SEASON 2024

10 주차

일반항의 정의

SEOL:NAME
THE SIGNATURE

설레임

테마별
기출분석집

설레임 모의고사
Team SeolName

10 일반항의 정의

일반항으로 정의된 수열을 어떻게 분석해야 할까? 그 방법론을 생각해보자.

STYLE 01

수열의 일반항의 뭐지? : (등차수열은 0으로 시작해서 0으로 끝난다.)

칼럼을 시작하기 앞서 한가지 문제를 낼게. $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$인 수열이 있다고 하자.

그렇다면 a_4의 값은 무엇일까? 아마 대다수의 친구들이 머릿속에 4라는 숫자를 떠올렸을거야.

그 이유은 아마도 앞의 수열의 일반항이 $a_n = n$이라고 생각했기 때문이겠지?

하지만 어떤 친구는 10을 떠올렸대. 그 이유는 일반항을 $a_n = (n-1)(n-2)(n-3)+n$이라고 생각했기 때문이야.

하지만 [수학 I]에서 수열을 배우면서 등차수열과 등비수열을 제외한 일반항을 구해본 적이 있니?

예를 들면, $a_n = (n-1)(n-2)(n-3)+n$과 같은 일반항 말이야. 아마도 없을거야.

[수학 I] 중 수열 단원의 학습목표가 등차/등비수열을 제외한 수열에 대해서는 일반항을 다루지 않아서 그래.

그 말은 즉슨 등차수열과 등비수열 문제에서는 일반항이 중요하다는 뜻이야.

자, 이제 첫 번째 주제인 등차수열 시작해볼게.

> **[2023학년도 4월 전국연합학력평가 20번]**
>
> 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. S_n이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{13}의 값을 구하시오. [4점]
>
> > (가) S_n은 $n=7$, $n=8$에서 최솟값을 갖는다.
> > (나) $|S_m| = |S_{2m}| = 162$인 자연수 $m\,(m>8)$이 존재한다.

우리만의 실전 풀이

THINKING!

문제 풀이에 앞서 등차수열의 일반항을 구하는 것을 점검해보자. 아마 대부분의 학생들이 공차가 d이고 첫째항이 a_1인 등차수열의 일반항을 $a_n = d(n-1)+a_1$이라고 알고 있을거야. 하지만 문제를 풀기 위해서는 보통 괄호를 풀잖아? 그럼 애초부터 괄호를 쓰지 말자는 거지. 또는 첫째항이 주어지지 않고 a_4가 주어졌다고 했을 때, 일반항을 공식으로만 외운 학생들은 당황할 수도 있어. 지금부터 내가 일반항을 구한 방법을 알려줄게.
(간단한 **tip**정도 라고 생각해주면 고맙겠어.)

1. $a_n = dn$을 작성한다. (아직은 일반항이 완성되기 이전이다.)
2. 제시된 a_k의 항을 좌변에 대입하고 $n=k$을 대입한다.
3. 머릿속으로 상수항을 계산한 후 $a_n = dn + C$을 작성한다.

무슨말인지 잘 이해가 안 되지? 그래서 몇 가지 예시를 준비해봤어.

[예제 1] 공차가 2이고 첫째항이 3인 등차수열의 일반항을 구하시오.
[예제 2] 공차가 4이고 넷째항이 -2인 등차수열의 일반항을 구하시오.
[예제 3] 공차가 d이고 첫째항이 3인 등차수열의 일반항을 구하시오.
[예제 4] 공차가 d이고 넷째항이 -2인 등차수열의 일반항을 구하시오.
[예제 5] 공차가 2이고 첫째항이 a인 등차수열의 일반항을 구하시오.
[예제 6] 공차가 4이고 넷째항이 a인 등차수열의 일반항을 구하시오.

[정답 1] 1. $a_n = 2n$ 2. $a_1 = 2+C$ 3. $C=1$
$\therefore a_n = 2n+1$
[정답 2] 1. $a_n = 4n$ 2. $a_4 = -16+C$ 3. $C=18$
$\therefore a_n = 4n-18$
[정답 3] 1. $a_n = dn$ 2. $a_1 = d+C$ 3. $C=3-d$
$\therefore a_n = dn+3-d$
[정답 4] 1. $a_n = dn$ 2. $a_4 = 4d+C$ 3. $C=-2-4d$
$\therefore a_n = dn-2-4d$
[정답 5] 1. $a_n = 2n$ 2. $a_1 = 2+C$ 3. $C=a-2$
$\therefore a_n = 2n+a-2$
[정답 6] 1. $a_n = 4n$ 2. $a_4 = 16+C$ 3. $C=a-16$
$\therefore a_n = 4n+a-16$

아마 C를 암산으로 구하는 연습을 계속해서 반복하다 보면 일반항을 작성하는데 능숙해질거야.
조금은 심화된 문제로 들어가볼게!

STEP 1 등차수열은 0으로 시작해서 0으로 끝난다.!

(가) 'S_n은 $n=7$, $n=8$에서 최솟값을 갖는다.'는 조건이 의미하는 것은 무엇일까.

S_7, S_8이 최솟값을 갖는다? 이것은 문제를 그대로 번역한 것이고,

조건에 내재된 뜻은 다음과 같이 이해할 수 있어.

(ⅰ) $S_7 = S_8 < S_k$ (단, k는 7, 8을 제외한 자연수)

(ⅱ) $d > 0$

(ⅱ) 은 (ⅰ)의 결과로서 확인할 수 있어. $d<0$이라면 충분히 큰 k에 대해서 S_k는 엄청 작아질 것이기 때문에 S_n의 최솟값이 존재하지 않음을 확인할 수 있지. 따라서 $d>0$이야.

(ⅰ) 에서 $S_7 = S_8$이므로 $S_7 = S_7 + a_8$이고 따라서 $a_8 = 0$이라는 것을 알 수 있어.

잠시 멈추고 $a_k = 0$이라는 것을 알려주는 조건을 잠시 보고 갈까?

[2020학년도 7월 전국연합학력평가 17번 (나형)]

(가) $a_7 = a_6 + a_8$

$a_7 = a_6 + a_8$ 이므로 등차중항의 성질에 의하여 $a_7 = 2a_7$

$\therefore a_7 = 0$

[2020학년도 7월 전국연합학력평가 17번 (가형)]

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

라 할 때, S_n, T_n은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $S_7 = T_7$

(나) 6 이상의 모든 자연수 n에 대하여 $S_n + T_n = 84$이다.

$S_7 = T_7$ 이므로 $a_k \geq 0$(단 k는 7이하의 자연수)

(나) 조건을 통해 $S_6 + T_6 = S_7 + T_7 = 84$, $a_7 + |a_7| = 0$

$a_7 \geq 0$이므로 $a_7 = 0$이다.

[2018학년도 6월 모의평가 15번 (나형 변형문제)]

(가) 방정식 x^2-4 의 두 근이 a_3, a_5 이다.

근과 계수 관계에 의해 $a_3+a_5=0$ 이다. 또한 등차중항의 성질에 의해 $2a_4=0$ 이다.

