< 0주차 >

제 2 교시

수학 영역

안녕하세요, 인스타에서 학습법 칼럼과 수학 자료를 올리고 있는 김극한입니다.

이번에 여름방학 프로그램을 만들었는데, 특강을 사든 안 사든 그 프로그램에 포함된 주간지를 여러분이 직접 한번 풀어보셨으면 하여 이렇게 만들었습니다.

이번 0주차 주간지는

- 올해 6월 모의고사 완벽 분석서
- 수능완성 수2 선별 절반
  (특강 숙제로 나가는 1주차부터는 통째로 나갑니다)
- 데일리 기출 모의고사 3회분
- EBS 준킬러 미니모의고사 2회분

이렇게 구성됩니다.

여름방학 프로그램에 배부되는 주간지와 동일한 구성이지만 안에 있는 문제는 다르기 때문에,
수강생 비수강생 모두 풀 수 있습니다.

- 약점 공략용 테마 특강
  (도형 해석 특강 / 함수 해석 특강)
- 특강 숙제: 복습 + 기출 선별 + 사설/자작 문항
- 매주 배부되는 주간지
- 방학 계획 1:1 컨설팅
- 수학 문제(특강 문제 아니어도 ok) 무제한 질답
- 학습 방향 무제한 상담
- 플래너 인증, 열품타 관리 (선택)

이 모든 걸 한 번에 할 수 있는
제 여름방학 프로그램도 많은 관심 부탁드립니다.

프로필에 유튜브, 사이트 링크가 있습니다.

제 2 교시

수학 영역(수II) 1단원(극한) ~2단원(미분) 절반

1. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

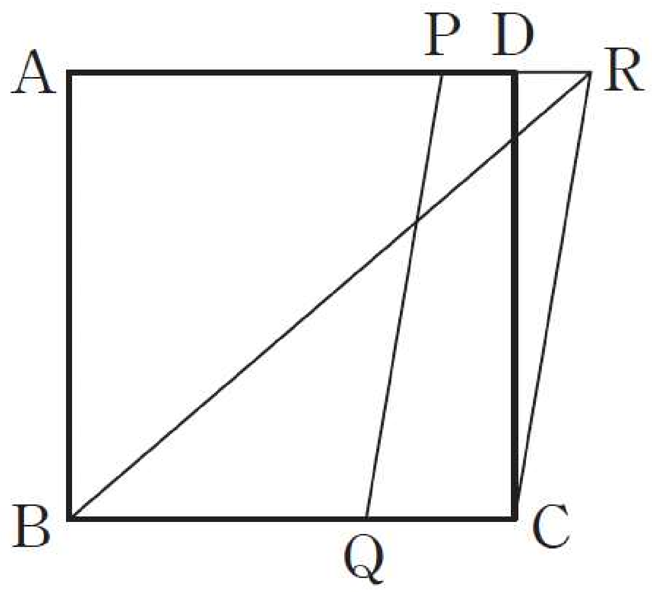
(가) $\lim_{x\to 1-} f(x)+\lim_{x\to 1+} 2f(x)=6$
(나) $\lim_{x\to 1}\{f(x)g(x)+2xf(x)\}=10$

$\lim_{x\to 1}\{3f(x)+2g(x)\}$의 값을 구하시오.

〈함수의 극한과 연속 - 11번〉

2. 그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정사각형 ABCD의 변 AD 위에 $\overline{\mathrm{PD}}=t\ (0<t<1)$인 점 P가 있다. 선분 BC를 $2:1$로 내분하는 점을 Q라 하고 점 C를 지나고 직선 PQ와 평행한 직선이 직선 AD와 만나는 점을 R라 하자. $\lim_{t\to 0}\frac{\overline{\mathrm{PD}}}{5-\overline{\mathrm{BR}}}$의 값은?

〈함수의 극한과 연속 - 15번〉



3. 정의역이 $\{x \mid x \ge 0\}$인 함수 $y=f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \le x < 2$일 때, $f(x)=\lvert x-1 \rvert$이다.
(나) $x \ge 0$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이다.

양의 실수 t에 대하여 직선 $y=\dfrac{x}{t}$가 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. $\lim_{t\to 4-} g(t)+g(6)+\lim_{t\to 8+} g(t)$의 값을 구하시오. 〈함수의 극한과 연속 - 19번〉

4. 이차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 두 상수 a, b에 대하여 함수 $g(x)$가 다음과 같다. $g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+x+a}{x^2-x} & (x<0) \\ x+b & (0 \le x < 2) \\ f(x) & (x \ge 2) \end{cases}$ 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고 $x \ge 2$에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 0일 때, 닫힌구간 $[-5, 5]$에서 함수 $g(x)$의 최댓값과 최솟값의 합은? 〈함수의 극한과 연속 - 22번〉

5. 이차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2} & (x<1) \\ \dfrac{1}{f(x)} & (1 \le x \le 3) \\ \dfrac{1}{6} & (x>3) \end{cases}$$ 이 실수 전체의 집합에서 연속이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축과 만나는 점의 $(0,\ k)$라 할 때, 자연수 k의 최댓값을 구하시오. 〈함수의 극한과 연속 - 23번〉

6. 정의역이 $\{x|x \ge 0\}$인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \le x < 3$일 때, $f(x)=(x-1)^2$이다.
(나) 3 이상의 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x-3)+3$이다.

$t \ne 1$인 실수 t에 대하여 직선 $y=tx+1$이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 할 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? 〈함수의 극한과 연속 - 24번〉

〈 보 기 〉

ㄱ. $g(0)=2$

ㄴ. $\lim_{t \to 1+} g(t)=\infty$

ㄷ. 함수 $g(t)$가 $t=a$에서 불연속인 실수 a의 값을 작은 것부터 순서대로 나열한 것이 a_1, a_2, a_3, $\cdots$일 때, $a_3=-14+6\sqrt{6}$이다.

7. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(3)=2$이고

$\lim_{h\to 0}\frac{\{f(3+h)\}^2-\{f(3)\}^2}{2h}=16$일 때, $f'(3)$의 값은?

〈다항함수의 미분법 - 2번〉

8. 좌표평면 위에 네 점 (0, 0), (2, 0), (2, 2), (0, 2)를 꼭짓점으로 하는 정사각형이 있다. 실수 t에 대하여 직선 $y=t-x$의 아랫부분과 정사각형의 내부가 겹치는 부분의 넓이를 $f(t)$라 하자. 함수 $|f(x)-mx|$가 $x=0$에서만 미분가능하지 않도록 하는 양의 실수 m의 최솟값이 $a+b\sqrt{2}$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.)

〈다항함수의 미분법 - 12번〉

9. 자연수 n에 대하여 닫힌구간 $[n,\ n+2]$에서 정의된 함수 $f(x)=x^3-9x^2+24x+5$가 있다. 함수 $f(x)$가 일대일 함수가 되도록 하는 10 이하의 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

〈다항함수의 미분법 - 14번〉

10. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=x^3+x^2+|x-a|+2$의 역함수가 존재하도록 하는 실수 a의 최댓값은?

〈다항함수의 미분법 - 15번〉

11. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극댓값 0을 갖는다. (나) 방정식 $f(x)=0$의 세 실근을 작은 것부터 차례로 나열하면 등차수열을 이룬다.

함수 $f(x)$의 극솟값이 -16일 때, $f(0)$의 값은?

〈다항함수의 미분법 - 17번〉

12. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=x+3$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 서로 다른 두 점에서 만난다. (나) 함수 $\lvert f(x)-g(x)\rvert$는 $x=1$에서만 미분가능하지 않다. (다) 함수 $\lvert f(x)-g(x)\rvert$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

$f(2)$의 값은?

〈다항함수의 미분법 - 20번〉

13. 곡선 $C: y=2x^4-3x^2-2x+4$ 위의 x좌표가 양수인 점에서 접하는 직선 중 기울기가 최소인 직선의 y절편이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값은? (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

〈다항함수의 미분법 - 23번〉

14. 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t-1,\ t+1]$에서 함수 $f(x)=x^3-5x^2+2x+13$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=a$에서 미분가능하지 않을 때 $g'(a-1)+g'(a+1)$의 값은?

〈다항함수의 미분법 - 25번〉

제 2 교시

수학 영역(수II)

1. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to1-}f(x)+\lim_{x\to1+}2f(x)=6$
(나) $\lim_{x\to1}\{f(x)g(x)+2xf(x)\}=10$

$\lim_{x\to1}\{3f(x)+2g(x)\}$의 값을 구하시오.

