01 수학 I

정답

01	86	11	15	21	16
02	24	12	3	22	40
03	729	13	5	23	324
04	243	14	10	24	13
05	28	15	8	25	4
06	13	16	69	26	4
07	39	17	8	27	98
08	5	18	12	28	7
09	25	19	22	29	6
10	2	20	296	30	23

01

a는 125의 세제곱근 중에서 실수이므로

$$a = \sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$$

또 실수 b의 네제곱근 중에서 음수인 것이 -3이므로 방정식 $x^4 = b$의 근 중에서 음수인 것이 -3이다.

즉, $b = (-3)^4 = 3^4 = 81$

따라서 $a + b = 5 + 81 = 86$

02

$(\sqrt[4]{3^7})^{\frac{n}{6}} = \{(3^7)^{\frac{1}{4}}\}^{\frac{n}{6}} = 3^{\frac{7}{4} \times \frac{n}{6}} = 3^{\frac{7n}{24}}$

n이 자연수이므로 $(\sqrt[4]{3^7})^{\frac{n}{6}}$, 즉 $3^{\frac{7n}{24}}$의 값이 자연수이려면 $\frac{7n}{24}$은 자연수이어야 한다.

즉, n은 24의 배수이다.

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 24이다.

03

이차방정식 $x^2 + \left(\log_a \frac{a^4}{9}\right)x + 2 = 0$의 두 근이 $\log_3 a$, $\log_a b$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_3 a + \log_a b = -\log_a \frac{a^4}{9} \quad \cdots \text{㉠}$$

$$\log_3 a \times \log_a b = 2 \quad \cdots \text{㉡}$$

㉡에서

$$\frac{\log a}{\log 3} \times \frac{\log b}{\log a} = 2$$

$$\log b = 2\log 3 = \log 9$$

$$b = 9$$

$b = 9$를 ㉠에 대입하면

$$\log_3 a + \log_a 9 = -\log_a \frac{a^4}{9}$$

$$\log_3 a + 2\log_a 3 = -4 + 2\log_a 3$$

$$\log_3 a = -4$$

$$a = 3^{-4} = \frac{1}{81}$$

따라서 $\frac{b}{a} = 9 \times 81 = 729$

04

원 $(x-\log_3 a)^2+(y-\log_3 b)^2=2$와 직선 $x+y-2=0$이 접하므로 원의 중심 $(\log_3 a,\ \log_3 b)$와 직선 $x+y-2=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이와 같다.

즉, $\dfrac{|\log_3 a+\log_3 b-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$에서

$|\log_3 a+\log_3 b-2|=2$

$\log_3 a+\log_3 b-2=2$ 또는 $\log_3 a+\log_3 b-2=-2$

$\log_3 ab=4$ 또는 $\log_3 ab=0$

$ab=81$ 또는 $ab=1$

이때 $a>1,\ b>1$이므로 $ab>1$이다.

즉, $ab=81\ \cdots$ ㉠

또 $4\log_a 7=\log_b 7$에서

$\dfrac{4}{\log_7 a}=\dfrac{1}{\log_7 b}$

$\dfrac{\log_7 a}{\log_7 b}=4$

$\log_b a=4$

$a=b^4\ \cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$b^4\times b=81$

$b^5=3^4$

$b>1$이므로 $b=3^{\frac{4}{5}}$

$b=3^{\frac{4}{5}}$을 ㉡에 대입하면

$a=(3^{\frac{4}{5}})^4=3^{\frac{16}{5}}$

따라서

$$\begin{aligned}\sqrt[5]{3}\times\sqrt[4]{a^5}\times b&=\sqrt[5]{3}\times a^{\frac{5}{4}}\times b\\&=3^{\frac{1}{5}}\times(3^{\frac{16}{5}})^{\frac{5}{4}}\times 3^{\frac{4}{5}}\\&=3^5\\&=243\end{aligned}$$

05

함수 $y=3^{x+a}+b$의 그래프가 점 $\mathrm{A}(2,\ 0)$을 지나므로

$3^{2+a}+b=0\ \cdots$ ㉠

함수 $y=3^{x+a}+b$의 그래프는 함수 $y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-a$만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이므로 함수 $y=3^{x+a}+b$의 그래프의 점근선은 직선 $y=b$이다.

