제 2 교시

수학 영역

KSM

5지선다형

1. $2\times16^{\frac{1}{2}}$ 의 값은? [2점]

① $2\sqrt{2}$ ② 4 ③ $4\sqrt{2}$ ④ 8 ⑤ $8\sqrt{2}$

2. $\lim_{x\to2}\frac{\cancel{(x-2)}(x^3+1)}{\cancel{x-2}}$ 의 값은? [2점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

3. $4\cos\frac{\pi}{3}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 1 ④ $\sqrt{2}$ ⑤ 2

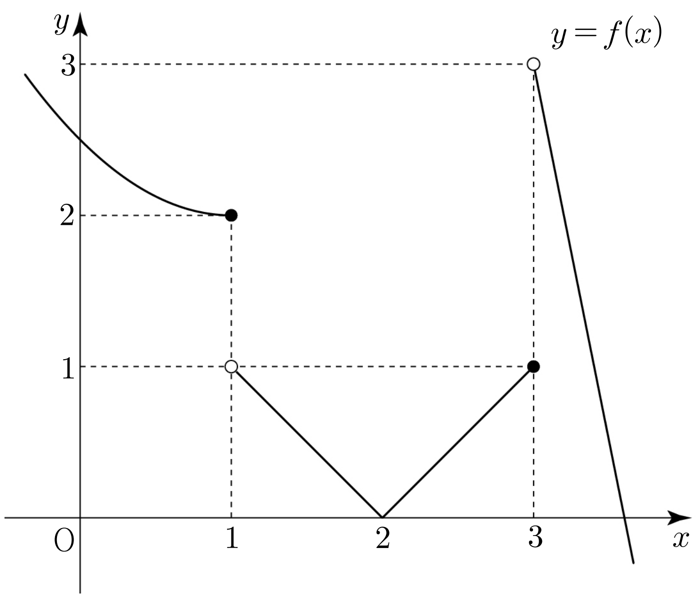
4. 네 수 a, 4, b, 10 이 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $a+2b$ 의 값은? [3점]

1 7

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

1+14

5. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



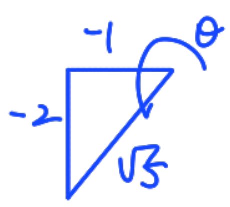
$\lim\limits_{x\to1-}f(x)+\lim\limits_{x\to3+}f(x)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$2+3=5$

6. $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여 $\tan\theta=2$일 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ $-\frac{1}{5}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{5}$



$\frac{-1}{\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

7. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{5}(2a_k-1)^2=61,\ \sum_{k=1}^{5}a_k(a_k-4)=11$$

일 때, $\sum_{k=1}^{5}a_k^2$의 값은? [3점]

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

$\Sigma(4a_k^2-4a_k+1)=61$

$-\ \Sigma(a_k^2-4a_k)=11$

$\Sigma 3a_k^2+5=50$

$\Sigma a_k^2=15$

8. $0 \le x \le 2\pi$ 일 때, 방정식 $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$ 의 모든 해의 합은? [3점]

① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{3}{4}\pi$ ③ π ④ $\frac{5}{4}\pi$ ⑤ $\frac{3}{2}\pi$

$(2s-1)(s+2)=0$

$s=\frac{1}{2}$

π

9. 두 양수 m, n 에 대하여

$$\log_2\left(m^2+\frac{1}{4}\right)=-1, \ \log_2 m = 5+3\log_2 n$$

일 때, $m+n$ 의 값은? [3점]

① $\frac{5}{8}$ ② $\frac{11}{16}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{13}{16}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

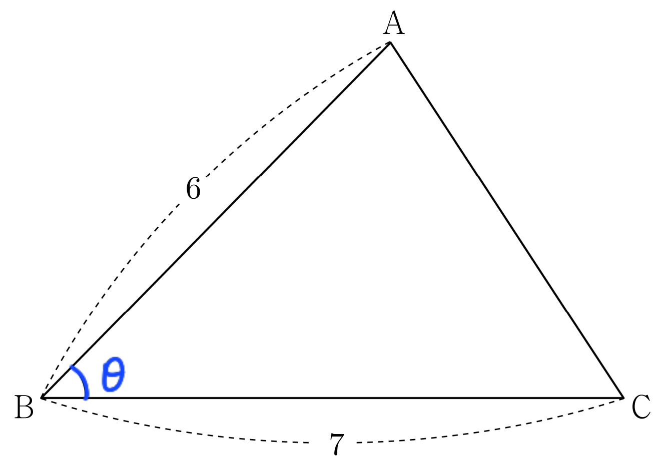
$m^2+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$, $m^2=\frac{1}{4}$, $m=\frac{1}{2}$