〈함수의 극한과 연속 - 11번〉

다항함수 → 실수 전체 집합에서 연속, 미가

→ $x=1$에서도 연속 → $\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)=\lim_{x\to1+}f(x)$

(가) $\lim_{x\to1-}f+\lim_{x\to1+}2f=3f(1)=6$

$\to f(1)=\lim_{x\to1}f(x)=2$

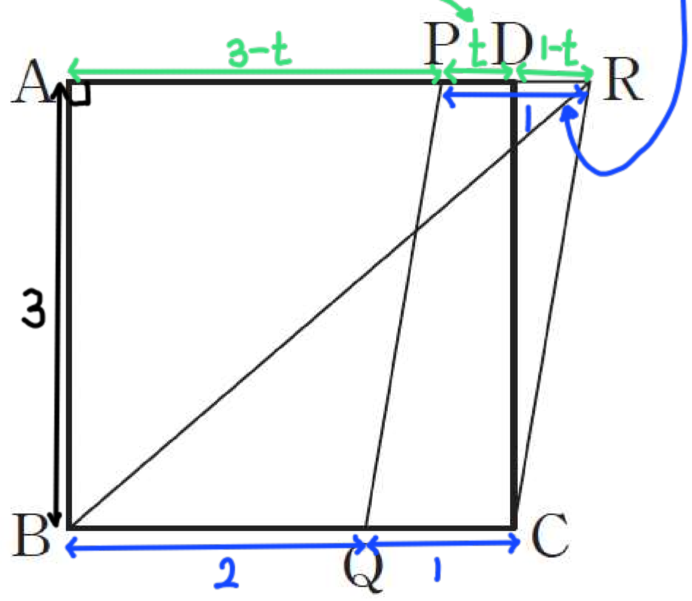
(나) $f(1)g(1)+2f(1)=2g(1)+4=10$

$\to g(1)=\lim_{x\to1}g(x)=3$

$\therefore \lim_{x\to1}(3f+2g)=6+6=\boxed{12}$

2. 그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정사각형 ABCD의 변 AD 위에 $\overline{\mathrm{PD}}=t\ (0<t<1)$인 점 P가 있다. 선분 BC를 $2:1$로 내분하는 점을 Q라 하고 점 C를 지나고 직선 PQ와 평행한 직선이 직선 AD와 만나는 점을 R라 하자. $\lim_{t\to0}\frac{\overline{\mathrm{PD}}}{5-\overline{\mathrm{BR}}}$의 값은?

〈함수의 극한과 연속 - 15번〉



$\overline{BR}=\sqrt{3^2+(4-t)^2}=\sqrt{t^2-8t+25}$

$\overline{PD}=t$

$\therefore \lim_{t\to0}\frac{t}{5-\sqrt{t^2-8t+25}}=\lim_{t\to0}\frac{\cancel{t}(5+\sqrt{t^2-8t+25})}{\cancel{8t-t^2}\ 8-t}$

$=\frac{5+5}{8}=\boxed{\frac{5}{4}}$

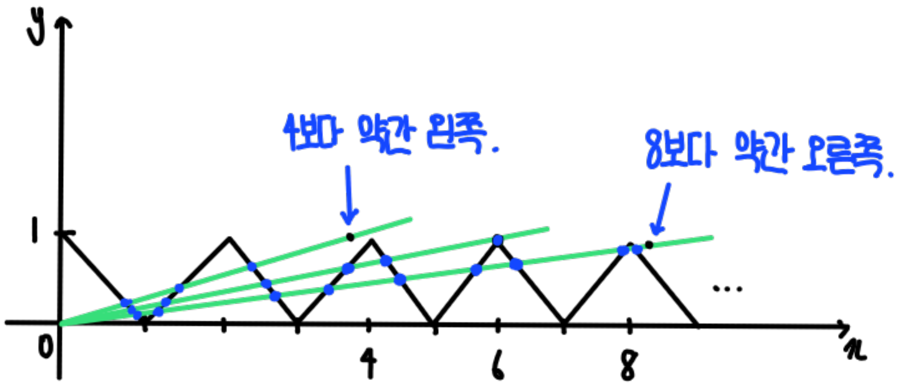
3. 정의역이 $\{x|x\geq 0\}$인 함수 $y=f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

↳ 정의역 체크!

> (가) $0\leq x<2$일 때, $f(x)=|x-1|$이다.
> (나) $x\geq 0$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이다.

↳ 주기, 반복

양의 실수 t에 대하여 직선 $y=\dfrac{x}{t}$가 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. $\lim\limits_{t\to 4-}g(t)+g(6)+\lim\limits_{t\to 8+}g(t)$의 값을 구하시오. 〈함수의 극한과 연속 - 19번〉



지금 상황에서 특이한 점은 y=1이기 때문에 $y=\frac{x}{t}$를 "(t, 1)을 지나는 직선"으로 읽어줄 수 있어야 한다.

$$\therefore \begin{cases} \lim\limits_{t\to 4-} g(t)=3 \\ g(6)=6 \\ \lim\limits_{t\to 8+} g(t)=9 \end{cases}$$

$\boxed{18}$

4. 이차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 두 상수 a, b에 대하여 함수 $g(x)$가 다음과 같다.

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+x+a}{x^2-x} & (x<0) \\ x+b & (0\leq x<2) \\ f(x) & (x\geq 2) \end{cases}$$

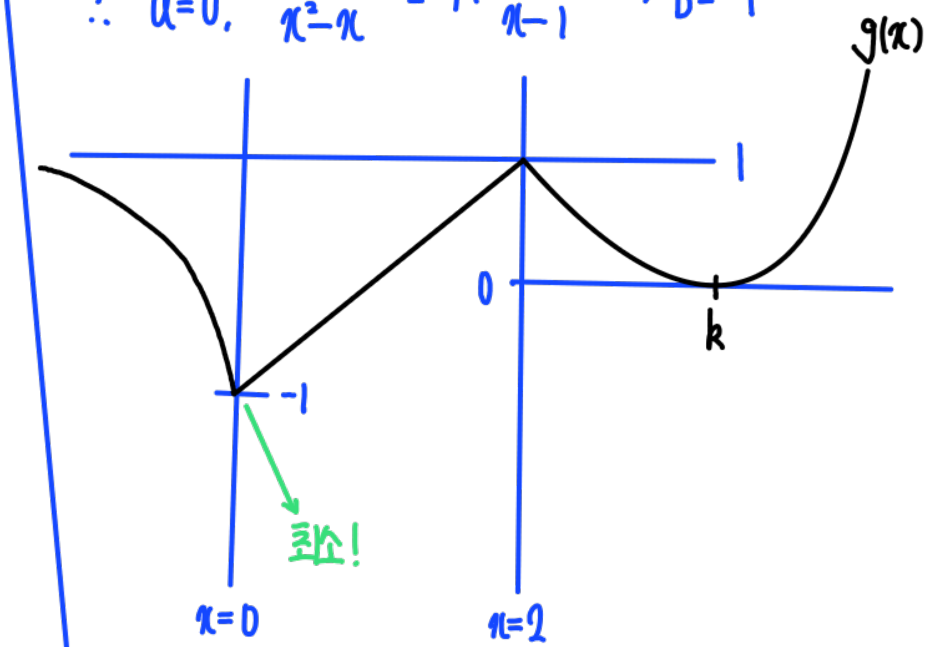
함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고 $x\geq 2$에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 0일 때, 닫힌구간 $[-5,\ 5]$에서 함수 $g(x)$의 최댓값과 최솟값의 합은? 〈함수의 극한과 연속 - 22번〉

이차 최소?

구간별로 정의된 함수 with 연속
: 경계에서 연속 여부 확인!

$\dfrac{x^2+x+a}{x^2-x}$는 $a\neq 0$이라면 $x=0$의 점근선 갖는다.

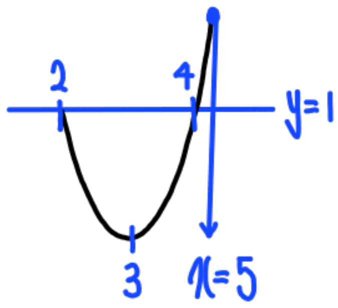
$\therefore\ a=0,\ \dfrac{x^2+x+a}{x^2-x}=1+\dfrac{2}{x-1} \longrightarrow b=-1$



2보다 큰 어느 한 지점 k에서 이차함수가 최소 0을 가져야 함.

$f(x)=(x-k)^2$에 $f(2)=1$ 대입.

$\to k^2-4k+3=0,\ k=3\ (\because k>2)$



g(x)의 최대는 x=5일 것!

$\to M=g(5)=4$

$\therefore M+m=4+(-1)=\boxed{3}$

5. 이차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & (x<1)\\ \dfrac{1}{f(x)} & (1\le x\le 3)\\ \dfrac{1}{6} & (x>3)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축과 만나는 점의 $(0,\ k)$라 할 때, 자연수 k의 최댓값을 구하시오. 〈함수의 극한과 연속 - 23번〉

구간별 + 연속 → 경계 확인.

