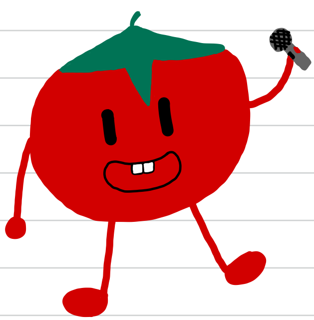
이것은

요약!

수학이

아니다.

작성자 : 연연하지말고 이연



진짜 그림 심각하게 못 그리지만, 그래도 비워두기 싫어서 열심히 그렸습니다...

수학

1. $x=a$ 선대칭 X (a,b) 점대칭 = ?

$x=a$ 선대칭 X $(a,0)$ 점대칭 = $(a,0)$ 점대칭

2. $f(x)$: 기함수 & 감소함수 일 때,

$f(x) = f^{-1}(x) \iff f(x) = -x$

3. $f(x)=t$ 의 실근 $g(t)$ $\Longleftrightarrow$ f와 g는 역함수관계

\# 미적분 문제 조건 해석에서 종종 사용

4. max, min 함수 → 식으로 표현하기 어려운 것들을 식으로 표현되게 함.

\# 풀이의 부가적 요소로 사용.
- 본격적인 풀이 전 직관적 이해
- 정확한 표현

$$\max\{f(x), g(x)\} = \begin{cases} f(x) & (f(x) \geq g(x)) \\ g(x) & (f(x) \leq g(x)) \end{cases}$$

: 항상 더 큰 값을 고르는 함수

$$= \frac{f(x)+g(x)}{2} + \frac{|f(x)-g(x)|}{2}$$

$$\min\{f(x), g(x)\} = \begin{cases} f(x) & (f(x) \leq g(x)) \\ g(x) & (f(x) \geq g(x)) \end{cases}$$

: 항상 더 작은 값을 고르는 함수

$$= \frac{f(x)+g(x)}{2} - \frac{|f(x)-g(x)|}{2}$$

5. 가우스함수 (최대 정수 함수)

\# 풀이의 부가적 요소로 사용.
- 본격적인 풀이 전 직관적 이해
- 정확한 표현

$[x]$: x 이하의 정수 중 가장 큰 정수

$n \leq x < n+1 \rightarrow [x] = n$

* 가우스함수를 정수 개수 세는 식에 활용하기. → 식으로 표현하기 어려운 것들을 식으로 표현되게 함.

ex) 자연수 n에 대해,

$2n - \sqrt{4n^2+n} < x < 2n + \sqrt{4n^2+n}$ 을 만족시키는 정수 x의 개수를 a_n이라 하자.

$$\rightarrow a_n = \underbrace{2[\sqrt{4n^2+n}]}_{\text{양수부분 정수개수 + 음수부분 정수개수}} + \underbrace{1}_{0\text{ 개수}}$$

수학1

지수함수와 로그함수

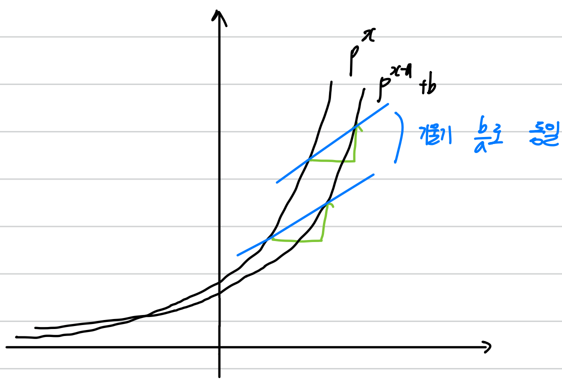
1. 지수로그함수 활용에서, 주어진 함수의 식에 a,b,k등 문자가 포함된 경우, $\log_a k$ 등의 복잡한 형태로 좌표를 일일히 설정하는 것보다 길이관계를 먼저 구하고 $\log_a k$등을 간단한 문자로 치환해 푸는게 더 간단한 경우가 많다.
   - i) 길이관계 구하기
   - ii) 복잡한 좌표를 간단한 문자로 치환해 좌표 설정하기 (이때 치환한 문자의 수가 문제에서 주어진 문자의 수보다 많아지면 안 됨.)
   - iii) i의 정보를 이용해 치환한 문자의 값 구하기
   - iv) 문제에서 물어본 정보 구하기

   (무조건 이 순서로 풀어라! 이건 아니지만, 문제에서 문자로 주는 값이 많아질수록 복잡한 좌표를 치환하는 게 중요해짐.)