$\therefore\ a_4=0$

[2018학년도 수능 14번 (나형)]

(가) $a_5+a_{13}=3a_9$

$a_5+a_{13}=3a_9$ 이므로 등차중항의 성질에 의하여 $2a_9=3a_9$

$\therefore\ a_9=0$

[2022학년도 5월 예시문항 20번 (고2)]

(가) $a_3+a_5=0$

$a_3+a_5=0$ 이므로 등차중항의 성질에 의하여 $2a_4=0$

$\therefore\ a_4=0$

[2023학년도 6월 모의평가 12번 (변형문제)]

(가) $a_5\times a_6=0$
(나) $a_5\times a_7<0$

$a_5\times a_6=0$ 이므로 $a_5=0$ 또는 $a_6=0$ 이다. 또한 $a_5\times a_7<0$ 이므로 $a_5\neq 0$ 이다.

$\therefore\ a_6=0$

등차수열에서 0 인 항이 얼마나 강조되는지 이제 알겠지?
등차수열을 접할 때 0 이 되는 항을 먼저 고려한다면 문제를 풀 때 조금은 수월해질거야.
$a_k=0$ 을 알려주는 조건들 꼭꼭 정리해놓고..!

STEP 2 등차수열의 합공식 아직도 헷갈리니? (일관성을 갖자.)

앞에서 연습했던 등차수열의 일반항 구하는 방법 기억하지?

위의 문제에서는 공차가 제시되어 있지 않으므로 공차를 d라고 하자.

그렇다면 a_n은 공차가 d이고 $a_8=0$인 등차수열이야.

1. $a_n=dn$ 2. $a_8=8d+C$ 3. $C=-8d$

$$\therefore a_n=dn-8d \text{ (단, } d>0\text{)}$$

(나) 조건을 살펴보기 전 등차수열의 합과 관련된 이야기를 잠깐 해볼게.

공차가 d, 첫째항이 a_1이고 제n항이 l일 때, 등차수열의 합을 흔히 두 가지로 외우고 있지.

$$S_n=\frac{n(a+l)}{2},\ S_n=\frac{n\{2a_1+(n-1)d\}}{2}$$

하지만 결국 **등차수열의 합은 수열의 합과 의미가 동일하다는 것이** 중요해!

즉, $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$이라는 것이지.

우리 수열의 합 단원에서 $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$라고 배웠어.

이를 이용하면 우리는 등차수열의 합 공식을 외우지 않아도, 일반항을 통해 수열의 합을 작성할 수 있어.

위의 문제에 적용하면,

$a_n=dn-8d$일 때, $S_n=\frac{dn(n+1)}{2}-8dn$이라는 것을 알 수 있지.

이제 (나)조건을 살펴보자.

$|S_m|=|S_{2m}|=162$인 자연수 $m\ (m>8)$이 존재하고 $d>0$이므로

$$-S_m=S_{2m} \quad \cdots\cdots ㉠$$

또한 수열의 합을 이용하면 ㉠의 식이

$$-\left\{\frac{dm(m+1)}{2}-8dm\right\}=\frac{2dm(2m+1)}{2}-16dm$$

양변을 dm으로 나누면

$$-\frac{m+1}{2}+8=2m+1-16$$

다음 일차방정식을 풀면 $m=9$

딱히 등차수열의 합 공식을 외우지 않아도 개념적인 부분으로 수열의 합을 이끌어냈어.

또한 식 정리도 더 쉽지.

나는 수학을 공부할 때 **'일관성'**을 정말 중요하게 생각했어. 수학은 암기과목이라고 말하는 사람들에게 반박할 수 있는 근거도 됨과 더불어 공부의 효율성까지 늘릴 수 있었지.

사실 수학 공부방법에는 답이 없어. 자신과 잘 맞는 방법을 선택해서 열정을 다하면 될 뿐이지.

그렇지만 나의 방법도 한 번쯤은 고민해주었으면 해!

↓

STEP 3 등차수열의 꽃은 계산 - 등차중항을 이용한다면..?

$m=9$ 라는 것을 통해 $-S_9=S_{18}=162$ 를 알아냈어.

보통은

$$-\left\{\frac{dm(m+1)}{2}-8dm\right\}=\frac{2dm(2m+1)}{2}-16dm=162$$

에서 $m=9$ 를 대입했을 때 조금 더 계산이 쉬운 방법을 선택할거야.

이 방법도 꽤 좋은 방법이지만 더 좋은 방법이 있는지 고민해보자.

STEP 2에서는 수열의 합으로 등차수열의 합 공식을 바라보았어. 또 어떤 시선으로 등차수열의 합 공식을 바라볼 수 있을까?

등차수열하면 뭐가 생각나? 그렇지! 바로 등차중항이야.

등차중항과 등차수열의 합 공식과는 어떤 관계가 있을까?

(ⅰ) n 이 홀수일 때 (즉 $n=2m-1$, m 은 자연수)

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = n\times a_m$$

(ⅱ) n 이 짝수일 때 (즉 $n=2m$, m 은 자연수)

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = n\times\frac{a_m+a_{m+1}}{2}$$

(ⅰ) 의 경우 어렵지 않게 이해할 수 있을거야.

a_1 과 a_n 의 등차중항이 a_m 이라는 사실이 너무나 당연하기 때문이지.

하지만 (ⅱ) 의 경우 생각이 조금 필요해.

a_1 과 a_n 의 등차중항이 $a_{\frac{2m+1}{2}}$ 이라는 사실 때문이지.

수열을 처음 배울 때 a_n 에서 n 은 자연수라고 배웠기에 어쩌면 당연한 상황이라고 생각해.

이와 관련된 내용은 STYLE 02에서 다룰게!

다시 본론으로 돌아와서 $-S_9=S_{18}=162$ 은 (ⅱ)의 경우보다는 (ⅰ) 의 경우로 생각하는게 편하겠지.

$$-S_9=162 \quad\rightarrow\quad -9a_5=162$$

따라서 $a_5=-18$. 이때, $a_8=0$ 이므로 $d=6$ 이야.

공차를 구했기 때문에 우리가 구했던 일반항 $a_n=dn-8d$ 에 $d=6$, $n=13$ 을 대입해서

a_{13} 을 구하는 방법을 생각하겠지.

하지만 일반항을 구하지 않아도 문제를 풀 수 있는 더 쉬운 방법이 존재한다는거야.

바로 등차수열의 기본적인 개념을 이용하는 것이지.

$a_{13}=a_8+5d$ 를 이용하면 $a_{13}=30$ 이라는 것을 쉽게 구할 수 있지.

너무 많은 개념을 쏟아내서 머리가 어지러울거야. 뒤에 **테크닉 총정리**에서 정리를 하겠지만

이것 하나만 알아줘. **수학은 개념으로 시작해서 개념으로 끝난다.**

STYLE 02

등차수열의 새로운 시각 : 분수항을 이용하여

‘등차수열’ 준킬러 문제 요소로 사용되기 정말 좋은 단원이야.
그렇기 때문에 남들이 등차수열을 바라보는 시각보다 우리가 바라보는 시각이 더 넓도록 만들어야 해.
그 중 우리 임의대로 분수항을 정의하는 방법이 있지. 아마 바로 와닿지는 않을거고, 그게 당연한 것이지만
같이 STYLE 02를 살펴보다 보면 분수항을 자연스럽게 문제 풀이에 사용하는 자신을 볼 수 있을거야!