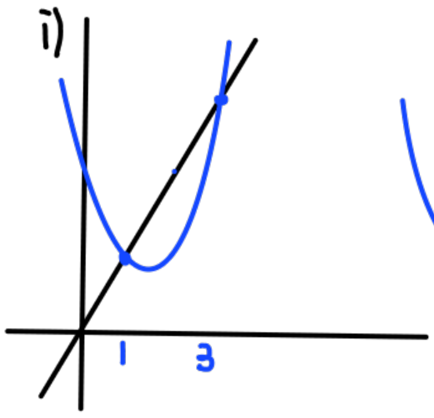
$x=1$: $\frac{1}{2}=\frac{1}{f(1)}$, $f(1)=2$

$x=3$: $\frac{1}{f(3)}=\frac{1}{6}$, $f(3)=6$

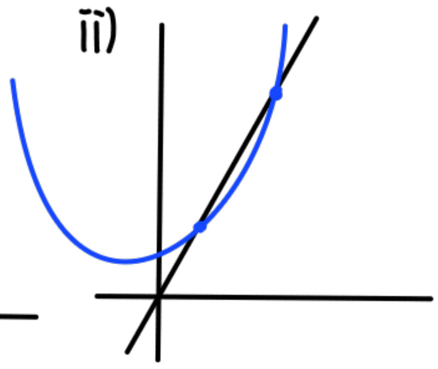
* 뺀 함수를 이용해 식 작성 :
$y=f(x)$와 $y=2x$는 $(1,2)$, $(3,6)$을 동시에 지난다.

$\therefore f(x)-2x=a(x-1)(x-3)$

i)



ii)



$\Downarrow$

$f'(x)=2ax-4a+2$

$x=\frac{2a-1}{a}$ 에서 최소.

i) : $1<\frac{2a-1}{a}<3$

↳ $a>1$일 때

$f\left(\frac{2a-1}{a}\right)=-\frac{a^2-4a+1}{a}>0$

↳ f가 분모에 있으므로 분모$\neq0$ 이어야 연속이다.

$\therefore 1<a<2+\sqrt{3}$

$\Downarrow$

$x=\frac{2a-1}{a}$에서 최소.

ii) : $\frac{2a-1}{a}\le 1$

↳ $0<a\le1$일 때

$f(1)=2>0$. ok

$\therefore 0<a\le 1$

$k=f(0)=3a$이므로

$0<a<2+\sqrt{3}$에서

$0<3a<6+3\sqrt{3}$.

k최대 $=\boxed{11}$

6. 정의역이 $\{x|x\ge 0\}$인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

정의역 체크

(가) $0\le x<3$일 때, $f(x)=(x-1)^2$이다.
(나) 3 이상의 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x-3)+3$이다.

↳ 규칙

$t\neq1$인 실수 t에 대하여 직선 $y=tx+1$이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 할 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? 〈함수의 극한과 연속 - 24번〉

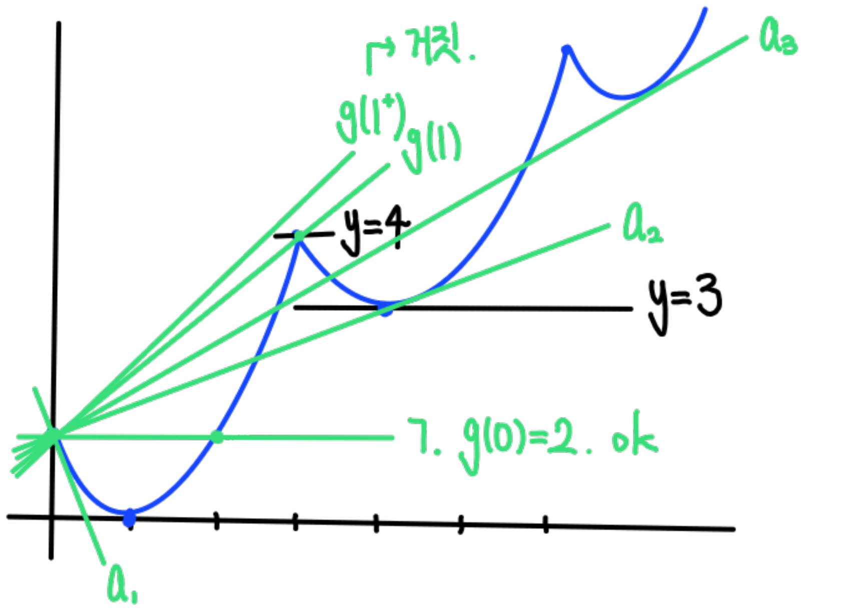
〈 보 기 〉

ㄱ. $g(0)=2$

~~ㄴ.~~ $\lim_{t\to1+}g(t)=\infty$

ㄷ. 함수 $g(t)$가 $t=a$에서 불연속인 실수 a의 값을 작은 것부터 순서대로 나열한 것이 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots$일 때, $a_3=-14+6\sqrt{6}$이다.

(가) 조건만으로는 f가 $[0,3)$에서만 정의되지만,
(나)의 추가적인 규칙을 적용하면서
함수 $f(x)$가 실수 전체에서 적용되는 것이다.



$y=tx+1$을, "$(0,1)$을 지나면서 기울기만 t에 따라 변하는 직선"으로 읽어주자.

ㄷ. 교점 개수 불연속 → 접점 기준일 것.

그림에 표시된 a_3가 기울기인 직선 구하기.

$f=(x-7)^2+6$ $(6\le x<9)$에 접하므로

$\frac{(k-7)^2+6-1}{k}=2(k-7)$, $k=3\sqrt{6}$

$\therefore a_3=2(3\sqrt{6}-7)=-14+6\sqrt{6}$ (o)

$\boxed{ㄱ, ㄷ}$

7. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(3)=2$이고

$\lim_{h\to 0}\frac{\{f(3+h)\}^2-\{f(3)\}^2}{2h}=16$일 때, $f'(3)$의 값은?

〈다항함수의 미분법 - 2번〉

생소해도 쫄지 말 것!

* 합차공식 : $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$f(3+h)^2-f(3)^2=(f(3+h)+f(3))(f(3+h)-f(3))$

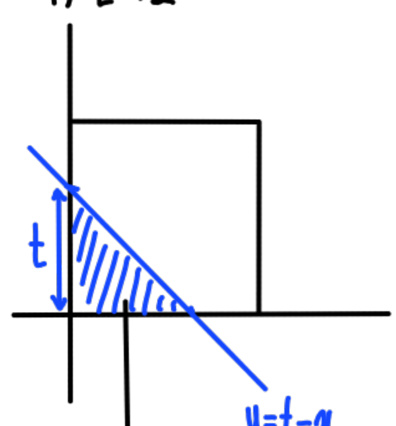
$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\frac{f(3+h)-f(3)}{h}}_{f'(3)}\cdot\underbrace{(f(3+h)+f(3))}_{2f(3)}\right)$$

$\therefore\ \frac{1}{2}\cdot f'(3)\cdot 2f(3)=16,\ f'(3)=\boxed{8}$

8. 좌표평면 위에 네 점 (0, 0), (2, 0), (2, 2), (0, 2)를 꼭짓점으로 하는 정사각형이 있다. 실수 t에 대하여 직선 $y=t-x$의 아랫부분과 정사각형의 내부가 겹치는 부분의 넓이를 $f(t)$라 하자. 함수 $|f(x)-mx|$가 $x=0$에서만 미분가능하지 않도록 하는 양의 실수 m의 최솟값이 $a+b\sqrt{2}$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.)

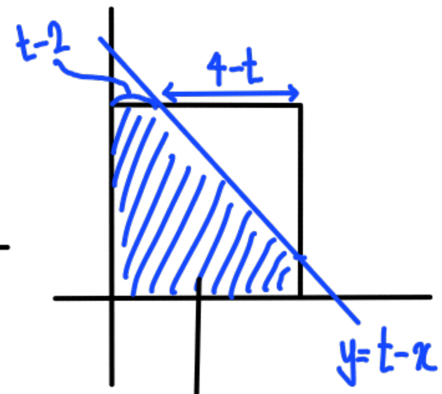
〈다항함수의 미분법 - 12번〉

i) $t<2$



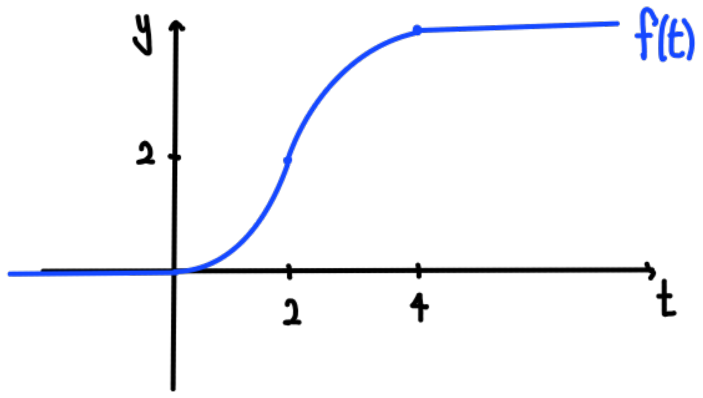
$f(t)=\frac{1}{2}t^2$

ii) $2\le t<4$



$f(t)=4-\frac{1}{2}(4-t)^2$

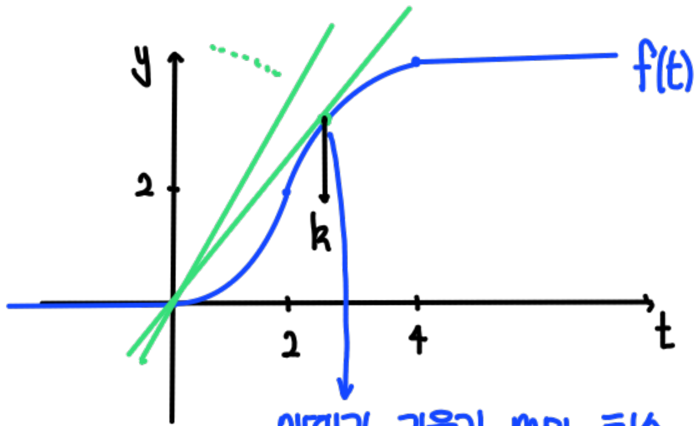
$t\le 0$이면 $f(t)=0$, $t\ge 4$이면 $f(t)=4$이므로
f는 실수 전체의 집합에서 정의되었다.



