, 공비가 $\sqrt{2}-1$인 등비수열이다.

등비급수의 합의 공식에 의하여

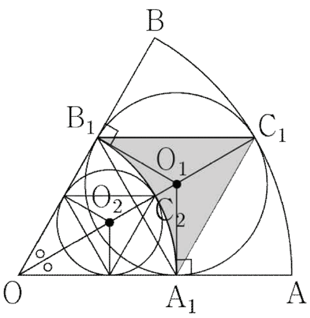
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} r_k = \frac{\sqrt{2}-1}{1-(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

답 ③

G129 | 답 ③

[풀이]

두 원 O_1, O_2의 중심을 각각 $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$, 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2라고 하자.



(단, ○ = 30°)

직각삼각형 $\mathrm{O_1OA_1}$에서

$\frac{r}{6-r} = \sin 30°\ (=\frac{1}{2})$ 풀면 $r=2$

이므로 $\overline{\mathrm{OA_1}} = 2\sqrt{3}$

$\therefore S_1 = (\square \mathrm{OA_1C_1B_1}$의 넓이$) - (\triangledown \mathrm{OA_1B_1}$의 넓이$)$

$= 6\sqrt{3} - 2\pi$

한편 두 부채꼴 OAB, $\mathrm{OA_1B_1}$의 닮음비는

$6 : 2\sqrt{3}\ (= \overline{\mathrm{OA}} : \overline{\mathrm{OA_1}})$

이므로 등비급수의 합의 공식에 의하여

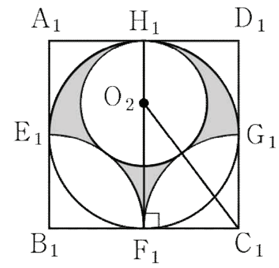
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{6\sqrt{3}-2\pi}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 9\sqrt{3} - 3\pi$$

답 ③

G130 | 답 ②

[풀이]

원 O_2의 중심과 반지름의 길이를 각각 $\mathrm{O_2}$, r이라고 하자.



점 $\mathrm{C_1}$을 중심으로 하는 부채꼴과 원 O_2가 서로 접하므로

$\overline{\mathrm{O_2C_1}} = r+1$

점 $\mathrm{H_1}$에서 원 O_2가 원 O_1에 내접하므로

$\overline{\mathrm{O_2F_1}} = \overline{\mathrm{H_1F_1}} - \overline{\mathrm{H_1O_2}} = 2-r$

직각삼각형 $\mathrm{O_2F_1C_1}$에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{O_2C_1}}^2 = \overline{\mathrm{O_2F_1}}^2 + \overline{\mathrm{F_1C_1}}^2$

즉, $(r+1)^2 = (2-r)^2 + 1^2$

정리하면

$r = \frac{2}{3}$

$S_1 = ($원 O_1의 넓이$)$

$-($원 O_2의 넓이$)$

$-4\times($호 $\mathrm{E_1F_1}$와 현 $\mathrm{E_1F_1}$으로 둘러싸인 도형의 넓이$)$

$= \pi - \left(\frac{2}{3}\right)^2\pi - 4\times\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)$

$= 2 - \frac{4}{9}\pi$

두 정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$, $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$의 닮음비가 $1 : \frac{2}{3}$이므로

$S_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 S_1$ 즉, $S_2 = \frac{4}{9}S_1$

2 이상의 자연수 n에 대하여 마찬가지의 방법으로

$S_{n+1} = \frac{4}{9}S_n$

수열 $\{S_n\}$의 귀납적 정의는

$S_1 = 2 - \frac{4}{9}\pi$, $S_{n+1} = \frac{4}{9}S_n$

등비급수의 합의 공식에 의하여

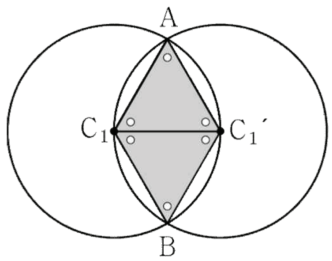
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{2-\frac{4}{9}\pi}{1-\frac{4}{9}} = \frac{18-4\pi}{5}$$

답 ②

G131 | 답 ①

[풀이]

문제에서 주어진 첫 번째 그림의 두 원의 중심을 각각 C_1, C_1'라고 하자. 그리고 두 원이 만나는 두 교점을 각각 A, B 라고 하자.



(단, ○$=60°$)

원의 정의에 의하여

$\overline{C_1A}=\overline{C_1C_1'}=\overline{C_1B}$,

$\overline{C_1'A}=\overline{C_1'C_1}=\overline{C_1'B}$

이므로 두 삼각형 AC_1C_1', $BC_1'C_1$은 정삼각형이다. (그리고 서로 합동이다.)

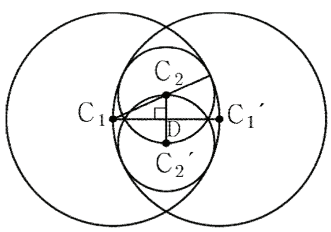
$\angle AC_1B=\angle AC_1'B=120°$

이므로

$l_1=2\times$(호 AC_1B의 길이)

$=2\times 6\pi\times\dfrac{120}{360}=4\pi$

문제에서 주어진 두 번째 그림의 작은 두 원의 중심을 각각 C_2, C_2', 반지름의 길이를 r이라고 하자. 그리고 두 선분 C_1C_1', C_2C_2'의 교점을 D라고 하자.



원 C_2가 원 C_1에 내접하므로

$\overline{C_2C_1}=3-r$

두 선분 C_1C_1', C_2C_2'는 서로를 수직이등분하므로

$\overline{C_1D}=\dfrac{3}{2}$, $\overline{DC_2}=\dfrac{r}{2}$

직각삼각형 C_2C_1D에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{C_2C_1}^2=\overline{C_1D}^2+\overline{DC_2}^2$

$(3-r)^2=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(\dfrac{r}{2}\right)^2$

정리하면

$r^2-8r+9=0$

이차방정식의 근의 공식에 의하여

$r=4-\sqrt{7}$ $(\because 0<r<3)$

두 원 C_1, C_2의 닮음비가 $3:4-\sqrt{7}$이므로

$l_2=\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}l_1$

2 이상의 자연수 n에 대하여 마찬가지의 방법으로

$l_{n+1}=\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}l_n$

수열 $\{l_n\}$의 귀납적 정의는

$l_1=4\pi$, $l_{n+1}=\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}l_n$

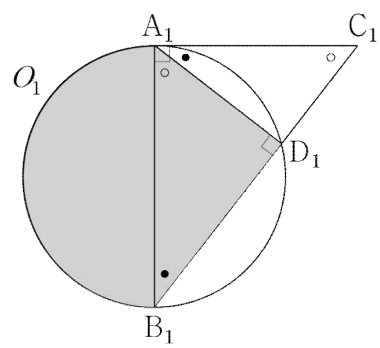
등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{4\pi}{1-\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}}=2\pi(1+\sqrt{7})$$

답 ①

G132 | 답 ③

[풀이]



(단, ●+○$=90°$)

위의 그림처럼 삼각형 $A_1B_1D_1$에서 $\overline{A_1B_1}$은 원 O_1의 지름이므로

$\angle A_1D_1B_1=90°$

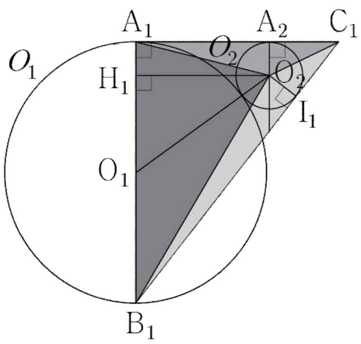
두 직각삼각형 $A_1B_1C_1$, $D_1B_1A_1$은 서로 닮음이고,

이때, 닮음비는 $5:4$이므로

$S_1=\dfrac{1}{2}\times 4\pi+\left(\dfrac{1}{2}\times 4\times 3\right)\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^2$

$=2\pi+\dfrac{96}{25}$

두 원 O_1, O_2의 중점을 각각 O_1, O_2, 점 O_2에서 두 선분 A_1B_1, B_1C_1에 내린 수선의 발을 각각 H_1, I_1이라 하자. 그리고 원 O_2의 반지름의 길이를 r이라 하자.



(△$A_1B_1C_1$의 넓이)=(△$A_1O_2C_1$의 넓이)+(△$A_1B_1O_2$의 넓이)+(△$O_2B_1C_1$의 넓이)

즉, $\frac{1}{2}\times 3\times 4=\frac{1}{2}(3r+4\overline{H_1O_2}+5r)$

$\overline{H_1O_2}=3-2r$

직각삼각형 $H_1O_1O_2$에서 피타고라스의 정리에 의하여

$(2+r)^2=(2-r)^2+(3-2r)^2$

$4r^2-20r+9=0$, $(2r-9)(2r-1)=0$

$r=\frac{1}{2}$

그림 R_2에서 색칠된 두 도형의 닮음비는 $2:\frac{1}{2}$이므로

등비급수의 합의 공식에 의하여

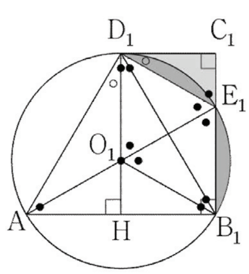
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{2\pi+\frac{96}{25}}{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{32}{15}\pi+\frac{512}{125}$$

답 ③

G133 | 답 ④

[풀이]

그림 R_1에서 주어진 원의 중심을 O_1, 점 D_1에서 선분 AB_1에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



(단, ●$=60^\circ$, ○$=30^\circ$)

$\overline{D_1C_1}^2=\overline{C_1E_1}\,\overline{C_1B_1}$, 즉

$1^2=\overline{C_1E_1}\times\sqrt{3}$, $\overline{C_1E_1}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\overline{E_1B_1}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

직각삼각형 D_1AH에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{D_1A}=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$

($\because\ \overline{AH}=1$, $\overline{D_1H}=\sqrt{3}$)

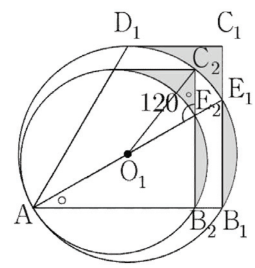
삼각형 D_1AB_1은 정삼각형이고, 위의 그림처럼 각의 크기(●, ○)가 결정된다.

그림 R_1에서 주어진 원의 반지름의 길이는 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$이고, 두 삼각형 $D_1O_1E_1$, $E_1O_1B_1$은 정삼각형이고, 서로 합동이다.

위의 그림에서 더 어둡게 색칠된 두 도형의 넓이가 같으므로

$S_1=$(△$C_1D_1E_1$의 넓이)$=\frac{\sqrt{3}}{6}$

이제 $\overline{C_2B_2}=\sqrt{3}x$로 두자.



(단, ○$=30^\circ$)

$\overline{C_2O_1}=$(큰 원의 반지름의 길이)$=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,

$\overline{O_1E_2}=$(작은 원의 지름의 길이)$-\overline{AO_1}$

$=\frac{4\sqrt{3}}{3}x-\frac{2\sqrt{3}}{3}$,

$\overline{C_2E_2}=\frac{\sqrt{3}}{3}x$

삼각형 $C_2O_1E_2$에서 코사인법칙에 의하여

$$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}x-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)^2$$

$$-2\times\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}x-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\times\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)\times\cos 120^\circ,$$

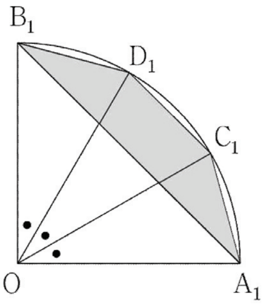
$7x^2-6x=0$, $x=\frac{6}{7}$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{S_1}{1-x^2}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{6}}{1-\left(\frac{6}{7}\right)^2}=\frac{49}{78}\sqrt{3}$$

답 ④

G134 | 답 ①

[풀이]

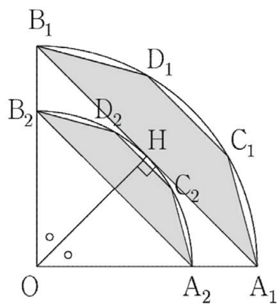


(단, ●= 30°)

$S_1 = 3\times(\triangle \mathrm{C_1OA_1}$의 넓이$)-(\triangle \mathrm{B_1OA_1}$의 넓이$)$

$= 3\times\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin30° - \frac{1}{2}\times1\times1$

$= \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$



(단, ○= 45°)

점 O에서 선분 $\mathrm{B_1A_1}$에 내린 수선의 발을 H라고 하자.

직각삼각형 $\mathrm{HOA_1}$에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{OA_1}} : \overline{\mathrm{OH}} = 1 : \frac{\sqrt{2}}{2}$

이므로 위의 그림에서 색칠된 두 도형의 닮음비는 $1 : \frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

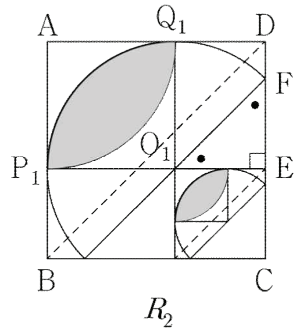
$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{1}{4}}{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

답 ①

G135 | 답 ②

[풀이]

점 $\mathrm{O_1}$에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 E, 반원 $\mathrm{O_1}$이 변 CD와 만나는 점을 F라고 하자. 평행선의 성질을 이용하면 아래 그림과 같이 각(●)을 결정할 수 있다.



(단, ●= 45°)

반원 $\mathrm{O_1}$의 반지름의 길이를 r이라고 하면

직각삼각형 $\mathrm{FO_1E}$에서

$\frac{\overline{\mathrm{O_1E}}}{\overline{\mathrm{FO_1}}} = \cos45°$, 즉 $\frac{4-r}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

풀면 $r = 8-4\sqrt{2}$

$\therefore\ S_1 = 2\left(\frac{\pi}{4}r^2 - \frac{1}{2}r^2\right) = \frac{r^2(\pi-2)}{2}$

한편 두 정사각형 $\mathrm{AP_1O_1Q_1}$, $\mathrm{O_1B_1CD_1}$의 닮음비는

$\overline{\mathrm{AQ_1}} : \overline{\mathrm{O_1D_1}} = 1 : \sqrt{2}-1$

이므로 등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{r^2(\pi-2)}{2}}{1-(\sqrt{2}-1)^2} = \frac{16(\sqrt{2}-1)^2(\pi-2)}{2(\sqrt{2}-1)}$$

$= 8(\sqrt{2}-1)(\pi-2)$

$\therefore\ p+q = 16$

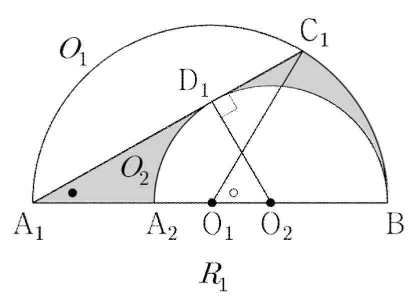
답 ②

G136 | 답 ②

[풀이]

그림 R_1에서 주어진 두 반원의 중심을 각각 $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$라고 하자. (아래 그림)

그리고 반원 O_2의 반지름의 길이를 r이라고 하자.



(단, ●= 30°, ○= 60°)

직각삼각형 $\mathrm{A_1O_2D_1}$에서

$\frac{r}{2-r} = \sin30°$, $r = \frac{2}{3}$

$S_1=(\triangle \mathrm{A_1O_1C_1}$의 넓이$)+(\triangledown \mathrm{C_1O_1B}$의 넓이$)$
$-($반원 O_2의 넓이$)$

$$=\frac{1}{2}\times 1^2\times \sin 120^\circ+\frac{1}{2}\times 1^2\times\frac{\pi}{3}-\pi\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{18}$$

등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{18}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{9\sqrt{3}-2\pi}{20}$$

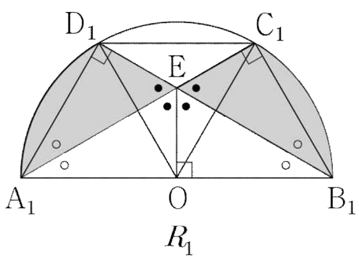
답 ②

G137 | 답 ①

[풀이]

두 선분 $\mathrm{A_1C_1}$, $\mathrm{B_1D_1}$의 교점을 E라고 하자.

이등변삼각형의 성질, 삼각형의 세 내각의 합을 이용하면 아래 그림과 같이 각(○, ●)을 결정할 수 있다.



