

수학 영역

성명

수험번호

- 자신이 선택한 유형(확률과 통계/미적분/기하와 벡터)의 문제지인지 확인하십시오.
- 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.
- 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하십시오.

너는 별이니까 너는 스스로 뜨겁게 빛나니까
- 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하십시오.
- 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하십시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하십시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하십시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.



2023년 08월 13일 시행
Epsilon 모의고사 1회

출제위원 : 성균관대학교 수학교육과 수학문제연구학회 Epsilon

22학번 : 고명준, 신요섭, 이수훈

23학번 : 강주연, 박정인, 정현우, 채상진, 하종수, 한동화

편집위원 : 성균관대학교 수학교육과 수학문제연구학회 Epsilon 편집위원회

22학번 : 임지훈

23학번 : 한승수

엡실론(Epsilon) 팀 혹은 엡실론(Epsilon) 모의고사에 관하여 문의 사항이 있으신 경우 epsilon_skku@naver.com으로 연락 주시기 바랍니다.

제 2 교시

Epsilon

수학 영역



성균관대학교 수학교육과 Epsilon 주관

5지선다형

1. $(4^{\sqrt{2}} \times 4) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-2+2\sqrt{2}}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ 1 ④ 4 ⑤ 16

2. 함수 $f(x) = x^3 - 5x^2 + x + 9$ 에 대하여 $f'(-1)$ 의 값은? [2점]

- ① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

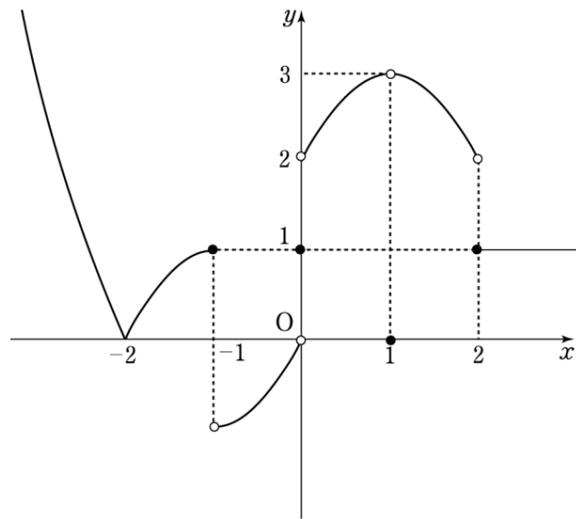
3. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_2 + a_3 = 12, \quad a_2 a_4 = 81$$

일 때, $a_3 + a_4$ 의 값은? [3점]

- ① 9 ② 18 ③ 27 ④ 36 ⑤ 45

4. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음과 같다.



$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. $\tan\theta < 0$ 이고 $\sin\theta \times \tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \frac{5}{13}$ 일 때, $\sin\theta + \cos\theta$ 의 값은? [3점]

- ① $-\frac{7}{13}$ ② $-\frac{2}{13}$ ③ $\frac{2}{13}$ ④ $\frac{7}{13}$ ⑤ $\frac{12}{13}$

6. 함수

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 - 3x^2 + 9x + 15 & (x \leq 0) \\ -x^2 - 2x + 15 & (x > 0) \end{cases}$$

의 극댓값과 극솟값을 각각 M , m 이라 할 때, $M+m$ 의 값은? [3점]

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

7. 자연수 n 에 대하여 부등식 $\log_{\frac{1}{2}} \frac{x-n}{x^2-2nx} < \log_2(x+n)$ 을

만족시키는 20 이하의 정수 x 의 개수를 $f(n)$ 이라 할 때, $f(7) + f(8)$ 의 값은? [3점]

- ① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

8. $f(x) = \int_{-1}^1 |t(t+x)(t-x)| dt$ 라 하자. 양수 a 에 대하여

$f(a) = \frac{1}{4}$ 일 때, a 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 1 ④ $\sqrt{2}$ ⑤ 2