점 A와 함수 $y=3^{x+a}+b$의 그래프의 점근선 사이의 거리가 27이고 ㉠에서

$b=-3^{2+a}<0$이므로

$b=-27$

$b=-27$을 ㉠에 대입하면

$3^{2+a}-27=0$

$3^{2+a}=3^3$

$2+a=3$

$a=1$

따라서 $a-b=1-(-27)=28$

06

이차부등식 $x^2-(2\log_2 a)x+5\log_2 a-4>0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 이차방정식 $x^2-(2\log_2 a)x+5\log_2 a-4=0$의 판별식을 D라 할 때, $D<0$이어야 한다.

$\dfrac{D}{4}=(\log_2 a)^2-(5\log_2 a-4)<0$에서

$(\log_2 a)^2-5\log_2 a+4<0$

$(\log_2 a-1)(\log_2 a-4)<0$

$1<\log_2 a<4$

$2<a<16$

따라서 자연수 a는 $3,\ 4,\ 5,\ \cdots,\ 15$이고, 그 개수는 13이다.

07

함수 $f(x)=\log_3(x-2)+1$의 그래프의 점근선은 직선 $x=2$이다.

$$g(2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}+3=5$$

점 A의 좌표는 $(2,\ 5)$이고 점 B의 좌표는 $(0,\ 5)$이다.

함수 $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}+3$의 그래프의 점근선은 직선 $y=3$이다.

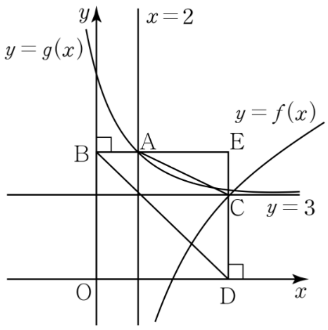
$\log_3(x-2)+1=3$에서

$$\log_3(x-2)=2$$

$$x-2=9,\ x=11$$

점 C의 좌표는 $(11,\ 3)$이고 점 D의 좌표는 $(11,\ 0)$이다.

직선 AB와 직선 CD가 만나는 점을 E라 하면 점 E의 좌표는 $(11,\ 5)$이다.



그러므로

(사각형 ABDC의 넓이)

$=$ (삼각형 EBD의 넓이) $-$ (삼각형 EAC의 넓이)

$$=\frac{1}{2}\times\overline{EB}\times\overline{ED}-\frac{1}{2}\times\overline{EA}\times\overline{EC}$$

$$=\frac{1}{2}\times 11\times 5-\frac{1}{2}\times 9\times 2$$

$$=\frac{37}{2}$$

따라서 $p=2,\ q=37$이므로

$$p+q=39$$

08

두 함수 $y=f(x),\ y=g(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고 점 A가 직선 $y=2x$ 위의 점이므로 점 A의 좌표를 $(k,\ 2k)$ $(k>0)$이라 하면 점 B의 좌표는 $(-k,\ -2k)$이다.

한편, 두 함수 $y=f(x),\ y=h(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고 두 직선 $y=2x,\ y=\frac{1}{2}x$도 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점 C의 좌표는 $(2k,\ k)$이다.

$\overline{BC}=6\sqrt{2}$, 즉 $\overline{BC}^2=72$이므로

$$\{2k-(-k)\}^2+\{k-(-2k)\}^2=72$$

$$18k^2=72$$

$$k^2=4$$

$k>0$이므로 $k=2$

함수 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}+a$의 그래프가 점 $A(2,\ 4)$를 지나므로

$$4=\left(\frac{1}{3}\right)^{2-2}+a$$

$$4=1+a$$

$$a=3$$

한편, 함수 $h(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로

$y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}+3$에서

$$y-3=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$$

$$x-2=\log_{\frac{1}{3}}(y-3)$$

$$x=\log_{\frac{1}{3}}(y-3)+2$$

x와 y를 서로 바꾸면

$$y=\log_{\frac{1}{3}}(x-3)+2$$

즉, $h(x)=\log_{\frac{1}{3}}(x-3)+2$

$$3f(a)=3f(3)=3\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{3-2}+3\right\}=10$$

$$g\left(-\frac{a}{3}\right)=g(-1)=-3^{-1+2}-3=-6$$

$$h(2a)=h(6)=\log_{\frac{1}{3}}(6-3)+2=-1+2=1$$

따라서 $3f(a)+g\left(-\frac{a}{3}\right)+h(2a)=10-6+1=5$

09

부등식 $2^{f(x)g(x)} > 8^{g(x)}$에서

$$2^{f(x)g(x)} > 2^{3g(x)}$$

밑 2가 $2 > 1$이므로

$$f(x)g(x) > 3g(x)$$

$$\{f(x)-3\}g(x) > 0$$

$$f(x) > 3,\ g(x) > 0 \text{ 또는 } f(x) < 3,\ g(x) < 0$$

(i) $f(x) > 3,\ g(x) > 0$일 때

$f(x) > 3$에서 $x > 2$ ⋯ ㉠

$g(x) > 0$에서 $x < 8$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $2 < x < 8$

