NUMBER A CLASS

1. 자연수 n과 실수 x에 대하여 x^n-2의 네제곱근 중 실수의 개수를 $f(x)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $n=2$일 때, $f(3)=2$이다.
ㄴ. $n=3$일 때, $f(m)=0$을 만족시키는 자연수 m의 개수는 1이다.
ㄷ. $n=2k$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$일 때, $f(x)=1$을 만족시키는 x의 개수는 2이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2. $24^a=2$, $24^b=3$일 때, $8^{\frac{1}{1-b}}+8^{\frac{a+b}{1-b}}$의 값을 구하시오.
(단, a, b는 실수이다.)

3. 곡선 $y=\left|\log_2(-x)\right|$ 를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 곡선을 $y=f(x)$ 라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 와 곡선 $y=\left|\log_2(-x+8)\right|$ 이 세 점에서 만나고 세 교점의 x좌표의 합이 18 일 때, k의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

4. 두 양수 a, k $(k \neq 1)$에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2\log_k(x-k+1)+2^{-a} & (x \geq k) \\ 2\log_{\frac{1}{k}}(-x+k+1)+2^{-a} & (x < k) \end{cases}$$

가 있다. $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 방정식 $f(x)=g(x)$의 해는 $-\frac{3}{4}$, t, $\frac{5}{4}$이다. $30(a+k+t)$의 값을 구하시오. (단, $0<t<1$)

5. 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\cos A = -\frac{1}{4}$

(나) $\sin B + \sin C = \frac{9}{8}$

삼각형 ABC의 넓이가 $\sqrt{15}$일 때, 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

6. 자연수 n에 대하여 $\frac{n-1}{6}\pi \le x \le \frac{n+2}{6}\pi$에서 함수

$$f(x) = \left|\sin x - \frac{1}{2}\right|$$

의 최댓값을 $g(n)$이라 하자. 40 이하의 자연수 k에 대하여 $g(k)$가 무리수가 되도록 하는 모든 k의 값의 합은?

① 115 ② 117 ③ 119 ④ 121 ⑤ 123

7. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}2a_n & (a_n \le 19)\\ a_n-9 & (a_n>19)\end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_5=32$가 되도록 하는 서로 다른 모든 a_1의 합은?

① 121 ② 124 ③ 127
④ 130 ⑤ 133

8. 첫째항이 -20이고 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$이 있다. 다음 조건을 만족시키는 등차수열 $\{b_n\}$에 대하여 b_1의 최댓값을 구하시오.

(가) 수열 $\{b_n\}$의 모든 항은 정수이고 공차는 -6이다.
(나) $a_nb_n>0$을 만족시키는 n의 값이 3개만 존재한다.

9. $a_1=6$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}2-a_n & (a_n\geq 0)\\ a_n+p & (a_n<0)\end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_4=0$이 되도록 하는 모든 실수 p의 값의 합을 구하시오.

10. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n}=b_n+2$
(나) $a_{2n+1}=b_n-1$
(다) $b_{2n}=3a_n-2$
(라) $b_{2n+1}=-a_n+3$

$a_{48}=9$이고 $\sum_{n=1}^{63}a_n-\sum_{n=1}^{31}b_n=155$일 때, b_{32}의 값을 구하시오.

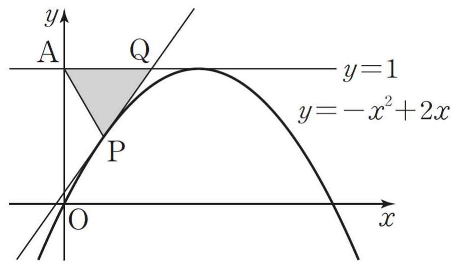
11. 다항함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 a 에 대하여 $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-5x}{x^2-4}$ 의 값이 존재한다.

(나) $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{f(x)} - 3x + 1 \right)$ 의 값이 존재한다.

$f(3)$ 의 값을 구하시오.

12. 그림과 같이 실수 t $(0 < t < 1)$ 에 대하여 함수 $f(x) = -x^2 + 2x$ 의 그래프 위의 점 $\mathrm{P}(t,\, f(t))$ 에서의 접선과 직선 $y = 1$ 이 만나는 점을 Q 라 하자. 점 $\mathrm{A}(0,\, 1)$ 에 대하여 삼각형 APQ 의 넓이를 $S(t)$ 라 할 때, $\lim_{t \to 1-} \frac{S(t)}{(t-1)^2}$ 의 값은?



① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

13. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{2}x-3 & (x<0) \\ \dfrac{1}{2}x+1 & (x \geq 0) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $g(x)$는 $g(x)=f(x)+|f(x)|+k$이다. 함수 $|g(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 k의 값은?

① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

14. $f(0)=-1$인 일차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (\alpha \leq x \leq \beta) \\ \dfrac{4}{f(x)} & (x<\alpha,\ x>\beta) \end{cases}$$

로 정의하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고 $y=g(x)$의 그래프가 제2사분면을 지나지 않을 때, $\dfrac{\beta}{\alpha}$의 값은? (단, $\alpha<\beta,\ \alpha \neq 0$)

① -9 ② -7 ③ -5
④ -3 ⑤ -1

15. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 도함수가 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x \le 2$일 때, $f(x) = ax^2 + bx$ (a, b는 자연수)이다.
(나) 2이상의 임의의 서로 다른 두 실수 x_1, $x_2 (x_1 < x_2)$에 대하여 $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le 9$이다.

$f(4)$의 최댓값을 구하시오.

16. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(3) = 0$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $(x+3)f(x) \ge 0$이다.

함수 $f(x)$의 극댓값은?

① 30 ② 32 ③ 34
④ 36 ⑤ 38

17. 다항함수 $f(x)$가 $x_1 < x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x_1) < f(x_2)$
(나) $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq 3$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 곡선 $y=x^2$과 한 점에서만 만날 때, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① $-\dfrac{5}{4}$ ② -1 ③ $-\dfrac{3}{4}$

④ $-\dfrac{1}{2}$ ⑤ $-\dfrac{1}{4}$

18. 다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(2)$의 최댓값을 구하시오. [4점]

(가) $x<0$인 모든 실수 x에 대하여 $\{f(x)\}^2 \geq \{f(-1)\}^2$이다.
(나) $x \geq 0$인 모든 실수 x에 대하여 $\{f(x)\}^2 \geq \{f(3)\}^2$이다.
(다) 점 $(-1,\ f(-1))$을 지나고 곡선 $y=f(x)$에 접하는 모든 접선의 기울기는 항상 양수이다.

19. 최고차항의 계수가 1 인 사차함수 $f(x)$ 가 있다. 실수 t 에 대하여 함수 $|f(x)-t|$ 가 미분가능하지 않은 서로 다른 점의 개수를 $g(t)$ 라 할 때, 함수 $f(x)$, $g(t)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $f'(x)=0$ 의 실근은 $1,\ 4$ 뿐이다.
> (나) 함수 $g(t)$ 는 $t=2$ 와 $t=-25$ 에서만 불연속이다.
> (다) 방정식 $f(x)=0$ 은 4 보다 큰 실근을 갖는다.

$f(-1)$ 의 값은?

① 41 ② 44 ③ 47
④ 50 ⑤ 53

20. 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 1 에서 $t\,(t>1)$ 까지 변할 때의 평균변화율을 $g(t)$ 라 정의할 때, 함수 $g(t)$ 는 $t=2$ 에서 극댓값 0 을 갖는다. 함수 $g(t)$ 의 최솟값이 존재할 때, 방정식 $f(x)=f(1)$ 의 서로 다른 실근의 합의 최솟값을 구하시오.

21. 실수 t와 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=f(t)$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자. t에 대한 방정식 $g(t)=3$의 서로 다른 실근이 $t=1$, $t=3$, $t=5$의 3개뿐일 때,

$$\lim_{t\to a-} g(t)+\lim_{t\to a+} g(t)\neq 2g(a)$$

를 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합을 구하시오.

22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 양수 k에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\frac{f(x)+|f(x)-k|}{2}$$

라 하자. 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=0$에서만 미분가능하지 않다.
(나) $g(0)=g(2)$
(다) $\int_0^2 |f(x)-g(x)|\,dx=8$

$g(1)+g(-1)$의 값을 구하시오.

23. 두 함수 $h(x)=\dfrac{|f(x)-g(x)|+f(x)+g(x)}{2}$ $f(x)=x^3+2ax^2+3x+1$, $g(x)=2x+1$ 에 대하여 함수 $h(x)$ 를 라 하자. 함수 $h(x)$ 가 오직 한 점에서만 미분가능하지 않을 때, $h(2)$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 23　② 25　③ 28　④ 30　⑤ 33

24. 양수 a와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x \{f'(t+a)\times f'(t-a)\}dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

함수 $g(x)$는 $x=\dfrac{1}{2}$과 $x=\dfrac{13}{2}$에서만 극값을 갖는다

$f(0)=-\dfrac{1}{2}$일 때, $a\times f(1)$의 값을 구하시오.

25. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=\int_{-1}^{x} f(t)dt$가

다음 조건을
만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)<0$이고, $f(0)=1$이다. (나) $g(0)=g(2)=15$ (다) 함수 $g(x)$의 최댓값은 16이다.

$\int_{-1}^{2} \lvert f(x) \rvert dx$의 값을 구하시오.

26. 이차함수 $f(x)=(x-a)(x-b)$가 모든 실수 t에 대하여

$$\int_{3-t}^{3} f(x)dx+\int_{3+t}^{3} f(x)dx=0$$

을 만족시킨다. 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 곡선 $y=f(x)$ 와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자. $S_2=2S_1$일 때, $f(7)$의 값을 구하시오. $(단, 0<a<b)$

27. 함수 $f(x)=x^3+2x-2$의 역함수를 $g(x)$라 하자.

$\int_1^2 f(x)dx+\int_1^{10} g(x)dx$를 구하면?

① 17 ② 19 ③ 21
④ 23 ⑤ 25

28. 함수 $f(x)=\begin{cases} -3x^2 & (x<1) \\ 2(x-3) & (x\ge 1)\end{cases}$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x (t-1)f(t)dt$$

라 할 때, 실수 t에 대하여 직선 $y=t$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $h(t)$라 하자.

$$\left|\lim_{t\to a+}h(t)-\lim_{t\to a-}h(t)\right|=2$$

를 만족시키는 모든 실수 a에 대하여 $|a|$의 값의 합을 S라 할 때, $30S$의 값을 구하시오.

29. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 양수 a에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = |(x+a)f(x)|$$

라 할 때, 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=1$에서만 미분가능하지 않다. (나) $x>k$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $g(x)>27$이 성립하도록 하는 실수 k의 최솟값은 2이다.

$f(4)$의 값을 구하시오.

30. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 위치는 각각

$$f(t) = t^3 - 9t^2 + 24t, \ \ g(t) = \frac{3}{2}t^2 - at$$

이다. 점 P의 속도가 최소가 되는 시각과 점 Q가 출발 후 운동 방향을 바꾸는 시각이 서로 같을 때, 상수 a의 값을 구하시오.

31. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\int_0^x |f'(t)+12|\,dt$$

일 때, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극값을 갖는다.
(나) 함수 $g'(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$f'(0)$의 값이 최대일 때의 함수 $f(x)$에 대하여 $\int_{-1}^{1} xf'(x)dx$의 값은?

① -12 ② -10 ③ -8
④ -6 ⑤ -4

32. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(0 \le t \le 8)$에서의 속도 $v(t)$가 다음과 같다.

$$v(t)=\begin{cases} 2t & (0 \le t < 2) \\ -2t+8 & (2 \le t < 6) \\ 2t-16 & (6 \le t \le 8) \end{cases} \quad 0 < x < 8$$

인 실수 x에 대하여 점 P가 시각 $t=0$에서 $t=x$까지 움직인 거리, 시각 $t=x$에서 $t=8$까지 움직인 거리, 중에서 최소인 값을 $f(x)$라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른
것은?

<보 기>

ㄱ. $f(4)=8$

ㄴ. $f(6)-f(2)=\int_2^6 v(t)dt$

ㄷ. 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 미분가능 하다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

33. 일차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \int_0^x (x-2)f(s)ds$$

라 하자. 실수 t에 대하여 직선 $y=tx$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 점의 개수를 $h(t)$라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $g(x)$에 대하여 $g(4)$의 값의 합을 구하시오.

$g(k)=0$을 만족시키는 모든 실수 k에 대하여 함수 $h(t)$는 $t=-k$에서 불연속이다.

34. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$와 실수 a에 대하여 함수 $F(x)$를

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

라 하자. 함수 $y=|F(x)|$가 미분가능하지 않은 실수 x의 개수가 2가 되도록 하는 모든 a의 값들의 집합을 A라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f(x)=x^3$이면 집합 A는 0이 아닌 실수 전체의 집합이다.
ㄴ. $f(x)=(x-1)(x-3)(x-5)$이면 집합 A에 속하는 가장 작은 자연수는 3이다.
ㄷ. $f(x)=x(x-1)^2$이면 집합 A에 속하지 않는 실수의 개수는 2이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