$\log_2 m = \log_2 32 + \log_2 n^3$

$-1 = 5 + 3\log_2 n$, $\log_2 n = -2$, $n=\frac{1}{4}$

10. $\overline{AB}=6$, $\overline{BC}=7$ 인 삼각형 ABC 가 있다. 삼각형 ABC 의 넓이가 15 일 때, $\cos(\angle ABC)$ 의 값은? (단, $0 < \angle ABC < \frac{\pi}{2}$) [3점]

① $\frac{\sqrt{21}}{7}$ ② $\frac{2\sqrt{6}}{7}$ ③ $\frac{3\sqrt{3}}{7}$ ④ $\frac{\sqrt{30}}{7}$ ⑤ $\frac{\sqrt{33}}{7}$



$\frac{1}{2}\times 6 \times 7 \times \sin\theta = 15$

$\sin\theta = \frac{5}{7}$

$\cos\theta = \frac{2\sqrt{6}}{7}$

11. 첫째항이 3 이고 공비가 1 보다 큰 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.

$$\frac{S_4}{S_2} = \frac{6a_3}{a_5}$$

일 때, a_7 의 값은? [3점]

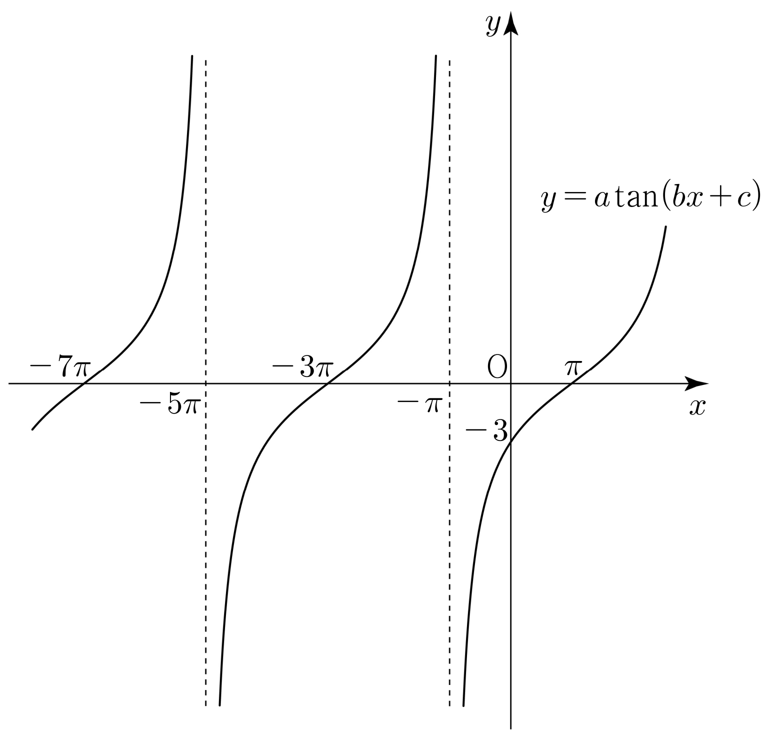
① 24　② 27　③ 30　④ 33　⑤ 36

$1+r^2 = \frac{6}{r^2}$

$r^4+r^2-6=0$

$r^2=2$, $a_7=ar^6=3\cdot2^3=24$

12. 세 양수 a, b, c에 대하여 함수 $y=a\tan(bx+c)$의 그래프가 그림과 같을 때, $a\times b\times c$의 값은? (단, $0<c<\pi$) [3점]



① $\frac{9}{16}\pi$　② $\frac{5}{8}\pi$　③ $\frac{11}{16}\pi$　④ $\frac{3}{4}\pi$　⑤ $\frac{13}{16}\pi$

