1. [문항코드]

$\dfrac{4}{3^{-2}+3^{-3}}$ 의 값은?

[2점]

① 9 ② 18 ③ 27 ④ 36 ⑤ 45

$$\frac{4}{3^{-2}+3^{-3}} = \frac{108}{3+1}$$

$$= 27.$$

③

5. [문항코드]

함수 $f(x)=x^3+9$에 대하여 $\lim_{h \to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$의 값은? [2점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

$f'(x)=3x^2$

2

3. [문항코드]

$\sin(\pi-\theta)=\frac{5}{13}$이고 $\cos\theta<0$일 때, $\tan\theta$의 값은?

[3점]

① $-\frac{12}{13}$ ② $-\frac{5}{12}$ ③ 0 ④ $\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{12}{13}$

$\sin\theta=\frac{5}{13}$, $\cos\theta=-\frac{12}{13}$.

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$=-\frac{5}{12}$. ②

1. [문항코드]
함수

$$f(x)=\begin{cases}-2x+a & (x \le a)\\ ax-6 & (x>a)\end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은?

[3점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

$-2a+a=a^2-6 \longrightarrow a^2+a-6=0.$

①

2. [문항코드]

함수 $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$의 극댓값과 극솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은?

[3점]

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

$f'(x)=6x^2+6x-12$

$=6(x+2)(x-1) \longrightarrow M+m=f(-2)+f(1)$

$=21+(-6)$ ③

$=15.$

4. [문항코드]

함수 $f(x)=x^3-2x^2+2x+a$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{PQ}=6$일 때, 양수 a의 값은? [3점]

① $2\sqrt{2}$ ② $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $4\sqrt{2}$

$f'(x)=3x^2-4x+2$

$\longrightarrow y=1\cdot(x-1)+a+1$

$=x+a$

$\longrightarrow 6=\sqrt{2a^2}$

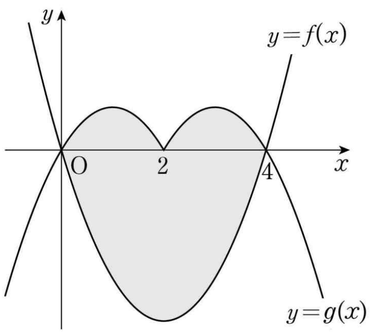
$\longrightarrow a=3\sqrt{2}.$ 3

3. [문항코드]
두 함수

$$f(x)=x^2-4x,\quad g(x)=\begin{cases}-x^2+2x & (x<2)\\ -x^2+6x-8 & (x\ge 2)\end{cases}$$

의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는?

[3점]



① $\frac{40}{3}$　② 14　③ $\frac{44}{3}$　④ $\frac{46}{3}$　⑤ 16

$S=2\int_0^2\{-x^2+2x-(x^2-4x)\}dx$

$=2\int_0^2(-2x^2+6x)dx$

$=\frac{40}{3}.$

①

11. [문항코드]
함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x & (x<a) \\ 2x+b & (x \ge a) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $a+b$의 값은?
(단, a, b는 상수이다.)

[3점]

① -4　② -2　③ 0　④ 2　⑤ 4

$a^2-2a=2a+b$.

$f'(x)=\begin{cases} 2x-2 & (x<a) \\ 2 & (x\ge a) \end{cases} \longrightarrow 2a-2=2$

$\longrightarrow a=2,\ b=-4.$ ②

14. [문항코드]

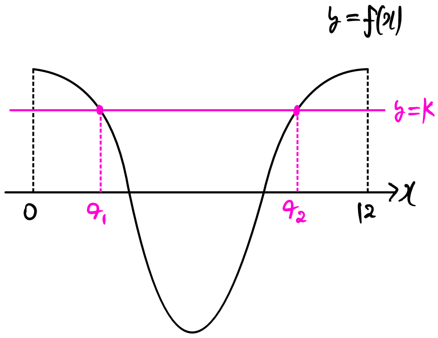
단힌구간 [0, 12]에서 정의된 두 함수

$$f(x)=\cos\frac{\pi x}{6},\quad g(x)=-3\cos\frac{\pi x}{6}-1$$

이 있다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 만나는 두 점의 x좌표를 α_1, α_2라 할 때, $|\alpha_1-\alpha_2|=8$이다. 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$가 만나는 두 점의 x좌표를 β_1, β_2라 할 때, $|\beta_1-\beta_2|$의 값은? (단, k는 $-1<k<1$인 상수이다.)