(ii) $f(x) < 3,\ g(x) < 0$일 때

$f(x) < 3$에서 $x < 2$ ⋯ ㉢

$g(x) < 0$에서 $x > 8$ ⋯ ㉣

㉢, ㉣을 동시에 만족시키는 x의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $2 < x < 8$

따라서 정수 x는 3, 4, 5, 6, 7이고, 그 합은

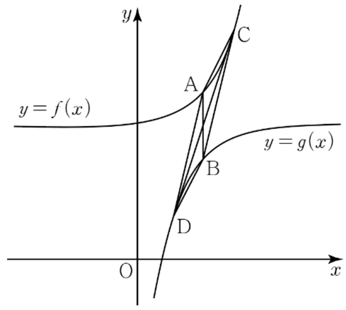
$$3+4+5+6+7=25$$

10

$\mathrm{P}(k,\ 2^{k-3}+5)$, $\mathrm{Q}(k,\ -2^{-k+3}+5)$이므로

$$\overline{\mathrm{PQ}} = 2^{k-3}+2^{-k+3} \geq 2\sqrt{2^{k-3}\times 2^{-k+3}} = 2$$

(단, 등호는 $2^{k-3}=2^{-k+3}$, 즉 $k=3$일 때 성립한다.)



이때 $\mathrm{A}(3,\ 6)$, $\mathrm{B}(3,\ 4)$이므로 선분 AB의 중점을 M이라 하면 $\mathrm{M}(3,\ 5)$이다.

두 상수 c, d에 대하여 $\mathrm{C}(c,\ 2^{c-3}+5)\ (c>3)$, $\mathrm{D}(d,\ -2^{-d+3}+5)$라 하면

조건 (가)에서

$\dfrac{c+d}{2}=3$, 즉 $c+d=6$ ⋯ ㉠

직선 CD의 기울기와 직선 CM의 기울기가 같으므로

조건 (나)에서

$$\frac{(2^{c-3}+5)-5}{c-3} = 2\times\frac{(2^{c-3}+5)-6}{c-3}$$

$$2^{c-3}=2(2^{c-3}-1)$$

$$2^{c-3}=2$$

$$c-3=1,\ c=4$$

$c=4$를 ㉠에 대입하면

$4+d=6$에서 $d=2$

이므로 $\mathrm{C}(4,\ 7)$, $\mathrm{D}(2,\ 3)$이다.

따라서

(사각형 ADBC의 넓이)

= (삼각형 ADB의 넓이)+(삼각형 ACB의 넓이)

$$=\frac{1}{2}\times2\times1+\frac{1}{2}\times2\times1$$

$$=2$$

11

$50° = 50 \times 1° = 50 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5}{18}\pi$

$\frac{3}{10}\pi = \frac{3}{10}\pi \times 1 = \frac{3}{10}\pi \times \frac{180°}{\pi} = 54°$

따라서 $a = \frac{5}{18}$, $b = 54$이므로

$$ab = \frac{5}{18} \times 54 = 15$$

12

$\cos\theta < 0$, $\tan\theta < 0$을 만족시키는 θ는 제2사분면의 각이므로 $\sin\theta > 0$이다.

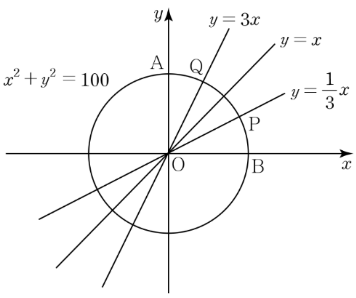
따라서

$$\begin{aligned}\sin\theta &= \sqrt{1-\cos^2\theta}\\ &= \sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2}\\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

따라서 $12\sin\theta = 12 \times \frac{1}{4} = 3$이다.

13

두 함수 $y = \frac{1}{3}x$, $y = 3x$는 서로 역함수 관계에 있으므로 두 함수 $y = \frac{1}{3}x$, $y = 3x$의 그래프는 직선 $y = x$에 대하여 대칭이다.