R_1

(단, $○=30^\circ$, $●=60^\circ$)

직각삼각형 $\mathrm{EOB_1}$에서

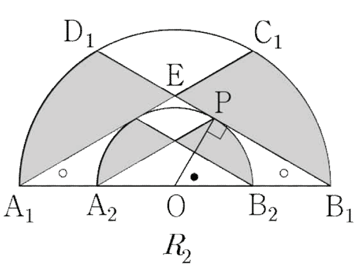
$$\overline{\mathrm{EO}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{S_1}{2}=(\text{호 } \mathrm{B_1C_1}\text{와 현 } \mathrm{B_1C_1}\text{으로 둘러싸인 활꼴의 넓이})$$
$$+(\triangle \mathrm{C_1EB_1}\text{의 넓이})$$

$$=\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore\ S_1=\frac{4}{3}\pi-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

점 O에서 선분 $\mathrm{B_1D_1}$에 내린 수선의 발을 P라고 하자.



R_2

(단, $○=30^\circ$, $●=60^\circ$)

$\overline{\mathrm{A_1B_1}}:\overline{\mathrm{A_2B_2}}=\overline{\mathrm{OB_1}}:\overline{\mathrm{OP}}=2:1$

이므로 등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{4}{3}\pi-\frac{2\sqrt{3}}{3}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{16}{9}\pi-\frac{8\sqrt{3}}{9}$$

$\therefore\ a+b=16-8=8$

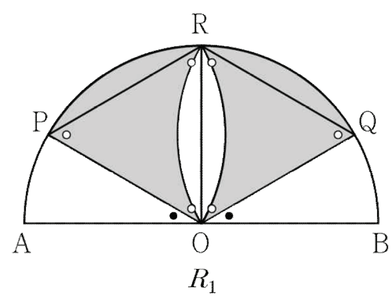
답 ①

G138 | 답 ④

[풀이]

그림 R_n에서 새롭게 그려진  모양의 도형 1개의 넓이를 a_n, 개수를 b_n이라고 하자.

그림 R_1에서 세 원 O, P, Q가 만나는 점을 R이라고 하자.



R_1

(단, $●=30^\circ$, $○=60^\circ$)

원의 정의에 의하여 세 선분

PO, OR, RP

의 길이는 2로 같다.

따라서 삼각형 POR은 한 변의 길이가 2인 정삼각형이다.

마찬가지의 이유로

삼각형 ROQ는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이다.

두 부채꼴 POR(OR이 호), RPO(RP가 호)는 서로 합동이므로

호 PR과 현 PR로 둘러싸인 활꼴과

호 RO와 현 RO로 둘러싸인 활꼴은 서로 합동이다.

마찬가지의 이유로

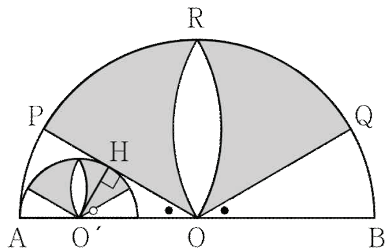
호 QR과 현 QR로 둘러싸인 활꼴과

호 RO와 현 RO로 둘러싸인 활꼴은 서로 합동이다.

따라서 그림 R_1에서 색칠된 도형의 넓이는 사다리꼴 POQR의 넓이와 같다.

$$a_1=2\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2=2\sqrt{3}$$

그림 R_2에서 새롭게 그려진 왼쪽 반원의 중심을 O′, 점 O′에서 선분 OP에 내린 수선의 발을 H라고 하자. 그리고 그림 R_2에서 새롭게 그려진 반원의 반지름의 길이를 r이라고 하자.



R_2

(단, ●$=30^\circ$, ○$=60^\circ$)

직각삼각형 OHO'에서 특수각의 삼각비에 의하여

$\cos 60^\circ = \dfrac{\overline{O'H}}{\overline{OO'}}$ 즉, $\dfrac{1}{2} = \dfrac{r}{2-r}$

풀면 $r = \dfrac{2}{3}$

두 원 O, O'의 닮음비는 $2 : r$이므로

$a_2 = a_1 \times \left(\dfrac{r}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{9}a_1$

마찬가지의 방법으로

2 이상의 자연수 n에 대하여

$a_{n+1} = \dfrac{1}{9}a_n$

수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는

$a_1 = 2\sqrt{3}$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{9}a_n$

수열 $\{b_n\}$의 귀납적 정의는

$b_1 = 1$, $b_{n+1} = 2b_n$

$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$이므로

등비급수의 합의 공식에 의하여

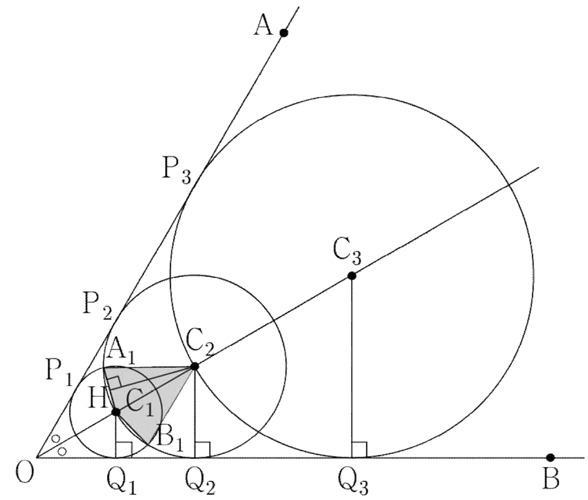
$\therefore \displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{2\sqrt{3}}{1-\dfrac{2}{9}} = \dfrac{18\sqrt{3}}{7}$

답 ④

G139 | 답 ⑤

[풀이]

점 C_2에서 선분 A_1C_1에 내린 수선의 발을 H라고 하자. 그리고 원 C_n의 반지름의 길이를 r_n이라고 하자.



(단, ○$=30^\circ$)

원 C_n은 점 Q_n에서 직선 OB에 접하므로

$\overline{C_nQ_n} \perp \overline{OB}$

직각삼각형 C_1OQ_1에서 특수각의 삼각비에 의하여

$\overline{OQ_1} = \sqrt{3}$, $\overline{C_1Q_1} = 1 (= r_1)$

직각삼각형 C_2OQ_2에서 특수각의 삼각비에 의하여

$\sin 30^\circ = \dfrac{\overline{C_2Q_2}}{\overline{OC_2}}$ 즉, $\dfrac{1}{2} = \dfrac{r_2}{r_2+2}$

풀면 $r_2 = 2$

마찬가지의 방법으로 3 이상의 자연수 n에 대하여

$\sin 30^\circ = \dfrac{\overline{C_nQ_n}}{\overline{OC_n}}$

즉, $\dfrac{1}{2} = \dfrac{r_n}{2 + r_2 + r_3 + \cdots + r_n}$

정리하면

$r_n = 2 + r_2 + r_3 + \cdots + r_{n-1}$

n의 자리에 $n-1$을 대입하면

$r_{n-1} = 2 + r_2 + r_3 + \cdots + r_{n-2}$

위의 두 등식을 변변히 빼서 정리하면

$r_n = 2r_{n-1} (n \geq 3)$

수열 $\{r_n\}$은 첫째항이 1이고 공비가 2인 등비수열이다.

일반항 r_n은

$r_n = 2^{n-1} (n \geq 1)$

이제 사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 넓이를 구하자.

원의 정의에 의하여

$\overline{A_1C_1} = 1$, $\overline{C_2A_1} = 2$

이등변삼각형 $C_2A_1C_1$에서 점 H는 선분 A_1C_1의 중점이므로

$\overline{A_1H} = \dfrac{1}{2}$

직각삼각형 C_2A_1H에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{C_2H} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{2}$

$S_1 = 2 \times (\triangle C_2A_1C_1$의 넓이)

$= 2 \times \left(\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{15}}{2}\right) = \frac{\sqrt{15}}{2}$

등비수열 $\{r_n\}$의 공비가 2이므로, 수열 $\{S_n\}$은 공비가 4인 등비수열이다.

일반항 S_n은

$S_n = \frac{\sqrt{15}}{2} \times 4^{n-1} (n \geq 1)$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$\therefore \lim_{n \to \infty} \frac{S_n}{4^n + 3^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{\sqrt{15}}{8} \times 4^n}{4^n + 3^n} = \frac{\sqrt{15}}{8}$

답 ⑤

G140 | 답 11

[풀이]

문제에서 주어진 기울기 조건에 의하여

두 직선 A_1A_2, A_2A_3은 직선 $y = x$에 대하여 서로 대칭이다.

이때, $\angle A_1A_2O = \angle A_2A_3O$이므로

두 직각삼각형 A_1A_2O, A_2A_3O은 서로 닮음이다.

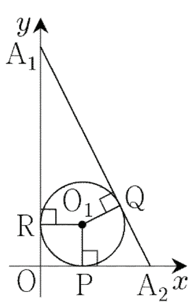
이때, 닮음비가 $2:1$이므로 $r_2 = \frac{1}{2} r_1$이다.

마찬가지의 방법으로

$r_{n+1} = \frac{1}{2} r_n (n \geq 1)$

이제 r_1의 값을 구하자.

점 O_1에서 x축, 직선 A_1A_2, y축에 내린 수선의 발을 각각 P, Q, R이라고 하자.



$\overline{A_1A_2} = \overline{A_1Q} + \overline{QA_2} = \overline{A_1R} + \overline{A_2P}$

즉, $2\sqrt{5} = 4 - r_1 + 2 - r_1$

$r_1 = 3 - \sqrt{5}$

등비급수의 합의 공식에 의하여

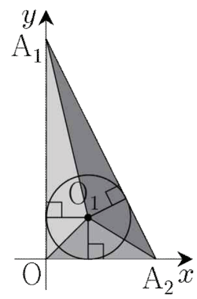
$\sum_{n=1}^{\infty} r_n = \frac{3 - \sqrt{5}}{1 - \frac{1}{2}} = 6 - 2\sqrt{5}$

$\therefore a + b = 11$

답 11

[참고]

r_1의 값을 다음과 같이 구해도 좋다.



($\triangle A_1OA_2$의 넓이)

$=$($\triangle A_1OO_1$의 넓이)$+$($\triangle O_1OA_2$의 넓이)$+$($\triangle A_2A_1O_1$의 넓이)

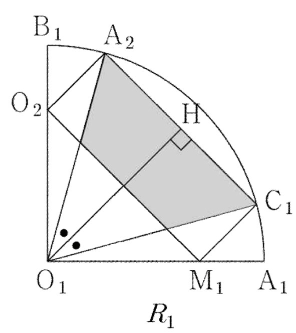
즉, $\frac{1}{2} \times 2 \times 4 = \frac{1}{2} \times r_1 \times (6 + 2\sqrt{5})$

$\therefore r_1 = 3 - \sqrt{5}$

G141 | 답 ②

[풀이]

점 O_1에서 선분 A_2C_1에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



(단, ● $= 30°$)

직각삼각형 $O_2O_1M_1$에서

$\overline{O_2M_1} = 2$

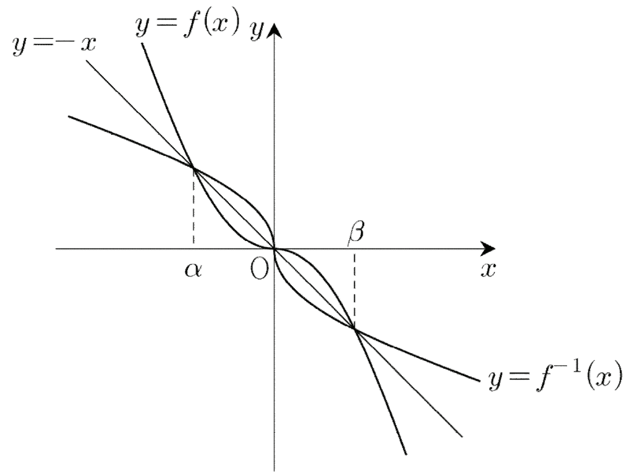
이고, 원의 정의에 의하여

$\overline{O_1A_2} = \overline{O_1C_1} = 2$

이므로 삼각형 $O_1C_1A_2$는 정삼각형이다.

$\overline{A_2O_2} = x$로 두자.

직각삼각형 C_1HO_1에서



위의 그림처럼 두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 세 교점은 직선 $y=-x$ 위에 있다.

방정식 $f(x)=-x$는

$-\dfrac{kx^3}{x^2+1}=-x$

$\Leftrightarrow -\dfrac{kx^2}{x^2+1}=-1$ 또는 $x=0$

$\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{1}{k-1}}$ 또는 $x=0$

$\alpha=-\sqrt{\dfrac{1}{k-1}}$, $\beta=\sqrt{\dfrac{1}{k-1}}$

이때, $\beta=-\alpha$, $f(\beta)=\alpha$, $f(\alpha)=\beta$이다.

$h(x)=f(x-2\beta)+2\alpha$로 두자.

$h(\beta)=f(-\beta)+2\alpha=f(\alpha)+2\alpha$

$=\beta+2\alpha=\alpha$

역함수의 성질에 의하여

$g(\alpha)=\beta$

역함수의 미분법에 의하여

$g'(\alpha)=\dfrac{1}{h'(\beta)}$

그런데 $h'(x)=f'(x-2\beta)$이므로

$g'(\alpha)=\dfrac{1}{f'(-\beta)}$

함수 $f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로

함수 $f'(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

즉, 모든 실수 x에 대하여

$f'(-x)=f'(x)$이 성립한다.

$g'(\alpha)=\dfrac{1}{f'(\beta)}$

이를 문제에서 주어진 등식에 대입하면

$f'(\beta)=2g'(\alpha)=\dfrac{2}{f'(\beta)}$

정리하면

$f'(\beta)=-\sqrt{2}$

($\because f(x)$는 감소함수이다.)

$f'(\beta)=f'\left(\sqrt{\dfrac{1}{k-1}}\right)$

$=-\dfrac{\dfrac{k}{k-1}\times\dfrac{3k-2}{k-1}}{\left(\dfrac{k}{k-1}\right)^2}=-\sqrt{2}$

정리하면

$(3-\sqrt{2})k=2$

풀면

$\therefore\ k=\dfrac{6+2\sqrt{2}}{7}$

답 ②

H170 | 답 10

[풀이]

모든 실수 x에 대하여

$f(-x)=-f(x)$

이므로 함수 $f(x)$는 기함수이다. (즉, 원점 대칭이다.)

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=-\dfrac{ax^4+(3a-b)x^2+b}{(x^2+1)^2}$ (단, $a>0$, $b>0$)

$f'(0)=-b<0$이므로

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)<0$이어야 한다.

즉, 함수 $f(x)$는 감소함수이다.

조건 (가)에서

$f(2)-f^{-1}(2)=g(f(0))$

$=g(0)=f(0)-f^{-1}(0)=0-0=0$

즉, $f(2)=f^{-1}(2)$($=t$로 두자.)

역함수의 성질에 의하여

$f(t)=2$

그런데 $f(x)$가 원점 대칭이므로

$f(-2)=-f(2)=-t$,

$f(-t)=-f(t)=-2$

즉, 곡선 $y=f(x)$는 다음의 네 점을 지난다.

$(2,\ t)$, $(t,\ 2)$, $(-2,\ -t)$, $(-t,\ -2)$

이때, $t\neq-2$이면 '함수 $f(x)$는 감소함수이다.' 에 모순이다.

따라서 $t=-2$ 즉, $f(2)=-2$

이제 상수 a, b의 값을 결정하자.

$f(2)=-\dfrac{8a+2b}{5}=-2$, $4a+b=5$ …㉠

두 함수 $g(x)$, $h(x)$의 도함수는

$g'(x)=f'(x)-(f^{-1})'(x)$

$h'(x)=g'(f(x))f'(x)$

이므로

$g'(2)=f'(2)-(f^{-1})'(2)=f'(2)-\dfrac{1}{f'(2)}$,

($\because$ $f'(x)$는 y축에 대하여 대칭이다.)

$h'(2)=g'(f(2))f'(2)=g'(-2)f'(2)$

$=\{f'(-2)-(f^{-1})'(-2)\}f'(2)$

$=\left\{f'(2)-\dfrac{1}{f'(2)}\right\}f'(2)$

($\because$ $f'(x)$는 y축에 대하여 대칭이다.)