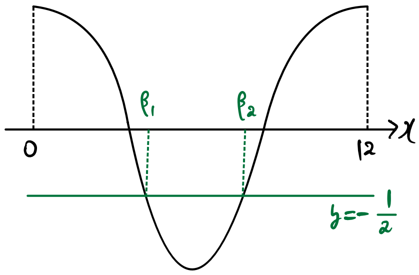
[4점]

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5



$\begin{cases}\alpha_2-\alpha_1=8\\ \alpha_2+\alpha_1=12\end{cases} \longrightarrow \alpha_1=2,\ \alpha_2=10,\ k=\frac{1}{2}$

$g(x)=k \longrightarrow \cos\frac{\pi x}{6}=-\frac{1}{2}$

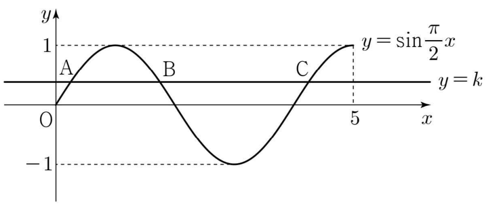


$\beta_2=8,\ \beta_1=4$

3

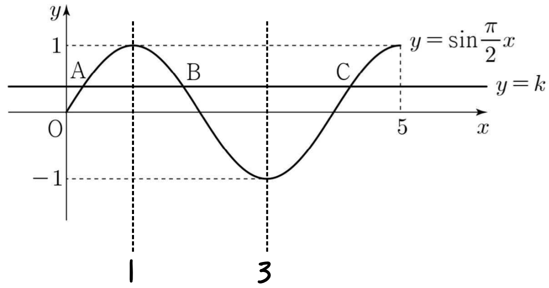
10. [문항코드]

곡선 $y=\sin\frac{\pi}{2}x(0 \le x \le 5)$가 직선 $y=k(0<k<1)$과 만나는 서로 다른 세 점을 y축에서 가까운 순서대로 A, B, C라 하자. 세 점 A, B, C의 x좌표의 합이 $\frac{25}{4}$일 때, 선분 AB의 길이는?



[4점]

① $\frac{5}{4}$　② $\frac{11}{8}$　③ $\frac{3}{2}$　④ $\frac{13}{8}$　⑤ $\frac{7}{4}$



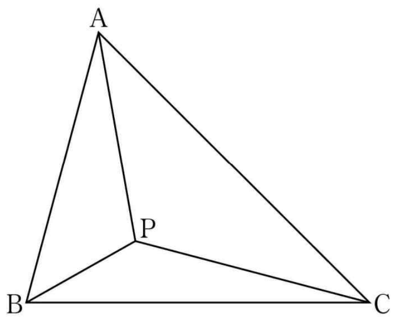
$x_B+x_C=6 \longrightarrow x_A=\frac{1}{4}$

$\longrightarrow x_B=\frac{7}{4}$ $(x_A+x_B=2)$ ③

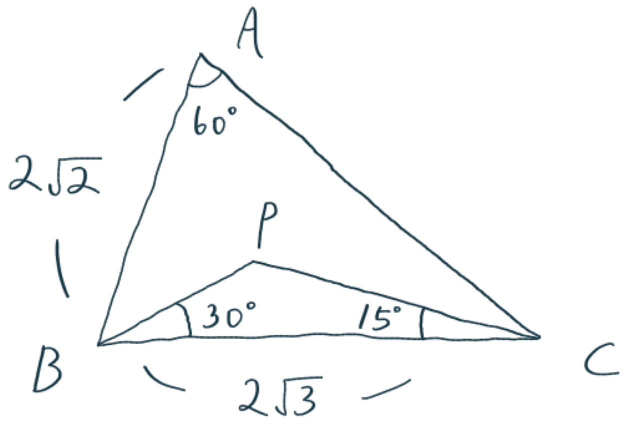
11. [문항코드]

그림과 같이 $\angle BAC = 60^\circ$, $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$, $\overline{BC} = 2\sqrt{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 내부의 점 P에 대하여 $\angle PBC = 30^\circ$, $\angle PCB = 15^\circ$일 때, 삼각형 APC의 넓이는?