이때 점 $\mathrm{B}(10,\ 0)$에 대하여 호 AQ의 길이와 호 BP의 길이는 서로 같으므로

$$\begin{aligned}(\text{호 AP의 길이}) &= (\text{호 AB의 길이}) - (\text{호 BP의 길이})\\ &= 10 \times \frac{\pi}{2} - (\text{호 AQ의 길이})\\ &= 5\pi - (\text{호 AQ의 길이})\end{aligned}$$

따라서 $l_1 = 5\pi - l_2$에서 $l_1 + l_2 = 5\pi$이므로

$$\frac{l_1+l_2}{\pi} = \frac{5\pi}{\pi} = 5$$

14

조건 (가)에서 함수 $f(x) = \tan(ax+b)$의 주기가 $\frac{\pi}{4}$이므로 $\frac{\pi}{a} = \frac{\pi}{4}$에서

$$a = 4$$

함수 $y = \tan 4x$의 그래프의 점근선의 방정식은 $4x = n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n은 정수)에서

$$x = \frac{n}{4}\pi + \frac{\pi}{8}$$

함수 $f(x) = \tan(4x+b) = \tan 4\left(x + \frac{b}{4}\right)$의 그래프는 함수 $y = \tan 4x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{b}{4}\left(-\frac{\pi}{8} < -\frac{b}{4} < 0\right)$만큼 평행이동한 것이므로

함수 $f(x) = \tan(4x+b)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x = \frac{n}{4}\pi + \frac{\pi}{8} - \frac{b}{4}$$

조건 (나)에서 함수 $y = f(x)$의 그래프와 만나지 않는 직선 $x = k$는 함수 $y = f(x)$의 그래프의 점근선이고, 양의 실수 k의 최솟값이 $\frac{\pi}{24}$이므로

$\frac{\pi}{8} - \frac{b}{4} = \frac{\pi}{24}$에서 $b = \frac{\pi}{3}$

따라서 $f(x) = \tan\left(4x + \frac{\pi}{3}\right)$이므로

$$\begin{aligned}10\sqrt{3} \times f\left(-\frac{\pi}{24}\right) &= 10\sqrt{3} \times \tan\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right)\\ &= 10\sqrt{3} \times \tan\frac{\pi}{6} = 10\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 10\end{aligned}$$

15

함수 $f(x) = -a\cos bx - c$의 그래프에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 2, 최솟값이 -6이고, $a > 0$이므로

$$a - c = 2,\ -a - c = -6$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a = 4,\ c = 2$$

함수 $y = -4\cos bx - 2$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는 방정식 $-4\cos bx - 2 = 0$의 해와 같다.

$-4\cos bx - 2 = 0$에서

$$\cos bx = -\frac{1}{2}$$

이때 $0 < x < \frac{2\pi}{b}$에서 $0 < bx < 2\pi$이므로

$$bx = \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } bx = \frac{4}{3}\pi$$

$$x = \frac{2}{3b}\pi \text{ 또는 } x = \frac{4}{3b}\pi$$

즉, $\mathrm{A}\left(\frac{2}{3b}\pi,\ 0\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{4}{3b}\pi,\ 0\right)$ 이므로

$$\overline{\mathrm{AB}} = \frac{4}{3b}\pi - \frac{2}{3b}\pi = \frac{2}{3b}\pi$$

이고, 삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{\pi}{3}$이므로

$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3b}\pi \times 2 = \frac{\pi}{3}$에서

$$b = 2$$

따라서

$$a + b + c = 4 + 2 + 2 = 8$$

16

n보다 작은 자연수 k에 대하여 $k\theta + (n-k)\theta = n\theta = \frac{\pi}{2}$이므로

$$(n-k)\theta = \frac{\pi}{2} - k\theta$$

즉, $\cos^2(n-k)\theta = \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - k\theta\right) = \sin^2 k\theta$이고,

$$\cos^2 k\theta + \cos^2(n-k)\theta = \cos^2 k\theta + \sin^2 k\theta = 1 \cdots ㉠$$

(ⅰ) $n = 2m - 1$ (m은 자연수)일 때

㉠에서

$$\cos^2 k\theta + \cos^2(2m-k-1)\theta = 1$$

이므로

$$\begin{aligned}
&\cos^2\theta + \cos^2 2\theta + \cos^2 3\theta + \cdots + \cos^2 n\theta \\
&= \cos^2\theta + \cos^2 2\theta + \cos^2 3\theta + \cdots + \cos^2(2m-1)\theta \\
&= \{\cos^2\theta + \cos^2(2m-2)\theta\} \\
&\quad + \{\cos^2 2\theta + \cos^2(2m-3)\theta\} + \cdots \\
&\quad + \{\cos^2(m-1)\theta + \cos^2 m\theta\} + \cos^2(2m-1)\theta \\
&= 1 \times (m-1) + \cos^2\frac{\pi}{2} \\
&= 1 \times (m-1) + 0 \\
&= m - 1
\end{aligned}$$