$=(f'(2))^2-1$

조건 (나)에 의하여

$f'(2)-\dfrac{1}{f'(2)}=-5\{(f'(2))^2-1\}$

$f'(2)=p$로 두고 정리하면

$5p^3+p^2-5p-1=0$, $(5p+1)(p+1)(p-1)=0$

$p=-\dfrac{1}{5}(=f'(2))$ 또는 $p=-1(=f'(2))$

($\because f'(2)<0$)

• (1) $f'(2)=-\dfrac{1}{5}$인 경우 (○)

$f'(2)=-\dfrac{28a-3b}{25}=-\dfrac{1}{5}$, $28a-3b=5$

㉠과 연립하면

$a=\dfrac{1}{2}$, $b=3$

• (2) $f'(2)=-1$인 경우 (×)

$f'(2)=-\dfrac{28a-3b}{25}=-1$, $28a-3b=25$

㉠과 연립하면

$a=1$, $b=1$이므로 모순이다. ($\because a\neq b$)

(1), (2)에서

$\therefore$ $4(b-a)=10$

답 10

H171 | 답 49

[풀이]

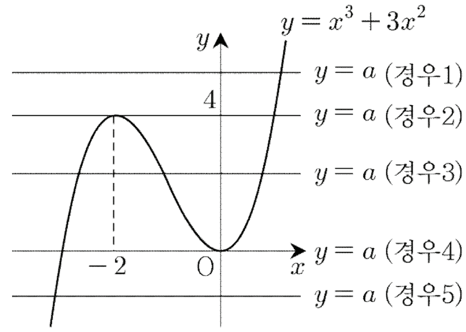
함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=(x^3+3x^2-a)e^x$

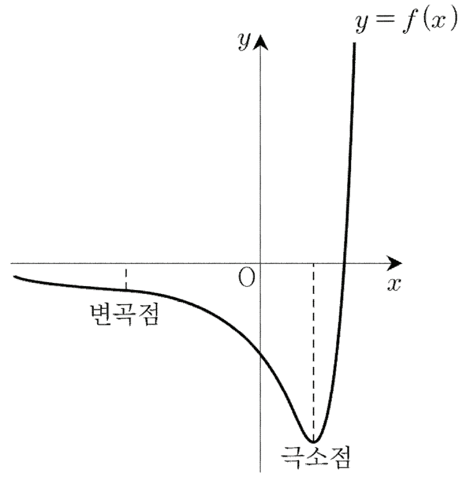
방정식 $f'(x)=0$과 아래의 방정식은 서로 필요충분조건이다.

$x^3+3x^2-a=0$

곡선 $y=x^3+3x^2$과 직선 $y=a$의 위치 관계에 따른 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



▸ (경우1) $a>4$

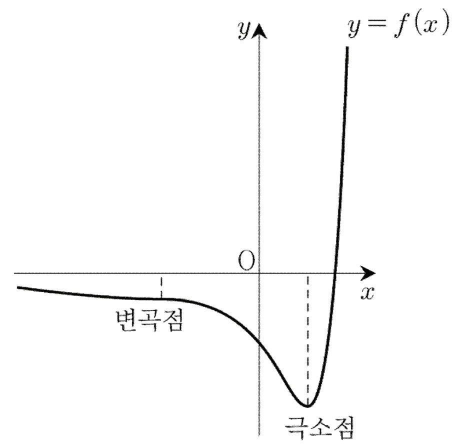


실수 t가 $-\infty$에서 ∞까지 변할 때, $g(t)$의 함숫값의 변화는 다음과 같다.

$0\to1\to2\to1$

함수 $g(t)$의 불연속점의 개수는 2이다.

▸ (경우2) $a=4$

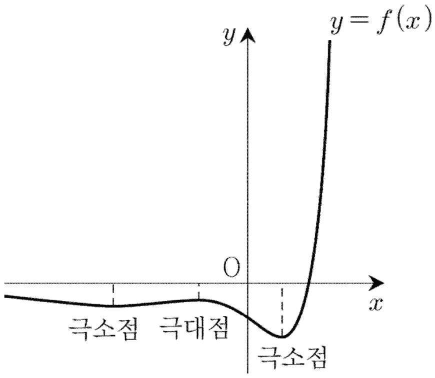


실수 t가 $-\infty$에서 ∞까지 변할 때, $g(t)$의 함숫값의 변화는 다음과 같다.

$0\to1\to2\to1$

함수 $g(t)$의 불연속점의 개수는 2이다.

▸ (경우3) $0<a<4$

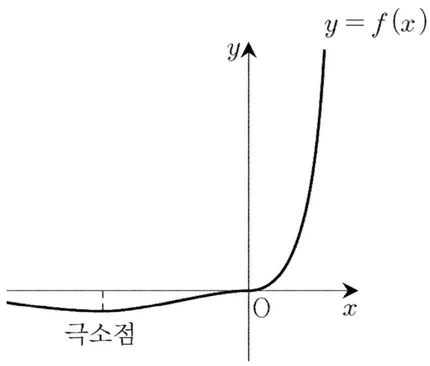


실수 t가 $-\infty$에서 ∞까지 변할 때, $g(t)$의 함숫값의 변화는 다음과 같다.

$0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 3 \to 2 \to 1$

함수 $g(t)$의 불연속점의 개수는 4이다.

▸ (경우4) $a = 0$

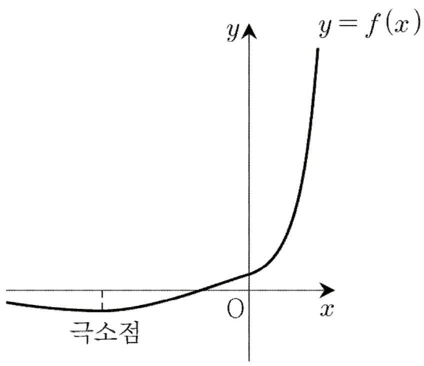


실수 t가 $-\infty$에서 ∞까지 변할 때, $g(t)$의 함숫값의 변화는 다음과 같다.

$0 \to 1 \to 2 \to 1$

함수 $g(t)$의 불연속점의 개수는 2이다.

▸ (경우5) $a < 0$



실수 t가 $-\infty$에서 ∞까지 변할 때, $g(t)$의 함숫값의 변화는 다음과 같다.

$0 \to 1 \to 2 \to 1$

함수 $g(t)$의 불연속점의 개수는 2이다.

따라서 문제에서 주어진 모든 조건을 만족시키는 a의 범위는

$a \geq 4$ 또는 $a \leq 0$

따라서 구하는 값은

$4+5+6+7+8+9+10 = 55-6 = 49$

답 49

H172 | 답 25

[풀이]

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x) = (ax^2+2x)e^{ax}$

방정식 $f'(x)=0$을 풀면

$x=0$ 또는 $x = -\dfrac{2}{a}$

함수 $f(x)$의 이계도함수는

$f''(x) = (a^2x^2+4ax+2)e^{ax}$

방정식 $f''(x)=0$을 정리하면

$a^2x^2+4ax+2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D/4 = (2a)^2 - a^2 \times 2 = 2a^2 > 0$

따라서 방정식 $f''(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. 이 두 실근을 각각 α, β라고 하자. (단, $\alpha < \beta$)

이차방정식의 근의 공식에 의하여

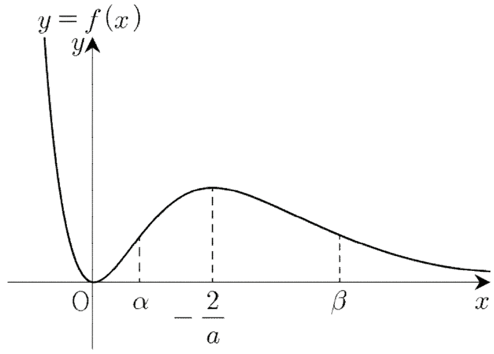
$\alpha = \dfrac{-2+\sqrt{2}}{a}$, $\beta = \dfrac{-2-\sqrt{2}}{a}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고 그 그래프를 그리면 다음과 같다.

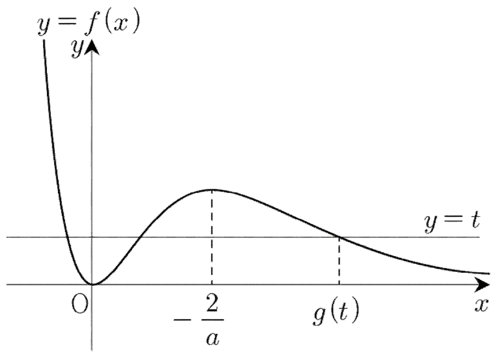
x	$\cdots$	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$-\dfrac{2}{a}$	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0 극소	↗	변곡점	↗	$\dfrac{4}{a^2e^2}$ 극대	↘	변곡점	↘

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{-ax}} = 0$이므로 x축은 점근선이다.

함수 $f(x)$의 그래프는

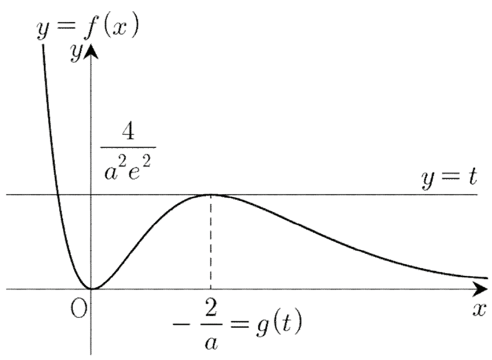


• (1) $0<t<\dfrac{4}{a^2e^2}$ 인 경우



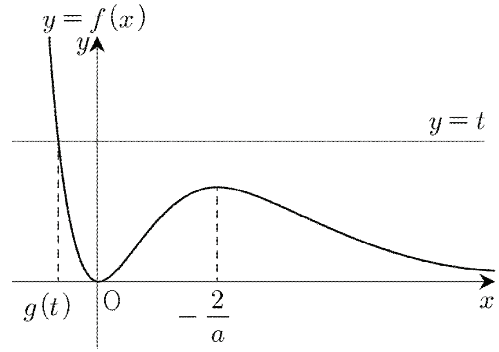
위의 그림처럼 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$는 서로 다른 세 점에서 만난다. 이 세 교점의 x좌표 중에서 가장 큰 값을 $g(t)$로 두면 된다. (위의 그림)

• (2) $t=\dfrac{4}{a^2e^2}$ 인 경우



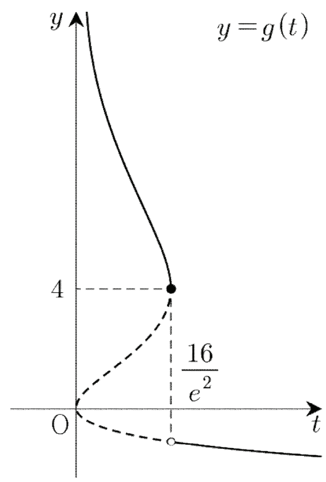
위의 그림처럼 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$는 서로 다른 두 점에서 만난다. 이 두 교점의 x좌표 중에서 가장 큰 값은 $-\dfrac{2}{a}$이므로 $g(t)=-\dfrac{2}{a}$이다.

• (3) $t>\dfrac{4}{a^2e^2}$ 인 경우



위의 그림처럼 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$는 오직 한 점에서 만난다. 이때, 이 점의 x좌표의 값을 $g(t)$로 두면 된다. (위의 그림)

(1), (2), (3)에서 함수 $g(t)$의 그래프는



함수 $g(t)$는 $t=\dfrac{4}{a^2e^2}$에서 불연속이므로

$\dfrac{4}{a^2e^2}=\dfrac{16}{e^2}$에서 $a=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ 100a^2=25$

답 25

H173 ㅣ답 91

[풀이]

$f'(x)=\{-x^2+(2-a)x+a-b\}e^{-x}$

$(=-(x-\alpha)(x-\beta)e^{-x})$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2+(a-2)x+b-a=0(\cdots(*1))$

(가): $f(x)$가 극값을 가지므로

이차방정식 (*1)은 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$D=(a-2)^2-4(b-a)=a^2+4-4b\geq 0$

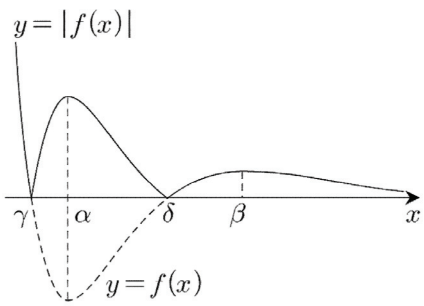
이때, (*1)의 서로 다른 두 실근을 α, $\beta(\alpha<\beta)$라고 하면

$x=\alpha$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로

함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극솟값을 갖고,

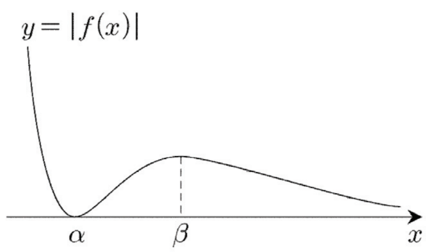
$x=\beta$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로
함수 $f(x)$는 $x=\beta$에서 극댓값을 갖는다.
그리고 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+ax+b}{e^x}=0$이므로 x축은 점근선이다.
한편 $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2+ax+b=0(\cdots(*2))$
이 이차방정식에 대하여 $D=a^2-4b$이고,
(경우1) $D\geq 0$이면 함수 $f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.
이때, 서로 다른 두 실근을 γ, δ(단, $\gamma<\delta$)라고 하자.
(경우2) $D=0$이면 함수 $f(x)$의 그래프는 x축에 접한다. (오직 한 점)
이때, 중근은 α이다. (아래 그림에서 확인)
(경우3) $D<0$이면 함수 $f(x)$의 그래프는 x축과 만나지 않는다.

- (경우1) $f(\alpha)<0$

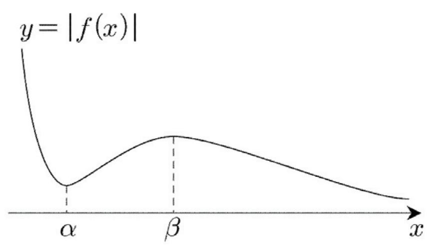


두 이차방정식 (*1), (*2)에서 근과 계수와의 관계에 의하여
$\alpha+\beta+\gamma+\delta=2-a-a=3$, $a=-\dfrac{1}{2}$(정수×)
문제에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

- (경우2) $f(\alpha)=0$ 또는 $f(\alpha)>0$



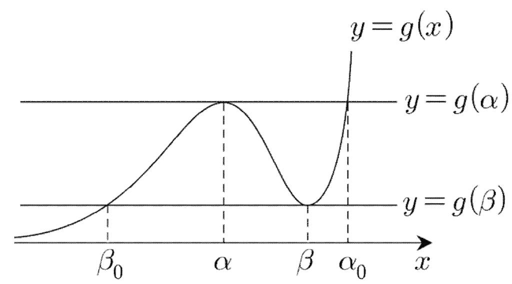
(단, $f(\alpha)=0$)



(단, $f(\alpha)>0$)
이차방정식 (*1)에서 근과 계수와의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=2-a=3$, $a=-1$
(*1): $D=a^2+4-4b=5-4b>0$, $b<\dfrac{5}{4}$
(*2): $D=a^2-4b=1-4b<0$, $b>\dfrac{1}{4}$
$b=1$, $f(x)=(x^2-x+1)e^{-x}$
$f(10)=91e^{-10}$
$\therefore\ p=91$
답 91

H174 |답 129

[풀이]
$g'(x)=e^x\underbrace{\{f'(x)+f(x)\}}_{2\text{차 함수}}$
방정식
$g'(x)=0 \qquad \cdots(*)$
의 서로 다른 실근의 개수는 2 또는 1(중근) 또는 0이다.
(*)의 서로 다른 실근의 개수가 1 또는 0이면 함수 $g(x)$는 증가하므로 함수 $h(k)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. 따라서 (*)의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. 이때, 서로 다른 두 실근을 α, $\beta(\alpha<\beta)$라고 하자.
함수 $g(x)$의 그래프는 아래 그림과 같다.
이때, $g(\beta)>0$이다. 왜냐하면 모든 실수 x에 대하여
$g(x)=e^xf(x)>0$이기 때문이다.



(단, $g(\alpha_0)=g(\alpha)$, $g(\beta_0)=g(\beta)$)
조건 (가)에서 함수 $h(k)$는 $k=g(\alpha)$ 또는 $k=g(\beta)$에서 불연속이어야 한다.
(정확하게 말하면 둘 중 하나에서는 불연속, 나머지 하나에서는 연속이다.)
조건 (나)에서 함수 $h(k)$는 $k=3e$에서 불연속이다.