2. 지수로그함수 ㄱㄴㄷ 문제에서 고려해봐야 하는 것.
   - i) 교점의 x좌표의 범위를 물어본 경우 → 교점 주위에서 함숫값의 대소관계가 바뀐다는 점 이용
   - ii) (주로 ㄷ 에서) 이상한 형태의 부등식을 물어볼 때 고려해야 하는 것.
     - 길이 (x_2-x_1 , y_2-y_1)
     - 기울기 (원점 - 주어진 좌표 $\left(\frac{y_1}{x_1}\right)$ or 주어진 좌표 - 주어진좌표)
     - 넓이 ($x_1 \times y_1$)
     - 대칭성

3. 지수로그함수를 x축으로 a만큼, y축으로 b만큼 이동시킨 후, 이동되기 전의 점과 이동된 점을 이어보면 항상 기울기가 $\frac{b}{a}$이다.

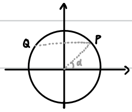
(단, 평행이동 관계에 있는 두 점이 아니라 다른 점을 이은 경우를 조심하자. 이 경우 기울기는 $\frac{b}{a}$가 아니다.)



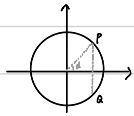
삼각함수

1. 삼각방정식

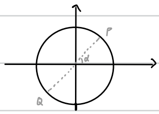
$\sin\alpha = \sin\beta \Rightarrow \begin{cases} \beta-\alpha = 2n\pi & \text{(두 동경 일치)} \\ \beta+\alpha = (2n+1)\pi & \text{(y축 대칭)} \end{cases}$



$\cos\alpha = \cos\beta \Rightarrow \begin{cases} \beta-\alpha = 2n\pi & \text{(두 동경 일치)} \\ \beta+\alpha = 2n\pi & \text{(x축 대칭)} \end{cases}$



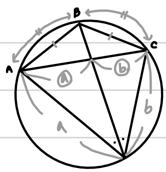
$\tan\alpha = \tan\beta \Rightarrow \begin{cases} \beta-\alpha = 2n\pi & \text{(두 동경 일치)} \\ \beta-\alpha = (2n+1)\pi & \text{(원점 대칭)} \end{cases}$

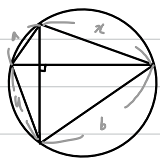


$\tan\alpha$: $\overline{OP}$의 기울기
$\tan\beta$: $\overline{OQ}$의 기울기
→ O, P, Q 한 직선

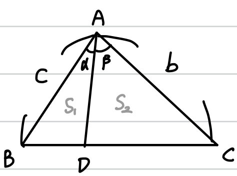
2. 도형 관련 여러 성질

$l_1 : l_2 = \sin\alpha : \sin\beta$





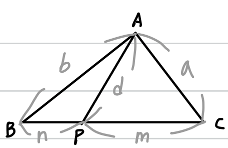
$a^2+b^2 = x^2+y^2 = 4R^2$
(반지름 : R)



$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{a\cdot\sin\alpha}{b\cdot\sin\beta}$$

3. 스튜어트정리

매우 매우 유용하게 사용하는 공식



$$mb^2+na^2 = (m+n)(mn+d^2)$$

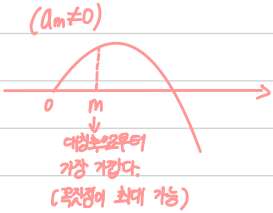
(위 그림에서 $m=n$일 때)
$a^2+b^2 = 2(m^2+d^2)$

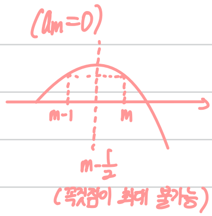
수열

1. 등차수열 합 분석

$S_n = \frac{d}{2}n^2 + (a - \frac{d}{2})n$

1) $a>0$, $d<0$





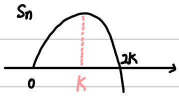
2) $a<0$, $d<0$

2. 등차수열 합 분석 심화

등차수열 a_n, 그 합 S_n이 있을 때

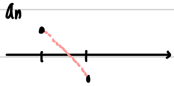
$S_n = an(n-k)$라 하자.