9. 두 양수 a, b 에 대하여 $\left\{ x \mid 0 \leq x < \frac{3b\pi}{2}, x \neq \frac{b\pi}{2} \right\}$ 에서 정의된 함수 $f(x) = a \tan \frac{x}{b}$ 가 있다. 함수 $f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = k$ ($k > 0$) 가 만나는 서로 다른 두 점을 A, B 라 하자. 직선 OA 의 기울기가 직선 OB 의 기울기의 4 배이다. 삼각형 OAB 의 넓이가 $\sqrt{3}\pi$ 일 때, ab 의 값은? (단, O 는 원점이다.) [4점]

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

10. 이차함수 $f(x) = -x^2 - 3x + 2$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x < 0) \\ 4 - f(-x) & (x \geq 0) \end{cases}$$

의 그래프가 점 A(0, 2) 을 지나는 직선 $y = h(x)$ 와 서로 다른 세 점에서 만난다. 점 A 가 아닌 두 점을 각각 B, C 라 하자. 점 B 와 점 C 에서의 두 접선 사이의 거리와 두 점 B 와 C 사이의 거리가 같을 때, $h(3)$ 으로 가능한 모든 값들의 합은?

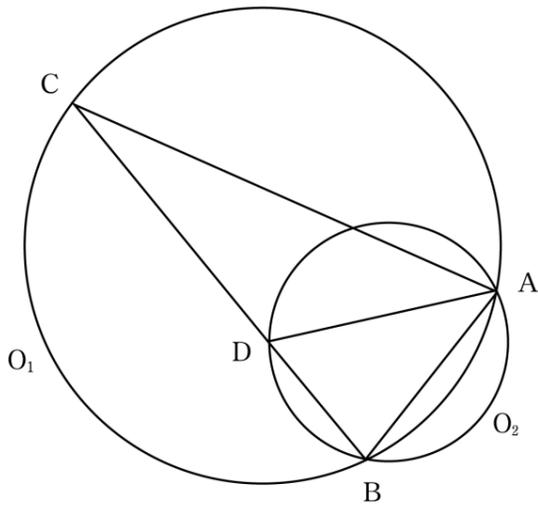
[4점]

- ① $-\frac{7}{2}$ ② -2 ③ $-\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{2}$

11. 그림과 같이 삼각형 ABC에 대하여 선분 BC 위의 한 점 D가 있다. 삼각형 ABC와 삼각형 ABD의 외접원을 각각 O_1 , O_2 라 하자. 두 원 O_1 , O_2 의 반지름의 길이를 각각 r_1 , r_2 라 하고, $\angle ACB = \theta_1$, $\angle ADB = \theta_2$ 라 할 때,

$$r_1 : r_2 = 2 : 1, \quad \overline{CD} = 1, \quad \cos(\theta_2 - \theta_1) = \frac{3}{4}$$

이 성립한다. 삼각형 ACD의 넓이는? [4점]



- ① $\frac{\sqrt{7}}{8}$ ② $\frac{\sqrt{7}}{4}$ ③ $\frac{\sqrt{7}}{2}$ ④ $\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{7}$

12. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \times f(x+2) = 16$ 을 만족시킨다.

$$\int_0^2 \frac{\{f(x)\}^2 - 1}{f(x)} dx = \frac{12 - \sqrt{2}}{2}, \quad \int_6^8 f(x) dx = 8\sqrt{2} \text{ 일 때,}$$

$\int_0^6 f(x) dx$ 의 값은? [4점]

- ① $8 + 8\sqrt{2}$ ② 20 ③ $12 + 8\sqrt{2}$
 ④ 24 ⑤ $16 + 8\sqrt{2}$

13. $a_1 = 72$ 인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. S_n 이 다음 조건을 만족시킬 때, a_6 의 값을 구하시오. [4점]

(가) S_m 의 값이 최대가 되도록 하는 자연수 m 이 2개 존재한다.
 (나) $\alpha \leq S_n \leq \beta$ 를 만족시키는 자연수 n 의 개수가 4개가 되도록 하는 $\beta - \alpha$ 의 최솟값은 6이다.