- (1) 함수 $h(k)$가 $k=g(\alpha)(=3e)$에서 불연속인 경우

(나): $\alpha_0-(\alpha_0+2\alpha)=-2\alpha=2$, $\alpha=-1$, $g(-1)=3e$
그리고 함수 $h(k)$는 $k=g(\beta)$에서 연속이므로
$\lim\limits_{k\to g(\beta)+} h(k)=\lim\limits_{k\to g(\beta)-} h(k)$ 즉, $2\beta+\beta_0=\beta_0$, $\beta=0$
$g'(x)=ae^x(x+1)x$ (단, $a>3$)
$g(x)=ae^x(x^2-x+1)$

$(\because g(x)=e^{x}(ax^2+bx+c)$로 두면

$g'(x)=e^{x}(ax^2+(2a+b)x+b+c)$

$2a+b=a,\ b+c=0$에서 $b=-a,\ c=a)$

$g(-1)=3ae^{-1}=3e,\ a=e^2(>3)$

$\therefore\ g(x)=e^{x+2}(x^2-x+1)$

• (2) 함수 $h(k)$가 $k=g(\beta)(=3e)$에서 불연속인 경우

(나): $(\beta_0+2\beta)-\beta_0=2\beta=2,\ \beta=1,\ g(1)=3e$

그리고 함수 $h(k)$는 $k=g(\alpha)$에서 연속이므로

$\lim_{k\to g(\alpha)+} h(k)=\lim_{k\to g(\alpha)-} h(k)$ 즉, $\alpha_0=2\alpha+\alpha_0,\ \alpha=0$

$g'(x)=ae^{x}x(x-1)$ (단, $a>3$)

$g(x)=ae^{x}(x^2-3x+3)$

$(\because g(x)=e^{x}(ax^2+bx+c)$로 두면

$g'(x)=e^{x}(ax^2+(2a+b)x+b+c)$

$2a+b=-a,\ b+c=0$에서 $b=-3a,\ c=3a)$

$g(1)=ae=3e,\ a=3$ (×)

(1), (2)에서

$g(x)=e^{x+2}(x^2-x+1)$

$\therefore\ g(-6)\times g(2)$

$=43e^{-4}\times 3e^{4}=129$

답 129

H175 | 답 71

[풀이]

함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x)=ax^2+bx+c$

(단, $a\neq 0$이고, $a,\ b,\ c$는 유리수이다.)

함수 $f(x)$의 도함수와 이계도함수는

$f'(x)=2ax+b,\ f''(x)=2a$

$h(x)=f'(x)e^{f(x)}$로 두면

$h(x)=(2ax+b)e^{ax^2+bx+c}$

$a>0$이라고 가정하자.

$x\to\infty$일 때, $f'(x)$의 부호는 양(+)이므로

$\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty} h(x)=\infty$

함수 $g(x)$는 최댓값을 갖지 않으므로

이는 가정에 모순이다. (조건(나))

따라서 $a<0$이다.

함수 $h(x)$의 도함수는

$h'(x)=\{f''(x)+(f'(x))^2\}e^{f(x)}$

$h'(x)=0$

$\Leftrightarrow f''(x)+(f'(x))^2=0$ $(\because e^{f(x)}>0)$

$\Leftrightarrow 2a+(2ax+b)^2=0$

풀면

$x=\dfrac{\pm\sqrt{-2a}-b}{2a}$(단, $a<0$)

방정식 $h'(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 각각

$\alpha,\ \beta(\alpha<\beta)$라고 하면

$\alpha=\dfrac{-\sqrt{-2a}-b}{2a},\ \beta=\dfrac{\sqrt{-2a}-b}{2a}$

$x=\alpha$의 좌우에서 $h'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $h(x)$는 $x=\alpha$에서 극댓값을 갖는다.

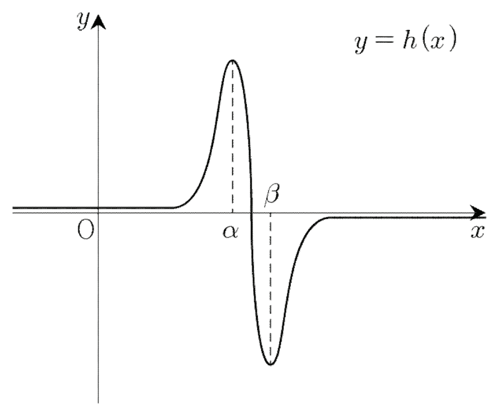
$x=\beta$의 좌우에서 $h'(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 함수 $h(x)$는 $x=\beta$에서 극솟값을 갖는다.

$\lim_{x\to\infty} h(x)=\lim_{x\to\infty}\dfrac{2ax+b}{e^{-ax^2-bx-c}}=0$이고,

$\lim_{x\to-\infty} h(x)=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{2ax+b}{e^{-ax^2-bx-c}}=0$

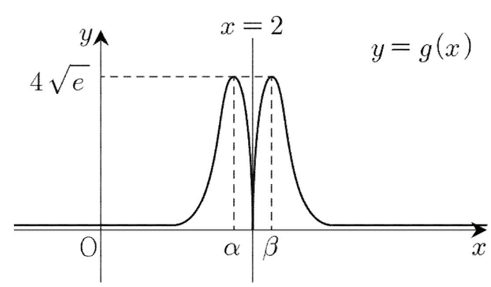
이므로 x축은 곡선 $y=h(x)$의 점근선이다.

함수 $h(x)$의 그래프의 개형은



$g(x)=|f'(x)|e^{f(x)}=|f'(x)e^{f(x)}|=|h(x)|$

이므로 함수 $g(x)$의 그래프의 개형은



조건 (가)에 의하여

함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 가지므로

$\dfrac{b}{-2a}=2$ 즉, $b=-4a$

이때, $\dfrac{b}{-2a}$는 방정식 $h(x)=0$

$(g(x)=0)$의 해이다.

함수 $g(x)$의 방정식은

$g(x)=|2a(x-2)|e^{a(x-2)^2+c-4a}$

모든 실수 x에 대하여

$g(4-x)=g(x)$

이므로 함수 $g(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

조건 (나)에 의하여

$g(\alpha)=g(\beta)=4\sqrt{e}$

$\alpha=\dfrac{-\sqrt{-2a}-b}{2a}=2+\dfrac{1}{\sqrt{-2a}}$이므로

$g(\alpha)=\sqrt{-2a}\,e^{-\frac{1}{2}+c-4a}=4e^{\frac{1}{2}}$

a, c는 유리수이므로

$\sqrt{-2a}=4$, $-\dfrac{1}{2}+c-4a=\dfrac{1}{2}$

연립방정식을 풀면

$a=-8$, $c=-31$, $b=32(\because b=-4a)$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=-8x^2+32x-31$

$\therefore\ |f(-1)|$

$=71$

답 71

H176 | 답 ⑤

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

함수 $f(x)$의 도함수와 이계도함수는

$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$, $f''(x)=\dfrac{2\ln x-3}{x^3}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=e$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=e^{\frac{3}{2}}$

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$	$e^{\frac{3}{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$		+	0	−	−	−
$f''(x)$		−	−	−	0	+
$f(x)$		↗	극대	↘	변곡점	↘

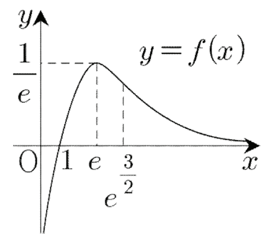
$\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{t\to -\infty}\dfrac{t}{e^t}$

$=\lim\limits_{s\to\infty}-se^s=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$

이므로 x축, y축은 점근선이다.

함수 $f(x)$의 그래프는



따라서 함수 $f(x)$는 $x=e$일 때 최댓값 $\dfrac{1}{e}$을 갖는다.

▸ ㄴ. (참)

$f(2011)>f(2012)$, 즉

$\dfrac{\ln 2011}{2011}>\dfrac{\ln 2012}{2012}$, $\ln 2011^{2012}>\ln 2012^{2011}$

함수 $y=\ln x$는 증가하므로

$2011^{2012}>2012^{2011}$

▸ ㄷ. (참)

구간 $(0,\ e)$에서 $f''(x)<0$이므로

곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록하다.

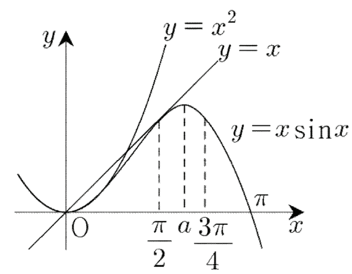
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

H177 | 답 ⑤

[풀이] 시험장

함수 $y=x\sin x$의 그래프는 다음과 같다.



▸ ㄱ. (참)

$x\to 0$일 때, $x\sin x\approx x^2$이므로 곡선 $y=x\sin x$는 원점 주위에서 곡선 $y=x^2$에 한없이 가까워진다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.

▸ ㄴ. (참)

$\sin x\le 1$이므로 구간 $[0,\ \infty)$에서 곡선 $y=x\sin x$는 직선 $y=x$의 아래쪽에 그려진다.

$(\because x-x\sin x=x(1-\sin x)\ge 0)$

그런데 곡선 $y=x\sin x$와 직선 $y=x$는 점 $\left(\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$에서 만나므로 이 점에서 곡선은 직선에 접한다.

▸ ㄷ. (참)

곡선 $y=x\sin x$가 두 점 $(0,\ 0)$, $(\pi,\ 0)$을 지나므로 롤의 정리에 의하여 $f'(a)=0$인 a가 구간 $(0,\ \pi)$에 존재한다.

그런데

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1>0$, $f'\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}(4-3\pi)}{8}<0$

이므로 a는 구간 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$에 속한다.

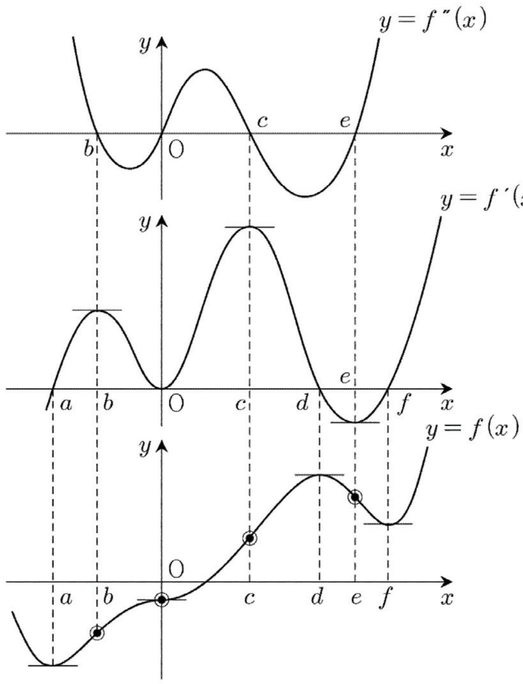
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

H178 | 답 ③

[풀이] ★

세 함수 $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



(단, ◉은 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.)

▸ ㄱ. (참)

$f''(b)=0$이고, $x=b$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 점 $(b, f(b))$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

$f''(0)=0$이고, $x=0$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 점 $(0, f(0))$은 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

$f''(c)=0$이고, $x=c$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 점 $(c, f(c))$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

$f''(e)=0$이고, $x=e$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 점 $(e, f(e))$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

따라서 구간 $[a, f]$에서 $f(x)$의 변곡점은 4개다.

▸ ㄴ. (참)

$f'(a)=0$이고, $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극솟값을 갖는다.

$f'(0)=0$이지만 $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖지 않는다.

$f'(d)=0$이고, $x=d$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=d$에서 극댓값을 갖는다.

따라서 구간 $[a, e]$에서 $f(x)$가 극대가 되는 x의 개수는 1이다.

▸ ㄷ. (거짓)

구간 $[a, e]$에서 $f(x)$의 최댓값은 $f(d)$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

H179 | 답 ①

[풀이]

함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x)=e^{-x^2}(-2xf(x)+f'(x))$

▸ ㄱ. (참)

$g'(0)=1\times(0+f'(0))=f'(0)>0$

▸ ㄴ. (거짓)

$f'(a)+g'(a)$

$=0+e^{-a^2}(-2af(a)+f'(a))$

$=e^{-a^2}(-2af(a)+0)$

$=-2ae^{-a^2}f(a)<0$

$(\because a>0, f(a)>0)$

▸ ㄷ. (거짓)

$g(b)=e^{-b^2}f(b)<0$

$(\because f(b)<0)$

$g'(b)=e^{-b^2}(-2bf(b)+f'(b))$

$=e^{-b^2}(-2bf(b)+0)$

$=-2be^{-b^2}f(b)>0$

$(\because b>0, f(b)<0)$

$\therefore g(b)g'(b)<0$

이상에서 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ①

H180 | 답 ⑤

[풀이]

$x^2-2x+2=(x-1)^2+1>0$

이므로 함수 $f(x)$의 정의역은 실수 전체의 집합이다.

함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=\frac{-x(3x-4)}{(x^2-2x+2)^3}$$

방정식 $f'(x)=0$을 풀면

$x=0$ 또는 $x=\frac{4}{3}$

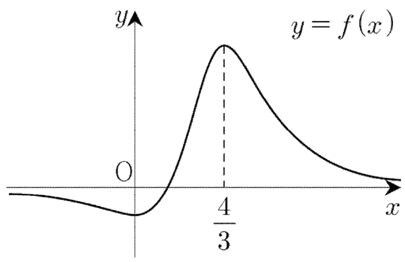
$x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.

$x=\frac{4}{3}$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{4}{3}$에서 극댓값을 갖는다.

$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$

이므로 x축은 점근선이다.

함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



▸ ㄱ. (참)

접선의 방정식은

$y=x-\frac{1}{2}$

이므로, 점과 직선 사이의 거리 공식에 의하여 접선과 원점 사이의 거리는

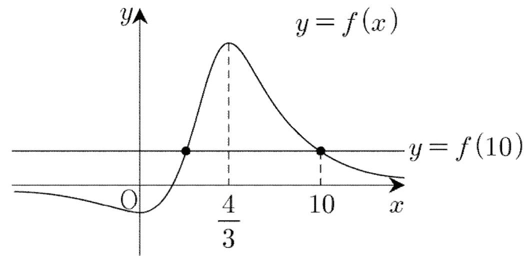
$$\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

▸ ㄴ. (참)

$f(x)\ge f(0)=-\frac{1}{8}$이므로

함수 $f(x)$의 최솟값은 $-\frac{1}{8}$이다.

▸ ㄷ. (참)



위의 그림처럼 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f(10)$의 교점의 개수는 2이다.

따라서 방정식 $f(x)=f(10)$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

H181 | 답 ④

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=e^x-\frac{1}{x^2}$$

함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극값을 가지므로

$$f'(\alpha)=e^\alpha-\frac{1}{\alpha^2}=0$$

$$\therefore\ e^\alpha=\frac{1}{\alpha^2}$$

▸ ㄴ. (거짓)

함수 $f(x)$의 이계도함수는

$$f''(x)=e^x+\frac{2}{x^3}>0$$

$x>0$일 때, $f''(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 변곡점을 갖지 않는다.

▸ ㄷ. (참)

$$f''(\alpha)=e^\alpha+\frac{2}{\alpha^3}=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{2}{\alpha^3}>0$$

즉, $f'(\alpha)=0$, $f''(\alpha)>0$이므로

함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극솟값을 갖는다.

$\lim_{x\to0+} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 최솟값을 갖는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

H182 | 답 ③

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=\frac{2(\ln x)^5(3-\ln x)}{x^3}$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1,\ x=e^3$

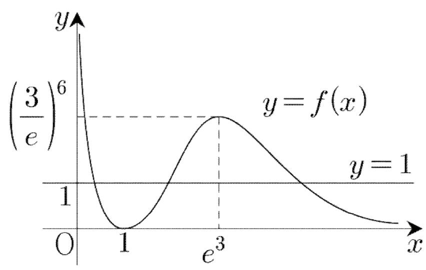
$x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음$(-)$에서 양$(+)$으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

$x=e^3$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양$(+)$에서 음$(-)$으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=e^3$에서 극댓값을 갖는다.

$$\lim_{x\to 0+}\frac{(\ln x)^6}{x^2}=\lim_{t\to -\infty}\frac{t^6}{e^{2t}}=\lim_{s\to\infty}s^6e^{2s}=\infty$$

이므로 y축은 점근선이다. (그리고 문제에서 주어진 조건에 의하여 x축은 점근선이다.)

함수 $f(x)$의 그래프는



▸ ㄴ. (거짓)

위의 그래프에서 $x=e$에서 함수 $f(x)$는 증가한다. 따라서 $x=e$에서 함수 $f(x)$는 극값을 갖지 않는다.

▸ ㄷ. (참)

위의 그래프에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=1$은 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=1$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

H183 | 답 ②

[풀이]

함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=\frac{n(1-n)x^n+n}{(x^n+1)^2}$$

▸ ㄱ. (참)

$n=3$이고 $x<-1$일 때,

$$f'(x)=\frac{-6x^3+3}{(x^3+1)^2}>0$$

$(\because\ x^3<-1,\ -6x^3+3>9)$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ -1)$에서 증가한다.