① k가 짝수



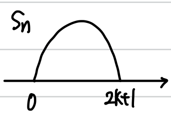
최대) 유일하게 존재

나머지 전부 대칭



부호 반대, 함숫값 대칭

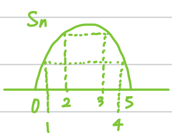
② k가 홀수



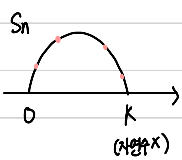
최대) 유일하지 않음.

나머지 전부 대칭

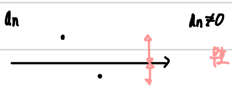
ex)



③ k가 이상한 숫자



→ 대칭 X



부호 반대, 절댓값 다름

3. 수열을 그래프로 분석하기

a_{n+1}이 a_n에 관한 식으로만 표현되어 있을 때, $a_{n+1} = f(a_n)$ 이라 생각해 그래프로 그려보기.

단, 식에 'n'이 포함되어 있으면 이 풀이는 적합하지 않음.

(수열의 경향 파악할 때도 효과적임)

4. 수열의 귀납적 추론

'나열'은 귀찮아도 계속 해본다는 마인드 가지기.

나열
- i) 기준이 되는 항을 알고 있는 경우 → 당연히 나열
- ii) 기준이 되는 항을 모르는 경우 → 수열의 규칙성/경향성을 파악해보기 위해 임의의 숫자를 대입해 하나씩 나열해보는 것도 나쁘지 않음.

수열 관찰
- i) 나열할 때 '각 항'의 범위
- ii) 주어진 조건에서 나올 수 있는 범위 관찰

ex) $a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n + 1 & (a_n \geq k) \\ \sim & (a_n < k) \end{cases}$ 인 경우 $a_n \geq k$ 에서 나올 수 있는 a_{n+1}의 범위는 $a_{n+1} \geq 2k+1$ 이다.

즉, 어떤 항에 대해 $a_{n+1} < 2k+1$ 이었다면, 그때의 a_n은 아래쪽 식을 통해 구해야 함.

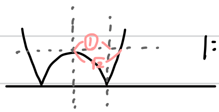
수학2

극한 / 연속

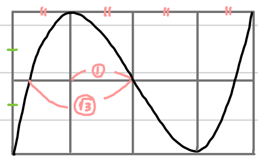
1. $\lim_{x \to a} \frac{(x-a)f'(x)}{f(x)}$: $f(x)$가 $(x-a)$를 몇 개 가지고 있는지.

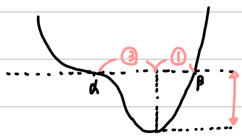
미분

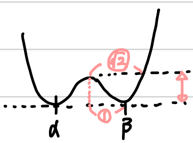
1. 다항함수 비율관계



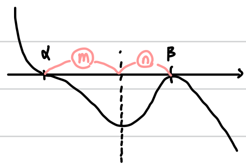
$1:\sqrt{2}$





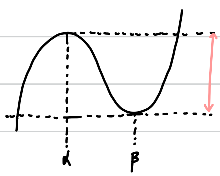


$a \times (x-\alpha)^m (x-\beta)^n$

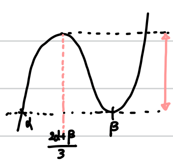


$\frac{\alpha n+\beta m}{m+n}$

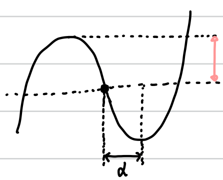
2. 다항함수 길이관계



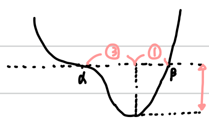
$\frac{|a|}{2} \times (\beta-\alpha)^3$



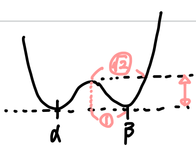
$\frac{4}{27} \times |a| \times (\beta-\alpha)^3$