$\frac{\pi}{b}=4\pi$, $b=\frac{1}{4}$, $y=a\tan\frac{1}{4}(x+4c)$

$-4c=-3\pi$, $c=\frac{3}{4}\pi$

$(0,-3) \Rightarrow -a=-3$, $a=3$

$a\times b\times c=\frac{9}{16}\pi$

13. 첫째항이 2 인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} 2a_n-1 & (a_n<8) \\ \dfrac{1}{3}a_n & (a_n\geq 8) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{16} a_k$ 의 값은? [3점]

① 78 ② 81 ③ 84 ④ 87 ⑤ 90

2
3
5
9
3
5
9
3
5

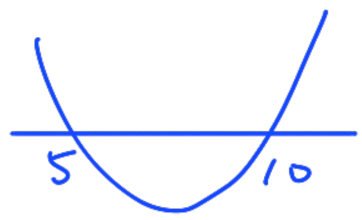
17

17×5+2=87

14. $4\leq n\leq 12$ 인 자연수 n 에 대하여 $n^2-15n+50$ 의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$ 이라 하자. $f(n)=f(n+1)$ 을 만족시키는 모든 n 의 값의 합은? [4점]

① 15 ② 17 ③ 19 ④ 21 ⑤ 23

$(n-5)(n-10)$



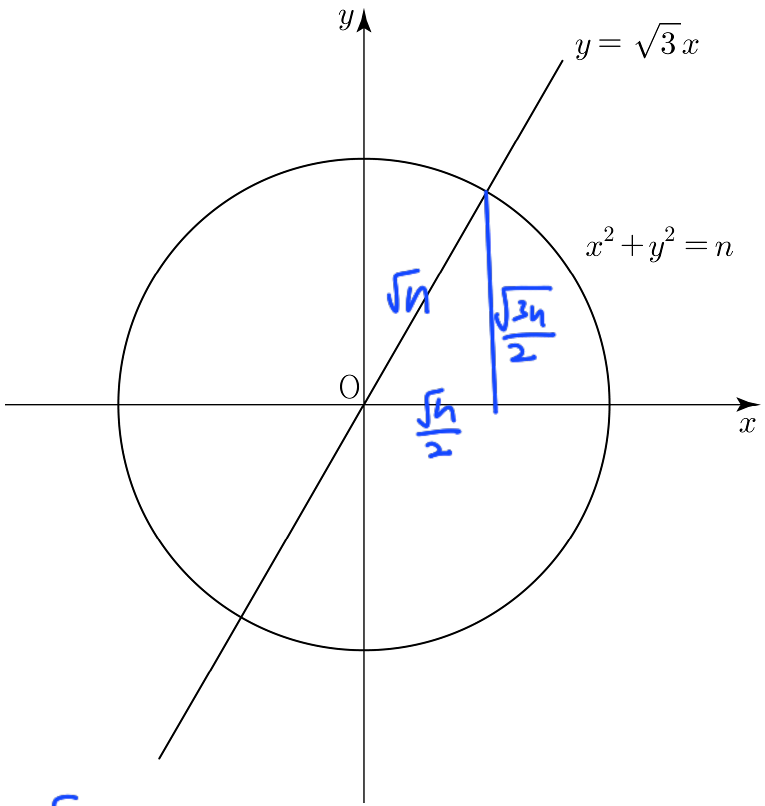
4 5 6 7 8 9 10 11 12
2 1 0 1 0 1 1 1 2

$n=9, 10$

$9+10=19$

15. 자연수 n에 대하여 원 $x^2+y^2=n$이 직선 $y=\sqrt{3}x$와 제1사분면에서 만나는 점의 x좌표를 x_n이라 하자.
$\sum_{k=1}^{80} \frac{1}{x_k+x_{k+1}}$ 의 값은? [4점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16



$x_n = \frac{\sqrt{n}}{2}$

$\sum_{k=1}^{80} \frac{1}{\frac{\sqrt{k}}{2}+\frac{\sqrt{k+1}}{2}} = \sum_{1}^{80} \frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$

$= -2\sum_{1}^{80}(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})$

$= -2(1-9) = 16$

16. 세 양수 a, b, c가

$$2^a = 3^b = c,\ a^2+b^2 = 2ab(a+b-1)$$

을 만족시킬 때, $\log_6 c$의 값은? [4점]

① $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ④ 1 ⑤ $\sqrt{2}$

$a^2+b^2+2ab = 2ab(a+b)$

$(a+b)^2 = 2ab(a+b)$, $a+b = 2ab$

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} = 2$

$2 = c^{\frac{1}{a}}$

$3 = c^{\frac{1}{b}}$) $6 = c^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = c^2$