▸ ㄴ. (참)

n이 홀수일 때,

$$\lim_{x\to -1+}f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to -1-}f(x)=\infty$$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속일 수 없다.

n이 짝수일 때,

$$\lim_{x\to -1}f(x)=-\frac{n}{2},\ f(-1)=-2$$

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이기 위한 필요충분조건은

$-\frac{n}{2}=-2$, 즉 $n=4$

$n=4$일 때,

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^4=\frac{1}{3}$

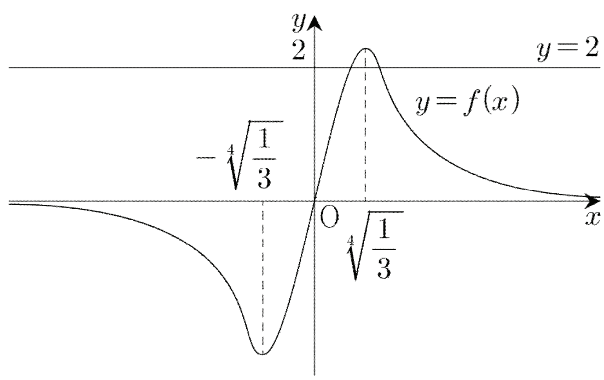
$\Leftrightarrow x=\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$ 또는 $x=-\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$

함수 $f(x)$는 $x=\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$에서 극댓값을 갖고,

$x=-\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$에서 극솟값을 갖는다.

그리고 $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim_{x\to -\infty}f(x)=0$이므로 x축은 점근선이다.

함수 $f(x)$의 그래프는



$$f\left(\sqrt[4]{\frac{1}{3}}\right)=\frac{4\sqrt[4]{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}+1}=3\sqrt[4]{\frac{1}{3}}=\sqrt[4]{27}>2$$

$(\because\ 27>8=2^3)$

위의 그림처럼 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2$의 교점의 개수는 2이므로 방정식 $f(x)=2$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

▸ ㄷ. (거짓)

$n=1$일 때, $f'(x)=0 \Leftrightarrow$ 해가 없다.

$n=2$일 때, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$

이때, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값을 갖는다.

n이 3 이상의 홀수일 때,

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt[n]{n-1}}$

이때, 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{1}{\sqrt[n]{n-1}}$에서 극댓값을 갖는다.

n이 4 이상의 짝수일 때,

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{1}{\sqrt[n]{n-1}}$

이때, 함수 $f(x)$는 $x=-\dfrac{1}{\sqrt[n]{n-1}}$에서 극솟값을 갖는다.

$-\dfrac{1}{\sqrt[n]{n-1}}>-1$, $\sqrt[n]{n-1}>1$, $n-1>1$, $n>2$

$\therefore\ n=4,\ 6,\ 8,\ 10$

따라서 구하는 값은 28이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

H184 ㅣ답 ③

[풀이]

조건 (가)에 의하여

$\lim\limits_{x\to c-} f(x)=f(c)$, 즉

$-ac^2+6ec+b=a(\ln c)^2-6\ln c$ …㉠

함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=\begin{cases}-2ax+6e & (x<c)\\ \dfrac{2a\ln x}{x}-\dfrac{6}{x} & (x>c)\end{cases}$$

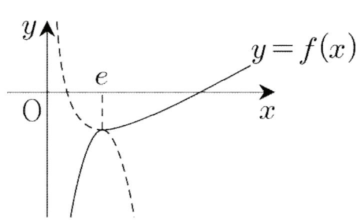
$x\to-\infty$일 때, $f(x)\to-\infty$이므로

실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$는 증가해야 한다.

$x>c$일 때, 방정식 $f'(x)=0$을 풀면

$x=e^{\frac{3}{a}}$

$x=e^{\frac{3}{a}}$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음($-$)에서 양($+$)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=e^{\frac{3}{a}}$에서 극솟값을 갖는다.



실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$가 증가하기 위해서는

$e^{\frac{3}{a}}\le c$ …㉡

이어야 한다.

$x<c$일 때, $f'(x)\ge 0$이므로

$c\le\dfrac{3e}{a}$ …㉢

㉡, ㉢에 의하여

$e^{\frac{3}{a}}\le\dfrac{3e}{a}$, 즉 $e^{\frac{3}{a}-1}\le\dfrac{3}{a}$

그런데 실수 전체의 집합에서

$e^{x-1}\ge x$ (단, 등호는 $x=1$일 때 성립한다.)

이므로 $e^{\frac{3}{a}-1}=\dfrac{3}{a}$이고, $a=3$이다.

이를 ㉡, ㉢에 대입하면 $c=e$

이를 다시 ㉠에 대입하면

$-3e^2+6e^2+b=3-6$, $b=-3-3e^2$

마지막으로 $\dfrac{1}{2e}<e$이므로

$\therefore\ f\left(\dfrac{1}{2e}\right)$

$=-3\left(\dfrac{1}{2e}\right)^2+6e\times\dfrac{1}{2e}-3-3e^2$

$=-3\left(e^2+\dfrac{1}{4e^2}\right)$

답 ③

H185 ㅣ답 ③

[풀이1]

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 도함수는

$f'(x)=nx^{n-1}(n\ge 2)$, $f'(x)=1(n=1)$

$g'(x)=\dfrac{4x^3}{(x^4+2n)\ln 3}$

합성함수의 미분법에 의하여

$h'(x)=g'(f(x))f'(x)$

$=\dfrac{4nx^{n-1}(x^n-1)^3}{((x^n-1)^4+2n)\ln 3}(n\ge 2)$

$h'(x)=g'(f(x))f'(x)$

$=\dfrac{4(x-1)^3}{((x-1)^4+2n)\ln 3}(n=1)$

▸ ㄱ. (참)

모든 자연수 n에 대하여 $1^n-1=0$이므로

$h'(1)=0$

▸ ㄴ. (거짓)

우선 $\ln 3>0=\ln 1$이다.

$n=1$일 때, 구간 $(0,\ 1)$에 속하는 모든 실수 x에 대하여

$(x-1)^4>0$, $(x-1)^3<0$

이므로 $h'(x)<0$이다.

$n\ge 2$일 때, 구간 $(0,\ 1)$에 속하는 모든 실수 x에 대하여

$(x^n-1)^4>0$, $x^{n-1}>0$, $(x^n-1)^3<0$

이므로 $h'(x)<0$이다.

따라서 열린구간 $(0, 1)$에서 함수 $h(x)$는 감소한다.

▸ ㄷ. (참)

함수 $h(x)$의 도함수를 다시 쓰자.

$n=1$일 때,

$h'(x)$

$$=\frac{4(x-1)^3}{((x-1)^4+2)\ln 3}$$

$n\geq 2$일 때,

$h'(x)$

$$=\frac{4nx^{n-1}(x-1)^3(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)^3}{((x^n-1)^4+2n)\ln 3}$$

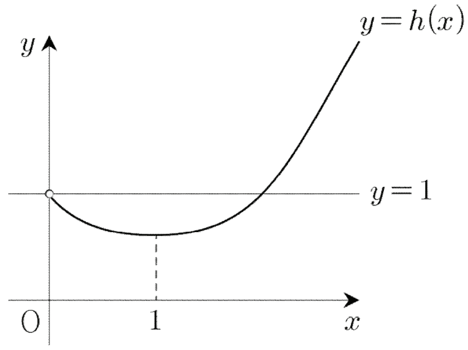
• (1) $n=1$인 경우

방정식 $h'(x)=0$을 풀면 $x=1$이다.

$x=1$의 좌우에서 $h'(x)$의 부호가 음$(-)$에서 양$(+)$으로 바뀌므로 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

함수 $h(x)$의 y절편은 1이다.

$x>0$일 때, 함수 $h(x)$의 그래프는 다음과 같다.



위의 그림처럼 곡선 $y=h(x)$와 직선 $y=1$의 교점의 개수는 1이다.

• (2) n이 2 이상의 홀수인 경우

방정식 $h'(x)=0$을 풀면 $x=0$ 또는 $x=1$이다.

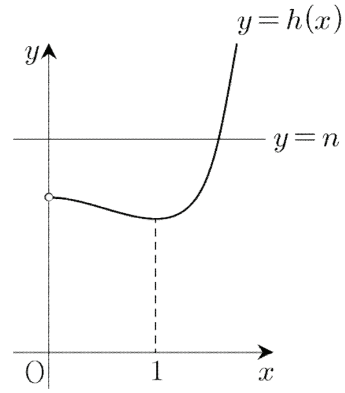
$x=1$의 좌우에서 $h'(x)$의 부호가 음$(-)$에서 양$(+)$으로 바뀌므로 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

함수 $h(x)$의 y절편은 $\log_3(1+2n)$이다.

이때, $\log_3(1+2n)<n$이다.

왜냐하면 $1+2n<3^n$이기 때문이다.

$x>0$일 때, 함수 $h(x)$의 그래프는 다음과 같다.



위의 그림처럼 곡선 $y=h(x)$와 직선 $y=n$의 교점의 개수는 1이다.

• (3) n이 2 이상의 짝수인 경우

방정식 $h'(x)=0$을 풀면 $x=0$ 또는 $x=1$이다.

$x=0$의 좌우에서 $h'(x)$의 부호가 양$(+)$에서 음$(-)$으로 바뀌므로 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

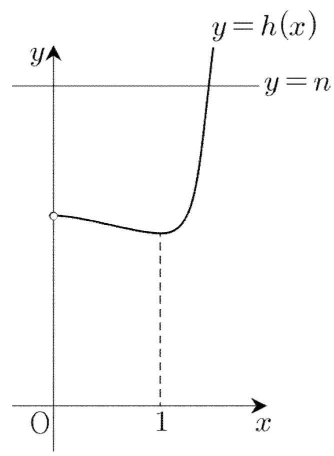
$x=1$의 좌우에서 $h'(x)$의 부호가 음$(-)$에서 양$(+)$으로 바뀌므로 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

함수 $h(x)$의 y절편은 $\log_3(1+2n)$이다.

이때, $\log_3(1+2n)<n$이다.

왜냐하면 $1+2n<3^n$이기 때문이다.

$x>0$일 때, 함수 $h(x)$의 그래프는 다음과 같다.



위의 그림처럼 곡선 $y=h(x)$와 직선 $y=n$의 교점의 개수는 1이다.

(1), (2), (3)에서 $x>0$일 때, 방정식 $h(x)=n$의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

[풀이2] 시험장

▸ ㄱ. (참)

함수 $h(x)$의 도함수는

$$h'(x)=\frac{4(x-1)^3}{\{(x-1)^4+2\}\ln 3}\ (n=1)$$

$h'(x)=\dfrac{4(x^n-1)^3 nx^{n-1}}{\{(x^n-1)^4+2n\}\ln 3}\,(n\ge 2)$

$\therefore\ h'(1)=0$

▸ ㄴ. (거짓)

x: $0 \Rightarrow 1$ (증가)

$f(x)$: $-1 \Rightarrow 0$ (증가)

$\{f(x)\}^4$: $1 \Rightarrow 0$ (감소)

$g(f(x))$: $\log_3(1+2n) \Rightarrow \log_3 2n$ (감소)

따라서 함수 $h(x)$는 구간 $(0,\ 1)$에서 감소한다.

▸ ㄷ. (참)

구간 $[0,\ 1]$에서 함수 $h(x)$는 감소하고

($h(x)$: $\log_3(1+2n)$에서 $\log_3 2n$로 감소)

구간 $[1,\ \infty)$에서 함수 $h(x)$는 증가하므로

($h(x)$: $\log_3 2n$에서 증가하여 ∞로 발산)

모든 자연수 n에 대하여

(y절편)$=\log_3(1+2n)\le n$, 즉 $1+2n\le 3^n$

이므로 $x>0$일 때, 방정식 $h(x)=n$의 서로 다른 실근의 개수는 1이다. 이때, 실근은 항상 1보다 크다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

H186

| 답 ③

[풀이1]

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=-x(x-2)e^{-x+2}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0,\ x=2$

합성함수의 도함수는

$\dfrac{dy}{dx}=f'(f(x))f'(x)$

$\dfrac{dy}{dx}=0 \Leftrightarrow f'(f(x))=0$ 또는 $f'(x)=0$

$\Leftrightarrow f(x)=0$ 또는 $f(x)=2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

$\Leftrightarrow x=\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ 0,\ 2$

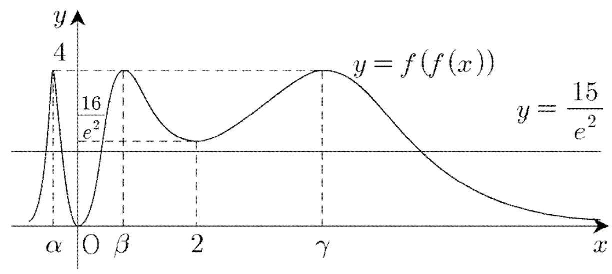
(이때, $\alpha<\beta<\gamma$이고,

$f(\alpha)=2,\ f(\beta)=2,\ f(\gamma)=2$)

함수 $f(f(x))$의 증가와 감소를 표로 정리하면 다음과 같다.

x	$\cdots$	α	$\cdots$	0	$\cdots$	β
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f'(f(x))$	$-$	0	$+$	0	$+$	0
$\dfrac{dy}{dx}$	$+$	0	$-$	0	$+$	0
y	↗	4	↘	0	↗	4
x	$\cdots$	2	$\cdots$	γ	$\cdots$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$f'(f(x))$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$\dfrac{dy}{dx}$	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	↘	$\dfrac{16}{e^2}$	↗	4	↘	

함수 $y=f(f(x))$의 그래프는 아래 그림과 같다.



곡선 $y=f(f(x))$와 직선 $y=\dfrac{15}{e^2}$의 교점의 개수는 4이다.

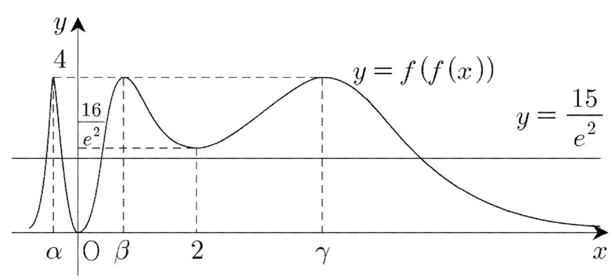
답 ③

[풀이2] 시험장 ★

도함수 없이 합성함수의 그래프의 개형을 그려보자.

x	$f(x)$	$f(f(x))$
$-\infty \Rightarrow 0$	$\infty \Rightarrow 0$	$(0) \Rightarrow 4 \Rightarrow 0$
$0 \Rightarrow 2$	$0 \Rightarrow 4$	$0 \Rightarrow 4 \Rightarrow f(4)$
$2 \Rightarrow \infty$	$4 \Rightarrow (0)$	$f(4) \Rightarrow 4 \Rightarrow (0)$

함수 $y=f(f(x))$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



곡선 $y=f(f(x))$와 직선 $y=\dfrac{15}{e^2}$의 교점의 개수는 4이다.

답 ③

H187 | 답 6

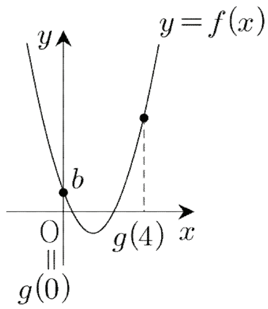
[풀이] ★

이차함수 $f(x)$의 대칭축은 $x=\frac{a}{2}(>0)$이므로 아래 그림과 같이 그려진다. (이 이차함수의 꼭짓점의 y좌표는 음수인데, 이는 문제풀이 과정에서 밝혀진다.)

이때, 조건 (가)에서

$h(0)=f(0)<f(g(4))=h(4)$

이므로 $f(g(4))>b=f(0)$

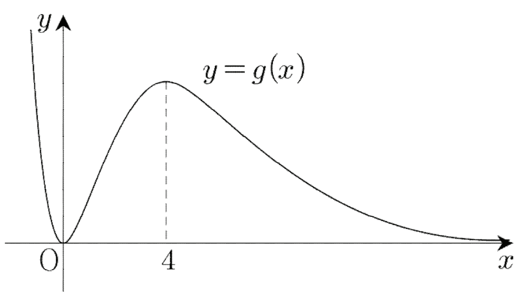


함수 $g(x)$의 도함수는

$$g'(x)=-\frac{1}{2}x(x-4)e^{-\frac{x}{2}}$$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ 또는 $x=4$

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖고, $x=4$에서 극댓값을 가지므로 함수 $g(x)$의 그래프는 아래 그림과 같다.