[2022학년도 9월 모의평가 13번]

첫째항이 -45이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 자연수 d의 값의 합은? [4점]

(가) $|a_m| = |a_{m+3}|$인 자연수 m이 존재한다.

(나) 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k > -100$이다.

① 44 ② 48 ③ 52 ④ 56 ⑤ 60

우리만의 실전 풀이

THINKING!

STYLE 01에서는 등차수열의 합을 바라보는 시각에 대해 배웠어. 잠시 STYLE 01을 정리해보자면

① 등차수열의 합을 수열의 합으로 바라보자.

② 등차수열의 합을 등차중항의 합으로 바라보자.

②에서 다음과 같은 경우에는 합을 어떻게 해석해야 할까?

$$a_2+a_3+a_4+a_5=4a_{3.5}$$

이렇게 해석하기에는 $a_{3.5}$라는 항은 없지 않을까?

이런 고민을 해결하기 위해 이번 파트에서는 **분수항**이라는 가상의 개념을 도입하려고 해.

자연수 n에서만 정의된 수열 $\{a_n\}$을 임의로 n의 범위를 분모가 2인 항까지 확대하는 것이지.

이해가 안 된다고 낙담하지 마! 문제를 같이 풀다 보면 이해가 더 잘 될거야! 바로 문제로 들어가보자.

STEP 1 분수항의 정의

분수항이란 무엇일까. 먼저 분수항은 우리가 문제 풀이를 위해 우리가 임의로 정의한 항이라는 것을 인지하자.

예를 들면, a_2와 a_3의 등차중항을 $a_{\frac{5}{2}}$이라고 정의하는 거야.

또한 $a_2=3$, $a_3=5$라면 $a_{\frac{5}{2}}=4$라고 정하자는 거지.

왜 존재하지도 않는 개념을 정의하면서까지 문제를 풀어야 하냐고?

문제를 더 쉽게 이해하고 풀이하기 위함이야.

위의 문제를 살펴보자.

등차수열 $a_n(d>0)$에 대하여 $|a_m|=|a_{m+3}|$인 자연수 m이 존재한다는 것은

$-a_m=a_{m+3}$ $(a_m<0,\ a_{m+3}>0)$ 을 의미해. 즉, $a_m+a_{m+3}=0$이라는 거지.

학생들은 보통 '등차중항이 0일 것이다.'라는 것까지는 추론해낼 수 있을거야.

하지만 a_m과 a_{m+3}의 등차중항은 $a_{\frac{2m+3}{2}}$이기 때문에 (즉, 분수항이기 때문에) 많은 학생들이 등차중항을

포기하고 문제를 못 푸는 경우가 많아. 하지만 우리는 분수항을 임의로 정의하자고!

$a_{\frac{2m+3}{2}}=0$이고 공차를 d라 하면 $a_{m+1}=-\dfrac{d}{2}$, $a_{m+2}=\dfrac{d}{2}$라는 것을 알 수 있어.

분수항을 우리 임의로 정의함으로써 쉬운 시각으로 바라보자는거야.

그렇다면 자연스럽게 $a_m=-\dfrac{3d}{2}$, $a_{m+3}=\dfrac{3d}{2}$가 나오게 돼.

또한 STYLE 01에서 배운 방법으로 수열 a_n의 일반항까지 정의해보자.

1. $a_n=dn$ 2. $a_m=dm+C$ 3. $C=-\dfrac{3d}{2}-dm$

$$\therefore\ a_n=dn-\frac{3d}{2}-dm \quad \textbf{(단, } d>0\textbf{)}$$

이후에는 자신의 방법으로 문제를 풀이하면 되겠지.
비슷한 예시로는 다음과 같은 문제들이 있어.

[2015학년도 9월 전국연합학력평가 나형 24번]

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 + a_{10} = 22$ 일 때, $\sum_{k=2}^{9} a_k$의 값을 구하시오.

임의로 분수항을 정의하면 $2a_{\frac{11}{2}} = 22$ 이므로 $a_{\frac{11}{2}} = 11$ 이다. 따라서 $\sum_{k=2}^{9} a_k = 8a_{\frac{11}{2}} = 88$

[2018학년도 수능 나형 14번]

등차수열 $\{a_n\}$이 $a_5 + a_{13} = 3a_9$, $\sum_{k=1}^{18} a_k = \frac{9}{2}$를 만족시킬 때, a_{13}의 값은?

STYLE 01에서 배운 내용을 토대로 $a_9 = 0$을 알 수 있다. 공차를 d라하고 임의로 분수항을 정의하면

$a_{\frac{19}{2}} = \frac{d}{2}$라는 것을 알 수 있으며 $18a_{\frac{19}{2}} = \frac{9}{2}$에 대입하면 $d = \frac{1}{2}$이다.

STYLE 01에서 배운 내용을 토대로 $a_{13} = a_9 + 4d$이므로 $a_{13} = 2$이다.

STEP 2 등차수열을 푸는데 약수의 개념이 필요하다고..?

보통 등차수열 문제에서는 소인수분해의 개념이 쓰이지 않아.
하지만 이 문제에서는 소인수분해(약수)의 개념이 사용되고 있어. 일반적인 문제 형태는 아니니까
걱정하지 않아도 돼.
소인수분해 보다는 약수 개념에 더 가까운데, $a_1 = -45$이고 d는 자연수이기 때문에
특이한 문제 형태가 나오게 된거야.
모든 a_n의 항은 $\pm\frac{d}{2}$와 양의 홀수가 곱해진 형태로 정해질 것이므로 $a_1 = -45$을 만족시키는 d도
한정적이라는 것을 알 수 있어.
또한 (나)조건이 '모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k > -100$이다.' 이므로 더욱 더 한정되어 공차 d가
정해지겠지.

a_1 또한 $\pm\frac{d}{2}$ 와 홀수가 곱해진 형태로 정해진다는 사실을 통해 공차 d를 정해보자.

당연한 사실이겠지만 홀수와 짝수는 다음의 성질을 만족해.

1. 홀수+홀수=짝수　　2. 홀수+짝수=홀수　　3. 짝수+짝수=짝수

4. 홀수×홀수=짝수　　5. 홀수×짝수=홀수　　6. 짝수×짝수=짝수

너무 당연하다고? 6가지 개념이 수열 단원 문제에서 수열의 요소(공차, 항)를 제한시키기 위해
자주 사용되는 조건이야.
못 믿겠다고? 이번 9월 모의고사를 보자.

[2024학년도 9월 모의평가 12번]

(가) $a_2 + a_4 = 40$

두 자연수의 합이 짝수 이므로
(ⅰ) a_2가 짝수이고 a_4가 짝수인 경우, (ⅱ) a_2가 홀수이고 a_4가 홀수인 경우로 나눌 수 있어.