$\log_6 6 = 2\log_6 c$, $\log_6 c = \frac{1}{2}$

17. 모든 항이 양수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_4+a_6의 최솟값은? [4점]

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$이다.
(나) $a_3\times a_{22}=a_7\times a_8+10$

등차

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

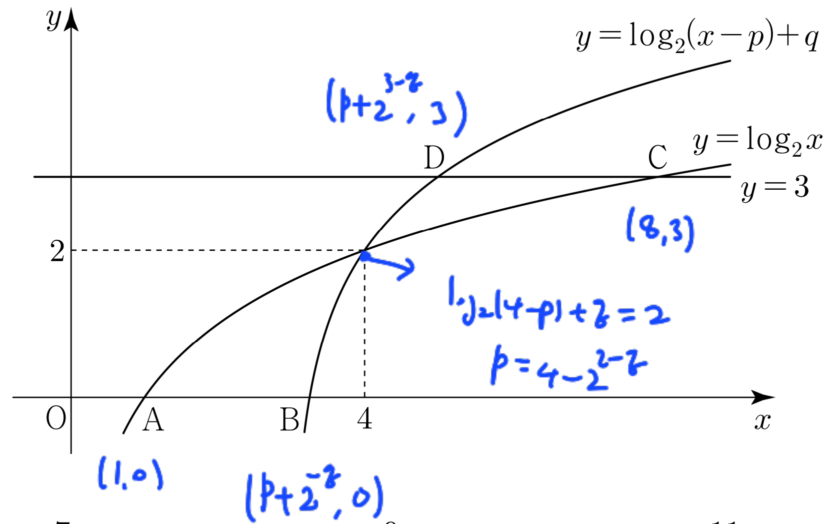
$(a+2d)(a+21d)=(a+6d)(a+7d)+10$

$23ad = 13ad+10,\ ad=1$

$a_4+a_6 = 2a_5 = 2a+8d$

$\geq 2\sqrt{16ad} = 8$

18. 그림과 같이 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_2(x-p)+q$가 점 $(4,\ 2)$에서 만난다. 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_2(x-p)+q$가 x축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=3$과 만나는 점을 각각 C, D라 하자. $\overline{\mathrm{CD}}-\overline{\mathrm{BA}}=\frac{3}{4}$일 때, $p+q$의 값은? (단, $0<p<4$, $q>0$) [4점]



① $\frac{7}{2}$ ② 4 ③ $\frac{9}{2}$ ④ 5 ⑤ $\frac{11}{2}$

$\overline{CD}-\overline{BA}=(8-p-2^{3-q})-(p+2^{-q}-1)$

$=(4+2^{2-q}-2^{3-q})-(3+2^{-q}-2^{2-q})$

$=1+(4-8-1+4)2^{-q}=\frac{3}{4}$

$-2^{-q}=-\frac{1}{4}$ $\quad q=2,\ p=3$) $p+q=5$

19. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 네 수 a_1, a_3, a_5, a_7은 이 순서대로 공비가 양수인 등비수열을 이룬다.
$a \quad ar \quad ar^2 \quad ar^3$

(나) 8 이하의 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \times a_{9-n} = 75$이다.

$a_1 + a_2 = \frac{10}{3}$, $\sum_{k=1}^{8} a_k = \frac{400}{3}$ 일 때, $a_3 + a_8$의 값은? [4점]

① $\frac{110}{3}$ ② 40 ③ $\frac{130}{3}$ ④ $\frac{140}{3}$ ⑤ 50

$a_1 a_8 = 75$
$a_2 a_7 = 75$
$a_3 a_6 = 75$
$a_4 a_5 = 75$

$a_8 = \frac{75}{a}$, $a_6 = \frac{75}{ar}$, $a_4 = \frac{75}{ar^2}$, $a_2 = \frac{75}{ar^3}$