따라서 $10 < m - 1 < 12$를 만족시키는 자연수 m은 12이므로

$$n = 2 \times 12 - 1 = 23$$

(ⅱ) $n = 2m$ (m은 자연수)일 때

㉠에서

$$\cos^2 k\theta + \cos^2(2m-k)\theta = 1$$

이므로

$$\begin{aligned}
&\cos^2\theta + \cos^2 2\theta + \cos^2 3\theta + \cdots + \cos^2 n\theta \\
&= \cos^2\theta + \cos^2 2\theta + \cos^2 3\theta + \cdots + \cos^2 2m\theta \\
&= \left\{\cos^2\theta + \cos^2(2m-1)\theta\right\} \\
&\quad + \left\{\cos^2 2\theta + \cos^2(2m-2)\theta\right\} + \cdots \\
&\quad + \left\{\cos^2(m-1)\theta + \cos^2(m+1)\theta\right\} \\
&\quad + \cos^2 m\theta + \cos^2 2m\theta \\
&= 1 \times (m-1) + \cos^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{\pi}{2} \\
&= 1 \times (m-1) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 0 \\
&= m - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

따라서 $10 < m - \frac{1}{2} < 12$에서 $10.5 < m < 12.5$를 만족시키는 자연수 m은 $11,\ 12$이므로 n은 $22,\ 24$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 자연수 n은 $22,\ 23,\ 24$이고, 그 합은

$$22 + 23 + 24 = 69$$

17

삼각형 ABC의 세 내각의 크기의 합이 π이므로 $A+B+C=\pi$에서

$A+B=\pi-C$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{2}+A+B\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\pi-C\right)$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-C\right)=\sin C=\frac{2}{5}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 10이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin C}=2\times 10$$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}=2\times 10\times \sin C=2\times 10\times\frac{2}{5}=8$

18

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$

$\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(3-1)^2+(1-3)^2}=2\sqrt{2}$

삼각형 OAB에서 $\angle\mathrm{AOB}=\theta$이므로 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{OA}}^2+\overline{\mathrm{OB}}^2-\overline{\mathrm{AB}}^2}{2\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}}$$

$$=\frac{(\sqrt{10})^2+(\sqrt{10})^2-(2\sqrt{2})^2}{2\times\sqrt{10}\times\sqrt{10}}$$

$$=\frac{3}{5}$$

따라서

$$20\cos\theta=20\times\frac{3}{5}=12$$

19

점 D가 선분 BC를 5 : 2로 외분하므로

$$\overline{\mathrm{CD}}=\frac{2}{3}\overline{\mathrm{BC}}=\frac{2}{3}\times 3=2,\ \overline{\mathrm{BD}}=5$$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{AD}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BD}}^2-2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BD}}\times\cos(\angle\mathrm{ABD})$$

$$=3^2+5^2-2\times 3\times 5\times\cos\frac{\pi}{3}$$

$$=9+25-2\times 3\times 5\times\frac{1}{2}$$

$$=19$$

$$\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{19}$$

삼각형 ACD의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{AD}}}{\sin(\angle\mathrm{ACD})}=2R$이므로

$$R=\frac{1}{2}\times\frac{\overline{\mathrm{AD}}}{\sin(\angle\mathrm{ACD})}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{19}}{\sin\frac{2}{3}\pi}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{19}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{57}}{3}$$

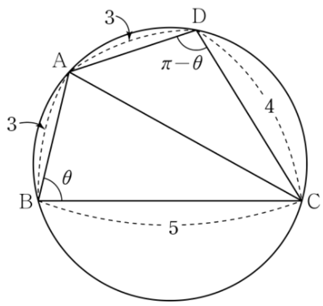
따라서 삼각형 ACD의 외접원의 넓이는

$$\pi\times\left(\frac{\sqrt{57}}{3}\right)^2=\frac{19}{3}\pi$$

따라서 $p=3,\ q=19$이므로

$$p+q=3+19=22$$

20



$\angle ABC = \theta$라 하자.