등차수열 단원에서만 사용되는 개념이 아니라 수열 전 범위에서 모두 사용되는 개념이므로 꼭 정리해놓자!
(간단한 개념이라고 생각해도 막상 시험장에 들어가면 잘 생각이 나지 않으니 ㅠ)
조금 더 예시를 들어줄게.

[2022학년도 7월 전국연합학력평가 21번]

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\sum_{k=1}^{2n} a_k = 17n$

(나) $|a_{n+1} - a_n| = 2n - 1$

(나) 조건을 통해 $|a_{2n-1} - a_{2n}|$은 홀수라는 것을 알 수 있으므로
(ⅰ) a_n이 짝수이고 a_{n+1}이 홀수인 경우 (ⅱ) a_n이 홀수이고 a_{n+1}이 짝수인 경우로 나눌 수 있어.

다시 본론으로 돌아와 문제를 풀이해보자.

a_1에 대하여 $-\frac{d}{2}$와 양의 홀수의 곱이 -45를 만족시켜야 한다는 것을 알았어.

또한 두 홀수의 곱이 홀수가 된다는 것도 알고 있지. 따라서 $\frac{d}{2}$ 또한 홀수이어야 해.

이때 중요한 것이 약수의 개념이야. 45를 두 홀수인 약수로 분해를 해야된다는 것을 의미하지
$45 = 1\times45 = 3\times15 = 5\times9 = 9\times5 = 15\times3 = 45\times1$ 이야.

이때, 우리는 d의 값이 자연스럽게 6개로 한정된다는 것을 파악할 수 있지.

$d=2$ 또는 $d=6$ 또는 $d=10$ 또는 $d=18$ 또는 $d=30$ 또는 $d=90$이야.

이제 (나) 조건을 살펴볼거야. 첫째항이 -45로 정해져 있고,

모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k > -100$이므로 공차 d가 너무 작으면 (나) 조건에 모순된다는 것을

유추할 수 있지. 그렇기 때문에 $d=90$일 때부터 분석해보도록 할게.

$a_n = dn - \frac{3d}{2} - dm$을 이용하자.

↓

STEP 3 이전의 풀이과정을 이용하자 - 각 경우의 연계성

정석적으로 이 문제를 풀이하자면 다음과 같이 풀 수 있어.

(ⅰ) $d=90$인 경우

$a_{m+1} = -\frac{d}{2}$이므로 $a_1 = a_{m+1}$

따라서 $m=0$이므로 (가) 조건에 모순!

(ⅱ) $d=30$인 경우

$a_m = -\frac{3d}{2}$이므로 $a_1 = a_m$

따라서 $m=1$이고, $a_1=-45$, $a_2=-15$, $a_k>0$(단, k는 3이상의 자연수)이므로

(나) 조건에 부합!

(ⅲ) $d=18$인 경우

$a_{m-1} = -\frac{5d}{2}$이므로 $a_1 = a_{m-1}$

따라서 $m=2$이고 $a_1=-45$, $a_2=-27$, $a_3=-9$, $a_k>0$(단, k는 4이상의 자연수)이므로

(나)조건에 부합!

(ⅳ) $d=10$

$a_{m-3} = -\frac{9d}{2}$이므로 $a_1 = a_{m-3}$

따라서 $m=4$이고 $a_1=-45$, $a_2=-35$, $a_3=-25$, $a_4=-15$, $a_5=-5$,

$a_k>0$(단, k는 6이상의 자연수)이므로 (나) 조건에 모순된다.

(ⅴ) $d=6$인 경우

$a_{m-6} = -\frac{15d}{2}$이므로 $a_1 = a_{m-6}$

따라서 $m=7$이고 $a_1=-45$, $a_2=-39$, $a_3=-33$, $a_4=-27$, $a_5=-21$, $\cdots$, $a_8=-3$

$a_k>0$(단, k는 9이상의 자연수)이므로 (나) 조건에 모순된다.

(vi) $d=2$ 인 경우

$a_{m-21}=-\dfrac{45d}{2}$ 이므로 $a_1=a_{m-21}$

따라서 $m=22$ 이고 $a_1=-45$, $a_2=-43$, $a_3=-41$, $a_4=-39$, $a_5=-37$, $\cdots$, $a_{23}=-1$

$a_k>0$ (단, k 는 24 이상의 자연수)이므로 (나)조건에 모순된다.

그러므로 $d=30$ 또는 $d=18$ 이다.

하지만 수능은 얼마나 빠른시간 내에 정확히 문제를 푸는가를 평가하는 시험이야.
그렇다면 일일이 경우를 확인하지 않아도 풀 수 있는 방법이 없을까?

힌트를 줄게!

- m 이 자연수인 것만을 확인하면 m 의 정확한 값을 구하지 않아도 된다는 점
- $\sum_{k=1}^{n} a_k$ 의 최소를 구하지 않아도 되는 경우가 존재한다는 점

조금 감이 올까?
아래의 풀이와 위의 풀이의 차이점을 곰곰이 잘 생각해봐.

(i) $d=90$ 인 경우 : $a_{m+1}=-\dfrac{d}{2}$ 이므로 $a_1=a_{m+1}$

따라서 $m=0$ 이므로 (가) 조건에 모순!

(ii) $d=30$ 인 경우 : $a_m=-\dfrac{3d}{2}$ 이므로 $a_1=a_m$

따라서 $m=1$ 이고, $a_1=-45$, $a_2=-15$, $a_k>0$ (단, k 는 3 이상의 자연수)이므로 (나) 조건에 부합!

(iii) $d=18$ 인 경우 : a_1 은 $-\dfrac{d}{2}$ 와 홀수의 곱으로 이루어져 있는데 d 가 (ii)에 비해 작아졌으므로 홀수는 커질 것! 즉, m 이 1 보다 커질 것. 따라서 (가) 조건에 부합한다.

$a_1=-45$, $a_2=-27$, $a_3=-9$, $a_k>0$ (단, k 는 4 이상의 자연수)이므로 (나) 부합!

(iv) $d=10$ 인 경우 : (ii), (iii)을 통해 $m>2$ 를 알 수 있으므로 (가)에 부합한다.

$a_1=-45$, $a_2=-35$, $a_3=-25$ 이므로 모든 자연수 n 에 대해 성립하는 (나)에 모순된다.

(v) $d=6$, $d=2$ 인 경우 : $d=6$, $d=2$ 인 경우 모두 (iv)를 통해 (가) 조건에는 부합하지만, 공차 d 가 작아졌으므로 (나)조건에 모순된다는 것을 알 수 있다.

따라서 고려하지 않아도 된다. 그러므로 $d=30$ 또는 $d=18$ 이다.

잘 살펴봐봐! 이전의 풀이과정(i → ii → iii)과의 연계를 이용하면 일일이 계산하지 않아도 배제되는 케이스가 보일거야.