$a + \frac{75}{ar^3} = \frac{10}{3}$

$a(1+r+r^2+r^3) + \frac{75}{ar^3}(1+r+r^2+r^3) = \frac{400}{3}$

$(1+r+r^2+r^3)\left(a + \frac{75}{ar^3}\right) = \frac{400}{3}$

$1+r+r^2+r^3 = 40$, $r=3$, $a + \frac{75}{27a} = \frac{10}{3}$

$27a^2 + 75 = 90a$

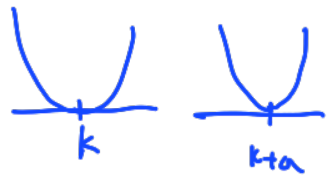
$9a^2 - 30a + 25 = 0$

$(3a-5)^2 = 0$, $a = \frac{5}{3}$. $a_3 + a_8$
$= ar + \frac{75}{a}$
$= 5 + 45 = 50$

20. 이차함수 $f(x) = (x-k)^2\,(k>0)$이 있다. 양수 a에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \le 3) \\ kf(x-a) & (x > 3) \end{cases}$$

→ 이차함수 그래프 폭 결정



이 다음 조건을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

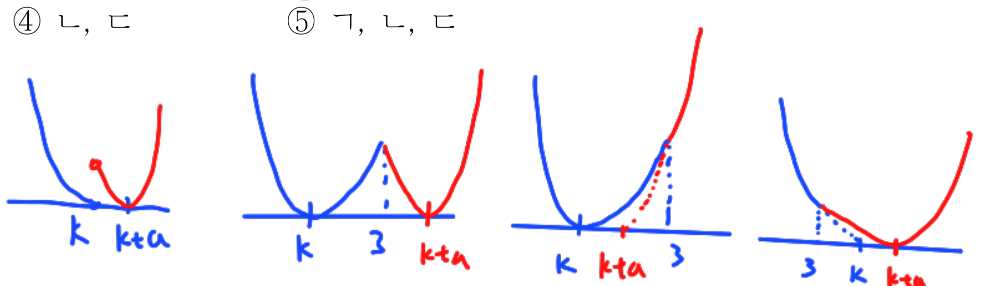
(가) $\lim_{x \to 3} g(x)$가 존재한다.

(나) 함수 $y = g(x)$의 그래프는 x축과 오직 한 점에서만 만난다.

<보 기>

ㄱ. $f(1) = 1$이면 $g(2) = 0$이다.
ㄴ. $g(k+a) < g(3)$
ㄷ. $(k-1)(k-2) \ge 0$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



$k=3$ (×)

$0<k<3<k+a$ (나) 모순 (×)

$0<k<k+a<3$ (○) ($k>1$)

$k>3$, $0<k<1$ 폭이 넓어짐 (×)

⇒ $1<k<k+a<3$

ㄱ. $(1-k)^2 = 1$, $k=2$, $g(2) = f(2) = 0$

ㄴ. $g(k+a) < g(3)$ (○)

ㄷ. 반례) $k = \frac{3}{2}$, $f = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2$

$f(3) = \frac{3}{2} f(3-a)$

$\frac{9}{4} = \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2} - a\right)^2$, $\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}$

$a = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$, $a = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}$ 존재

$\therefore (k-1)(k-2) < 0$

21. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) n이 3의 배수가 아닌 경우 $a_{n+1}=(-1)^n \times a_n$이다.
(나) n이 3의 배수인 경우 $a_{n+3}=-a_n-n$이다.

$a_n = -a_{n+3} - n$

$a_{20}+a_{21}=0$일 때, $\sum_{k=1}^{18} a_k$의 값은? [4점]

① 57 ② 60 ③ 63 ④ 66 ⑤ 69

(가) $n=20 \rightarrow a_{21}=a_{20}$, $\therefore a_{20}=a_{21}=0$

$a_{18}=-18$

$a_{15}=18-15=3$

$a_{12}=-3-12=-15$

$a_9=15-9=6$

$a_6=-6-6=-12$

$a_3=12-3=9$

a_1	-9	a_4	12	a_7	-6
a_2	9	a_5	12	a_8	6
a_3	9	a_6	-12	a_9	6

$\Rightarrow$

-9	12	-6	15	-3	18
9	12	6	15	3	18
9	-12	6	-15	3	-18

$9+12+6+15+3+18=63$

단 답 형

22. $\log_2 8+\log_2 \frac{1}{2}$의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{2}$

23. 호의 길이가 2π이고 넓이가 6π인 부채꼴의 반지름의 길이를 구하시오. [3점]

$\boxed{6}$

$\frac{1}{2} r \times 2\pi = 6\pi$

$r=6$

24. 집합 $\{x \mid 1 \le x \le 25\}$에서 정의된 함수 $y = 6\log_3(x+2)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{24}$