사각형 ABCD는 원에 내접하므로

$$\angle ABC + \angle ADC = \pi$$

$$\angle ADC = \pi - \angle ABC = \pi - \theta$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \cos\theta$$
$$= 3^2 + 5^2 - 2 \times 3 \times 5 \times \cos\theta$$
$$= 34 - 30\cos\theta \cdots ㉠$$

삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 - 2 \times \overline{AD} \times \overline{CD} \times \cos(\pi - \theta)$$
$$= 3^2 + 4^2 - 2 \times 3 \times 4 \times \cos(\pi - \theta)$$
$$= 25 + 24\cos\theta \cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$34 - 30\cos\theta = 25 + 24\cos\theta$$

$$54\cos\theta = 9$$

$$\cos\theta = \frac{1}{6} \cdots ㉢$$

㉢을 ㉠에 대입하면

$$\overline{AC}^2 = 34 - 30 \times \frac{1}{6} = 29$$

$$\overline{AC} = \sqrt{29}$$

또 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이므로

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{35}}{6}$$

이때 사각형 ABCD에 외접하는 원과 삼각형 ABC에 외접하는 원이 일치한다.

따라서 구하는 원의 반지름의 길이를 R라 하면 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{AC}}{\sin\theta} = 2R$이므로

$$R = \frac{1}{2} \times \frac{\overline{AC}}{\sin\theta} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{29}}{\frac{\sqrt{35}}{6}} = \frac{3\sqrt{29}}{\sqrt{35}}$$

따라서 구하는 원의 넓이는

$$\pi \times \left(\frac{3\sqrt{29}}{\sqrt{35}}\right)^2 = \frac{261}{35}\pi$$

따라서 $p = 35,\ q = 261$이므로

$$p + q = 35 + 261 = 296$$

21

삼각형 ABC에서 $\overline{AB} = \overline{AC}$이므로

$$\angle ABC = \angle ACB = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{5}{12}\pi$$

삼각형 CDB에서 $\overline{CB} = \overline{CD}$이므로 $\angle CDB = \angle CBD = \frac{5}{12}\pi$이고

$$\angle DCB = \pi - (\angle CDB + \angle CBD)$$
$$= \pi - \left(\frac{5}{12}\pi + \frac{5}{12}\pi\right)$$
$$= \frac{\pi}{6}$$

즉,

$$\angle ACD = \angle ACB - \angle DCB$$
$$= \frac{5}{12}\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4}$$

삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)} = \frac{\overline{AD}}{\sin(\angle ACD)}$이므로

$$\overline{AD} = \sin(\angle ACD) \times \frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)} = \sin\frac{\pi}{4} \times \frac{8\sqrt{2}}{\sin\frac{\pi}{6}}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{8\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = 16$$

$\overline{BD} = x$라 하면 두 삼각형 ABC, CDB는 서로 닮은 도형이므로

$$\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{CD} : \overline{DB}$$

$$(16 + x) : 8\sqrt{2} = 8\sqrt{2} : x$$

$$(16 + x)x = 128$$

$$x^2 + 16x - 128 = 0$$

$$x = -8 - 8\sqrt{3} \text{ 또는 } x = -8 + 8\sqrt{3}$$

이때 $x > 0$이므로 $x = 8\sqrt{3} - 8$

즉, $\overline{BD} = 8\sqrt{3} - 8$

따라서

$$\sqrt{3} \times \overline{AD} - 2 \times \overline{BD} = 16\sqrt{3} - (16\sqrt{3} - 16) = 16$$

22

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_{10} = a_2 + 8d$이므로

$$31 = 7 + 8d,\ d = 3$$

따라서 $a_{13} = a_2 + 11d = 7 + 11 \times 3 = 40$

23

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$$a_3 = a_1r^2 = 12 \cdots ㉠$$

이때 $a_1 \neq 0$, $r \neq 0$이다.

$\dfrac{a_5}{a_2} = \dfrac{a_1r^4}{a_1r} = r^3 = 27$에서

$$r^3 - 27 = 0$$

$$(r-3)(r^2+3r+9) = 0$$

이때 $r^2+3r+9 = \left(r+\dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{27}{4} > 0$이므로

$$r = 3$$

㉠에서 $a_1 = \dfrac{4}{3}$

따라서 $a_6 = a_1r^5 = \dfrac{4}{3} \times 3^5 = 324$

24

$a_3 - 19 = 19 - a_5$에서

$$a_3 + a_5 = 38$$

등차수열 $\{a_n\}$에서 등차중항을 이용하면

$$2a_4 = a_3 + a_5 = 38,\ \text{즉}\ a_4 = 19$$

$|a_5 - 25| = |25 - a_7|$에서

$$a_5 - 25 = 25 - a_7\ \text{또는}\ a_5 - 25 = a_7 - 25$$

$$a_5 + a_7 = 50\ \text{또는}\ a_5 = a_7$$

이때 공차가 0이 아니므로

$$a_5 + a_7 = 50$$

등차중항을 이용하면

$$2a_6 = a_5 + a_7 = 50,\ \text{즉}\ a_6 = 25$$

세 수 a_2, a_4, a_6이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2a_4 = a_2 + a_6$$