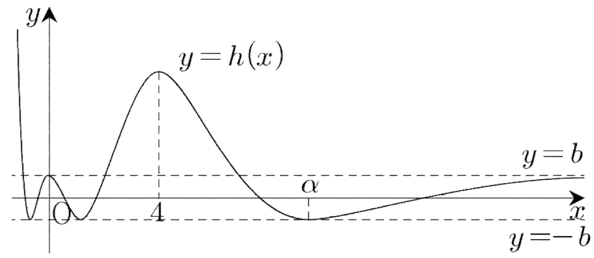
x의 값의 변화에 따른 함수 $h(x)$의 값의 변화를 관찰하면 다음과 같다.

x: $-\infty \Rightarrow 0 \Rightarrow 4 \Rightarrow \infty$

$g(x)$: $\infty \Rightarrow 0 \Rightarrow g(4) \Rightarrow (0)$

$h(x)=f(g(x))$: $\infty \Rightarrow f\left(\frac{a}{2}\right)$(극솟값) $\Rightarrow b$(극댓값) $\Rightarrow$ $f\left(\frac{a}{2}\right)$(극솟값) $\Rightarrow f(g(4))$(극댓값) $\Rightarrow f\left(\frac{a}{2}\right)$(극솟값) $\Rightarrow (b)$ (점근선)

함수 $h(x)$의 그래프는 아래 그림과 같다.



조건 (나)에서 주어진 방정식의 실근의 개수가 7이기 위해서는 $k=b$이어야 한다. (위의 그림)

극솟값: $f\left(\frac{a}{2}\right)=-b$, $\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{2}+b=-b$

정리하면 $a^2=8b$

그리고 $f(1)=1-a+b=-\frac{7}{32}$이므로

위의 두 등식을 연립하면

$a=\frac{3}{2}$, $b=\frac{9}{32}$

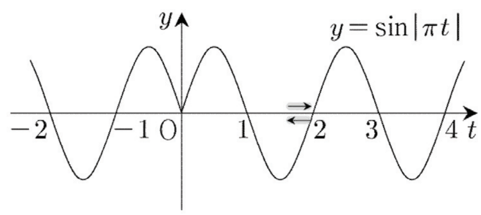
$\therefore\ a+16b=6$

답 6

H188 | 답 208

[풀이]

함수 $y=\sin|\pi t|$(단, $t=f(x)$)의 그래프는



위의 그림처럼

$t(=f(x))$가 $2-$, 2, $2-$의 값을 가질 때,

$g(x)$는 극댓값 0을 갖는다. (이때, $0- \Rightarrow 0 \Rightarrow 0-$)

이때, 함수 $f(x)$의 극댓값은 2이다.

한편

$g(x)=0 \Leftrightarrow \sin|\pi f(x)|=0$

$\Leftrightarrow f(x)=0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots$

그리고 조건 (가)에 의하여 함수 $f(x)$의 극값은 정수이다.

(가): 함수 $f(x)$는 $x=a_4$에서 극댓값을 갖고, $x=a_8$에서 극솟값을 갖는다.

이때, $f(a_4)-f(a_8)=4$이다.

$(f(a_4), f(a_8))=\cdots$, $\underbrace{(-1, -5)}_{㉠}$, $\underbrace{(2, -2)}_{㉡}$, $\underbrace{(4, 0)}_{㉢}$, $(6, 2)$, $\cdots$

㉠: 함수 $g(x)$는 $x=a_8$에서 극소이다. (×)

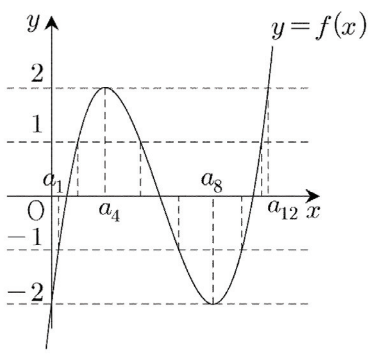
㉡: 함수 $g(x)$는 $x=a_4$, $x=a_8$에서 극대이다.

㉢: 함수 $g(x)$는 $x=a_8$에서 극소이다. (×)

따라서 $f(a_4)=2$(극대), $f(a_8)=-2$(극소)

(나): $f(a_8)=f(0)$에서 $m=8$

함수 $f(x)$의 그래프는



$f(x)+2=x(x-a_8)^2$

함수 $f(x)$는 $x=a_4=\dfrac{a_8}{3}$에서 극댓값 2를 가지므로

$f\left(\dfrac{a_8}{3}\right)=\dfrac{a_8}{3}\left(-\dfrac{2}{3}a_8\right)^2-2=2$, $a_8=3$

$f(x)=x(x-3)^2-2$에서 $f(m)=f(8)=198$

$f(a_k)\le 198$에서 $k\le 208$

따라서 k의 최댓값은 208이다.

답 208

H189 |답 ③

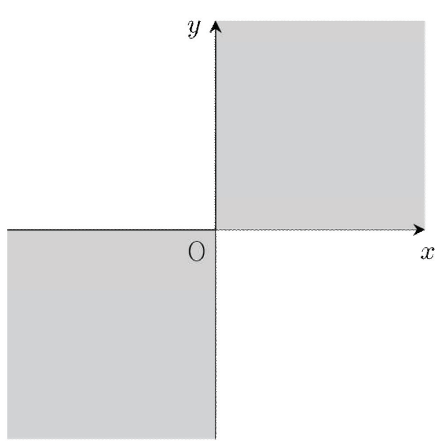
[풀이]

❶ 함수의 정의역, 치역 (그래프가 그려지는 영역표시)

함수 $f(x)$의 정의역은 실수 전체의 집합이다.

$x>0$일 때, $f(x)>0$, $x<0$일 때, $f(x)<0$이므로

함수 $f(x)$의 그래프는 아래의 그림에서 색칠된 영역을 지나야 한다.



사이값 정리에 의하여 함수 $f(x)$의 그래프는 원점을 반드시 지나야 한다.

❷ 대칭성과 주기

임의의 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

❸ 좌표축과의 교점

$f(0)=0$이므로 원점을 지난다.

❹ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소

❺ 곡선의 오목과 볼록, 변곡점

$f'(x)=\dfrac{(1+x)(1-x)}{(x^2+1)^2}$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$f''(x)=\dfrac{2x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$이므로

$f''(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$

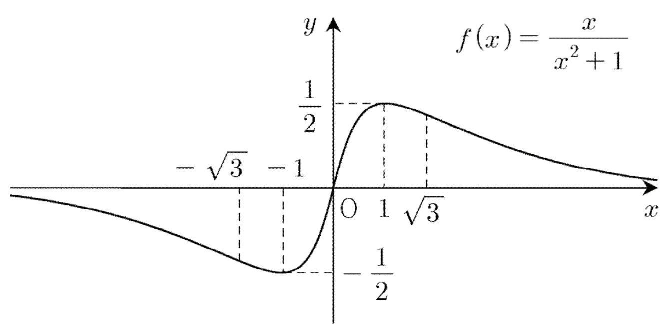
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	$-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ 변곡점	↘	$-\dfrac{1}{2}$ 극소	↗
0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
0 변곡점	↗	$\dfrac{1}{2}$ 극대	↘	$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ 변곡점	↘

❻ $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$, 점근선

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$이므로 x축이 점근선이다.

따라서 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



▸ ㄱ. (참)

함수 $f(x)$의 도함수가 $f'(x)=\dfrac{(1+x)(1-x)}{(x^2+1)^2}$이므로

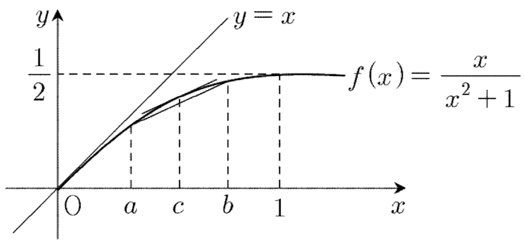
$f'(0)=1$

▸ ㄴ. (참)

함수 $f(x)$의 최솟값이 $-\dfrac{1}{2}$이므로

모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq -\dfrac{1}{2}$이다.

▸ ㄷ. (거짓)



닫힌구간 $[a,\ b]$에서 함수 $f(x)$가 연속이고
열린구간 $(a,\ b)$에서 함수 $f(x)$가 미분가능하므로
평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

인 c가 열린구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.
그런데 열린구간 $(0,\ 1)$에서 $f''(x)<0$이므로
이 구간에서 함수 $f'(x)$는 감소한다.
$f'(1) \leq f'(c) \leq f'(0)$ 즉, $0 \leq f'(c) \leq 1$

따라서 $0 \leq \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq 1$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

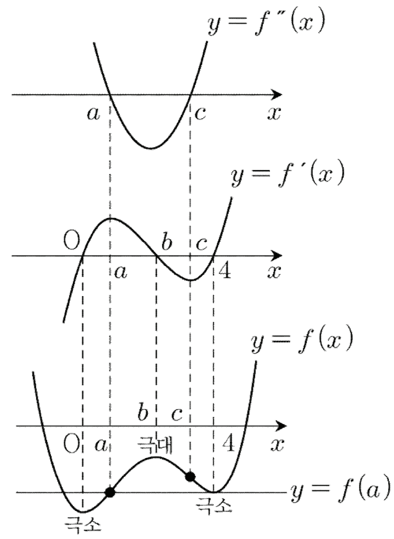
답 ③

H190 | 답 ⑤

[풀이] ★
삼차함수 $f'(x)$가 $x=c$에서 극솟값을 갖는다고 하면
$f''(c)=0$
$f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	변곡점	↗
b	$\cdots$	c	$\cdots$	4	$\cdots$
0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
극대	↘	변곡점	↘	극소	↗

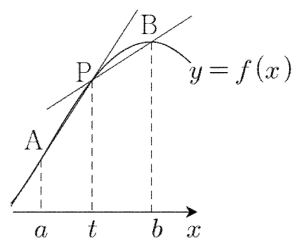
세 함수 $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$의 그래프는 아래 그림과 같다.



(단, •는 변곡점이다.)

▸ ㄱ. (참)
함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극솟값을 갖는다.

▸ ㄴ. (참)
구간 $(a,\ b)$에서 $f''(x)<0$이므로
구간 $(a,\ b)$에서 함수 $f(x)$는 위로 볼록이다.
세 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$, $(t,\ f(t))$
를 각각 A, B, P라고 하자.



위의 그림에서
(직선 AP의 기울기)>(직선 PB의 기울기)
이므로

$$\frac{f(t)-f(a)}{t-a}>\frac{f(t)-f(b)}{t-b}$$

▸ ㄷ. (참)
정적분의 정의(미적분의 기본 정리)에 의하여

$$\int_a^4 f'(x)dx=f(4)-f(a)=0$$

즉, $f(a)=f(4)$이므로 점 $(4,\ f(4))$는 직선 $y=f(a)$ 위에 있다.
위의 그림처럼 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f(a)$의 교점의 개수는 3이다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

H191 | 답 ⑤

[풀이]

$g(x) = -\ln x$이므로 두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$는 x축에 대하여 대칭이다.

▸ ㄱ. (참)

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \ln x = -\ln x$

$\Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

이므로 $\mathrm{P}(1,\ 0)$이다.

▸ ㄴ. (참)

$f'(x) = \dfrac{1}{x}$, $g'(x) = -\dfrac{1}{x}$

(곡선 $y = f(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기)

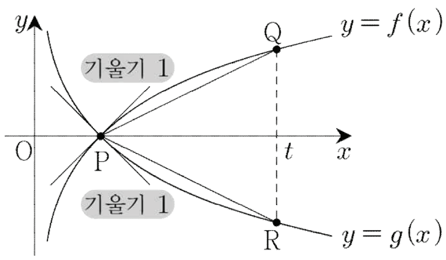
×(곡선 $y = g(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기)

$= 1 \times (-1) = -1$

이므로 주어진 명제는 참이다.

▸ ㄷ. (참)

두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 위의 점 중에서 x좌표가 t인 점을 각각 Q, R이라고 하자.



위의 그림에서 $t > 1$일 때,

$0 < \dfrac{f(t)}{t-1} =$(직선 PQ의 기울기)< 1,

$-1 < \dfrac{g(t)}{t-1} =$(직선 PR의 기울기)< 0

이므로

$-1 < \dfrac{f(t)}{t-1} \times \dfrac{g(t)}{t-1} < 0$

$\therefore\ -1 < \dfrac{f(t)g(t)}{(t-1)^2} < 0$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

H192 | 답 ④

[풀이]

삼각함수의 정의에 의하여 점 P의 좌표는

$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$

직각삼각형 POQ에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{OQ}} = \overline{\mathrm{OP}}\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$

삼각함수의 정의에 의하여 점 Q의 좌표는

$\mathrm{Q}\left(\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)\cos\dfrac{\pi}{4},\ \cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

내분점의 공식에 의하여

(점 M의 y좌표)

$= \dfrac{\sin\theta + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)}{2}$

$= \dfrac{\sin\theta + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\right)}{2}$

$= \dfrac{3}{4}\sin\theta + \dfrac{1}{4}\cos\theta (= f(\theta))$

함수 $f(\theta)$의 도함수는

$f'(\theta) = \dfrac{3}{4}\cos\theta - \dfrac{1}{4}\sin\theta$

$= \dfrac{1}{4}\cos\theta(3 - \tan\theta)$

방정식 $f'(\theta) = 0$을 풀면

$\tan\theta = 3$

$\tan\theta_0 = 3\left(\dfrac{\pi}{4} < \theta_0 < \dfrac{\pi}{2}\right)$인 θ_0에 대하여 $\theta = \theta_0$의 좌우에서 $f'(\theta)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $f(\theta)$는 $\theta = \theta_0$일 때 극댓값(최댓값)을 갖는다.

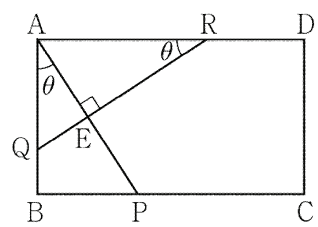
$\therefore\ \tan\theta = 3$

답 ④

H193 | 답 27

[풀이]

$\angle \mathrm{PAB} = \theta$로 두고, 두 선분 AP, QR의 교점을 E라고 하자.



$\angle \mathrm{RAE} = \dfrac{\pi}{2} - \theta$이고, 삼각형 ERA의 세 내각의 합은 π이므로

$\angle \mathrm{ERA} = \theta$

직각삼각형 ABP에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{AP}} = \dfrac{2}{\cos\theta}$, $\overline{\mathrm{AE}} = \dfrac{1}{\cos\theta}$

직각삼각형 AQE에서 삼각비의 정의에 의하여

$$= \int_1^2 \{e^t \times m(t)\}dt + \int_2^4 \{e^t \times m(t)\}dt$$

$$+ \int_4^5 \{e^t \times m(t)\}dt$$

$$= \int_1^2 0dt + \int_2^4 at^2(2-t)dt$$

$$+ \int_4^5 \left(-\frac{32a}{e^4}e^t\right)dt$$

$$= \left[\frac{2a}{3}t^3 - \frac{a}{4}t^4\right]_2^4 + \left[-\frac{32a}{e^4}e^t\right]_4^5$$

$= \dfrac{28a}{3} - 32ae = \dfrac{7}{3} - 8e$에서 $a = \dfrac{1}{4}$

함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2e^x(x+2)$$

$$f(k+1) = f(3) = \frac{45}{4}e^3$$

$p = 4$, $q = 45$

$\therefore$ $p+q = 49$

답 49

I010 | 답 ③

[풀이]

함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x) = \begin{cases} 2\cos x & \left(0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2} \le x \le 2\pi\right) \\ 0 & \left(\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$$

정적분의 치환적분법을 적용하자.