[4점]



① $\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$ ② $\dfrac{3+2\sqrt{3}}{4}$ ③ $\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$ ④ $\dfrac{3+2\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $2+\sqrt{3}$



$$(2\sqrt{3})^2 = (2\sqrt{2})^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times 2\sqrt{2} \times \overline{AC} \times \frac{1}{2}$$

$$\overline{AC}^2 - 2\sqrt{2} \times \overline{AC} - 4 = 0$$

$$\therefore \overline{AC} = \sqrt{2} + \sqrt{6}$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sin 135^\circ} = \frac{\overline{PC}}{\sin 30^\circ} \rightsquigarrow \overline{PC} = \sqrt{6}$$

$$\cos(\angle ACB) = \frac{(2\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2}+\sqrt{6})^2 - (2\sqrt{2})^2}{2 \times 2\sqrt{3} \times (\sqrt{2}+\sqrt{6})}$$

$$= \frac{12 + 4\sqrt{3}}{4\sqrt{6} + 12\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \rightsquigarrow \angle ACB = 45^\circ$$

$$\therefore \angle PCA = 30^\circ$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times \sqrt{6} \times (\sqrt{2}+\sqrt{6}) \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3+\sqrt{3}}{2}$$

23. [문항코드]
첫째항이 2인 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{3S_k}{k+2}=S_n$$

이 성립할 때, a_{10}의 값을 구하는 과정이다.

> $n\ge 2$인 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_n=S_n-S_{n-1}$$
> $$=\sum_{k=1}^{n}\frac{3S_k}{k+2}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{3S_k}{k+2}=\frac{3S_n}{n+2}$$
> 이므로 $3S_n=(n+2)\times a_n$ $(n\ge 2)$ 이다.
> $S_1=a_1$에서 $3S_1=3a_1$이므로
> $3S_n=(n+2)\times a_n$ $(n\ge 1)$ 이다.
> $$3a_n=3(S_n-S_{n-1})$$
> $$=(n+2)\times a_n-(\boxed{(가)})\times a_{n-1}\ (n\ge 2)$$
> $$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\boxed{(나)}\ (n\ge 2)$$
> 따라서
> $$a_{10}=a_1\times\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\frac{a_4}{a_3}\times\cdots\times\frac{a_9}{a_8}\times\frac{a_{10}}{a_9}$$
> $$=\boxed{(다)}$$

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 하고, (다)에 알맞은 수를 p라 할 때, $\frac{f(p)}{g(p)}$의 값은?

[4점]

① 109 ② 112 ③ 115 ④ 118 ⑤ 121

$3S_n-3S_{n-1}=(n+2)a_n-(n+1)a_{n-1}$

$\longrightarrow f(n)=n+1.$

$(n+1)a_{n-1}=(n-1)a_n \longrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n+1}{n-1}$ $(n\ge 2)$

$=g(n).$

$a_{10}=a_1\times\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\cdots\times\frac{a_{10}}{a_9}=2\times\frac{3}{1}\times\frac{4}{2}\times\frac{5}{3}\times\cdots\times\frac{10}{8}\times\frac{11}{9}$

$=110$

$=p$

1

18. [문항코드]

최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<-2) \\ f(x)+8 & (x\geq -2) \end{cases}$$

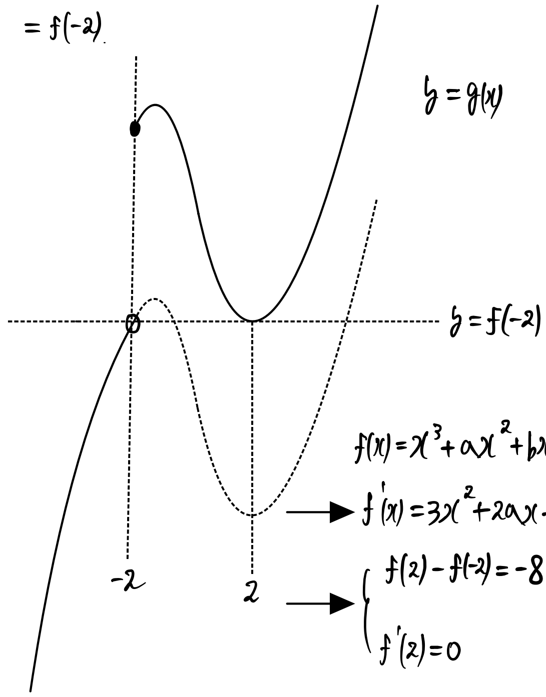
라 하자. 방정식 $g(x)=f(-2)$의 실근이 2뿐일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은?

[4점]

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

$g(2)=f(2)+8$

$=f(-2).$



$f(x)=x^3+ax^2+bx+\frac{1}{2}$

$\rightarrow f'(x)=3x^2+2ax+b$

$\rightarrow \begin{cases} f(2)-f(-2)=-8 \\ f'(2)=0 \end{cases}$

$\rightarrow f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+\frac{1}{2}.$

$\rightarrow f'(x)=3(x+1)(x-2)$

$\rightarrow f(-1)=4.$

③

12. [문항코드]

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<1) \\ 2f(1)-f(x) & (x\geq 1)\end{cases}$$

이라 하자. 함수 $g(x)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[4점]

〈보 기〉

ㄱ. 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

ㄴ. $\displaystyle\lim_{h\to0+}\frac{g(-1+h)+g(-1-h)-6}{h}=a$ (a는 상수)이고 $g(1)=1$이면 $g(a)=1$이다.