$2 \times |a| \times \alpha^3$



$\frac{27}{256} \times |a| \times (\beta-\alpha)^4$

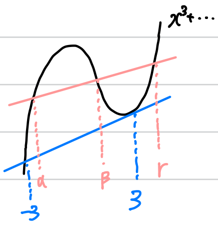


$\frac{1}{16} \times |a| \times (\beta-\alpha)^4$

3. 수2 ㄱ,ㄴ,ㄷ 추론 문제에서 $f'(x)$가 등장했을 때

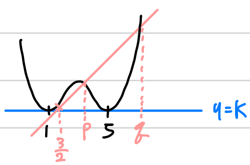
- 평균값 정리 (90%)
- 도함수의 사잇값 정리 (10%)

4. 근과 계수와의 관계 활용



$-3+3+3 = \alpha+\beta+\gamma$ = (변곡점 x좌표)$\times 3$

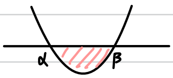
$\rightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 + \cdots$



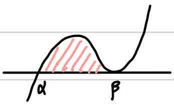
$1+1+5+5 = \frac{3}{2}+\frac{3}{2}+p+q$

적분

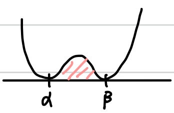
1. 넓이 관련 여러 공식



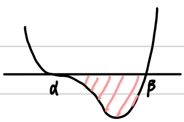
$\frac{|a|}{6} \times (\beta-\alpha)^3$



$\frac{|a|}{12} \times (\beta-\alpha)^4$



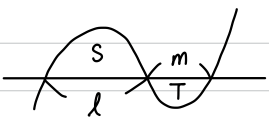
$\frac{|a|}{30} \times (\beta-\alpha)^5$



$\frac{|a|}{20} \times (\beta-\alpha)^5$

$a \times (x-\alpha)^m (x-\beta)^n$

$\rightarrow \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!} \times |a| \times (\beta-\alpha)^{m+n+1}$

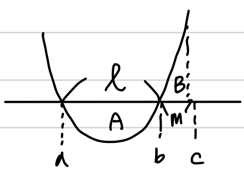


$S = \frac{|a|}{12} \times l^3 \times (l+2m)$

$T = \frac{|a|}{12} \times m^3 \times (m+2l)$

$l = m$일 때

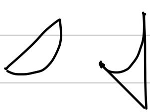
$S = \frac{|a|}{4} \times l^4$



$A = B \rightarrow l : m = 2 : 1$

$A = 2B \rightarrow \int_{\frac{a+b}{2}}^{c} f(x)\,dx = 0$

$\frac{\alpha+\beta}{2}$



→ 넓이비 $2:1$

2. 원함수의 함숫값 차이는 도함수의 적분값과 같다.

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)$$

보통 차수가 내려갈수록 넓이를 구하기 쉬워지니까 (넓이공식)

이를 이용해 함숫값 차이, 함숫값을 구하면 계산이 줄어드는 경우가 종종 있다.

3. 정적분의 대칭성

$$\int_{-a}^{a} f(x)\cdot dx = \int_0^a f(x) + f(-x)\cdot dx$$

$$\int_0^{2a} f(x)\cdot dx = \int_0^a f(x) + f(2a-x)\cdot dx$$

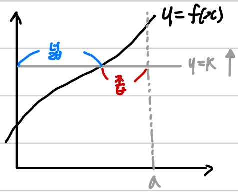
$$\int_0^a f(x)\cdot dx = \int_0^a f(a-x)\cdot dx$$

$$\int_0^x (x-t)f(t)\cdot dx = \int_0^x t f(x-t)\, dt$$

i) 정적분 대칭성으로 변환

ii) 부분적분 (1·f(x)의 형태로 부분적분 해야 할 때도 있음.)