- ① 39 ② 42 ③ 45 ④ 48 ⑤ 51

14. 최고차항의 계수가 양수이고 $f(0) = f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$ ($\alpha\beta > 0, \alpha \neq \beta$)인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt - \frac{xf(x)}{2}$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

- ㄱ. $x > 0$ 일 때, $g'(x) < 0$ 이다.
 ㄴ. 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) \leq g(m)$ 일 때,
 $f'(m) = \frac{f(m)}{m}$ 이다.
 ㄷ. 방정식 $g(x) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2개이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
 ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

15. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 집합 A 는

$$A = \{a_k \mid a_k \text{는 수열 } \{a_n\} \text{의 항}\}$$

이다. 수열 $\{a_n\}$ 은 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} \left| \frac{a_n + 7}{2} \right| & (a_n < 0) \\ -2a_n + 17 & (a_n \geq 0) \end{cases}$$

을 만족시킨다. 다음 조건을 만족시키는 $\sum_{n=1}^{50} a_n$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M+m$ 의 값은? [4점]

(가) 어떤 자연수 p 에 대하여 $a_p = 11$ 이다.

(나) $n(A) = 7$

- ① 178 ② 179 ③ 180 ④ 181 ⑤ 182

단답형

16. 방정식 $\log_4(x+12) = 1 + \log_2(x-2)$ 를 만족시키는 실수 x 의 값을 구하시오. [3점]

17. 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 8x$ 이고 $f(2) = 18$ 일 때, $f(-1)$ 의 값을 구하시오. [3점]

18. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n 2^{a_k+1} k = n^2 + 3n + 4$$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{31} a_n$ 의 값을 구하시오. [3점]

19. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t (t \geq 0)$ 에서의 위치 $x(t)$ 가

$$x(t) = t^4 + at^3 + bt^2 \quad (\text{단, } a, b \text{는 상수})$$

이다. 시각 $t=1$ 과 $t=3$ 에서 점 P의 가속도가 -4 일 때, 시각 $t=2$ 에서 $t=5$ 까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오. [3점]

20. 최고차항의 계수가 1이고 $f(2) = 0$ 인 삼차함수 $f(x)$ 와 실수 t 에 대하여 함수 $g(t)$ 를

$$g(t) = \lim_{x \rightarrow t} \frac{(x-t)f'(x)}{f(x)}$$

라 할 때, 집합 $\{g(t) \mid t \text{는 실수}\}$ 의 모든 원소의 합은 3이다. 함수 $f(-x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 $f(1)$ 의 값의 합을 k 라 할 때, k^2 의 값을 구하시오. [4점]

21. 함수 $f(x) = 2^x$ 와 집합 $\{x | x \neq 0\}$ 에서 정의된 함수 $g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $g\left(\frac{f(x)}{4}\right) = g\left(\frac{-4}{f(x)}\right) = x$ 를 만족시킨다. 두 양수 p, q 에 대하여 두 함수 $y = p\{f(x)\}^q$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프가 서로 다른 세 점 A, B, C에서 만날 때, 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{3}{2}$ 이다. 세 점 A, B, C의 x 좌표가 순서대로 공차가 3인 등차수열을 이룰 때, $(6pq)^3$ 의 값을 구하시오. (단, 점 B의 x 좌표는 2보다 작은 양수이다.) [4점]

22. 양수 $a (a \neq 2)$ 에 대하여 최고차항의 계수가 1이고 $f\left(\frac{3}{2}a\right) = 0$ 인 삼차함수 $f(x)$ 와 최고차항의 계수가 1이고 $g(0) = 0$ 인 사차함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $x \leq a$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $|f(x)| \leq g(x) - g'(a)x$ 이다.
 (나) $x \leq a$ 인 모든 실수 x 에 대하여 방정식 $g(x) = g'(a)(x-a) + g(a)$ 의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$g'(0) = g'(a-2)$ 일 때, a 의 최솟값을 m 이라 하자. $2m$ 의 값을 구하시오. [4점]

* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

Epsilon

성균관대학교 수학교육과 Epsilon 주관

5지선다형

23. 확률변수 X 가 이항분포 $B\left(18, \frac{2}{3}\right)$ 를 따를 때, $\sigma(X)$ 의 값은? [2점]

- ① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $\sqrt{6}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{10}$

24. 1부터 7까지의 자연수가 적힌 카드가 한 장씩 들어있는 상자에서 카드 두 장을 동시에 뽑을 때, 뽑은 두 카드에 적힌 숫자의 합을 n 이라 하자. \sqrt{n} 이 무리수일 확률은? [3점]

- ① $\frac{5}{7}$ ② $\frac{16}{21}$ ③ $\frac{17}{21}$ ④ $\frac{6}{7}$ ⑤ $\frac{19}{21}$

25. 다항식 $(x^2+a)^4(x^4+1)^3$ 의 전개식에서 x^4 의 계수가 9일 때, 양수 a 의 값은? [3점]

- ① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ 3 ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ 9

26. 어느 블로그 방문자의 사용 시간은 평균이 m 분이고, 표준 편차가 15분인 정규분포를 따른다. 이 블로그의 방문자 중 n_1 명을 임의추출하여 얻은 사용 시간의 표본평균이 \bar{x}_1 이고, 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은 $a \leq m \leq b$ 이다. 이 블로그의 방문자 중 n_2 명을 임의추출하여 얻은 사용 시간의 표본평균이 \bar{x}_2 이고, 모평균 m 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은 $c \leq m \leq d$ 이다. $\frac{b-a}{d-c} = \frac{49}{129}$ 이고 $n_1 - n_2 = 108$ 일 때, $a - b - c + d$ 의 값은? (단, Z 가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때 $P(|Z| \leq 1.96) = 0.95$, $P(|Z| \leq 2.58) = 0.99$ 로 계산한다.) [3점]

- ① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

27. 숫자 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4가 하나씩 적혀 있는 공이 들어 있는 주머니에서 공 두 개를 동시에 꺼내어 적힌 숫자를 확인하고, 동전 한 개를 사용하여 다음 시행을 한다.

동전이 앞면이 나오면 두 숫자의 합만큼 점수를 획득하고, 동전이 뒷면이 나오면 두 숫자의 차만큼 점수를 획득한다.

이 시행을 2번 반복할 때, 2번째 시행 후 얻은 점수의 합이 5가 될 확률은? [3점]

- ① $\frac{25}{392}$ ② $\frac{29}{392}$ ③ $\frac{33}{392}$ ④ $\frac{37}{392}$ ⑤ $\frac{41}{392}$

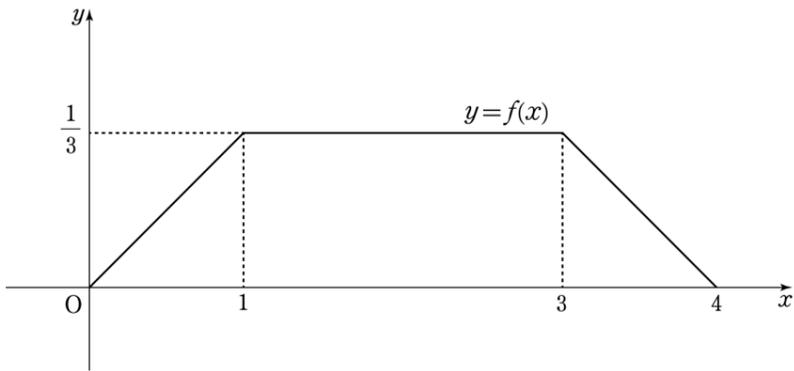
28. 집합 $X = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \rightarrow X$ 의 개수는? [4점]

(가) 집합 X 의 두 원소 a, b ($a < b$)에 대하여 $f(a) \times f(b)$ 가 짝수인 경우의 수는 7이다.
 (나) $f(2) \leq f(3)$

- ① 318 ② 354 ③ 390 ④ 426 ⑤ 462

단답형

29. 두 연속확률변수 X 와 Y 가 갖는 값의 범위를 각각 $0 \leq X \leq 4$, $0 \leq Y \leq 4$ 라 할 때, 확률변수 X 의 확률밀도함수 $f(x)$ 의 그래프는 아래와 같다.