STYLE 03

등비급수의 합 : 첫째항을 유의하자

등비급수는 등비수열에서 얻은 급수를 의미하지. 공통수학에서는 수열의 합을 유한한 범위 내의 합으로 정의하는 반면 미적분에서는 무한한 범위 내의 합으로도 정의해. 함수의 극한으로만 배웠던 $\lim$의 개념이 수열과 합쳐지니 처음 배우는 학생들의 입장에서는 껄끄러운 개념일 수 밖에 없지.
그래도 앞으로 같이 조금씩 공부해보며 급수를 이해해보자.

[2024학년도 6월 모의평가 미적분 30번]

수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n = \begin{cases} -1 & (a_n \le -1) \\ a_n & (a_n > -1) \end{cases}$$

이라 할 때, 수열 $\{b_n\}$은 다음을 만족시킨다.

(가) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}$은 수렴하고 그 합은 -3이다.

(나) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}$은 수렴하고 그 합은 8이다.

$b_3 = -1$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$의 값을 구하시오.[4점]

우리만의 실전 풀이

THINKING!

급수를 정확히 이해하고 있는지부터 시작해볼까?
급수 중 등비수열로 이루어진 급수를 등비급수라고 불러. 또한 등비급수는 수렴하거나 또는 발산하는데,
등비급수의 수렴조건과 등비수열의 수렵조건을 헷갈리는 친구들이 많아.
또한 수렴조건 또한 제대로 알지 못하는 친구들이 많지. 잠깐 정리하고 가자!

등비수열의 수렴조건

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r, 첫째항을 a_1

$a_n = a_1 r^{n-1}$이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n$이 수렴하려면

$$a_1 = 0 \text{ 또는 } -1 < r \le 1$$

$r \le -1$에서 발산하는 이유는

$\lim_{n\to\infty} a_n$이 진동하기 때문이고,

$r > 1$에서 발산하는 이유는

$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ 또는 $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

등비급수의 수렴조건

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r, 첫째항을 a_1

$a_n = a_1 r^{n-1}$이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하려면

$$a_1 = 0 \text{ 또는 } -1 < r < 1$$

$r \le -1$에서 발산하는 이유는

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 진동하기 때문이고,

$r \ge 1$에서 발산하는 이유는

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ 또는 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$

등비수열과 등비급수의 수렴조건의 가장 큰 차이점은 바로 $r=1$일 때, 수렴/발산이 달라진다는 것이야.
이를 잘 인지하고 문제를 살펴보자.

STEP 1 등비급수의 합의 부호 – 첫째항의 부호로 결정

등비수열의 합 공식을 아마도 $S_n = \dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}$으로 외운 친구들이 많을거야.

등비급수의 합은 부분합의 극한이므로 등비급수가 수렴한다고 가정했을 때

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \frac{a_1}{1-r}$$

등비급수의 수렴조건은 $a_1 = 0$ 또는 $-1 < r < 1$이므로

(i) $a_1 = 0 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$

(ii) $a_1 > 0 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n > 0 \quad \because -1 < r < 1$이므로 $1 - r > 0 \ \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \dfrac{a_1}{1-r}\right)$

(iii) $a_1 < 0 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < 0 \quad \because -1 < r < 1$이므로 $1 - r > 0 \ \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \dfrac{a_1}{1-r}\right)$

이를 통해 수렴하는 등비급수에서는 공비 r의 값과 관련없이

첫째항 a_1의 부호와 등비급수의 합 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 부호가 같다는 것을 알 수 있지.

하지만 문제에서는 r을 통해 첫째항을 유추하는 식으로 되어있으므로 r의 정보가 필요하긴 해.

긴말 없이 문제에 들어가 보자.

먼저 $b_3 = -1$이므로 $a_3 \leq -1$이라는 것을 알 수 있어.

이때, r의 대한 정보가 필요한데 그러한 이유는 (가)와 (나)에서 짝수항들의 합,

홀수항들의 합으로 구분해서 제시했기 때문이야. 즉 r의 부호와 상관없이 첫째항의 부호와 등비급수의 합의 부호가 같아. 하지만 r의 정보가 필요한 이유는 r의 부호에 따라 첫째항의 부호가 달라지기 때문이지.

더 자세히 설명해줄게.

$a_3 \leq -1$이므로 $0 < r < 1$이라면 모든 짝수항 a_{2k}(단, k는 자연수)는 음수일 수 밖에 없어.

음수를 무한히 더한다고 해도 양수가 되지 않으므로 (나)에 모순이야. ($r=0$인 경우도 동일)

따라서 우리는 $-1 < r < 0$이라는 것을 알 수 있어.

즉, 모든 짝수항 a_{2k}는 양수라는 것을 알 수 있고, $b_{2k} = a_{2k}$ (단, k는 자연수) $(\because a_{2k} > -1)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = 8$$

STEP 2 **수열의 합에 속지말자 – 헷갈리는 수열의 합**

두 수열의 합 $\sum_{k=1}^{2n-1} a_k$와 $\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1}$이 제시되어 있다고 하자.

두 수열의 합은 서로 같을까? 다르다면 차이점을 설명할 수 있어?

사실 나는 수열의 합을 처음 배우고, 급수를 배울 때까지 두 수열이 서로 헷갈렸어.

두 수열의 차이점을 눈에 잘 띄게 하기 위해서는 전개를 해보면 돼.

$$\sum_{k=1}^{2n-1} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} = a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1}$$

두 수열의 합의 차이점이 가시적으로 보이지!

그렇다면 이제 극한을 덧붙여 급수일 때를 알아볼게.

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{2n-1} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} = a_1 + a_3 + a_5 + \cdots \qquad \cdots\cdots ㉡$$

첫 번째 급수는 모든 항에 대한 급수이지. 반면, 두 번째 급수는 홀수항에 대한 급수야.
어떤 점이 다른지 알겠지? 이제 문제의 (가), (나)조건을 확인해볼까?
(가)의 급수를 ㉡의 급수와 조금이라도 헷갈렸다면 위의 내용을 정독해줘.
STEP 1에서 $-1 < r < 0$ 와 $b_{2k} = a_{2k}$ (단, k는 자연수)를 확인했어.
그럼 홀수항일 때를 고려해보자. $b_3 = -1$ 이므로 $b_1 = -1$ 이야. ($\because a_3 = r^2 a_1 \leq -1$)
이때 우리는 b_5 가 -1 인지 아닌지가 궁금하겠지.

(ⅰ) $b_5 = -1$ 인 경우 : $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} = -3$, $b_1 + b_3 + b_5 + \sum_{k=4}^{\infty} a_{2k-1} = -3$ → $\sum_{k=4}^{\infty} a_{2k-1} = 0$

STEP 1과 동일한 논리로 음수를 무한히 더한다고 0 이 되지 않으므로 (가) 조건에 모순이야.

(ⅱ) $b_5 \neq -1$ 인 경우 : $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} = -3$, $b_1 + b_3 + \sum_{k=3}^{\infty} a_{2k-1} = -3$ → $\sum_{k=3}^{\infty} a_{2k-1} = -1$

따라서 (가) 조건에 알맞아.