4. 정적분 구간이 고정되어 있을 때



$g(k) = \int_0^a |f(x)-k| \cdot dx$

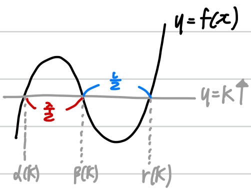
→ $g'(k)$ = 넓어지는 부분 길이 − 좁아지는부분 길이

(상수 k로 고정된게 아니라 함수형태일때)

$g(x) = \int_0^x |f(x) - f(t)| \cdot dt$

→ $g'(x)$ = (모든 순간 넓이 변화율) × $|f'(x)|$

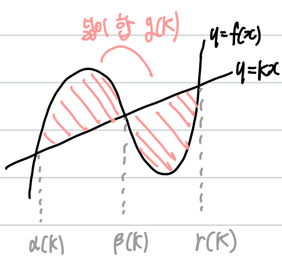
5.



$g(k) = \int_{\alpha(k)}^{r(k)} |f(x)-k| \cdot dx$

→ $g'(k)$ = 늘어나는 길이 − 줄어드는길이

6



$g(k) = \int_{\alpha(k)}^{r(k)} |f(x)-kx| \cdot dx$

→ $g'(k) = \frac{1}{2}(r^2-\beta^2) - \frac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2)$

미적분

극한 / 미분가능성

1. 기본적인 극한 (생각 안 나면 로함수로 구하기)

$$\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{b}{x}} = e^{ab}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{x^2} = \frac{1}{2}a^2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+bx)}{ax} = \frac{b}{a}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(x+1)}{x} = \frac{1}{\ln a}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{bx}-1}{ax} = \frac{b}{a}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$$

2. 삼각함수 기본 공식 / 덧셈정리

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$1+\tan^2 x = \sec^2 x$$

$$1+\cot^2 x = \csc^2 x$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta$$

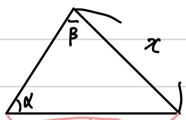
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

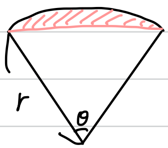
$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

3. 삼도극 – 삼각형의 변의 길이



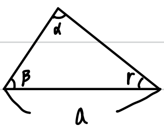
$\boxed{x \times \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}}$

4. 삼도극 – 활꼴 넓이



→  $= \frac{1}{2}r^2(\theta - \sin\theta)$

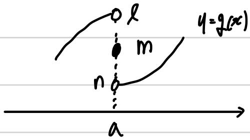
5. 삼도극 — 삼각형 넓이



$S = \frac{1}{2}a^2 \times \frac{\sin\beta \times \sin\gamma}{\sin\alpha}$

6. 연속성/미분가능성 따지기

(연속성)

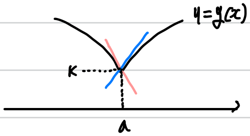


$f(x)$: 연속함수

① $f(x)\times g(x)$ 연속 $\Longleftrightarrow$ $f(a)=0$

② $f(g(x))$ 연속 $\Longleftrightarrow$ $f(l)=f(m)=f(n)$

(미분가능성)

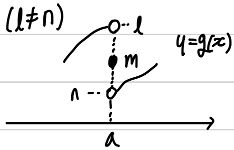


$f(x)$: 도함수 연속

① $f(x)\times g(x)$ 도함수 연속 $\Longleftrightarrow$ $f(a)=0$

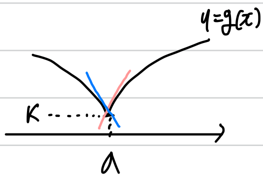
② $f(g(x))$ 도함수 연속 $\Longleftrightarrow$ $f'(k)=0$

$(l\neq n)$



$f(x)$: 도함수 연속

① $f(x)\times g(x)$ 도함수 연속 $\Longleftrightarrow$ $f(a)=f'(a)=0$



$f(x)$: 이계도함수 연속

① $f(g(x))$ 이계도함수 연속

$\Longleftrightarrow$
- $f'(k)=0$ $\left(\lim_{x\to a+} g'(x) + \lim_{x\to a-} g'(x) = 0\right)$
- $f'(k)=f''(k)=0$ $\left(\lim_{x\to a-} g'(x) + \lim_{x\to a-} g'(x) \neq 0\right)$

\# 암기보다는, 즉시 유도 가능할 정도로 익숙하게 해 놓기

미분

1. 그래프 그릴 때 고려해야 하는 것.