따라서 $a_2 = 2a_4 - a_6 = 2 \times 19 - 25 = 13$

25

조건 (가)에서 세 수 $k+4$, k, 2가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$k^2 = 2(k+4),\ k^2 - 2k - 8 = 0$$

$$(k+2)(k-4) = 0$$

k는 자연수이므로 $k = 4 \cdots ㉠$

조건 (나)에서 세 수 a_4, a_7, a_{13}이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$${a_7}^2 = a_4a_{13}$$

$$(a_1+6d)^2 = (a_1+3d)(a_1+12d)$$

$${a_1}^2 + 12a_1d + 36d^2 = {a_1}^2 + 15a_1d + 36d^2$$

$$3a_1d = 0$$

$d \neq 0$이므로 $a_1 = 0$

그러므로 $a_n = 0 + (n-1)d = (n-1)d \cdots ㉡$

㉠, ㉡에서

$${a_k}^3 = {a_4}^3 = (3d)^3 = 27d^3$$

${a_k}^3 > 1000$에서

$$27d^3 > 1000$$

$$d^3 > 37.03\cdots$$

따라서 자연수 d의 최솟값은 4이다.

26

$n(B) = 10$이고 $B = (A \cap B) \cup (B - A)$, $(A \cap B) \cap (B - A) = \varnothing$이므로

조건 (나)에서

$$n(A \cap B) = n(B - A) = 5$$

집합 $A \cap B$는 두 등차수열의 공통인 항의 집합이므로 집합 $A \cap B$의 모든 원소를 작은 수부터 나열하면 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

이 등차수열을 $\{c_n\}$이라 하고, 등차수열 $\{c_n\}$의 공차를 d라 하면 d도 자연수이고, d_1, d_2의 공배수이다.

이때 $a_5 = b_5 = 4$에서 $4 \in A \cap B$, 즉 4는 수열 $\{c_n\}$의 항이고, $d = 1$ 또는 $d = 2$ 또는 $d = 3$이면 수열 $\{c_n\}$의 항의 개수가 5보다 크게 되어 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $d \geq 4$

이때 $c_1 = 4$이고, $c_5 \leq 30 < c_6$이므로

$$4 + 4d \leq 30 < 4 + 5d$$

$$\frac{26}{5} < d \leq \frac{13}{2}$$

d는 자연수이므로 $d = 6$

그러므로 $A \cap B = \{4,\ 10,\ 16,\ 22,\ 28\}$ $\cdots$ ㉠

한편, d_1과 d_2는 모두 d, 즉 6의 약수이다.

그런데 d_1, d_2가 모두 1 또는 2 또는 3의 값을 가지면 $n(A \cap B) > 5$가 되어 조건을 만족시키지 않는다.

또한 $c_5 - c_1 = 28 - 4 = 24$이므로

$d_2 = 1$이면 $28 = b_{29}$, $d_2 = 2$이면 $28 = b_{17}$, $d_2 = 3$이면 $28 = b_{13}$이 되어 $28 \notin B$, 즉 $28 \notin A \cap B$가 되어 ㉠을 만족시키지 않는다.

그러므로 $d_2 = 6$

따라서 두 자연수 d_1, d_2의 모든 순서쌍 $(d_1,\ d_2)$는

$$(1,\ 6),\ (2,\ 6),\ (3,\ 6),\ (6,\ 6)$$

이고, 그 개수는 4이다.

27

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1}}$$

$$= \sum_{k=3}^{n} \frac{\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}}{(\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1})(\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1})}$$

$$= \sum_{k=3}^{n} (\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1})$$

$$= (\sqrt{5} - \sqrt{4}) + (\sqrt{6} - \sqrt{5}) + (\sqrt{7} - \sqrt{6}) + \cdots$$
$$+ (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})$$

$$= \sqrt{n+2} - \sqrt{4} \geq 8$$

$$\sqrt{n+2} \geq 10$$

$$n + 2 \geq 100$$

$$n \geq 98$$

따라서 자연수 n의 최솟값은 98이다.