ㄷ. $\displaystyle\lim_{h\to0+}\frac{g(b+h)+g(b-h)-6}{h}=4$ (b는 상수)이면 $g(4)=1$이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ $\displaystyle\lim_{x\to1-}g(x)=\lim_{x\to1+}g(x)=f(1)$

$g(1)=f(1).$

ㄴ $\displaystyle\lim_{h\to0+}\{g(-1+h)+g(-1-h)-6\}=0 \rightarrow g(-1)=f(-1)=3.$

$$\lim_{h\to0+}\frac{g(-1+h)+g(-1-h)-6}{h}$$

$$=\lim_{h\to0+}\frac{g(-1+h)-g(-1)}{h}+\lim_{h\to0+}\frac{g(-1-h)-g(-1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0+}\frac{g(-1+h)-g(-1)}{h}-\lim_{h\to0+}\frac{g(-1-h)-g(-1)}{-h}=0=a$$

$g(1)=f(1)=1 \rightarrow f(x)=(x+1)(x-1)-x+2$

$\rightarrow g(0)=f(0)=1.$

~~ㄷ~~ $\displaystyle\lim_{h\to0+}\{g(b+h)+g(b-h)-6\}=0 \rightarrow g(b)=3.$

$$\lim_{h\to0+}\frac{g(b+h)+g(b-h)-6}{h}$$

$$=\lim_{h\to0+}\frac{g(b+h)-g(b)}{h}+\lim_{h\to0+}\frac{g(b-h)-g(b)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0+}\frac{g(b+h)-g(b)}{h}-\lim_{h\to0+}\frac{g(b-h)-g(b)}{-h}=4$$

$\rightarrow$ $g(x)$는 $x=b$에서 미분불가능. $b=1$

$\rightarrow$ $g(1)=f(1)=3.$

$$\lim_{h\to0+}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{\{2f(1)-f(1+h)\}-f(1)}{h}=-f'(1)$$

$$\lim_{h\to0+}\frac{g(1-h)-g(1)}{h}=-\lim_{h\to0+}\frac{g(1-h)-g(1)}{-h}=-f'(1)$$

$\rightarrow f'(1)=-2.$

$y=f(x)$ 위의 점 $(1,3)$에서의 접선의 방정식이 $y=-2(x-1)+3.$

$\rightarrow f(x)=(x-1)^2-2(x-1)+3$

$\rightarrow g(4)=2f(1)-f(4)=0.$

②

18. [문항코드]

수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 자연수 k에 대하여 $a_{4k}=r^k$이다.
> (단, r는 $0<|r|<1$인 상수이다.)
> (나) $a_1<0$이고, 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+3 & (|a_n|<5) \\ -\frac{1}{2}a_n & (|a_n|\ge 5) \end{cases}$$ 이다.

$|a_m|\ge 5$를 만족시키는 100 이하의 자연수 m의 개수를 p라 할 때, $p+a_1$의 값은?

[4점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

$0<|r|<1 \longrightarrow -1<a_{4k}=r^k<1$

$|a_{4k}|<5 \longrightarrow 2<a_{4k+1}=r^k+3<4$

$|a_{4k+1}|<5 \longrightarrow 5<a_{4k+2}=(r^k+3)+3<7$

$|a_{4k+2}|\ge 5 \longrightarrow -\frac{7}{2}<a_{4k+3}=-\frac{1}{2}(r^k+6)<-\frac{5}{2}$

$|a_{4k+3}|<5 \longrightarrow -\frac{1}{2}<a_{4k+4}=\left(-\frac{r^k}{2}-3\right)+3<\frac{1}{2}$

$|a_{4k+4}|<5 \longrightarrow \frac{5}{2}<a_{4k+5}=-\frac{r^k}{2}+3<\frac{7}{2}$

$|a_{4k+5}|<5 \longrightarrow \frac{11}{2}<a_{4k+6}=\left(-\frac{r^k}{2}+3\right)+3<\frac{13}{2}$

$|a_{4k+6}|\ge 5 \longrightarrow -\frac{13}{4}<a_{4k+7}=-\frac{1}{2}\left(-\frac{r^k}{2}+6\right)<-\frac{11}{4}$