$2x - \dfrac{\pi}{6} = t$도 두면 $2dx = dt$,

$x = \dfrac{\pi}{6}$일 때 $t = \dfrac{\pi}{6}$, $x = \pi$일 때 $t = \dfrac{11\pi}{6}$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} f\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} f(t)dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt + \frac{1}{2}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{11\pi}{6}} f(t)dt$$

$$= \frac{1}{2}[2\sin t]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}[2\sin t]_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{11\pi}{6}}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

답 ③

I011 | 답 ③

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

정적분의 치환적분법에 의하여

$$a_1 + a_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x(1+\tan^2 x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x dx$$

$$(\because\ 1 + \tan^2 x = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x)$$

$$= \int_0^1 tdt$$

($\because$ $t = \tan x$로 두면 $dt = \sec^2 x dx$,

$x = 0$일 때 $t = 0$이고, $x = \dfrac{\pi}{4}$일 때 $t = 1$이다.)

$$= \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

▸ ㄴ. (참)

정적분의 치환적분법에 의하여

$$a_2 + a_4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 x dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x(1+\tan^2 x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \sec^2 x dx$$

$$(\because\ 1 + \tan^2 x = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x)$$

$$= \int_0^1 t^2 dt$$

($\because$ $t = \tan x$로 두면 $dt = \sec^2 x dx$,

$x = 0$일 때 $t = 0$이고, $x = \dfrac{\pi}{4}$일 때 $t = 1$이다.)

$$= \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

이므로

$$\therefore\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

▸ ㄷ. (거짓)

마찬가지의 방법으로

$a_5 + a_7 = \dfrac{1}{6}$, $a_6 + a_8 = \dfrac{1}{7}$,

$a_9+a_{11}=\frac{1}{10}$, $a_{10}+a_{12}=\frac{1}{11}$,

$\vdots$

$a_{97}+a_{99}=\frac{1}{98}$, $a_{98}+a_{100}=\frac{1}{99}$

$\therefore \sum_{k=1}^{100} a_k=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{98}+\frac{1}{99}$

$\neq \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{51}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

I012 | 답 ④

[풀이]

〈과정〉

등비수열의 합의 공식에 의하여

$1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^{n-1}x^{2n-2}$

$=\frac{1-(-x^2)^n}{1-(-x^2)}=\frac{1-(-1)^n x^{2n}}{1+x^2}$

$=\boxed{\frac{1}{1+x^2}}-(-1)^n\frac{x^{2n}}{1+x^2}$이므로

$S_n=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}$

$=\left[x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}\right]_0^1$

$=\int_0^1\{1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^{n-1}x^{2n-2}\}dx$

$=\int_0^1\boxed{\frac{1}{1+x^2}}dx-(-1)^n\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x^2}dx$

이다. 한편, $0\le\frac{x^{2n}}{1+x^2}\le x^{2n}$이므로

$0\le\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x^2}dx\le\int_0^1 x^{2n}dx=\boxed{\frac{1}{2n+1}}$

$\left(\because \int_0^1 x^{2n}dx=\left[\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\right]_0^1=\frac{1}{2n+1}\right)$

이다. 따라서 $\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x^2}dx=0$이므로

$\left(\because n\to\infty\text{일 때, } 0\to0,\ \frac{1}{2n+1}\to0\right)$

$\lim_{n\to\infty}S_n=\int_0^1\boxed{\frac{1}{1+x^2}}dx$이다.

$x=\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$dx=\sec^2\theta d\theta$이고,

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=1$일 때, $\theta=\frac{\pi}{4}$이므로

$\lim_{n\to\infty}S_n=\int_0^1\boxed{\frac{1}{1+x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta}{1+\tan^2\theta}d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}1d\theta\,(\because 1+\tan^2\theta=\sec^2\theta)$

$=\boxed{\frac{\pi}{4}}$

이다.

(가): $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$

(나): $g(n)=\frac{1}{2n+1}$

(다): $k=\frac{\pi}{4}$

$\therefore k\times f(2)\times g(2)=\frac{\pi}{4}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{\pi}{100}$

답 ④

I013 | 답 12

[풀이]

$f(x)=t$로 두면 $f'(x)dx=dt$이고,

$x=1$일 때 $t=f(1)=2$,

$x=5$일 때 $t=f(5)=5$

($\because$ 역함수의 성질에 의하여

$g(2)=1 \Leftrightarrow f(1)=2$, $g(5)=5 \Leftrightarrow f(5)=5$)

역함수의 성질에 의하여

$g(f(x))=x$

양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(f(x))f'(x)=1$, 즉

$\frac{dx}{g'(f(x))}=f'(x)dx=dt$

정적분의 치환적분법에 의하여

$\therefore \int_1^5\frac{40}{g'(f(x))\{f(x)\}^2}dx$

$=\int_2^5\frac{40}{t^2}dt=\left[-\frac{40}{t}\right]_2^5=-8+20=12$

답 12

I014 | 답 ①

[풀이]

역함수의 성질에 의하여

$f(g(x))=x$, $g(f(x))=x$

$f(1)=3,\ g(3)=1,$

$g(1)=3,\ g(3)=1$

역함수의 미분법에 의하여

$f'(g(x))g'(x)=1,\ g'(f(x))f'(x)=1$

이므로

$\dfrac{1}{f'(g(x))}=g'(x),\ \dfrac{1}{g'(f(x))}=f'(x)$

정적분의 정의(미적분의 기본 정리)에 의하여

$$\int_1^3\left\{\frac{f(x)}{f'(g(x))}+\frac{g(x)}{g'(f(x))}\right\}dx$$

$$=\int_1^3\{f(x)g'(x)+f'(x)g(x)\}dx$$

$$=[f(x)g(x)]_1^3$$

$$=f(3)g(3)-f(1)g(1)$$

$$=1\times1-3\times3=-8$$

답 ①

I015 | 답 19

[풀이]

조건 (나)에서

$g(0)=2,\ g(1)=2+3=5$

함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x)=|f(x)\sin x|$

$$=\begin{cases} f(x)\sin x & (-1\le x\le 0)\\ -f(x)\sin x & (0<x\le 1)\end{cases}$$

그리고 $g(-1)=0$이다.

$$\int_{-1}^1 f(-x)g(-x)\sin x dx$$

$$=-\int_{-1}^1 f(t)g(t)\sin t dt$$

($t=-x$로 두면 $dt=-dx$이고,

$x=-1$일 때 $t=1,\ x=1$일 때 $t=-1$)

$$=-\int_{-1}^0 g(t)g'(t)dt+\int_0^1 g(t)g'(t)dt$$

$$=-\left[\frac{1}{2}\{g(t)\}^2\right]_{-1}^0+\left[\frac{1}{2}\{g(t)\}^2\right]_0^1$$

$$=\frac{-2(g(0))^2+(g(-1))^2+(g(1))^2}{2}$$

$$=\frac{-2\times2^2+0^2+5^2}{2}$$

($\because g(-1)=0,\ g(0)=2,\ g(1)=2+3=5$)

$$=\frac{17}{2}$$

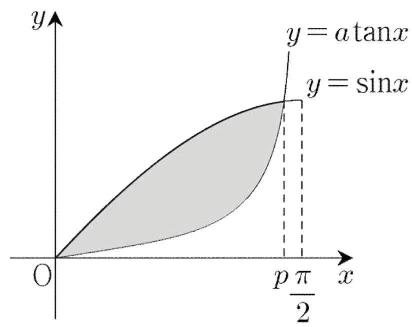
$\therefore\ p+q=19$

답 19

I016 | 답 ②

[풀이]

두 곡선 $y=a\tan x,\ y=\sin x$의 교점의 x좌표를 p라고 하자. (이때, p는 a에 대한 함수이므로 사실상 $p(a)$이다.)



교점의 y좌표: $a\tan p=\sin p$에서 $a=\cos p$

$$f(a)=\int_0^p(\sin x-a\tan x)dx$$

$$=[-\cos x+a\ln(\cos x)]_0^p$$

$$=-\cos p+a\ln(\cos p)+1$$

$$=-a+a\ln a+1$$

$f'(a)=-1+\ln a+1=\ln a$

$\therefore\ f'\left(\dfrac{1}{e^2}\right)=-2$

답 ②

I017 | 답 325

[풀이]

적분과 미분의 관계에 의하여

$f'(x)=\dfrac{n-\ln x}{x}$

방정식 $f'(x)=0$을 풀면

$x=e^n$

$x=e^n$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=e^n$에서 극댓값(최댓값)을 갖는다.

정적분의 성질에 의하여

$$g(n)=f(e^n)=\int_1^{e^n}\frac{n-\ln t}{t}dt$$

$$=\int_0^n s ds$$

($\because$ 정적분의 치환적분법

$n-\ln t=s$로 두면 $-\dfrac{1}{t}dt=ds,$

$t=1$일 때 $s=n$, $t=e^n$일 때 $s=0$)

$=\left[\frac{1}{2}s^2\right]_0^n$

$=\frac{n^2}{2}$

연속되는 자연수의 거듭제곱의 합의 공식에 의하여

$\therefore \sum_{n=1}^{12} g(n)=\sum_{n=1}^{12}\frac{n^2}{2}=\frac{12\times13\times25}{2\times6}=325$

답 325

I018 | 답 ⑤

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

$0\le t<3$일 때, 점 P의 좌표는 $(t+1,\ 1)$이고,

$3\le t\le 7$일 때, 점 P의 좌표는 $(4,\ t-2)$이다.

▸ ㄴ. (참)

$0\le t<3$일 때, 점 P의 좌표는 $(t+1,\ 1)$이므로

$1=k(t+1)^2$ 즉, $k=\frac{1}{(t+1)^2}$

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=2kx$

$g(t)=f'(t+1)=2k(t+1)$

$=\frac{2}{t+1}$ (단, $0\le t<3$)

$3\le t\le 7$일 때, 점 P의 좌표는 $(4,\ t-2)$이므로

$t-2=16k$ 즉, $k=\frac{t-2}{16}$

$g(t)=f'(4)=8k=\frac{t-2}{2}$ (단, $3\le t\le 7$)

함수 $g(t)$의 방정식은

$$g(t)=\begin{cases}\frac{2}{t+1} & (0\le t<3)\\ \frac{t-2}{2} & (3\le t\le 7)\end{cases}$$

▸ ㄷ. (참)

$\int_0^7 g(t)dt$

$=\int_0^3 g(t)dt+\int_3^7 g(t)dt$

$=\int_0^3\frac{2}{t+1}dt+\int_3^7\left(\frac{t}{2}-1\right)dt$

$=[2\ln(t+1)]_0^3+\left[\frac{1}{4}t^2-t\right]_3^7$

($\because$ 정적분의 치환적분법)

$=6+4\ln2$

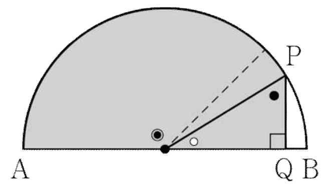
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

I019 | 답 80

[풀이]

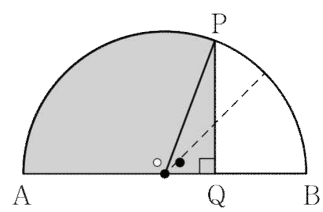
• (1) $\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$인 경우



(단, ●$=\theta$, ○$=\frac{\pi}{2}-\theta$, ◉$=\frac{\pi}{2}+\theta$)

삼각형과 부채꼴의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$S(1+\sin\theta)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$



(단, ●$=\theta$, ○$=\pi-\theta$)

삼각형과 부채꼴의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$S(1+\cos\theta)=\frac{1}{2}(\pi-\theta)+\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$

$S(1+\sin\theta)-S(1+\cos\theta)$

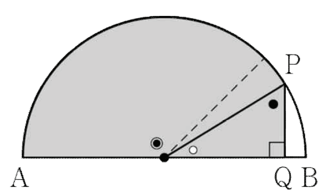
$=\theta-\frac{\pi}{4}$

정적분의 정의(미적분의 기본 정리)에 의하여

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\{S(1+\sin\theta)-S(1+\cos\theta)\}d\theta$

$=\left[\frac{1}{2}\theta^2-\frac{\pi}{4}\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{32}$

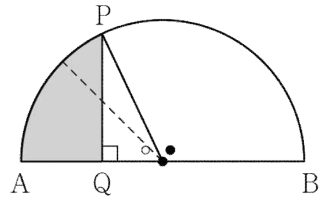
• (2) $\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{3\pi}{4}$인 경우



(단, ●$=\pi-\theta$, ○$=-\frac{\pi}{2}+\theta$, ◉$=\frac{3\pi}{2}-\theta$)

삼각형과 부채꼴의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$S(1+\sin\theta)=\frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)-\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$



(단, $\bullet=\theta$, $\circ=\pi-\theta$)

삼각형과 부채꼴의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$S(1+\cos\theta)=\frac{1}{2}(\pi-\theta)+\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$

$S(1+\sin\theta)-S(1+\cos\theta)$

$=\frac{\pi}{4}-\sin\theta\cos\theta$

정적분의 정의(미적분의 기본 정리)와 정적분의 치환적분법에 의하여

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi}\{S(1+\sin\theta)-S(1+\cos\theta)\}d\theta$$

$$=\left[\frac{\pi}{4}\theta-\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}=\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{4}$$

(1), (2)에서

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\{S(1+\sin\theta)-S(1+\cos\theta)\}d\theta$$

$$=\frac{3\pi^2}{32}+\frac{1}{4}$$

$p=\frac{1}{4}$, $q=\frac{3}{32}$

$\therefore\ \frac{30p}{q}=80$

답 80

I020

| 답 48

[풀이]

함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x)=af'(x)e^{af(x)}+bf'(x)$

$=\frac{a\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x\,e^{a\sin\frac{\pi}{2}x}+\frac{b\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x$

$=\frac{a\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x\left\{e^{a\sin\frac{\pi}{2}x}-\left(-\frac{b}{a}\right)\right\}$

$g'(x)=0$

$\Leftrightarrow$

$\cos\frac{\pi}{2}x=0$ 또는 $\sin\frac{\pi}{2}x=\frac{1}{a}\ln\left(-\frac{b}{a}\right)$

그런데 조건 (가), (나)에 의하여

(전자): $x=1,\ 3,\ 5,\ \cdots$ (즉, $\alpha_1,\ \alpha_3,\ \alpha_5,\ \cdots$)

(후자): $x=\alpha_2,\ \alpha_4,\ \alpha_6,\ \cdots$

이때, n이 짝수이면

$\sin\frac{\pi}{2}\alpha_n=\frac{1}{a}\ln\left(-\frac{b}{a}\right)$

이므로

$g(\alpha_n)=e^{a\sin\frac{\pi}{2}\alpha_n}+b\sin\frac{\pi}{2}\alpha_n$

$=e^{\ln\left(-\frac{b}{a}\right)}+\frac{b}{a}\ln\left(-\frac{b}{a}\right)$

$=-\frac{b}{a}+\frac{b}{a}\ln\left(-\frac{b}{a}\right)=0$, 즉

$\ln\left(-\frac{b}{a}\right)=1,\ -\frac{b}{a}=e,\ b=-ea$ $\cdots$ ㉠

㉠에 의하여

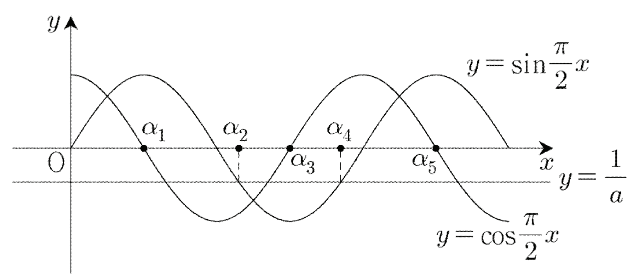
$g'(x)=\frac{a\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x\left(e^{a\sin\frac{\pi}{2}x}-e\right)$

이므로

$g'(x)=0$

$\Leftrightarrow$

$\cos\frac{\pi}{2}x=0$ 또는 $\sin\frac{\pi}{2}x=\frac{1}{a}$



문제에서 주어진 조건에 의하여

$\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3<\ \cdots$

이므로 위의 그림처럼 $-1<\frac{1}{a}<0$

(즉, $a<-1$, $b>0$)이어야 한다.

$x=\alpha_1$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $g(x)$는 $x=\alpha_1$에서 극댓값을 갖는다. (마찬가지의 방법으로 $x=\alpha_3,\ \alpha_5,\ \cdots$에서 함수 $g(x)$는 극댓값을 갖는다.)

$x=\alpha_2$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 함수 $g(x)$는 $x=\alpha_2$에서 극솟값을 갖는다. (마찬가지의 방법으로 $x=\alpha_4,\ \alpha_6,\ \cdots$에서 함수 $g(x)$는 극솟값을 갖는다.)