28

$$\sum_{k=2}^{8} \frac{(k+2)^2}{k^2(k-1)} - \sum_{k=2}^{8} \frac{(k-2)^2}{k^2(k-1)}$$

$$= \sum_{k=2}^{8} \frac{(k+2)^2 - (k-2)^2}{k^2(k-1)}$$

$$= \sum_{k=2}^{8} \frac{8k}{k^2(k-1)}$$

$$= \sum_{k=2}^{8} \frac{8}{(k-1)k}$$

$$= 8 \times \sum_{k=2}^{8} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)$$

$$= 8 \times \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8} \right) \right\}$$

$$= 8 \times \left(1 - \frac{1}{8} \right)$$

$$= 7$$

29

$a_n \le 0$이면 $a_{n+1} = -a_n + 3$에서

$a_n = -a_{n+1} + 3 \cdots$ ㉠

$a_n > 0$이면 $a_{n+1} = a_n - 1$에서

$a_n = a_{n+1} + 1 \cdots$ ㉡

$a_4 \le 0$이면 $a_5 = -a_4 + 3$, $a_4 + a_5 = 3$이 되어 $a_4 + a_5 = 5$라는 조건을 만족시키지 않는다.

$a_4 > 0$이면 $a_5 = a_4 - 1$이므로

$a_4 + a_5 = a_4 + (a_4 - 1) = 5$, $a_4 = 3$

$a_4 = 3$이면

㉠에서 $a_3 = 0$, ㉡에서 $a_3 = 4$

$a_3 = 0$이면

㉠에서 $a_2 = 3$이고 $a_2 \le 0$이라는 조건을 만족시키지 않는다.

㉡에서 $a_2 = 1$

$a_3 = 4$이면

㉠에서 $a_2 = -1$, ㉡에서 $a_2 = 5$

그러므로 $a_2 = 1$ 또는 $a_2 = -1$ 또는 $a_2 = 5$이다.

$a_2 = 1$이면

㉠에서 $a_1 = 2$이고 $a_1 \le 0$이라는 조건을 만족시키지 않는다.

㉡에서 $a_1 = 2$

$a_2 = -1$이면

㉠에서 $a_1 = 4$이고 $a_1 \le 0$이라는 조건을 만족시키지 않는다.

㉡에서 $a_1 = 0$이고 $a_1 > 0$이라는 조건을 만족시키지 않는다.

$a_2 = 5$이면

㉠에서 $a_1 = -2$

㉡에서 $a_1 = 6$

따라서 $a_1 = 2$ 또는 $a_1 = -2$ 또는 $a_1 = 6$이므로 모든 a_1의 값의 합은

$2 + (-2) + 6 = 6$

30

자연수 m에 대하여 $a_m = 0 < m$이므로

$a_{m+1} = m + 1 + a_m = m + 1$

$a_{m+1} = m + 1 \le m + 1$이므로

$a_{m+2} = (m+1) + 1 + a_{m+1} = 2m + 3$

$2m + 3 - (m+2) = m + 1 > 0$, 즉 $2m + 3 > m + 2$이므로

$a_{m+3} = a_{m+2} - p = 2m + 3 - p$

$2m + 3 - p - (m+3) = m - p$이므로 다음과 같은 경우로 나누어 구한다.

(ⅰ) $m \le p$, 즉 $2m + 3 - p \le m + 3$일 때

$a_{m+4} = (m+4) + a_{m+3} = 3m + 7 - p$

$a_{m+4} = 0$에서

$3m + 7 - p = 0$

$p = 3m + 7$

$p = 3m + 7 \le 15$에서 m은 자연수이므로 $m \le 2$

$m \le p$에서 $m \le 3m + 7$, $2m \ge -7$

따라서 조건을 만족시키는 m의 값은 1, 2이고, $m = 1$이면 $p = 10$, $m = 2$이면 $p = 13$이다.

(ⅱ) $m > p$, 즉 $2m + 3 - p > m + 3$일 때

$a_{m+4} = a_{m+3} - p = 2m + 3 - 2p$

$a_{m+4} = 0$에서

$2m + 3 - 2p = 0$

$2p = 2m + 3$

이 등식을 만족시키는 두 자연수 p, m은 존재하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 p의 값은 10, 13이므로 구하는 모든 p의 값의 합은

$10 + 13 = 23$