$25 \to 16 = M$

$1 \to 6 = m$

25. 방정식 $9^x - 10 \times 3^{x+1} + 81 = 0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{10}$

$3^x = t,\quad t^2 - 30t + 81 = 0$

$t \quad -3$

$t \quad -27$

$3^x = 3,\ 27$

$x = 1,\ 3$

$1^2 + 3^2 = 10$

26. 두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)-x^2} = 1,\ \lim_{x\to 3} \frac{g(x)-f(x)}{x-3} = 8$$

을 만족시킬 때, $g(5)-f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{20}$

$f = x^2 \sim$

$g = 2x^2 \sim$

$g(3) - f(3) = 0$

$g'(3) - f'(3) = 8$

$h(x) = g(x) - f(x)$

$h(x) = (x-3)^2 + 8(x-3)$

$\therefore g(5) - f(5) = h(5) = 4 + 16 = 20$

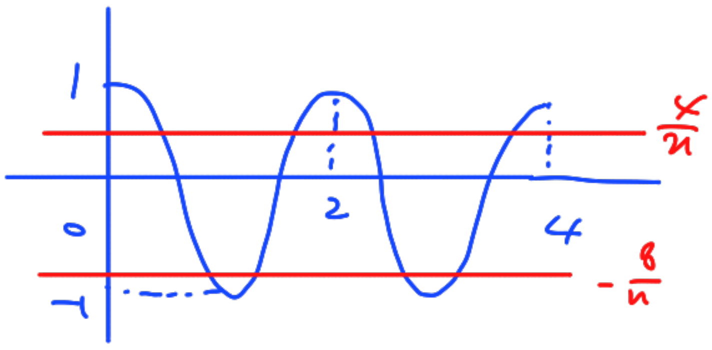
27. $n \geq 4$인 자연수 n에 대하여 집합 $\{x \mid 0 \leq x \leq 4\}$에서 정의된 함수

$$f(x)=\frac{n}{2}\cos \pi x+1$$

이 있다. 방정식 $|f(x)|=3$의 서로 다른 모든 실근의 합을 $g(n)$이라 할 때, $\sum_{n=4}^{10} g(n)$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{74}$

$\left|\frac{n}{2}\cos\pi x+1\right|=3$ $\therefore \cos\pi x=\frac{4}{n}, \frac{-8}{n}$

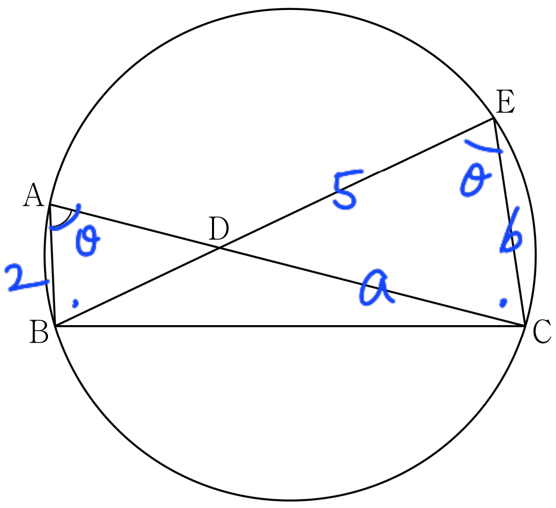


n	$g(n)$
4	0+2+4=6
5	8
6	8
7	8
8	8+4=12
9	16
10	16

74

28. 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\cos(\angle BAC)=\frac{\sqrt{3}}{6}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 한 점 D에 대하여 직선 BD가 삼각형 ABC의 외접원과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 E라 하자. $\overline{DE}=5$, $\overline{CD}+\overline{CE}=5\sqrt{3}$일 때, 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$\boxed{191}$



$a+b=5\sqrt{3}$, $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{6}$, $\sin\theta=\frac{\sqrt{33}}{6}$

$a^2=b^2+25-2\cdot5\cdot b\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}$

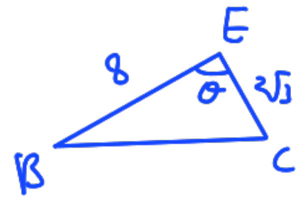
$(5\sqrt{3}-b)^2=b^2+25-\frac{5}{3}\sqrt{3}b$