이때, 확률변수 Y 의 확률밀도함수 $g(x)$ 의 그래프는 직선이고 $f(x)$ 의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만난다. 두 점의 x 좌표를 $a, b(a < 2 < b)$ 라 하면, $P(2 \leq X \leq b) - P(2 \leq Y \leq b) = \frac{7}{48}$ 이다. $4ab$ 의 값을 구하시오. [4점]

30. 주머니 A 에는 흰 공 4개와 검은 공 2개가 들어 있고, 주머니 B 에는 흰 공 5개와 검은 공 3개가 들어 있다. 두 주머니 A, B 를 사용하여 다음 시행을 한다.

주머니 A 에서 임의로 3개의 공을 꺼냈을 때, 흰 공의 개수가 검은 공의 개수보다 많으면 주머니 B 에 흰 공을 넣고, 검은 공의 개수가 흰 공의 개수보다 많으면 주머니 B 에 검은 공을 넣는다.

이 시행을 한 번 한 후, 주머니 B 에서 임의로 공을 1개 꺼내는 시행을 5번 반복한다. 주머니 B 에서 $n(1 \leq n \leq 5)$ 번째까지 꺼내는 흰 공의 개수를 a_n , 검은 공의 개수를 b_n 이라고 할 때, $a_k < b_k$ 인 자연수 $k(1 \leq k \leq 5)$ 가 존재할 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, 주머니 B 에서 꺼낸 공은 다시 넣지 않고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

제 2 교시

수학 영역 (마지막분)

Epsilon

성균관대학교 수학교육과 Epsilon 주관

5지선다형

23. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x(e^{2x} - 1)}$ 의 값은? [2점]

- ① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

24. $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ 일 때, $(1 + \tan \alpha)(1 + \tan \beta)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 1 ④ $\sqrt{3}$ ⑤ 2

25. $a_4 = -1$ 이고 $0 < a_5 < 1$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 이 있다.

$a_p \times |a_p| = -16$ 를 만족시키는 상수 p 가 존재할 때,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - \sum_{k=p}^n a_{2k} \right)$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{3}$ ④ 2 ⑤ $\frac{7}{3}$

26. 열린구간 $(0, 3)$ 에서 증가하고 미분가능한 함수 $f(x)$ 가

$$f(0) = 0, f(3) = 3$$

을 만족시킨다. 모든 자연수 n 에 대하여

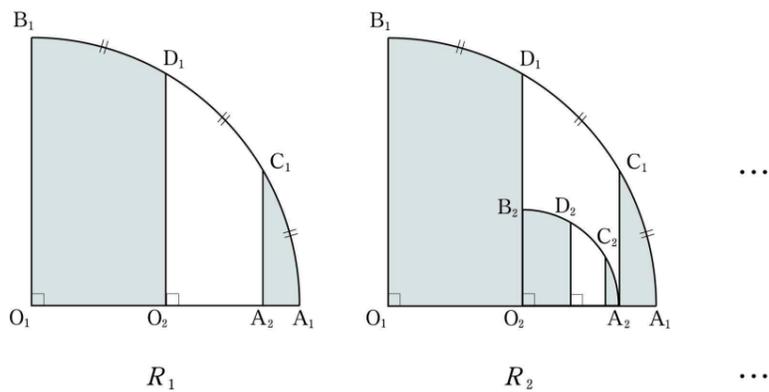
$$\sum_{k=1}^n f\left(\frac{3k}{n}\right) = \frac{4n^2 + 3n - 1}{2n} \text{ 일 때,}$$