STEP 3 등비급수의 계산 – 방법의 일관성

등비급수의 계산은 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-r}$ 으로 일관성을 갖고 계산하자.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = 8 \rightarrow \frac{a_2}{1-r^2} = 8 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$\sum_{k=3}^{\infty} a_{2k-1} = -1 \rightarrow \frac{a_5}{1-r^2} = -1 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡에서 ㉠을 나누면 $r^3 = -\frac{1}{8}$ 이고 따라서 $r = -\frac{1}{2}$ 이야.

㉠에 $r = -\frac{1}{2}$ 을 대입하면 $a_2 = 6$ 이야.

따라서 $a_n = -12 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 이고, $|a_n| = 12 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} 12 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{12}{1-\frac{1}{2}} = 24$$

따라서 답은 24 야. **'일관성'** 정말 중요한 단어야.
등비급수를 풀이할 때 STYLE 03에서 살펴본 내용을 꼭 기억해줘!

SEOL:NAME, The Signature [테크닉 총정리]

CHECK 01 등차수열의 일반항 작성

1. $a_n = dn$을 작성한다. (아직은 일방항이 완성되기 이전이다.)
2. 제시된 a_k의 항을 좌변에 대입하고 $n = k$을 대입한다.
3. 머릿속으로 상수항을 계산한 후 $a_n = dn + C$을 작성한다.

CHECK 02 등차수열의 합 - 수열의 합 방식

등차수열의 합은 수열의 합과 의미가 동일하다는 것

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} dk + a_1 - d$$

$$= \frac{n(n-1)}{2}d + (a_1 - d)n$$

CHECK 03 등차수열의 합 - 등차중항의 합 방식

(i) n이 홀수일 때 (즉 $n = 2m-1$, m은 자연수)

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = n \times a_m$$

(ii) n이 짝수일 때 (즉 $n = 2m$, m은 자연수)

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = n \times \frac{a_m + a_{m+1}}{2}$$

CHECK 04 분수항의 정의

분모가 2인 분수항을 임의로 정의하면 더 편리할 때가 존재한다.

n이 짝수일 때 (즉 $n = 2m$, m은 자연수)

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = n \times \frac{a_m + a_{m+1}}{2} = n \times a_{\frac{2m+1}{2}}$$

PRACTICE
기출문제 ATTACK

001 [2020학년도 7월 전국연합학력평가 가형 17번]

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

라 할 때, S_n, T_n은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $S_7 = T_7$
(나) 6 이상의 모든 자연수 n에 대하여 $S_n + T_n = 84$이다.

T_{15}의 값은? [4점]

① 96 ② 102 ③ 108 ④ 114 ⑤ 120

002 [2022학년도 3월 전국연합학력평가 13번]

첫째항이 양수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$|S_3| = |S_6| = |S_{11}| - 3$$

을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$의 첫째항의 합은? [4점]

① $\frac{31}{5}$　② $\frac{33}{5}$　③ 7　④ $\frac{37}{5}$　⑤ $\frac{39}{5}$

003 [2022학년도 7월 전국연합학력평가 21번]

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\sum_{k=1}^{2n} a_k = 17n$

(나) $|a_{n+1} - a_n| = 2n - 1$

$a_2 = 9$일 때, $\sum_{n=1}^{10} a_{2n}$의 값을 구하시오. [4점]

004 [2022학년도 10월 전국연합학력평가 15번]

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 두 자연수 p, q에 대하여 $S_n = pn^2 - 36n + q$일 때, S_n이 다음 조건을 만족시키도록 하는 p의 최솟값을 p_1이라 하자.

임의의 두 자연수 i, j에 대하여 $i \neq j$이면 $S_i \neq S_j$이다.

$p = p_1$일 때, $|a_k| < a_1$을 만족시키는 자연수 k의 개수가 3이 되도록 하는 모든 q의 값의 합은? [4점]

① 372 ② 377 ③ 382 ④ 387 ⑤ 392

005 [2023학년도 6월 모의평가 12번]

공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{10}의 값은? [4점]

(가) $a_5 \times a_7 < 0$

(나) $\sum_{k=1}^{6} |a_{k+6}| = 6 + \sum_{k=1}^{6} |a_{2k}|$

① $\frac{21}{2}$ ② 11 ③ $\frac{23}{2}$ ④ 12 ⑤ $\frac{25}{2}$

006 [2024학년도 9월 모의평가 12번]

첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+1 & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_2+a_4=40$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은?

① 172 ② 175 ③ 178 ④ 181 ⑤ 184

007 [2019학년도 4월 전국연합학력평가 21번 (나형)]

함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}-1}{\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}+1}\quad(k>0)$$

에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases}(f\circ f)(x) & (x=k)\\ (x-k)^2 & (x\neq k)\end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속이다. 상수 k에 대하여 $(g\circ f)(k)$의 값은? [4점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

008 [2021학년도 대학수학능력시험 18번 (가형)]

실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)x^{2n+1}+2x}{3x^{2n}+1}$$

라 하자. $(f\circ f)(1)=\frac{5}{4}$가 되도록 하는 모든 a의 값의 합은? [4점]

① $\frac{11}{2}$ ② $\frac{13}{2}$ ③ $\frac{15}{2}$ ④ $\frac{17}{2}$ ⑤ $\frac{19}{2}$

009 [2022학년도 3월 전국연합학력평가 29번]

실수 t에 대하여 직선 $y=tx-2$가 함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x^{2n+1}-1}{x^{2n}+1}$$

의 그래프와 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=a$에서 불연속인 모든 a의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 a_1, a_2, $\cdots$, a_m (m은 자연수)라 할 때, $m\times a_m$의 값을 구하시오. [4점]

기출 ATTACK 정답 및 해설

빠른 정답

1	④	2	①	3	180	4	①	5	③
6	①	7	⑤	8	③	9	28	10	

해 설

001

[정답] ④

조건 (가), (나)에 의하여 $S_7 = T_7$이고 $S_7 + T_7 = 84$이므로 $S_7 = 42$

$S_7 = T_7$이므로 7 이하의 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \geq 0$ ⋯ ㉠

조건 (나)에 의하여 6 이상의 모든 자연수 n에 대하여

$(S_{n+1} + T_{n+1}) - (S_n + T_n) = 0$

$a_{n+1} + |a_{n+1}| = 0$

$a_{n+1} \leq 0$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $0 \leq a_7 \leq 0$이므로 $a_7 = 0$

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자.

$S_7 = \dfrac{7(2a+6d)}{2} = 42$, $a_7 = a + 6d = 0$에서

$a = 12$, $d = -2$

$a_n = 14 - 2n$

$S_{15} = \dfrac{15 \times (24-28)}{2} = -30$

$S_{15} + T_{15} = 84$

따라서 $T_{15} = 84 - (-30) = 114$

002

[정답] ①

수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자. $d \geq 0$이면 수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 양수이므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_n > 0$이 되어 조건을 만족시키지 않는다. 따라서 $d < 0$이어야 한다.