"$|f-mx|$가 0에서만 미분불가"

→ $m\ne 0$

→ 0이외에 다른 교점이 없거나
있더라도 접해야 한다. (미분가능)



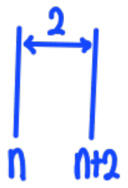
이때가 기울기 m의 최소.

$\frac{-\frac{1}{2}k^2+4k-4}{k}=4-k,\ k=2\sqrt{2}\longrightarrow m=4-2\sqrt{2}$

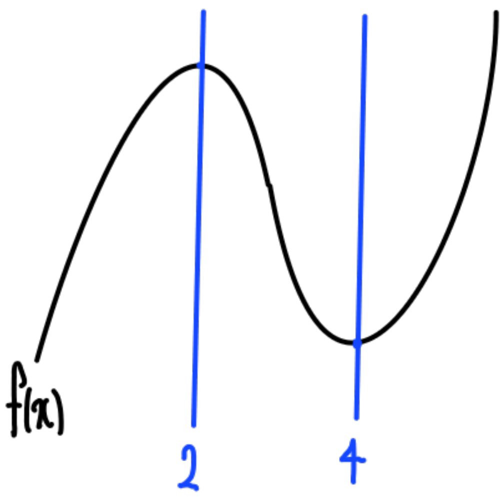
$\therefore\ a^2+b^2=4^2+(-2)^2=\boxed{20}$

9. 자연수 n에 대하여 닫힌구간 $[n,\ n+2]$에서 정의된 함수 $f(x)=x^3-9x^2+24x+5$가 있다. 함수 $f(x)$가 일대일 함수가 되도록 하는 10 이하의 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

〈다항함수의 미분법 - 14번〉



이 구간이 n 값에 따라 이동할 텐데, 그 구간 내에서만 일대일함수이면 되는 것.

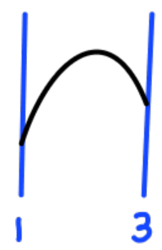


$n=2 \to [2,4] \to$ 일대일함수 충족.

$n=4\sim10 \to$ 충족.

$\therefore\ 2+(4+5+\cdots+10)=\boxed{51}$

$n=1$ 이라면? 구간 $[1,3]$.



$\longrightarrow$ 안된다.

10. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=x^3+x^2+|x-a|+2$의 역함수가 존재하도록 하는 실수 a의 최댓값은?

〈다항함수의 미분법 - 15번〉

$\to f'(x)>0$

절댓값은, 벗길 수 있으면 벗기자!

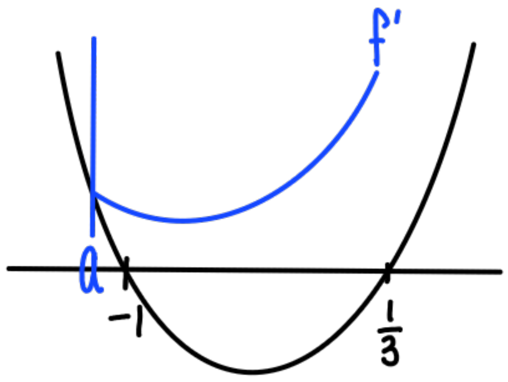
$$f(x)=\begin{cases} x^3+x^2-x+a+2 & (x<a) \\ x^3+x^2+x-a+2 & (x\ge a)\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2+2x-1 & (x<a) \\ \underbrace{3x^2+2x+1}_{\text{항상 }>0.} & (x\ge a)\end{cases}$$

$3x^2+2x-1=0$의 근이 $-1,\ \frac{1}{3}$이므로

a가 -1보다 작거나 같아야 f'의 부호 변화가 나타나지 않는다.

$\therefore\ a\le-1,$ 최댓값 $\boxed{-1}$



11. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

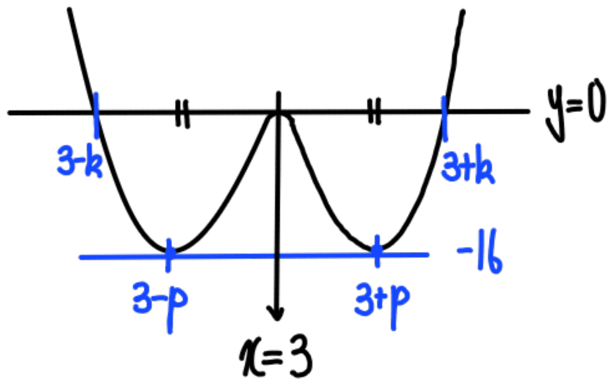
> (가) 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극댓값 0을 갖는다.
> (나) 방정식 $f(x)=0$의 세 실근을 작은 것부터 차례로 나열하면 등차수열을 이룬다.

→ 사차함수가 세 실근?

함수 $f(x)$의 극솟값이 -16일 때, $f(0)$의 값은?

〈다항함수의 미분법 - 17번〉

= 실근들 사이의 거리가 같다.



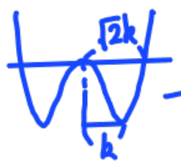
i) $f(x) = (x-(3+p))^2(x-(3-p))^2-16$

$f(3) = p^4-16=0, \quad p=2$

$\therefore f(0) = 25\cdot 1-16 = \boxed{9}$

ii) $f(x) = (x-3)^2(x-(3+k))(x-(3-k))$

→ $f(x+3) = x^2(x^2-k^2)$



$f\left(3+\frac{k}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{k^4}{4} = -16, \quad k^2=8$

$\therefore f(0) = (-3)^2((-3)^2-8) = \boxed{9}$

12. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=x+3$이 다음 조건을 만족시킨다.