$|a_{4k+7}|<5 \longrightarrow -\frac{1}{4}<a_{4k+8}=\left(\frac{r^k}{4}-3\right)+3<\frac{1}{4}$

$a_{4k}=r^k,\ a_{4k+4}=-\frac{r^k}{2}$

$=r^{k+1} \longrightarrow r=-\frac{1}{2},\ a_4=-\frac{1}{2}.$

$a_n=a_{n+1}-3\ (|a_n|<5)$ 또는 $a_n=-2a_{n+1}\ (|a_n|\ge 5)$

a_4 a_3 a_2 a_1

$-\frac{1}{2}$ → $-\frac{7}{2}$, 1 → $-\frac{13}{2}$, 7 → 4, -14 $\longrightarrow a_1=-14.$

모든 자연수 k에 대하여 $|a_{4k+2}|\ge 5$

$\longrightarrow 1\le 4k+2\le 100 \longrightarrow 1\le k\le 24$

$\longrightarrow m=6, 10, 14, \cdots, 98$은 $|a_m|\ge 5.$

$a_1=-14,\ a_2=7,\ a_3=-\frac{7}{2},\ a_4=-\frac{1}{2},\ a_5=\frac{5}{2} \longrightarrow p=26.$

③

10. [문항코드]

$\log_2 9 \times log_3 16$의 값을 구하시오.

[3점]

$2\log_2 3 \times \log_3 16 = 2\log_2 16$

$= 2\log_2 2^4$

$= 8.$

8

1. [문항코드]

함수 $f(x)=x^3-3x^2+ax+10$이 $x=3$에서 극소일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

[3점]

$f'(x)=3x^2-6x+a$

$f'(3)=a+9$

$=0 \longrightarrow f'(x)=3(x-3)(x+1)$

$\longrightarrow f(-1)=15.$ 15

2. [문항코드]

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{5}(3a_k+5)=55,\ \sum_{k=1}^{5}(a_k+b_k)=32$$

일 때, $\sum_{k=1}^{5}b_k$의 값을 구하시오.

[3점]

$$3\sum_{k=1}^{5}a_k+5\cdot5=55 \longrightarrow \sum_{k=1}^{5}a_k=10.$$

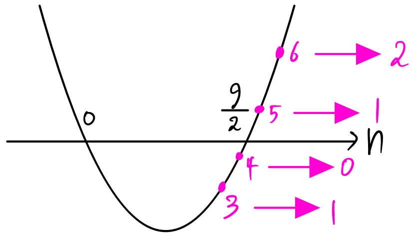
$$\sum_{k=1}^{5}a_k+\sum_{k=1}^{5}b_k=10+\sum_{k=1}^{5}b_k$$
$$=32 \longrightarrow \sum_{k=1}^{5}b_k=22$$

22

14. [문항코드]

$n \geq 2$인 자연수 n에 대하여 $2n^2-9n$의 n제곱근 중에서 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $f(3)+f(4)+f(5)+f(6)$의 값을 구하시오.

[3점]

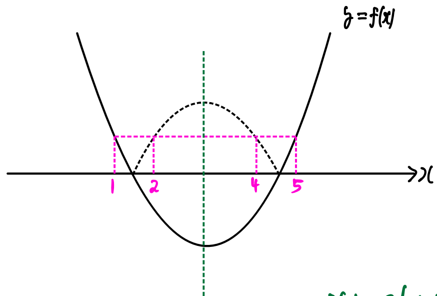


4

9. [문항코드]

최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\int_{x}^{x+1}|f(t)|dt$는 $x=1$과 $x=4$에서 극소이다. $f(0)$의 값을 구하시오.

[4점]



$x=3 \longrightarrow f(x)=2(x-3)^2+k$

$f(1)+f(4)=0 \longrightarrow k=-5.$

13

19. [문항코드]
수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\sum_{k=1}^{2n} a_k = 17n$

(나) $|a_{n+1} - a_n| = 2n - 1$

$a_2 = 9$일 때, $\sum_{n=1}^{10} a_{2n}$의 값을 구하시오.