(ⅰ) $S_3 = S_6$인 경우

$\dfrac{3(2a_1+2d)}{2} = \dfrac{6(2a_1+5d)}{2}$에서 $a_1 = -4d$이므로 $S_3 = S_6 = -9d > 0$,

$S_{11}=\dfrac{11(2a_1+10d)}{2}=11d<0$

즉, $S_3=-S_{11}-3$ 에서

$-9d=-11d-3,\ d=-\dfrac{3}{2},\ a_1=-4d=6$

(ii) $S_3=-S_6$ 인 경우

$\dfrac{3(2a_1+2d)}{2}=-\dfrac{6(2a_1+5d)}{2}$ 에서 $a_1=-2d$ 이므로 $S_3=-S_6=-3d>0$

$S_{11}=\dfrac{11(2a_1+10d)}{2}=33d<0$

즉, $S_3=-S_{11}-3$ 에서

$-3d=-33d-3,\ d=-\dfrac{1}{10},\ a_1=-2d=\dfrac{1}{5}$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항의 합은 $6+\dfrac{1}{5}=\dfrac{31}{5}$ 이다.

003

[정답] 180

조건 (가)에 의하여

$a_{2n-1}+a_{2n}=\sum_{k=1}^{2n}a_k-\sum_{k=1}^{2(n-1)}a_k=17n-17(n-1)=17\quad(n\geq 2)$

조건 (나)에 의하여

$|a_{2n}-a_{2n-1}|=2(2n-1)-1=4n-3\quad(n\geq 1)$

(i) $n=2$ 인 경우

$|a_4-a_3|=5$ 이고 $a_3+a_4=17$

$(a_3,\ a_4)=(6,\ 11)$ 또는 $(a_3,\ a_4)=(11,\ 6)$

조건 (나)에 의하여 $|a_3-a_2|=|a_3-9|=3$ 이므로

$a_3=6,\ a_4=11$

(ii) $n=3$ 인 경우

$|a_6-a_5|=9$ 이고 $a_5+a_6=17$

$(a_5,\ a_6)=(4,\ 13)$ 또는 $(a_5,\ a_6)=(13,\ 4)$

조건 (나)에 의하여 $|a_5-a_4|=|a_5-11|=7$ 이므로

$a_5=4,\ a_6=13$

(i), (ii)와 같은 방법을 반복하면 $a_8=15,\ a_{10}=17,\ \cdots,\ a_{20}=27$ 이므로

$\sum_{n=1}^{10}a_{2n}$ 의 값은 첫째항이 9 이고 공차가 2 인 등차수열의 첫째항부터 제10 항까지의 합과 같다.

따라서 $\sum_{n=1}^{10}a_{2n}=\dfrac{10\times(18+9\times 2)}{2}=180$

004

[정답] ①

S_n이 주어진 조건을 만족시키면 $i \neq j$인 임의의 두 자연수 i, j에 대하여 $S_i - S_j \neq 0$이므로

$S_i - S_j = (pi^2 - 36i + q) - (pj^2 - 36j + q) = (i-j)(pi + pj - 36) \neq 0$

따라서 $i + j \neq \dfrac{36}{p}$

$p \leq 4$이면 $i + j = \dfrac{36}{p}$인 서로 다른 두 자연수 i, j가 존재한다.

$p = 5$이면 $i + j = \dfrac{36}{p}$인 서로 다른 두 자연수 i, j가 존재하지 않는다.

따라서 p의 최솟값은 5, 즉 $p_1 = 5$이다.

$p = 5$일 때, $S_n = 5n^2 - 36n + q$이므로 $a_1 = S_1 = q - 31$,

$n \geq 2$일 때, $a_n = S_n - S_{n-1} = 10n - 41$

이때

$a_2 = -21$, $a_3 = -11$, $a_4 = -1$, $a_5 = 9$, $a_6 = 19$, $a_7 = 29$, $\cdots$

$|a_k| < a_1$을 만족시키는 자연수 k의 개수가 3이므로 k의 값은 3, 4, 5이다.

$11 < a_1 \leq 19$, $11 < q - 31 \leq 19$, $42 < q \leq 50$이다.

따라서 모든 q의 값의 합은 $43 + 44 + \cdots + 50 = \dfrac{8 \times (43+50)}{2} = 372$

005

[정답] ③

등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 양수이고 조건 (가)에서 $a_5 \times a_7 < 0$이므로 $a_5 < 0$, $a_7 > 0$

즉, $n \leq 5$일 때 $a_n < 0$이고, $n \geq 7$일 때 $a_n > 0$이다.

이때 조건 (나)에서

$\displaystyle\sum_{k=1}^{6} |a_{k+6}| = 6 + \sum_{k=1}^{6} |a_{2k}|$이므로

$|a_7| + |a_8| + |a_9| + |a_{10}| + |a_{11}| + |a_{12}|$

$= 6 + |a_2| + |a_4| + |a_6| + |a_8| + |a_{10}| + |a_{12}|$

$a_7 + a_9 + a_{11} = 6 - a_2 - a_4 + |a_6|$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 3이므로

$(a_1 + 18) + (a_1 + 24) + (a_1 + 30) = 6 - (a_1 + 3) - (a_1 + 9) + |a_1 + 15|$

$|a_1 + 15| = 5a_1 + 78$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠에서 $a_1 + 15 \geq 0$이면

$a_1 + 15 = 5a_1 + 78$

$4a_1 = -63$

$a_1 = -\dfrac{63}{4} < -15$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $a_1 + 15 < 0$ 이므로 ㉠에서

$-a_1 - 15 = 5a_1 + 78$

$6a_1 = -93$

$a_1 = -\dfrac{31}{2}$

따라서 $a_{10} = a_1 + 9 \times 3 = -\dfrac{31}{2} + 27 = \dfrac{23}{2}$

006

[정답] ①

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a 라 하자. 자연수 a 를 자연수 k 에 대하여 나타내면

(i) $a = 4k - 3$ 일 때

$a_2 = 4k - 2$, $a_3 = 2k - 1$, $a_4 = 2k$

$a_2 + a_4 = 40$ 이므로

$6k - 2 = 40$, $k = 7$ $\therefore$ $a = 25$

(ii) $a = 4k - 2$ 일 때

$a_2 = 2k - 1$, $a_3 = 2k$, $a_4 = k$

$a_2 + a_4 = 40$ 이므로 $3k - 1 = 40$

$3k - 1 = 40$ 인 자연수 k 의 값은 존재하지 않는다.

(iii) $a = 4k - 1$ 일 때

$a_2 = 4k$, $a_3 = 2k$, $a_4 = k$

$a_2 + a_4 = 40$ 이므로

$5k = 40$, $k = 8$ $\therefore$ $a = 31$

(iv) $a = 4k$ 일 때

$a_2 = 2k$, $a_3 = k$

자연수 k 를 자연수 m 에 대하여 나타내면

(1) $k = 2m - 1$ 일 때

$a_4 = 2m = k + 1$, $a_2 + a_4 = 40$ 이므로

$3k + 1 = 40$, $k = 13$ $\therefore$ $a = 52$

(2) $k = 2m$ 일 때

$a_4 = m = \dfrac{k}{2}$, $a_2 + a_4 = 40$ 이므로

$\dfrac{5}{2}k = 40$, $k = 16$ $\therefore$ $a = 64$

이상에서 자연수 a 의 값은 25, 31, 52, 64 이므로 합은 172 이다.