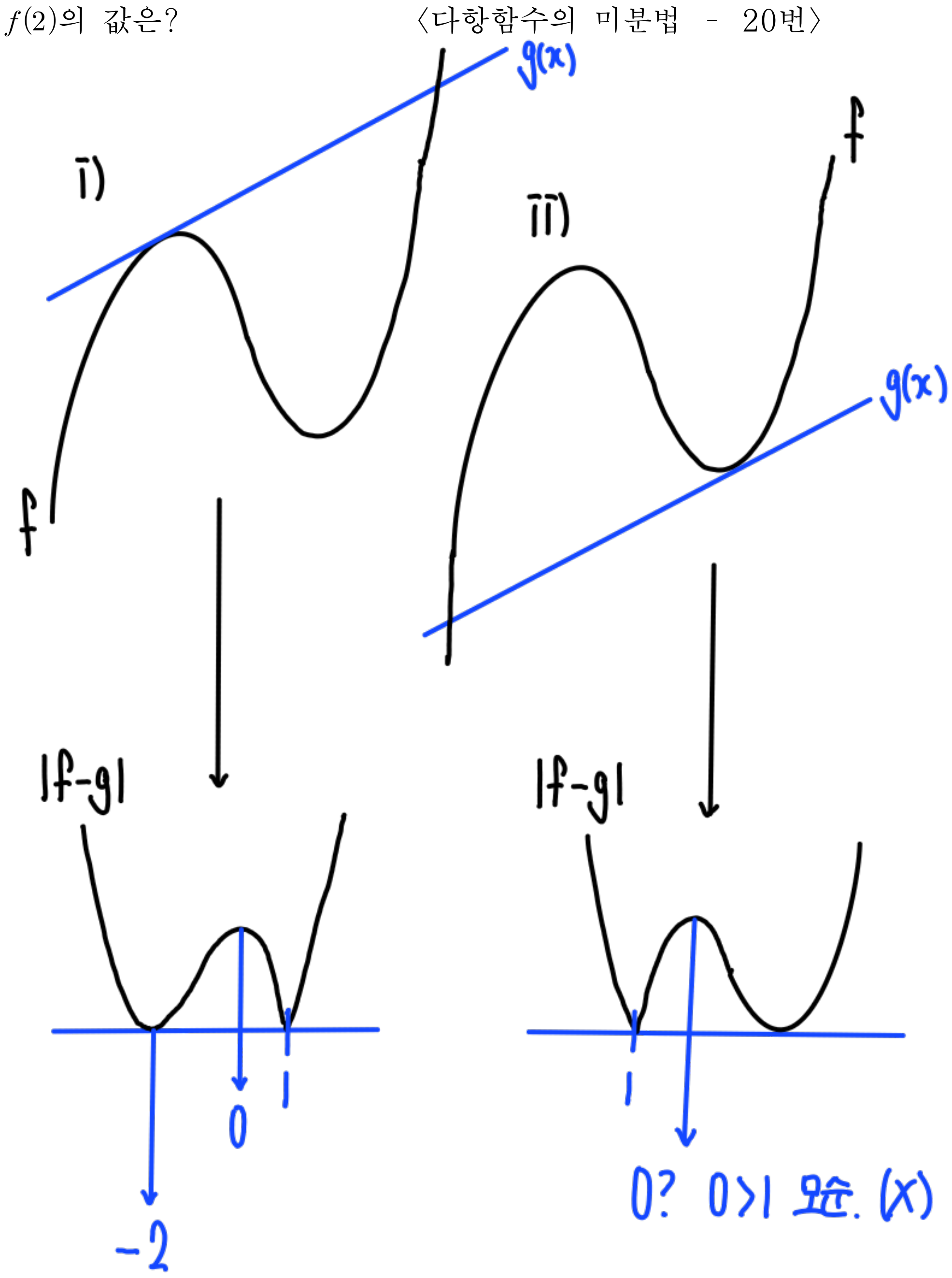
→ 다항함수: 연속, 미가

> (가) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 서로 다른 두 점에서 만난다.
> (나) 함수 $|f(x)-g(x)|$는 $x=1$에서만 미분가능하지 않다.
> (다) 함수 $|f(x)-g(x)|$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

→ 접.

$f(2)$의 값은?

〈다항함수의 미분법 - 20번〉



$\therefore f(x)-(x+3) = (x+2)^2(x-1)$

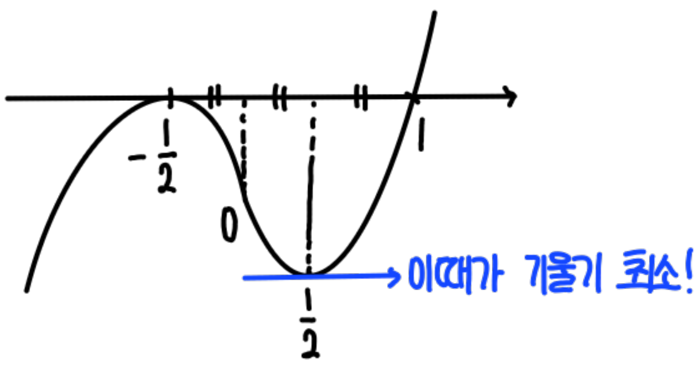
$f(2) = 16+5 = \boxed{21}$

13. 곡선 $C: y=2x^4-3x^2-2x+4$ 위의 x좌표가 양수인 점에서 접하는 직선 중 기울기가 최소인 직선의 y절편이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값은? (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

〈다항함수의 미분법 - 23번〉

$\frac{dy}{dx}$ 값이 최소. (= f'의 함숫값이 최소)

$$\frac{dy}{dx} = 8x^3-6x-2 = 2(x-1)(2x+1)^2$$



$$\begin{cases} f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 4 = -4 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}-\frac{3}{4}-1+4 = 3-\frac{5}{8} = \frac{19}{8} \end{cases}$$

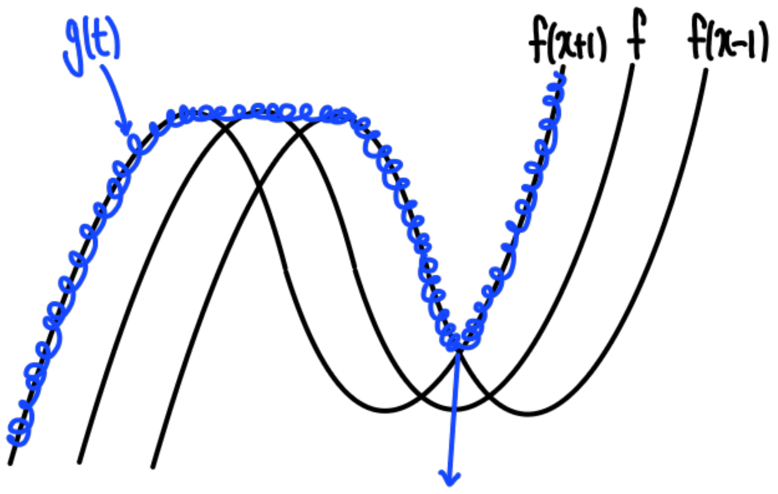
$$\therefore y = -4\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{19}{8} = -4x+\frac{35}{8}$$

$p+q = \boxed{43}$

14. 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t-1,\ t+1]$에서 함수 $f(x)=x^3-5x^2+2x+13$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=a$에서 미분가능하지 않을 때 $g'(a-1)+g'(a+1)$의 값은?

〈다항함수의 미분법 - 25번〉

f(x+1), f(x-1) 같이 그리고 함숫값이 더 큰 부분 따라가기!



미분불가능.

f(x-1)과 f(x+1)의 교점 중 더 오른쪽에 있는 점이 a.

계산하면 $a=3$.

i) $g'(a-1)$의 경우

$t=2$일 때 $g(t)=f(t-1) \longrightarrow g'(a-1)=f'(1)=-5$

ii) $g'(a+1)$의 경우

$t=4$일 때 $g(t)=f(t+1) \longrightarrow g'(a+1)=f'(5)=27$.

$$\therefore g'(a-1)+g'(a+1) = \boxed{22}$$

제 2 교시

수학 영역

주관식

20분 재고 풀기!

1. $\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)+\tan^2\left(\frac{2\pi}{3}\right)$의 값은? (2점)

2. 곡선 $y=x^3-2x^2$과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? (3점)

3. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})=-n^2+n$을 만족시킨다. a_{11}의 값은? (3점)

4. 함수 $f(x)=ax^2+b$가 모든 실수 x에 대하여

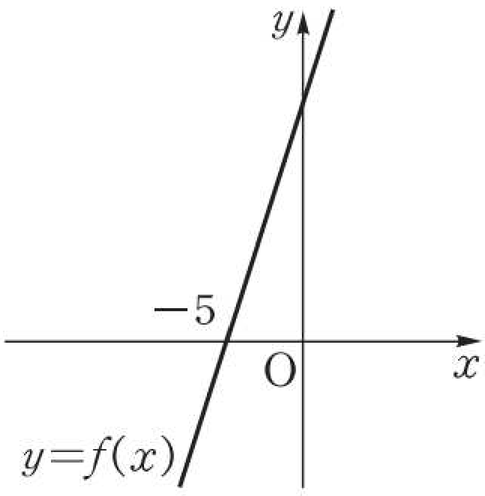
$4f(x)=\{f'(x)\}^2+x^2+4$를 만족시킨다. $f(2)$의 값은?
(단, a, b는 상수이다.) (4점)

5. 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $\dfrac{x}{f(x)}$는 $x=1$, $x=2$에서 불연속이다.
(나) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=4$

$f(4)$의 값을 구하시오. (4점)

6. 일차함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같고 $f(-5)=0$이다. 부등식 $2^{f(x)}\le 8$의 해가 $x\le -4$일 때, $f(0)$의 값을 구하시오. (4점)



7. 삼차함수 $f(x)=x^3-3x-1$이 있다. 실수 $t\,(t\geq -1)$에 대하여 $-1\leq x\leq t$에서 $|f(x)|$의 최댓값을 $g(t)$라고 하자.
$\int_{-1}^{1} g(t)dt=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, $p,\,q$는 서로소인 자연수이다.) (4점)

제 2 교시

수학 영역

주관식

20분 재고 풀기!