[4점]

$a_{2n-1} + a_{2n} = 17 \quad (n \geq 2)$

$|a_{2n} - a_{2n-1}| = 4n - 3 \quad (n \geq 1)$

1) $n=2$

$|a_4 - a_3| = 5$, $a_3 + a_4 = 17$

$\longrightarrow (a_3, a_4) = (6, 11), (11, 6)$

$|a_3 - a_2| = |a_3 - 9|$

$= 3. \longrightarrow a_3 = 6,\ a_4 = 11.$

2) $n=3.$

$|a_6 - a_5| = 9$, $a_5 + a_6 = 17$

$\longrightarrow (a_5, a_6) = (4, 13), (13, 4)$

$|a_5 - a_4| = |a_5 - 11|$

$= 7 \longrightarrow a_5 = 4,\ a_6 = 13.$

이를 반복하면 $a_8 = 15,\ a_{10} = 17, \cdots, a_{20} = 27$

$\sum_{n=1}^{10} a_{2n} = \sum_{n=1}^{10} (2n+7)$

$= 2 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} + 7 \cdot 10$

$= 180.$

180

7. [문항코드]

두 양수 a, $b(b>3)$과 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases}(x+3)f(x) & (x<0)\\ (x+a)f(x-b) & (x\ge 0)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킬 때, $g(4)$의 값을 구하시오.

> $\lim_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|}{(x+3)^2}$의 값이 존재하지 않는 실수 t의 값은 -3과 6뿐이다.

[4점]

$$\lim_{x\to 0-} g(x)=\lim_{x\to 0+} g(x)=g(0)$$

$$3f(0) \qquad af(-b) \qquad af(-b) \longrightarrow 3f(0)=af(-b)$$

$$\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|}{(x+3)^2}$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{|g(x)|+\{g(t)\}^2-|g(t)|^2}{(x+3)^2\cdot\left(\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\right)}$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{|g(x)|}{(x+3)^2\cdot\left(\sqrt{|g(-3)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\right)}$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{|(x+3)f(x)|}{(x+3)^2\cdot\left(\sqrt{0+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\right)}$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{|f(x)|}{|x+3|\cdot 2|g(t)|}$$

$t\ne -3$, $t\ne 6$인 임의의 실수 t에 대하여 극한값 존재.

$\longrightarrow \lim_{x\to -3}|f(x)|=0 \longrightarrow f(-3)=0 \longrightarrow f(x)=(x+3)(x+k)$

$\longrightarrow \lim_{x\to -3}\dfrac{|f(x)|}{|x+3|\cdot 2|g(t)|}=\lim_{x\to -3}\dfrac{|(x+3)(x+k)|}{|x+3|\cdot 2|g(t)|}$

$=\lim_{x\to -3}\dfrac{|x+k|}{2|g(t)|}$ 가 존재하지 않는 t

$\longrightarrow -3, 6$

$\longrightarrow g(t)=0$의 실근은 $t=-3$, $t=6$뿐.

$\longrightarrow g(6)=(6+a)f(6-b)=0 \longrightarrow f(6-b)=0$.

$\longrightarrow b=9$ or $b=k+6$.

1) $b=9$

$(x<0)$ $(x+3)^2\cdot(x+k)=0$의 실근이 $x=-3$뿐.

$\longrightarrow k=3$ or $k\le 0$.

$(x\ge 0)$ $(x+a)(x-6)(x-9+k)=0$의 실근이 $x=6$뿐.

$\longrightarrow 9-k<0$ or $k=3,\ a=\dfrac{3}{4}$

$\longrightarrow g(4)=19$.

2) $b=k+6$

$(x<0)$ $(x+3)^2\cdot(x+k)=0$의 실근이 $x=-3$뿐.

$\longrightarrow k=3$ or $k\le 0$

$(x\ge 0)$ $(x+a)(x-6)(x-9+k)=0$의 실근이 $x=6$뿐.

$\longrightarrow b=9 \longrightarrow g(4)=19$

19

4. [문항코드]

첫째항이 1이고 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3n+1}$의 값은?

[2점]

① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 2

$\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}}=\frac{2}{3}.\ (\because a_n=2n-1)$ ①

5. [문항코드]

함수 $f(x)=x^3+3x+1$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하자. 함수 $h(x)=e^x$ 에 대하여 $(h \circ g)'(5)$ 의 값은?

[3점]

① $\frac{e}{8}$ ② $\frac{e}{7}$ ③ $\frac{e}{6}$ ④ $\frac{e}{5}$ ⑤ $\frac{e}{4}$

$h'(g(5))g'(5) = \frac{h'(1)}{f'(1)}$

$= \frac{e}{6}$ 3

33. [문항코드]
등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{2n} - 6n}{a_n + 5} = 4$$

일 때, $a_2 - a_1$의 값은?

[3점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

$a_n = \alpha n + \beta$

$4 = \lim_{n \to \infty} \frac{(2\alpha - 6)n + \beta}{\alpha n + \beta + 5}$

$= 2 - \frac{6}{\underset{-3}{\underset{\sim}{\alpha}}}$

$\therefore a_2 - a_1 = -3$

34. [문항코드]

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속이고

$$\int_1^2 (x-1)f'\left(\frac{x}{2}\right)dx = 2$$

를 만족시킨다. $f(1)=4$일 때, $\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx$의 값은?