$-10\sqrt{3}b+75=25-\frac{5}{3}\sqrt{3}b$, $\frac{25}{3}\sqrt{3}b=50$, $b=2\sqrt{3}$

$\therefore a=3\sqrt{3}$

$\triangle ABD \sim \triangle ECD$ $1:\sqrt{3}$

$\therefore BD=\frac{1}{\sqrt{3}}a=3$



$BC^2=64+12-2\cdot8\cdot2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}=76-16=60$

$BC=2\sqrt{15}$ $\therefore \frac{2\sqrt{15}}{\sin\theta}=2R$, $R=\frac{\sqrt{15}}{\sin\theta}$

$S=\pi R^2=\frac{15}{\sin^2\theta}\pi=\frac{15\cdot36}{33}\pi$

$=\frac{180}{11}\pi$ $\therefore p+q=191$

29. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 최댓값을 구하시오. [4점]

$\boxed{5}$

(가) 모든 자연수 k에 대하여 a_k는 x에 대한 방정식 $x^2+3x+(8-k)(k-5)=0$의 근이다.

(나) $a_n \times a_{n+1} \le 0$을 만족시키는 10 이하의 자연수 n의 개수는 2이다.

$x \quad 8-k$

$x \quad k-5$

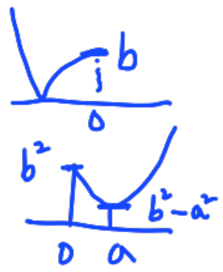
$x=k-8$ or $5-k$

k	a_k	
1	-7	4
2	-6	3
3	-5	2
4	-4	1
5	-3	0
6	-2	-1
7	-1	-2
8	0	-3
9	1	-4
10	2	-5

$\Rightarrow 5$

30. 두 양수 a, $b\,(a<b)$에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} |-ax^2+b| & (x \le 0) \\ x^2-2ax+b^2 & (x>0) \end{cases}$$



(가) $\to a^2+b^2-a^2$, $b^2-a^2>0$

이다. 양의 실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 서로 다른 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$는 최솟값 2를 갖고, 두 상수 α, β에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

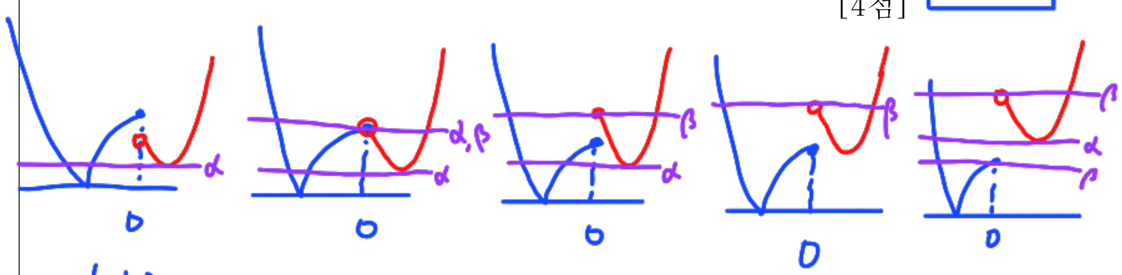
(가) $\left|\lim_{t\to\alpha-} g(t) - \lim_{t\to\alpha+} g(t)\right| = 2$

(나) $\lim_{t\to\beta-} g(t) - \lim_{t\to\beta+} g(t) + 1 = g(\beta)$

(다) $g(\alpha) \ne g(\beta)$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\alpha$, $\alpha+24\beta=30$일 때, $f(-2)+f(1)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$\boxed{311}$



(X) β 2개 X

(X) g(α)=g(β)=3

(X) α 2개 X

(X) 최소 1

$b^2-a^2 < b < b^2$

$\alpha = b^2-a^2$, $\beta = b^2$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\alpha \Rightarrow a=\frac{1}{2}$ (대칭축)

$b^2-\frac{1}{4}=\alpha$, $b^2=\beta$

$\alpha+24\beta = b^2-\frac{1}{4}+24b^2=30$

$25b^2=\frac{121}{4}$, $b^2=\frac{121}{100}$, $b=\frac{11}{10}$

$\therefore f(-2)+f(1)=|b-4a|+(1-2a+b^2)=\left|\frac{11}{10}-2\right|+\frac{121}{100}$

$=\frac{211}{100}$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.