$\int_0^3 \{f(x) - f^{-1}(x)\} dx$ 의 값은? [3점]

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

27. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 인 부채꼴 $O_1A_1B_1$ 가 있다. 호 A_1B_1 의 삼등분점 중 점 A_1 에 가까운 점을 C_1 이라 하고 점 B_1 에 가까운 점을 D_1 라 하자. 점 C_1 에서 선분 O_1A_1 에 내린 수선의 발을 A_2 , 점 D_1 에서 선분 O_1A_1 에 내린 수선의 발을 O_2 라 하자. 세 선분 O_1O_2 , O_1B_1 , O_2D_1 과 호 B_1D_1 로 둘러싸인 부분과 두 선분 A_1A_2 , A_2C_1 과 호 A_1C_1 로 둘러싸인 부분인 \square 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

그림 R_1 에서 $\overline{O_2A_2} = \overline{O_2B_2}$ 를 만족시키는 선분 O_2D_1 위의 점 B_2 에 대하여 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 인 부채꼴 $O_2A_2B_2$ 를 그리고 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 부채꼴 $O_2A_2B_2$ 의 내부에 \square 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [3점]



- ① $\frac{\sqrt{3}}{27}\pi$ ② $\frac{1}{9}\pi$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$ ④ $\frac{1}{3}\pi$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$

28. 상수 a 와 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x) = \frac{(\sin 2x - a \sin x) \times \ln(2 \cos x + a)}{4 \sin^2 x + 5}$$

에 대하여 함수 $g(x) = f(x) - |f(x)|$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

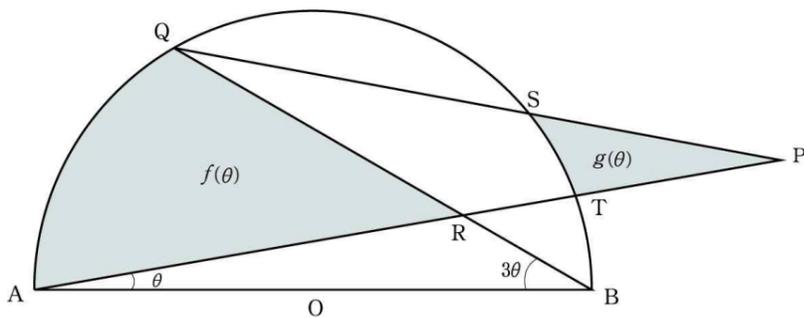
- (가) $\int_{\frac{3}{2}\pi}^t g(x) dx = 0$ 을 만족시키는 실수 t 의 범위는 $\pi \leq t \leq 2\pi$ 이다.
 (나) 함수 $g'(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

어떤 두 실수 $p, q (p < q)$ 에 대하여 $4 \int_p^q f(x) dx$ 의 최댓값은? [4점]

- ① $(\ln 4)^2$ ② $(\ln 5)^2$ ③ $(\ln 6)^2$ ④ $(\ln 7)^2$ ⑤ $(\ln 8)^2$

단답형

29. 그림과 같이 점 O 를 중심으로 하고 선분 AB 를 지름으로 하는 반지름의 길이가 1인 반원이 있다. 반원 외부의 점 P 와 호 AB 위의 점 Q 에 대하여 $\angle PAB = \theta$, $\angle QBA = 3\theta$ 라 하자. 이때, 선분 AP 와 선분 BQ 가 만나는 점을 R 라 하면 삼각형 PQR 는 $\overline{PR} = \overline{QR}$ 인 이등변삼각형이다. 두 선분 QR , AR 와 호 AQ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$ 라 하고, 선분 PQ 와 선분 PR 가 반원과 만나는 점을 각각 S , T 라 할 때 두 선분 PS , PT 와 호 ST 로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{f(\theta)}{g(\theta)} = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오.
(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$ 이고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



30. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $0 \leq x < \pi$ 에서 $f(x) = a \cos(x - a\pi) + b$ 이다.
- (나) 음이 아닌 모든 실수 x 에 대하여 $f(x + \pi) = -\frac{1}{2}f(x) + c$, $2xf(x) + f(-x) = 0$ 을 만족시킨다.