$g(\alpha_1)=g(1)=e^a+b$,

$g(\alpha_3)=g(3)=e^{-a}-b$

이므로

$g(\alpha_1)+g(\alpha_3)=e^a+e^{-a}=e^3+e^{-3}$

즉, $a=-3$ $\cdots$㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $b=3e$

$g(x)=e^{-3\sin\frac{\pi}{2}x}+3e\sin\frac{\pi}{2}x$

그리고 수열 α_1, α_2, $\cdots$, α_m을 쓰면

1, α_2, 3, α_4, 5, α_6, 7, $\cdots$, α_{10}, 11, α_{12}

이므로 $m=12$

정적분의 치환적분법에 의하여

$m\pi\int_{\alpha_3}^{\alpha_4}g(x)\cos\frac{\pi}{2}xdx$

$=12\pi\int_{3}^{\alpha_4}\left(e^{-3\sin\frac{\pi}{2}x}+3e\sin\frac{\pi}{2}x\right)\cos\frac{\pi}{2}xdx$

$=24\int_{-1}^{-\frac{1}{3}}(e^{-3t}+3e\,t)dt$

(이때, $\sin\frac{\pi}{2}x=t$로 치환함)

$=24\left[-\frac{1}{3}e^{-3t}+\frac{3e}{2}t^2\right]_{-1}^{-\frac{1}{3}}$

$=8e^3-40e$

$p=8$, $q=-40$이므로

$\therefore\ p-q=48$

답 48

I021 |답 25

[풀이]

주어진 조건에 의하여 함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=kx(x+2)+p=kx^2+2kx+p$

(단, $p\neq 0$)

조건 (가)에서

$x\geq -1 \Leftrightarrow g(x)\leq m(x+1)$

$x\leq -1 \Leftrightarrow g(x)\geq m(x+1)$

위의 두 조건에서

$g(-1)=0$, 즉 $b=a$

함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x)=ae^{f(x)}+a(x+1)f'(x)e^{f(x)}$

$=a\{1+2k(x+1)^2\}e^{kx^2+2kx+p}$

함수 $g(x)$의 이계도함수는

$g''(x)=2ak(x+1)\{3+2k(x+1)^2\}e^{kx^2+2kx+p}$

조건 (가)에서 $x=-1$을 기준으로 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=m(x+1)$의 위치 관계가 바뀌므로 점 $(-1,\ 0)$은 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이어야만 한다. (이때, $g''(-1)=0$임을 확인할 수 있다.)

그리고 곡선 $y=g(x)$ 위의 변곡점 $(-1,\ 0)$에서의 접선의 기울기는 -2이어야 한다.

$g'(-1)=-2$, 즉 $ae^{-k+p}=-2$ $\cdots$㉠

조건 (나)에서 주어진 등식에서

$\int_0^1 g(x)dx=\frac{e-e^4}{k}$, 즉

$\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1 a(x+1)e^{kx^2+2kx+p}dx$

$=\int_p^{3k+p}\frac{a}{2k}e^tdt$

($kx^2+2kx+p=t$로 두고 치환적분법을 적용하면

$2k(x+1)dx=dt$, $x=0$일 때 $t=p$이고,

$x=1$일 때 $t=3k+p$)

$=\frac{a}{2k}(e^{3k+p}-e^p)$

$=\frac{-2e^{k-p}}{2k}(e^{3k+p}-e^p)$ ($\because$ ㉠)

$=\frac{e-e^4}{k}$

정리하면

$-e^{4k}+e^k=e-e^4$

(사실 위의 등식에 $k=1$을 대입하면 등호가 성립하므로 $k=1$이 해임을 빠르게 알 수 있긴 하다.)

$e^{4k}-e^4-e^k+e=0$

$(e^k-e)\{(e^{2k}+e^2)(e^k+e)-1\}=0$

$(e^{2k}+e^2)(e^k+e)-1>0$이므로

$e^k-e=0$, 즉 $k=1$

조건 (나)에서 주어진 등식에서

$\int_0^1 g(x)dx=\int_{-2f(0)}^1 g(x)dx$

이므로

$\int_{-2f(0)}^0 g(x)dx=0$, 즉

$\int_{-2f(0)}^0 g(x)dx=\int_{-2f(0)}^0 a(x+1)e^{x^2+2x+p}dx$

$=\int_{4p^2-3p}^{p}\frac{a}{2}e^tdt$

$=\frac{a}{2}(e^p-e^{4p^2-3p})=0$

그런데 $a\neq 0$이므로 $e^p=e^{4p^2-3p}$,

$p=4p^2-3p$, $p=1(p\neq 0)$

$k=1$, $p=1$을 ㉠에 대입하면

$a=-2$, $b=-2$

$\therefore\ f(ab)=f(4)=25$

답 25

1022 | 답 ③

[풀이]

정적분의 치환적분법을 적용하자.

$x^2=t$로 두면 $2xdx=dt$이고,

$x=1$일 때 $t=1$, $x=n$일 때 $t=n^2$

$f(n)=\int_1^n xx^2e^{x^2}dx$

$=\int_1^{n^2}\frac{1}{2}te^t dt$

$=\frac{1}{2}[te^t-e^t]_1^{n^2}=\frac{1}{2}(n^2-1)e^{n^2}$

($\because$ 정적분의 부분적분법)

$\therefore\ \frac{f(5)}{f(3)}=\frac{12e^{25}}{4e^9}=3e^{16}$

답 ③

1023 | 답 ⑤

[풀이]

적분과 미분의 관계에 의하여

$f'(x)=e^{x^3}$

정적분의 정의(미적분의 기본 정리)에 의하여

$f(1)=\int_1^1 e^{t^3}dt=0$

정적분의 부분적분법에 의하여

$\therefore\ \int_0^1 xf(x)dx=\left[\frac{1}{2}x^2f(x)\right]_0^1-\int_0^1\frac{1}{2}x^2f'(x)dx$

$=\frac{1}{2}f(1)-0-\int_0^1\frac{1}{2}x^2e^{x^3}dx$

$=-\left[\frac{1}{6}e^{x^3}\right]_0^1$($\because$ 정적분의 치환적분법)

$=\frac{1-e}{6}$

답 ⑤

1024 | 답 ④

[풀이]

$\frac{x}{2}=t$로 두면 $x=2t$, $dx=2dt$이고,

$x=1$일 때 $t=\frac{1}{2}$, $x=2$일 때 $t=1$

$\int_1^2(x-1)f'\left(\frac{x}{2}\right)dx$

$=\int_{\frac{1}{2}}^1(4t-2)f'(t)dt$

$=[(4t-2)f(t)]_{\frac{1}{2}}^1-\int_{\frac{1}{2}}^1 4f(t)dt$

$=2f(1)-\int_{\frac{1}{2}}^1 4f(t)dt=2$

$\therefore\ \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx=\frac{2f(1)-2}{4}=\frac{3}{2}$

($\because f(1)=4$)

답 ④

1025 | 답 6

[풀이]

$t=x+1$로 두면 $dt=dx$이고,

$x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=2$

정적분의 치환적분법에 의하여

$\int_0^1(x-1)f'(x+1)dx$

$=\int_1^2(t-2)f'(t)dt$

$=[(t-2)f(t)]_1^2-\int_1^2 f(t)dt$

($\because$ 정적분의 부분적분법)

$=f(1)-\int_1^2 f(t)dt$

$=2-\int_1^2 f(t)dt$($\because$ 조건(가))

$=-4$

$\therefore\ \int_1^2 f(t)dt=6$

답 6

1026 | 답 ④

[풀이]

적분과 미분의 관계에 의하여

$F'(x)=f(x)$

문제에서 주어진 등식에서

$$F(-1)=\int_{-1}^{-1} f(t)dt=0,$$

$$F(1)=\int_{-1}^{1} f(t)dt=12$$

정적분의 성질에 의하여

$$\int_{0}^{1} xf(x)dx=-\int_{-1}^{0} xf(x)dx$$

$$\int_{0}^{1} xf(x)dx+\int_{-1}^{0} xf(x)dx=0$$

$$\int_{-1}^{1} xf(x)dx=0$$

정적분의 부분적분법에 의하여

$$\therefore \int_{-1}^{1} F(x)dx$$

$$=[xF(x)]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1} xf(x)dx$$

$$=F(1)+F(-1)-\int_{-1}^{1} xf(x)dx$$

$$=12+0-0=12$$

답 ④

I027 | 답 ④

[풀이]

적분과 미분의 관계에 의하여

$F'(x)=f(x)$

그리고

$$F(0)=\int_{0}^{0} f(t)dt=0$$

▸ ㄱ. (거짓)

조건 (나)에서

$$\int_{0}^{1} F(x)dx$$

$$=\int_{0}^{1} \{f(x)-x\}dx (\because \text{조건(가)})$$

$$=\left[F(x)-\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}$$

$$=F(1)-F(0)-\frac{1}{2}$$

$$=F(1)-\frac{1}{2}=e-\frac{5}{2}$$

$$\therefore F(1)=e-2$$

▸ ㄴ. (참)

정적분의 부분적분법에 의하여

$$\int_{0}^{1} xF(x)dx$$

$$=\int_{0}^{1} \{xf(x)-x^2\}dx (\because \text{조건(가)})$$

$$=[xF(x)]_{0}^{1}-\int_{0}^{1} F(x)dx-\frac{1}{3}$$

$$=(e-2)-\left(e-\frac{5}{2}\right)-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

▸ ㄷ. (참)

$$\int_{0}^{1} \{F(x)\}^2dx$$

$$=\int_{0}^{1} F(x)\{f(x)-x\}dx$$

$$=\int_{0}^{1} F(x)f(x)dx-\int_{0}^{1} xF(x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}\{F(x)\}^2\right]_{0}^{1}-\frac{1}{6}$$

$$=\frac{(e-2)^2}{2}-\frac{1}{6}$$

$$=\frac{1}{2}e^2-2e+\frac{11}{6}$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

I028 | 답 ①

[풀이]

조건 (가)에서 주어진 함수 $g(x)$의 도함수는 적분과 미분의 관계에 의하여

$$g'(x)=\frac{f(x^2+1)}{x} (\text{단, } x>0)$$

정리하면

$f(x^2+1)=xg'(x)$(단, $x>0$)

양변에 양수 x를 곱하면

$xf(x^2+1)=x^2g'(x)$

정적분의 치환적분법에 의하여

$$\int_{1}^{2} xf(x^2+1)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{2}^{5} f(t)dt=8 (\because \text{조건(나)})$$

($\leftarrow x^2+1=t$로 두면 $2xdx=dt$,

$x=1$일 때 $t=2$, $x=2$일 때 $t=5$)

이므로

$$\int_{1}^{2} x^2g'(x)dx=8$$

정적분의 부분적분법에 의하여

$$\int_1^2 2xg(x)dx=[x^2g(x)]_1^2-\int_1^2 x^2g'(x)dx$$

$$=4g(2)-g(1)-8=4$$

$$(\because g(1)=\int_1^1 \frac{f(t^2+1)}{t}dt=0)$$

정적분의 성질에 의하여

$$\therefore \int_1^2 xg(x)dx=2$$

답 ①

1029 | 답 12

[풀이]

(가): $x<1$일 때, $f(x)=-x^2+4x+C$

(단, C는 적분상수)

(나): $x\ge 0$일 때, $2x\times f'(x^2+1)=2ae^{2x}+b$

$x=0$을 대입하면 $0\times f'(1)=2a+b$, 즉

$b=-2a$

$x\times f'(x^2+1)=a(e^{2x}-1)$

양변을 0이 아닌 x로 나누면

$$f'(x^2+1)=a\times\frac{e^{2x}-1}{x}\ (\text{단, } x>0)$$

함수 $f'(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1-} f'(x)=\lim_{x\to 1+} f'(x)$, 즉

$2=\lim_{x\to 0+} f'(x^2+1)$,

$$\lim_{x\to 0+}\frac{e^{2x}-1}{2x}\times 2a=2a=2,$$

$a=1$, $b=-2$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1-} f(x)=f(1)$, 즉

$3+C=1$, $C=-2$

$$\therefore \int_0^5 f(x)dx$$

$$=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^5 f(x)dx$$

$$=\int_0^1(-x^2+4x-2)dx+\int_0^2 f(t^2+1)2tdt$$

(이때, $t^2+1=x$로 둔 것이다.)

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-2x\right]_0^1+\int_0^2 2t(e^{2t}-2t)dt$$

$$=-\frac{1}{3}+\left[te^{2t}-\frac{1}{2}e^{2t}-\frac{4}{3}t^3\right]_0^2$$

$$=-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}e^4-\frac{61}{6}$$

$$=\frac{3}{2}e^4-\frac{21}{2}$$

$$\therefore\ p+q=\frac{3+21}{2}=12$$

답 12

1030 | 답 ④

[풀이]

(가): $a=0$ 또는 $b=0$

(1) $a=0$인 경우

$f(x)=\sin x\cos x\times e^{b\cos x}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{b}\cos x\right)(-b\sin x\times e^{b\cos x})dx$$

$$=\left[-\frac{1}{b}\cos x\times e^{b\cos x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{b}\sin x\right)e^{b\cos x}dx$$

$$=\frac{1}{b}e^b+\left[\frac{1}{b^2}e^{b\cos x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{b}e^b+\frac{1-e^b}{b^2}$$

$$=\frac{1}{b^2}+\frac{b-1}{b^2}e^b$$

$$=\frac{1}{b^2}-2e^b$$

$\frac{b-1}{b^2}=-2$, $2b^2+b-1=0$,

$(2b-1)(b+1)=0$, $b=-1$ 또는 $b=\frac{1}{2}$

$\therefore\ (a,\ b)=(0,\ -1),\ \left(0,\ \frac{1}{2}\right)$

(2) $b=0$인 경우

$f(x)=\sin x\cos x\times e^{a\sin x}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x\times e^{a\sin x}dx$$

(이때, $\frac{\pi}{2}-x=t$로 두면 $-dx=dt$,

$x=0$일 때 $t=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=0$)

$$= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos t \sin t \times e^{a\cos t} dt$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t \times e^{a\cos t} dt$$

$$= \frac{1}{a^2} + \frac{a-1}{a^2} e^{a} \ (\because (1)\text{과 같다.})$$

$$= \frac{1}{a^2} - 2e^{a}$$

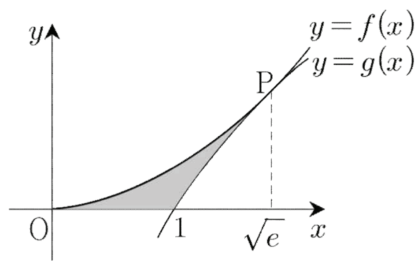
$\therefore \ (a, b) = (-1, 0), \left(\frac{1}{2}, 0\right)$

(1), (2)에서 $a-b$의 최솟값은 -1이다.

답 ④

1031 | 답 ②

[풀이]



점 P의 x좌표를 t로 두면

접점: $at^2 = \ln t$

기울기: $2at = \frac{1}{t}$, 즉 $t^2 = \frac{1}{2a}$

위의 두 등식을 연립하면

$\frac{1}{2} = \ln t$, $t = \sqrt{e}$, $a = \frac{1}{2e}$

점 P의 좌표는 $\left(\sqrt{e}, \frac{1}{2}\right)$이다.

구하는 넓이를 S라고 하자.

정적분의 부분적분법에 의하여

$$\therefore \ S = \int_{0}^{\sqrt{e}} \frac{1}{2e} x^2 dx - \int_{1}^{\sqrt{e}} \ln x dx$$

$$= \frac{1}{2e}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\sqrt{e}} - [x\ln x - x]_1^{\sqrt{e}}$$

$$= \frac{\sqrt{e}}{6} + \frac{\sqrt{e}}{2} - 1$$

$$= \frac{2\sqrt{e} - 3}{3}$$

답 ②

1032 | 답 7

[풀이]

문제에서 주어진 넓이 조건에 의하여

$$\int_{0}^{2} f(x)dx = 0 \ (\because -A+B=0)$$

정적분의 부분적분법에 의하여

$$\int_{0}^{2} (2x+3)f'(x)dx$$

$$= [(2x+3)f(x)]_0^2 - 2\int_{0}^{2} f(x)dx$$

$$= 7f(2) - 3f(0) - 2\times 0$$

$$= 7 - 0 - 0$$

$$= 7$$

답 7

1033 | 답 586

[풀이]

모든 실수 x에 대하여

$g(-x) = g(x)$

이므로 함수 $g(x)$는 y축에 대하여 대칭이다.

함수 $g(x)$의 도함수는

$$g'(x) = f'(x) \times \frac{10 - f(x)}{10f(x)}$$

$$= \frac{2ax(10 - ax^2 - b)}{10(ax^2 + b)}$$

이때, 분모는 항상 양수이다.

$g'(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ 2ax(10 - b - ax^2) = 0$

$b = 10$이면 $x = 0$

이때, 함수 $g(x)$는 $x = 0$에서 극댓값을 갖는다.(×)

$b < 10$이면 $x = 0$, $x = \pm\sqrt{\frac{10-b}{a}}$

이때, 함수 $g(x)$는 $x = 0$에서 극솟값을 갖는다.(○)

$b > 10$이면 $x = 0$

이때, 함수 $g(x)$는 $x = 0$에서 극댓값을 갖는다.(×)

이상에서 조건 (가)에 의하여 $1 \le b < 10$이다.

$$g(0) = \ln b - \frac{b-1}{10} \ge 0$$

(단, 등호는 $b = 1$일 때 성립한다.)

• (1) $b = 1$인 경우

함수 $|g(x)|$의 그래프는