007

[정답] ⑤

$\left|\dfrac{x-1}{k}\right|<1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{k}\right)^{2n}=0$이므로

$1-k<x<1+k$에서

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}-1}{\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

$\left|\dfrac{x-1}{k}\right|>1$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}=\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{k}{x-1}\right)^{2n}=0$$이므로

$x<1-k$ 또는 $x>1+k$에서

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}-1}{\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{k}{x-1}\right)^{2n}}{1+\left(\frac{k}{x-1}\right)^{2n}}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

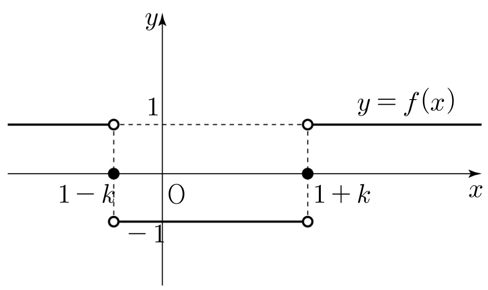
$\left|\dfrac{x-1}{k}\right|=1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{k}\right)^{2n}=1$이므로 $x=1-k$ 또는 $x=1+k$에서

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}-1}{\left(\frac{x-1}{k}\right)^{2n}+1}=\frac{1-1}{1+1}=0$$

따라서

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x<1-k \text{ 또는 } x>1+k)\\ 0 & (x=1-k \text{ 또는 } x=1+k)\\ -1 & (1-k<x<1+k)\end{cases}$$

$y=f(x)$의 그래프는 그림과 같고 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $\lim\limits_{x\to k}g(x)=g(k)$가 성립한다.



$\lim\limits_{x\to k}g(x)=\lim\limits_{x\to k}(x-k)^2=0$, $g(k)=(f\circ f)(k)$이므로 $(f\circ f)(k)=0$

$f(1-k)=f(1+k)=0$이므로 $f(k)=1-k$ 또는 $f(k)=1+k$

$k>0$, $1+k>1$이고 $f(x)$의 치역은 $\{-1, 0, 1\}$이므로 $1+k$는 치역에 속하지 않는다.

$\therefore\ f(k)=1-k$

(ⅰ) $1-k=1$인 경우, $k=0$이므로 조건에 맞지 않는다.

(ⅱ) $1-k=0$인 경우, $k=1$이므로

$$f(x)=\begin{cases} 1 & (x<0 \text{ 또는 } x>2) \\ 0 & (x=0 \text{ 또는 } x=2) \\ -1 & (0<x<2) \end{cases}$$

$f(f(1))=f(-1)=1\neq 0$이므로 조건에 맞지 않는다.

(ⅲ) $1-k=-1$인 경우, $k=2$이므로

$$f(x)=\begin{cases} 1 & (x<-1 \text{ 또는 } x>3) \\ 0 & (x=-1 \text{ 또는 } x=3) \\ -1 & (-1<x<3) \end{cases}$$

$f(f(2))=f(-1)=0$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 $k=2$

$(g\circ f)(k)=g(f(2))=g(-1)=(-1-2)^2=9$

008

[정답] ③

$|x|>1$일 때 $f(x)=\dfrac{(a-2)}{3}x$

$|x|<1$일 때 $f(x)=2x$

$f(1)=\dfrac{a}{4}$, $f(-1)=-\dfrac{a}{4}$

$(f\circ f)(1)=\dfrac{5}{4}=f\left(\dfrac{a}{4}\right)$

(ⅰ) $\left|\dfrac{a}{4}\right|>1$이면 : $f\left(\dfrac{a}{4}\right)=\dfrac{a-2}{3}\times\dfrac{a}{4}=\dfrac{a^2-2a}{12}=\dfrac{5}{4}$에서 $a^2-2a-15=0$이고 조건에 맞는 a의 값은 5

(ⅱ) $\left|\dfrac{a}{4}\right|<1$이면 : $f\left(\dfrac{a}{4}\right)=\dfrac{a}{2}=\dfrac{5}{4}$에서 $a=\dfrac{5}{2}$

(ⅲ) $\dfrac{a}{4}=1$이면 즉 $a=4$이면 ; $f\left(\dfrac{a}{4}\right)=f(1)=\dfrac{a}{4}=1\neq\dfrac{5}{4}$

(ⅳ) $\dfrac{a}{4}=-1$ 이면 즉 $a=-4$이면 : $f\left(\dfrac{a}{4}\right)=f(-1)=-\dfrac{a}{4}=1\neq\dfrac{5}{4}$

이므로 조건에 맞지 않는다. 이상에서 모든 a의 값의 합은 $5+\dfrac{5}{2}=\dfrac{15}{2}$

009

[정답] 28

함수 $f(x)$를 구하면 다음과 같다.

(ⅰ) $|x|<1$이면 $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$이므로 $f(x) = -1$

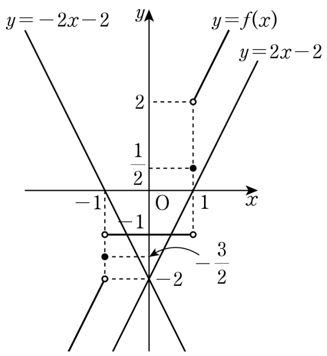
(ⅱ) $x=1$이면 $\lim_{n\to\infty} x^n = 1$이므로 $f(x) = \frac{1}{2}$

(ⅲ) $x=-1$이면 $\lim_{n\to\infty} x^{2n+1} = -1$이고 $\lim_{n\to\infty} x^{2n} = 1$이므로 $f(x) = -\frac{3}{2}$

(ⅳ) $|x|>1$이면 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^n = 0$이므로

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{2x-\left(\frac{1}{x}\right)^{2n}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^{2n}} = 2x, \text{ 그러므로 } f(x) = \begin{cases} -1 & (-1<x<1) \\ \frac{1}{2} & (x=1) \\ -\frac{3}{2} & (x=-1) \\ 2x & (x<-1 \text{ 또는 } x>1) \end{cases}$$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



직선 $y=tx-2$는 점 $(0,\ -2)$를 지나므로 기울기 t의 값에 따른 교점의 개수 $g(t)$를 구해 보면

$-1 \le t < -\frac{1}{2}$ 또는 $-\frac{1}{2} < t \le 0$일 때 $g(t)=0$

$t<-1$ 또는 $t=-\frac{1}{2}$ 또는 $0<t\le 1$ 또는 $t=2$ 또는 $t \ge 4$일 때 $g(t)=1$

$1<t<2$ 또는 $2<t<\frac{5}{2}$ 또는 $\frac{5}{2}<t<4$일 때 $g(t)=2$

$t=\frac{5}{2}$일 때 $g(t)=3$

즉 함수 $g(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값은 $-1,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ 1,\ 2,\ \frac{5}{2},\ 4$이므로 $m=7,\ a_m=4$

따라서 $m\times a_m = 7\times 4 = 28$