[3점]

① $\frac{3}{4}$ ② 1 ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

$$\int_1^2 (x-1) f'\left(\frac{x}{2}\right) dx = 2$$

$$\frac{x}{2} = t \rightarrow dx = 2dt$$

$$2\int_{\frac{1}{2}}^{1} (2t-1) f'(t)\, dt$$

$$= \left\{ \Big[(2t-1)\cdot f(t)\Big]_{\frac{1}{2}}^{1} - \int_{\frac{1}{2}}^{1} 2f(t)dt \right\} \times 2$$

$$= 2f(1) - 4\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(t)dt = 2$$

$$\therefore \frac{3}{2}$$

35. [문항코드]

그림과 같이 $\overline{AB_1}=\overline{AC_1}=\sqrt{17}$, $\overline{B_1C_1}=2$인 삼각형 AB_1C_1이 있다. 선분 AB_1 위의 점 B_2, 선분 AC_1 위의 점 C_2, 삼각형 AB_1C_1의 내부의 점 D_1을

$$\overline{B_1D_1}=\overline{B_2D_1}=\overline{C_1D_1}=\overline{C_2D_1},\ \angle B_1D_1B_2=\angle C_1D_1C_2=\frac{\pi}{2}$$

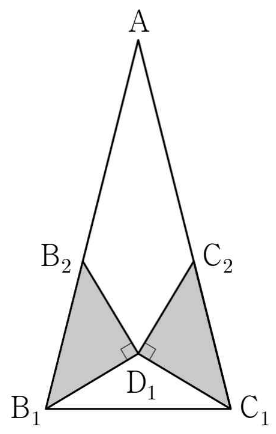
가 되도록 잡고, 두 삼각형 $B_1D_1B_2$, $C_1D_1C_2$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 선분 AB_2 위의 점 B_3, 선분 AC_2 위의 점 C_3, 삼각형 AB_2C_2의 내부의 점 D_2를

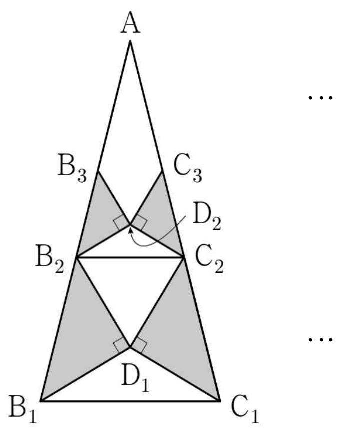
$$\overline{B_2D_2}=\overline{B_3D_2}=\overline{C_2D_2}=\overline{C_3D_2},\ \angle B_2D_2B_3=\angle C_2D_2C_3=\frac{\pi}{2}$$

가 되도록 잡고, 두 삼각형 $B_2D_2B_3$, $C_2D_2C_3$에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



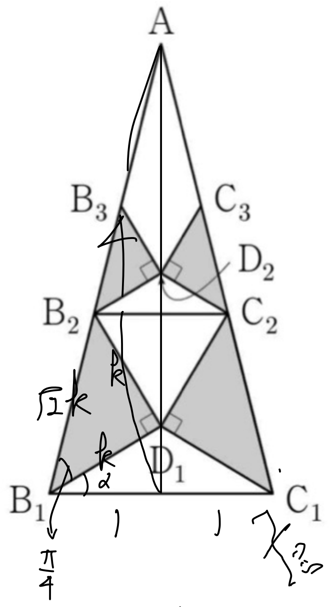
R_1



R_2

[3점]

① 2　② $\frac{33}{16}$　③ $\frac{17}{8}$　④ $\frac{35}{16}$　⑤ $\frac{9}{4}$



$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=4$이므로

$\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=4 \Rightarrow 4-4\tan\alpha=1+\tan\alpha$

$\tan\alpha=\frac{3}{5} \Rightarrow \overline{B_1D_1}=k=\frac{\sqrt{34}}{5}$

$\therefore$ 초항 $=\frac{34}{25}$

공비 $=\frac{9}{25}$이므로

$\frac{\frac{34}{25}}{1-\frac{9}{25}}=\frac{17}{8}$ ■

36. [문항코드]

두 상수 a $(a>0)$, b에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a\times b$의 값은?

(가) 모든 실수 x에 대하여

$$\{f(x)\}^2+2f(x)=a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b$$이다.