1. $\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)+\tan^2\left(\frac{2\pi}{3}\right)$의 값은? (2점)

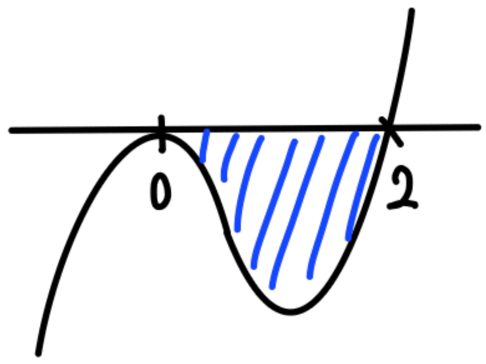
- $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\tan\frac{2\pi}{3}=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$

$=-\tan\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$

$\therefore \frac{3}{4}+3=\boxed{\frac{15}{4}}$

2. 곡선 $y=x^3-2x^2$과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? (3점)

$\hookrightarrow x^2(x-2)$



$-\int_0^2 (x^3-2x^2)=\boxed{\frac{4}{3}}$

cf> 넓이공식

$\frac{1}{12}(2-0)^4=\boxed{\frac{4}{3}}$

$f' = 2ax$

3. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1}) = -n^2 + n$을 만족시킨다. a_{11}의 값은? (3점)

빼기 구조이지 않을까?

전개해본다!

$$(a_1 - \cancel{a_2}) + (\cancel{a_2} - \cancel{a_3}) + \cdots + (\cancel{a_n} - a_{n+1})$$

$$= a_1 - a_{n+1} = 1 - a_{n+1} = -n^2 + n$$

$$\therefore a_{n+1} = n^2 - n + 1$$

$$a_{11} = 100 - 10 + 1 = \boxed{91}$$

4. 함수 $f(x) = ax^2 + b$가 모든 실수 x에 대하여 $4f(x) = \{f'(x)\}^2 + x^2 + 4$를 만족시킨다. $f(2)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) (4점)

계수비교법 문제! (특강 참고)

- $4f(x) = 4ax^2 + 4b$
- $\{f'(x)\}^2 = 4a^2x^2$

$$\therefore 4ax^2 + 0x + 4b$$
$$= (4a^2+1)x^2 + 0x + 4$$

$$\begin{cases} 4a^2 + 1 = 4a, & a = \frac{1}{2} \\ 4b = 4, & b = 1 \end{cases}$$

$$\therefore f(2) = 4a + b = \boxed{3}$$

5. 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $\frac{x}{f(x)}$는 $x=1$, $x=2$에서 불연속이다.

(나) $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=4$

$f(4)$의 값을 구하시오. (4점)

분수함수 불연속

→ 분모=0. 정의X.

(가) $f(x)=a(x-1)(x-2)$

(나) $\lim_{x\to 2}\frac{a(x-1)(x-2)}{x-2}=a=4.$

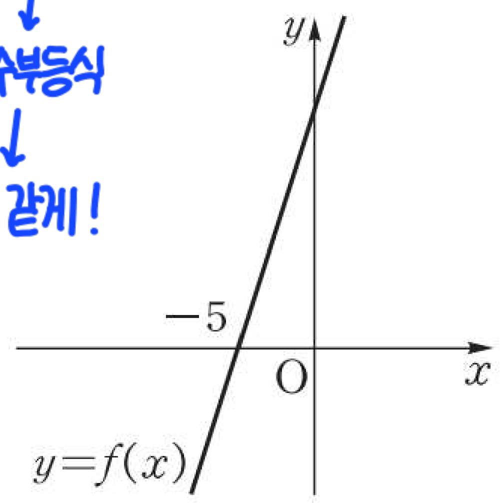
$\therefore f(4)=6a=\boxed{24}$

6. 일차함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같고 $f(-5)=0$이다. 부등식 $2^{f(x)}\le 8$의 해가 $x\le -4$일 때, $f(0)$의 값을 구하시오. (4점)

지수부등식

↓

밑 같게!



$2^{f(x)}\le 8 \Leftrightarrow f(x)\le 3$

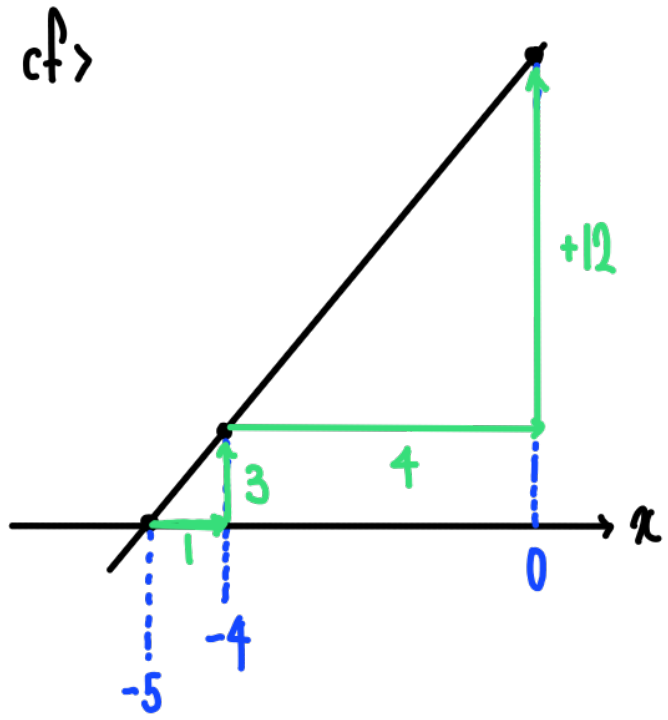
$f(x)\le 3$의 해가 $x\le -4$?

일차함수이므로 $(-4,3)$ 지날 것!

$(-5,0)$, $(-4,3)$ 지나는 직선은

$y=3x+15$. $f(0)=\boxed{15}$

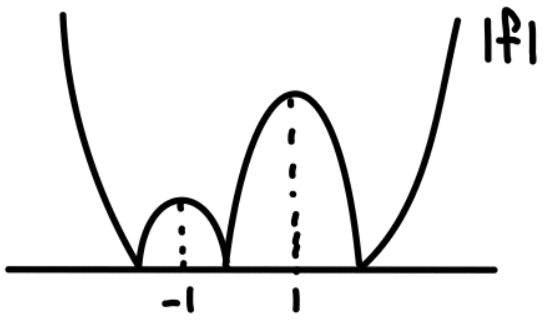
cf>



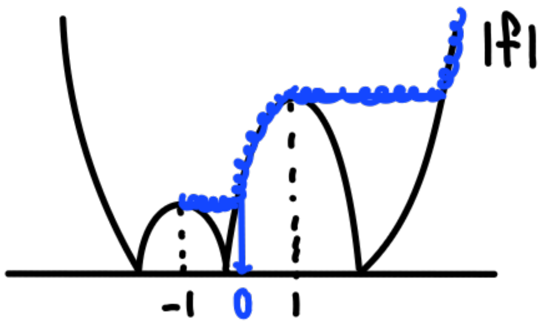
7. 삼차함수 $f(x)=x^3-3x-1$이 있다. 실수 $t\,(t\geq -1)$에 대하여 $-1\leq x\leq t$에서 $|f(x)|$의 최댓값을 $g(t)$라고 하자. $\displaystyle\int_{-1}^{1} g(t)dt=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 서로소인 자연수이다.) (4점)

모르겠으니까 일단 |f(x)| 그려!



t라는 값은 움직이는데, 그때마다
-1~t 중 함숫값의 최댓값이 g(t)?



이렇게 될 것이다!

$$\therefore \int_{-1}^{1} g(t)dt = \int_{-1}^{0} 1\,dt + \int_{0}^{1} |f(t)|dt$$

$$= \boxed{\frac{13}{4}}$$

제 2 교시

수학 영역

주관식

20분 재고 풀기!

1. $\sqrt[3]{2}\times 2^{\frac{2}{3}}$의 값은? (2점)

2. 함수 $f(x)=\begin{cases}4x^2-a & (x<1)\\ x^3+a & (x\geq 1)\end{cases}$ 이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? (3점)

3. $0<x<2\pi$일 때, 방정식 $4\cos^2 x-1=0$과 부등식 $\sin x\cos x<0$을 동시에 만족시키는 모든 x의 값의 합은? (3점)

4. 곡선 $y=-2x^2+3x$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 서로소인 자연수이다.) (4점)

5. $\angle A = 90°$ 이고 $\overline{AB} = 2\log_2 x$, $\overline{AC} = \log_4 \dfrac{16}{x}$ 인 삼각형 ABC의 넓이를 $S(x)$라 하자. $S(x)$가 $x = a$에서 최댓값 M을 가질 때, $a + M$의 값은? (단, $1 < x < 16$) (4점)

6. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

방정식 $f(x) = 9$는 서로 다른 세 실근을 갖고, 이 세 실근은 크기 순서대로 등비수열을 이룬다.

$f(0) = 1$, $f'(2) = -2$일 때, $f(3)$의 값은? (4점)

7. 모든 항이 자연수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_9의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은?
(4점)

(가) $a_7 = 40$
(나) 모든 자연수 n에 대하여
$a_{n+2} = \begin{cases} a_{n+1} + a_n & (a_n\text{이 3의 배수가 아닌 경우}) \\ \frac{1}{3}a_{n+1} & (a_{n+1}\text{이 3의 배수인 경우}) \end{cases}$ 이다.

제 2 교시

수학 영역

주관식

20분 재고 풀기!