가능한 a 를 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때, n 번째 수를 a_n 이라 하자. $\frac{1}{a} \int_{-\pi}^{3\pi} f(x) dx$ 가 최대일 때, $\frac{4a_{10}}{c} f(3\pi)$ 의 값을 구하시오. (단 a, b, c 는 실수이고, $a > 0$ 이다.) [4점]

제 2 교시

Epsilon

수학 영역(기하)

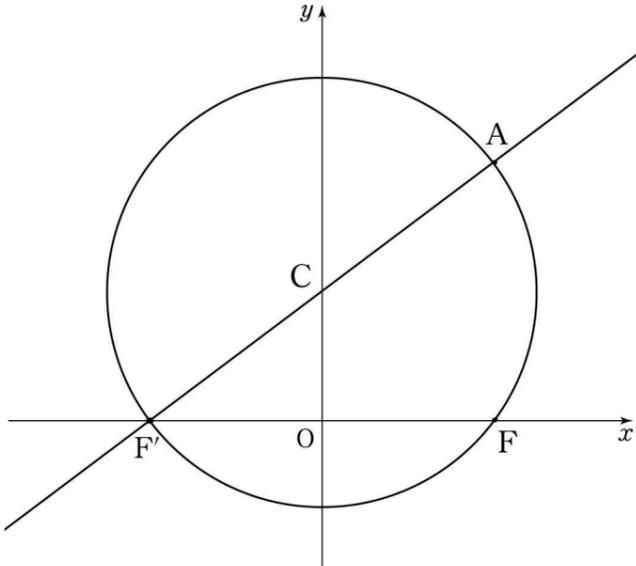
성균관대학교 수학교육과 Epsilon 주관

5지선다형

23. 좌표공간에서 두 점 $A(a, 0, 2)$, $B(4, b, -1)$ 에 대하여 선분 AB 를 1:2로 내분하는 점의 좌표가 $(2, 0, 1)$ 이다. $a+b$ 의 값은? [2점]
- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

24. 포물선 $y^2 = 2x$ 위의 점 $(\frac{9}{2}, 3)$ 에서의 접선이 점 (a, b) 에서의 접선과 수직일 때, ab 의 값은? [3점]
- ① $-\frac{1}{45}$ ② $-\frac{1}{54}$ ③ $-\frac{1}{63}$ ④ $-\frac{1}{72}$ ⑤ $-\frac{1}{81}$

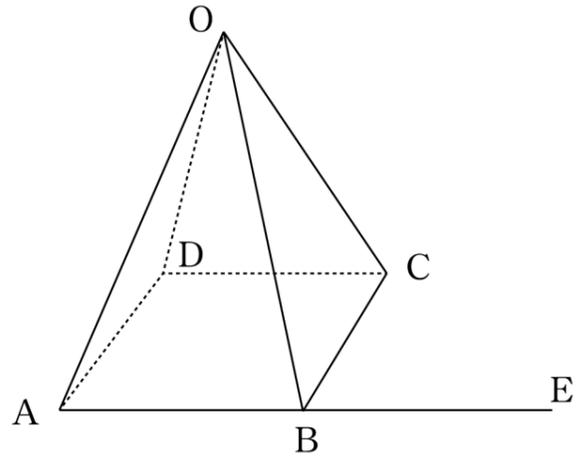
25. 그림과 같이 좌표평면 위에 점 $F(2, 0)$ 과 점 $F'(-2, 0)$ 을 지나는 원 O 가 있다. 직선 $3x - 4y + 6 = 0$ 이 원 O 의 중심 C 와 원 위의 서로 다른 두 점 F' 과 A 를 지난다. 점 F 와 점 F' 를 초점으로 하고 점 A 를 지나는 타원에 대하여 직선 $3x - 4y + 6 = 0$ 과 평행한 두 접선 사이의 거리는? [3점]