(나) $f(0)=f(2)+1$

[4점]

① $-\frac{1}{16}$ ② $-\frac{7}{64}$ ③ $-\frac{5}{32}$ ④ $-\frac{13}{64}$ ⑤ $-\frac{1}{4}$

$\{f(0)\}^2+2f(0)=a+b$

$\{f(2)\}^2+2f(2)=a+b$

$(f(0)+1)^2=a+b+1=(f(2)+1)^2$

$(f(2)+2)^2=(f(2)+1)^2 \rightarrow f(2)=-\frac{3}{2},\ f(0)=-\frac{1}{2}$

$\therefore a+b=-\frac{3}{4}$

$\{f(x)\}^2+2f(x)=g(x)$ 라 하면

$g(x)=g(2-x)$ 이므로

$\{f(x)\}^2+2f(x)=\{f(2-x)\}^2+2f(2-x)$

$\{f(x)\}^2-\{f(2-x)\}^2+2(f(x)-f(2-x))=0$

$(f(x)+f(2-x)+2)(f(x)-f(2-x))=0$

$f(0)\neq f(2)$이므로 $f(1)=-1$; $-a+b=-1$

$a=\frac{1}{8},\ b=-\frac{7}{8}$

$\therefore -\frac{7}{64}$ ■

37. [문항코드]

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x<1$일 때, $f'(x)=-2x+4$이다.
(나) $x \geq 0$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x^2+1)=ae^{2x}+bx$이다. (단, a, b는 상수이다.)

$\int_0^5 f(x)dx = pe^4 - q$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.)

[4점]

$f(x) = -x^2+4x+C$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 3+C = \lim_{x\to 0} f(x^2+1) = a$

$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = 2$

$2xf'(x^2+1) = 2ae^{2x}+b$

$2f'(x^2+1) = \frac{2ae^{2x}+b}{x}$ 에서

$\lim_{x\to 0} 2f'(x^2+1)$ 값 존재. $b=-2a$

$\lim_{x\to 0} f'(x^2+1) = \lim_{x\to 0} \frac{a(e^{2x}-1)}{x} = 2a = 2$

$\therefore a=1, b=-2, C=-2$

$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (-x^2+4x-2)dx$

$= \left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-2x\right]_0^1 = -\frac{1}{3}$

$\int_1^5 f(t)dt = \int_0^2 2xf(x^2+1)dx = \int_0^2 2x\cdot(ae^{2x}+bx)dx$

$t=x^2+1$

$dt=2xdx$

$= \int_0^2 2axe^{2x}+2bx^2dx$

$= \frac{3}{2}e^4 - \frac{32}{3} - (-\frac{1}{2})$

$\therefore \int_0^5 f(x)dx = \frac{3}{2}e^4 - \frac{21}{2}$

$\therefore 12$ ■

8. [문항코드]

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$g(x)=\ln\{f(x)+f'(x)+1\}$$

이 있다. 상수 a와 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $g(x)>0$이고

$$\int_{2a}^{3a+x} g(t)dt=\int_{3a-x}^{2a+2} g(t)dt$$

이다.

(나) $g(4)=\ln 5$

$\int_3^5 \{f'(x)+2a\}g(x)dx=m+n\ln 2$일 때, $m+n$의 값을 구하시오.

(단, m, n은 정수이고, $\ln 2$는 무리수이다.)

[4점]

$h(x)=f(x)+f'(x)+1 \rightarrow h(x)>1$

$g(3a+x)=g(3a-x) \rightarrow g(x)$의 그래프는 직선 $x=3a$ 대칭.

$\ln x$는 일대일대응 $\rightarrow \ln\{h(3a+x)\}=\ln\{h(3a-x)\}$

$\rightarrow h(3a+x)=h(3a-x)$

$\rightarrow h(x)$의 그래프는 직선 $x=3a$ 대칭.

$\rightarrow h'(3a)=0$.

$f(x)=x^2+px+q \rightarrow h(x)=x^2+(p+2)x+p+q+1$, $h'(x)=2x+p+2$.

$\rightarrow 6a+p+2=0$.

$\int_{2a}^{2a} g(t)dt=0=\int_{4a}^{-2a+2} g(t)dt$, $g(x)>0 \rightarrow a=1$, $p=-8$.

$g(4)=\ln 5 \rightarrow h(4)=5$, $q=20$.

$\rightarrow f(x)=x^2-8x+20$.

$\rightarrow \int_3^5 \{f'(x)+2a\}g(x)dx=\int_3^5 (2x-6)\ln(x^2-6x+13)dx$

$=\int_4^8 \ln u\,du \quad (x^2-6x+13=u)$

$=16\ln 2-4$.

12