1. $\sqrt[3]{2}\times 2^{\frac{2}{3}}$의 값은? (2점)

$2^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{2}{3}} = \boxed{2}$

2. 함수 $f(x)=\begin{cases} 4x^2-a & (x<1) \\ x^3+a & (x\geq 1) \end{cases}$ 이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? (3점)

경계 파악!

$\begin{cases} f(1^-)=4-a \\ f(1^+)=f(1)=a+1 \end{cases}$

$\therefore 2a=3,\quad a=\boxed{\frac{3}{2}}$

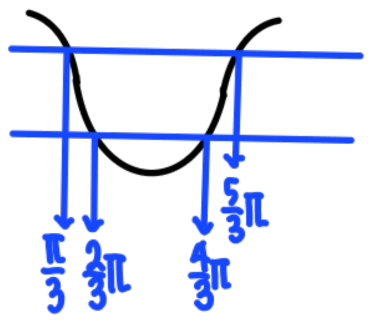
3. $0<x<2\pi$일 때, 방정식 $4\cos^2 x-1=0$과 부등식 $\sin x\cos x<0$을 동시에 만족시키는 모든 x의 값의 합은? (3점)

사인코사인 부호반대

탄젠트 부호반대

2, 4사분면

$\cos x = \pm\frac{1}{2}$



$\therefore \frac{2}{3}\pi+\frac{5}{3}\pi=\boxed{\frac{7}{3}\pi}$

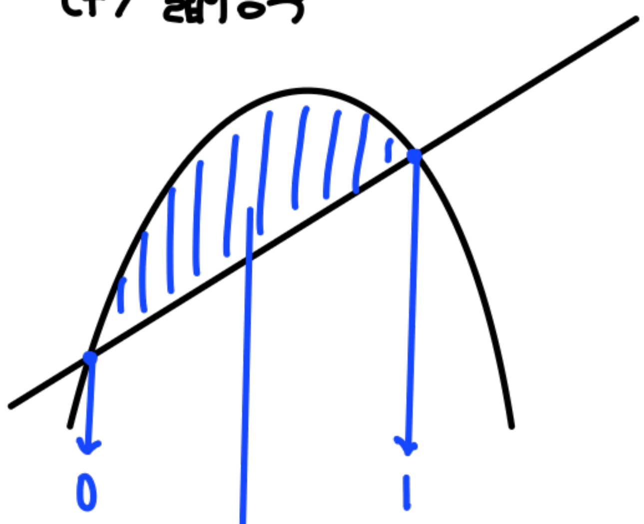
4. 곡선 $y=-2x^2+3x$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 서로소인 자연수이다.) (4점)

$\int_0^1(-2x^2+3x-x)\,dx=\frac{1}{3}$

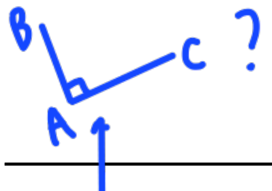
($\because$ 두 교점이 딱 0, 1이므로)

cf> 넓이공식



$\frac{2}{6}(1-0)^3=\frac{1}{3}$

$\therefore \boxed{4}$



5. $\angle A = 90^\circ$ 이고 $\overline{AB} = 2\log_2 x$, $\overline{AC} = \log_4 \frac{16}{x}$ 인 삼각형 ABC의 넓이를 $S(x)$라 하자. $S(x)$가 $x=a$에서 최댓값 M을 가질 때, $a+M$의 값은? (단, $1<x<16$) (4점)

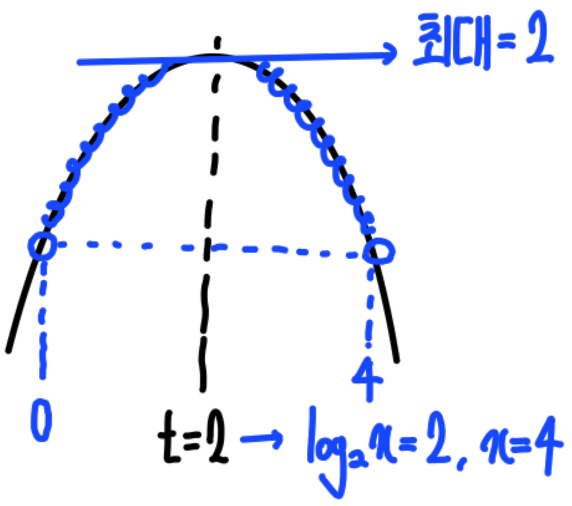
$S(x) = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC}$

$= \frac{1}{2} \times 2\log_2 x \times \left(2 - \frac{1}{2}\log_2 x\right)$

$= -\frac{1}{2}(\log_2 x)^2 + 2\log_2 x$

$\log_2 x = t$ 치환 (정의역 $1<x<16$ $\Downarrow$ $0<t<4$)

$S(x) = -\frac{1}{2}(t-2)^2 + 2$



$\therefore a=4,\ M=2$

$a+M = \boxed{6}$

6. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 방정식 $f(x)=9$는 서로 다른 세 실근을 갖고, 이 세 실근은 크기 순서대로 등비수열을 이룬다.

$f(0)=1$, $f'(2)=-2$일 때, $f(3)$의 값은? (4점)

특이하다!
이걸로 식 작성

$f(x)-9 = (x-a)(x-ad)(x-ad^2)$

$f(0) = -a^3d^3 + 9 = 1,\ ad=2$

$\rightarrow f(x) = \left(x-\frac{2}{d}\right)(x-2)(x-2d)+9$

$f'(2) = \left(2-\frac{2}{d}\right)(2-2d) = -2,$

$d + \frac{1}{d} = \frac{5}{2}.$

$\therefore f(3) = \left(3-\frac{2}{d}\right)(3-2d)+9$

$= 9+4-6\left(d+\frac{1}{d}\right)+9$

$= 22-15 = \boxed{7}$

7. 모든 항이 자연수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_9의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은? (4점)

(가) $a_7 = 40$ → 3의 배수X
(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2} = \begin{cases} a_{n+1} + a_n & (a_n\text{이 3의 배수가 아닌 경우}) \\ \frac{1}{3}a_{n+1} & (a_{n+1}\text{이 3의 배수인 경우}) \end{cases}$$ 이다.

$a_9 = a_8 + 40$

$a_9 = \frac{1}{3}a_8$ (a_8 3배수)

• $a_8 = a_7 + a_6$ (a_6 3배수X 일 때)

a_6을 궁금해해야 한다!
3배수와 관련된 조건들
→ case 분류

i) $a_6 = 3k$

→ $a_7 = k = 40$, $a_8 = 160$, $a_9 = 200$

ii) $a_6 = 3k+1$

→ $a_5 = a_7 - a_6 = \underline{39-3k}$
↳ 3배수

$a_6 = 13 - k = 3k+1$, $k = 3$

→ $a_8 = 50$, $a_9 = 90$

iii) $a_6 = 3k+2$

→ $a_5 = a_7 - a_6 = 38-3k$

$a_4 = a_6 - a_4 = \underline{6k-36}$
↳ 3배수

$a_5 = 2k - 12 = 38 - 3k$, $k = 10$, $a_9 = 24$

∴ $200 + 24 = \boxed{224}$

제 2 교시

수학 영역

주관식

20분 재고 풀기!

1. 함수 $f(x)=x^4+3x-2$에 대하여 $f'(2)$의 값은? (3점)

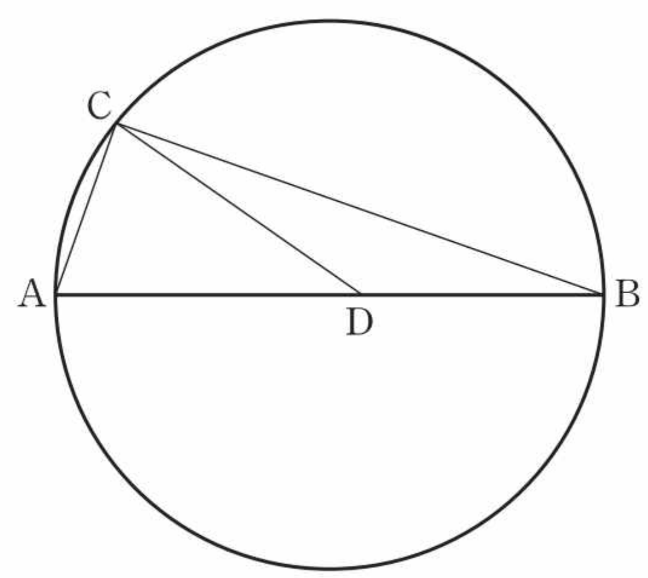
2. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\frac{a_{16}}{a_{14}}+\frac{a_8}{a_7}=12$일 때, $\frac{a_3}{a_1}+\frac{a_6}{a_3}$의 값을 구하시오. (3점)