① 정의역/치역　　⑤ 증감/극대극소
② 극한값　　⑥ 변곡/오목볼록
③ 대칭성/주기　　⑦ 점근선
④ 좌표축과 교점

2. [$g(t)=s$에 대한 함수 / t와 s에 관한 식) ⇒ 음함수미분법 활용

3. $f(g(x))$의 극대 (극소는 정반대로 생각)　　# 매우 중요! 합성함수 해석 문제풀 때 사용

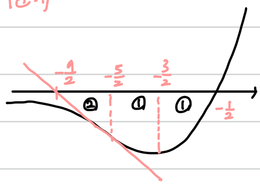
① $f(x)$가 $x=a$에서 극대 & $g(t)=a$인 모든 t
② $g(x)$가 $x=t$에서 극대 & $f(x)$가 $x=g(t)$에서 증가상태
③ $g(x)$가 $x=t$에서 극소 & $f(x)$가 $x=g(t)$에서 감소상태

4. 접선과 $y=f(x)$의 교점 개수

① 변곡점
② 극점 (접선이 있는 경우)
) 에서 바뀔 수 있음

5 . (일차함수) X 지수함수 → 접선개수문제

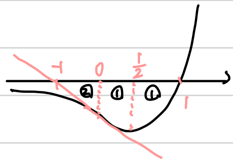
$f(x) = (2x+1)e^{x}$



$2:1:1$

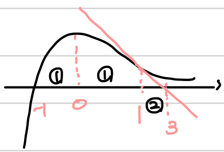
비율은 2:1:1로 같지만 전체적으로 2배.

$f(x) = (2x-2)e^{2x}$



$1:\frac{1}{2}:\frac{1}{2}$

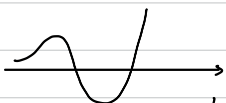
$f(x) = (3x+3)e^{-x}$



6 . (이차함수) X 지수함수 → 이차 함수 추론문제

$f(x)=t$의 실근개수 : $g(t)$ / $g(t)$가 불연속인 t의 개수

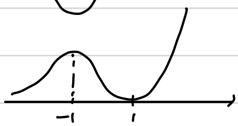
$f(x) = (2x^2-4x)\cdot e^{x}$



3개

$f(x) = (2x^2-4x+2)e^{x}$

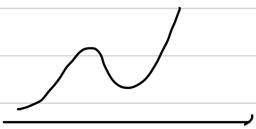
$f'(x) = (2x^2-2)e^{x}$



2개

$f(x) = (2x^2-4x+3)e^{x}$

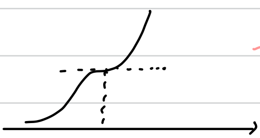
$f'(x) = (2x^2-1)e^{x}$



3개

$f(x) = (2x^2-4x+4)e^{x}$

$f'(x) = 2x^2\cdot e^{x}$

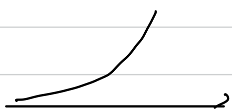


→ 절댓값으로 잡을 때 주목!

1개

$f(x) = (2x^2-4x+5)e^{x}$

$f'(x) = (2x^2+1)e^{x}$



1개

e^{x}가 아니라 e^{-x}를 곱하면 그래프가 좌우대칭

7. 한 점에서 그을 수 있는 접선 개수

① $y = f(x)$ 곡선 자체

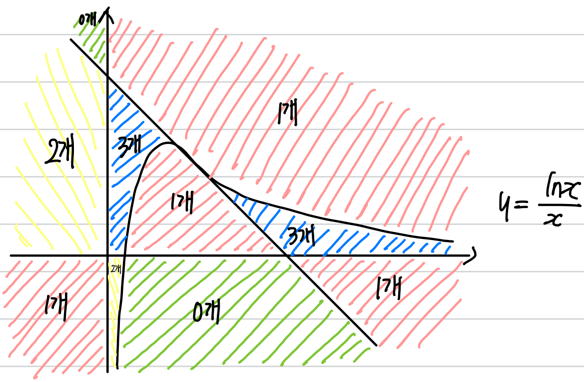
② 변곡접선

③ 점근선

④ 공통접선 (공통접선 ⇒ 변곡점이 2개 이상 있다)

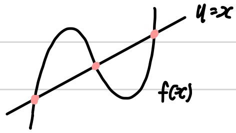
└ 그을 수 있는 접선의 개수가 1개 줄어듦.