- ① $\frac{6}{5}\sqrt{21}$ ② $\frac{7}{5}\sqrt{21}$ ③ $\frac{8}{5}\sqrt{21}$ ④ $\frac{9}{5}\sqrt{21}$ ⑤ $2\sqrt{21}$

26. 그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정사각형 $ABCD$ 를 밑면으로 하고 $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD} = 8$ 인

사각뿔 $O-ABCD$ 가 있다. 직선 AB 위 점 E 에 대하여 $\overline{BE} = 6$ 이다. 직선 OA 위의 한 점 P 와 직선 CE 위의 한 점 Q 에 대하여 선분 PQ 의 길이가 최소가 되도록 하는 점 P, Q 를 각각 X, Y 라고 하자. 점 X 의 평면 $ABCD$ 위로의 정사영을 점 X' 라고 할 때, 선분 $X'Y$ 의 길이는? (단, 점 E 는 점 A 가 아니다.) [3점]



- ① $\frac{57}{16}\sqrt{2}$ ② $\frac{15}{4}\sqrt{2}$ ③ $\frac{63}{16}\sqrt{2}$ ④ $\frac{33}{8}\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{69}{16}\sqrt{2}$

27. 중심이 O 이고 반지름이 6인 원 위의 네 점 A, B, C, D 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -18$$

$$(나) \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AC})$$

$$(다) (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OD} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OA})$$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OD}$ 가 최대이고 $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AC}$ 가 최소일 때, 삼각형 ACD 의 넓이는? [3점]

- ① 6 ② $6\sqrt{3}$ ③ 18 ④ $18\sqrt{3}$ ⑤ 54

28. 좌표평면에서 $\overline{AB} = 2$ 를 만족하는 두 점 A, B 에 대하여 두 점 P, Q 가 다음 조건을 만족시킬 때, 점 Q 가 나타내는 도형의 길이는? (단, 점 A 와 점 Q 는 서로 다른 점이다.) [4점]

$$(가) \overline{AP} - \overline{BP} = \sqrt{3}$$

$$(나) \overline{AQ} \perp \overline{BQ}, \overline{AP} \perp \overline{AQ}$$

- ① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{3}$ ③ $\frac{\pi}{2}$ ④ $\frac{2}{3}\pi$ ⑤ $\frac{5}{6}\pi$

단답형

29. 좌표공간에 중심의 z 좌표가 양수이고 xy 평면에 접하는 구 S 가 있다. 이 구 S 의 한 단면 C 의 xy 평면으로의 정사영은 점 A 를 중심으로 하는 타원 $\frac{(x-\sqrt{3})^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{6} = 1$ 이다. 가능한 가장 작은 구 S 를 S' , 이때의 단면 C 를 C' 라 하자. 구 S' 의 중심을 B , 구 S' 위의 점 중 x 좌표가 가장 큰 점을 C 라 할 때, 삼각형 ABC 의 평면 C' 위로의 정사영의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{3}$ 이다. $p+q$ 를 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

30. 좌표평면에 $\overrightarrow{AB} = (2, -2\sqrt{3})$ 이고 $\cos(\angle AOB) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 인 삼각형 OAB 가 있다. $|\overrightarrow{AP} + 2\overrightarrow{BP}| = 4$ 를 만족시키는 모든 점 P 에 대하여

$$-3 \leq \overrightarrow{OP} \cdot (3, 0) \leq 5$$

- 를 만족시킬 때, 점 $R(0, \sqrt{3})$ 에 대하여 $\overrightarrow{RA} \cdot \overrightarrow{RB}$ 의 최솟값을 구하시오. (단, O 는 원점이다.) [4점]

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.