를 만나면 바뀜.



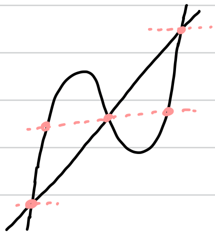
8. 합성함수의 근의 개수

$A = \{x \mid f(x) = x\}$



$\boxed{3개}$

$B = \{x \mid f(f(x)) = f(x)\}$

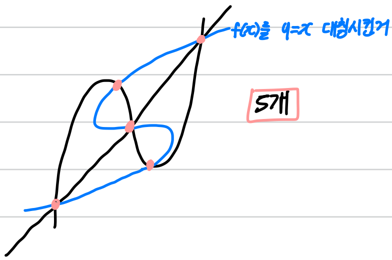


$\boxed{5개}$

$C = \{x \mid f(f(x)) = x\}$

i) $f(\alpha) = \alpha$

ii) $f(\beta) = \gamma$, $f(\gamma) = \beta$



$\boxed{5개}$

$f(f(x)) = x$, f^{-1} 존재

$\Leftrightarrow$ $f(x) = f^{-1}(x)$ 서로 다른 실근의 개수와 동일

\# 정확한 답 구하는 용도보단, 대략적으로 상황 파악할 때 사용

적분

1. 여러 가지 적분 (삼각함수 관련)

$\int \tan x \cdot dx = -\ln|\cos x| + C$

$\int \sec x \cdot dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$

$\int \csc x \cdot dx = -\ln|\csc x + \cot x| + C$

$\int \cot x \cdot dx = \ln|\sin x| + C$

$\int x \cdot \sin x \cdot dx = -x\cos x + \sin x + C$

$\int x \cdot \cos x \cdot dx = x\sin x + \cos x + C$

$\int \sin^2 x \cdot dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \cdot dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$

$\int \cos^2 x \cdot dx = \int \frac{1}{2}(1+\cos 2x) \cdot dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

$\int e^x \cdot \sin x \cdot dx = \frac{1}{2} e^x(\sin x - \cos x) + C$

$\int e^x \cdot \cos x \cdot dx = \frac{1}{2} e^x(\sin x + \cos x) + C$

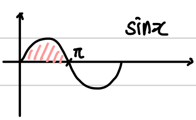
2. 여러 가지 적분

$\int f(ax+b) \cdot dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$

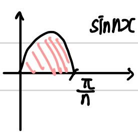
$\int \ln x \cdot dx = x\ln x - x + C$

$\int \frac{\ln x}{x^n} \cdot dx$ < $n=1 \rightarrow$ 치환적분, $n=2 \rightarrow$ 부분적분　　($*$ $y = \frac{\ln x}{x} \rightarrow y' = \frac{1-\ln x}{x^2}$)

3. sin 함수의 넓이



넓이 : 2



넓이 : $\frac{2}{n}$ $\rightarrow$ $\int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin nx \cdot dx = \frac{2}{n}$

4. 역함수 적분

$$\int_a^b x\cdot f'(x)\cdot dx = \left[xf(x)\right]_a^b - \int_a^b f(x)\cdot dx$$

$$\rightarrow \int_a^b xf'(x)\cdot dx + \int_a^b f(x)\cdot dx = \left[xf(x)\right]_a^b$$

$$\int_a^b f(x)\cdot dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)\cdot dy = bf(b) - af(a)$$

$$\rightarrow \int_a^b xf'(x)\cdot dx = \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)\cdot dy$$ (y축이랑 둘러싸인 넓이)

5. 다항함수 $\times\, e^{\pm x}$ ($f(x)$: 다항함수)

$$\int f(x)\cdot e^{x}\cdot dx = \{f(x) - f'(x) + f''(x) - f'''(x) + \cdots\} e^{x} + C$$

$$\int f(x)\cdot e^{-x}\cdot dx = -\{f(x) + f'(x) + f''(x) + \cdots\} e^{-x} + C$$