3. 자연수 n이 $2 \le n \le 11$일 때, $-n^2+9n-18$의 n제곱근 중에서 음의 실수가 존재하도록 하는 모든 n의 값의 합은? (3점)

4. $f(3)=2$, $f'(3)=1$인 다항함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$가 $\lim_{x \to 3} \frac{f(x)-g(x)}{x-3}=1$을 만족시킬 때, $g(1)$의 값은? (3점)

5. 다항함수 $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $F(x)=(x+2)f(x)-x^3+12x$를 만족시킨다. $F(0)=30$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. (3점)

6. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점 C에 대하여 $\overline{\mathrm{BC}}=12\sqrt{2}$, $\cos(\angle\mathrm{CAB})=\frac{1}{3}$이다. 선분 AB를 $5:4$로 내분하는 점을 D라 할 때, 삼각형 CAD의 외접원의 넓이는 S이다. $\frac{S}{\pi}$의 값을 구하시오. (4점)



7. 함수 $f(x)=x^2-8x+a$에 대하여 함수 $g(x)$를

$g(x)=\begin{cases} 2x+5a & (x \geq a) \\ f(x+4) & (x < a) \end{cases}$ 라 할 때, 다음 조건을 만족시키는

모든 실수 a의 값의 곱을 구하시오. (4점)

> (가) 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(0, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
>
> (나) 함수 $f(x)g(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

제 2 교시

수학 영역

주관식

20분 재고 풀기!

1. 함수 $f(x)=x^4+3x-2$에 대하여 $f'(2)$의 값은? (3점)

$f'=4x^3+3$

$\therefore f'(2)=\boxed{35}$

2. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\frac{a_{16}}{a_{14}}+\frac{a_8}{a_7}=12$일 때, $\frac{a_3}{a_1}+\frac{a_6}{a_3}$의 값을 구하시오. (3점)

$\frac{a_{16}}{a_{14}} \to d^2$, $\frac{a_8}{a_7} \to d$

$\frac{a_3}{a_1} \to d^2$, $\frac{a_6}{a_3} \to d^3$

$d^2+d=12$, $d=3$ ($\because$ 모든항 양수)

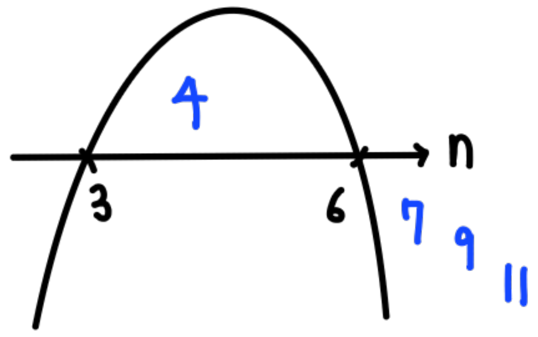
$\therefore d^2+d^3=9+27=\boxed{36}$

3. 자연수 n이 $2 \le n \le 11$일 때, $-n^2+9n-18$의 n제곱근 중에서 음의 실수가 존재하도록 하는 모든 n의 값의 합은? (3점)

f

n짝: $f>0$
n홀: $f<0$

일단 그려!



$\therefore 4+7+9+11 = \boxed{31}$

4. $f(3)=2$, $f'(3)=1$인 다항함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$가 $\lim_{x \to 3} \frac{f(x)-g(x)}{x-3} = 1$을 만족시킬 때, $g(1)$의 값은? (3점)

응꼴: $f(3)-g(3)=0$, $f(3)=g(3)=2$.

미·계: $f'(3)-g'(3)=1$, $g'(3)=0$

이차함수인데 접선의 기울기가 0? → 꼭짓점.

$\therefore g(x)=(x-3)^2+2$

$g(1)=\boxed{6}$

5. 다항함수 $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $F(x)=(x+2)f(x)-x^3+12x$를 만족시킨다. $F(0)=30$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. (3점)

미분하게 될 것.

미분: $f(x)=f(x)+(x+2)f'(x)-3x^2+12$

$\rightarrow (x+2)f'(x)=3x^2-12$,

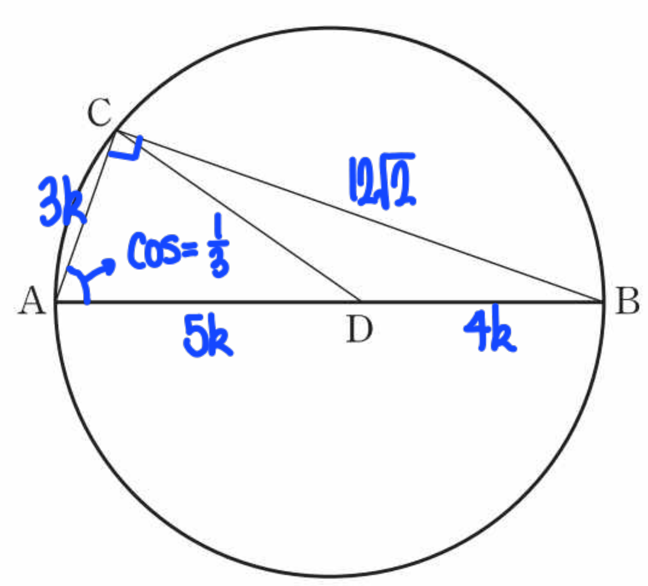
$f'(x)=3x-6$ ($\because$ 다항함수)

$\rightarrow f(x)=\frac{3}{2}x^2-6x+C$

$F(0)=30$: $30=2f(0)$, $f(0)=C=15$.

$\therefore f(2)=6-12+15=\boxed{9}$

6. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점 C에 대하여 $\overline{BC}=12\sqrt{2}$, $\cos(\angle CAB)=\frac{1}{3}$이다. 선분 AB를 $5:4$로 내분하는 점을 D라 할 때, 삼각형 CAD의 외접원의 넓이는 S이다. $\frac{S}{\pi}$의 값을 구하시오. (4점)



$\overline{AC}:\overline{BC}=3k:12\sqrt{2}=1:2\sqrt{2}$

$\rightarrow k=2$.

$\overline{CD}^2=36+100-2\cdot\frac{1}{3}\cdot 60=96$

$\therefore \overline{CD}=4\sqrt{6}$

$\triangle$CAD의 외접원의 반지름을 R이라 하면

$\frac{\overline{CD}}{\sin\angle CAD}=2R=\frac{4\sqrt{6}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=6\sqrt{3}$

$\therefore R=3\sqrt{3}$, $S=27\pi$. $\boxed{27}$

7. 함수 $f(x)=x^2-8x+a$에 대하여 함수 $g(x)$를

$g(x)=\begin{cases} 2x+5a & (x \geq a) \\ f(x+4) & (x < a) \end{cases}$ 라 할 때, 다음 조건을 만족시키는

모든 실수 a의 값의 곱을 구하시오. (4점)

(가) 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(0, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. → 사잇값 정리: $f(0)f(2)<0$

(나) 함수 $f(x)g(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

g가 $x=a$에서 연속 → ok. … i)

g가 $x=a$에서 불연속 → $f(a)=0$. … ii)

(가) $f(0)f(2)=a(a-12)<0$,

$\boxed{0<a<12}$. ⇒ 이 범위를 지키자.

(나) i) $7a=(a+4)^2-8(a+4)+a$,

$a=-2$ or $a=8$

ii) $f(a)=a^2-7a=0$.

$a=0$ or $a=7$

$\therefore 8\times 7=\boxed{56}$

제 2 교시

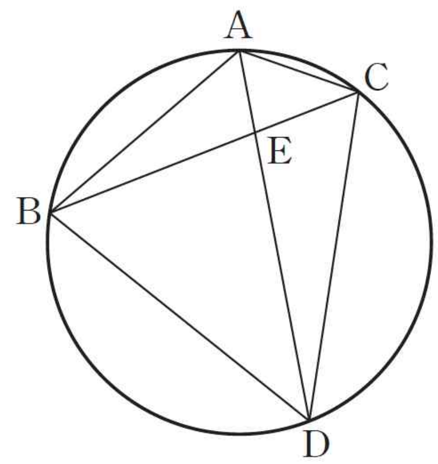
수학 영역

5지선다형 (24학년도 수능완성 실전편 1회)

1. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} S_k = 2n^3 + 4n^2 + 2n$을 만족시킨다. a_3의 값은? [4점]

① 26 ② 28 ③ 30 ④ 32 ⑤ 34

2. 그림과 같이 반지름의 길이가 $\sqrt{7}$인 원에 내접하고 $\angle BAC = \frac{2}{3}\pi$인 삼각형 ABC가 있다. $\angle BAC$를 이등분하는 직선과 점 A를 포함하지 않는 호 BC가 만나는 점을 D, 선분 AD와 선분 BC가 만나는 점을 E라 하자. $\sin(\angle BDA) = \frac{\sqrt{21}}{7}$일 때, $\overline{BE}^2 + \overline{CE}^2$의 값은? [4점]



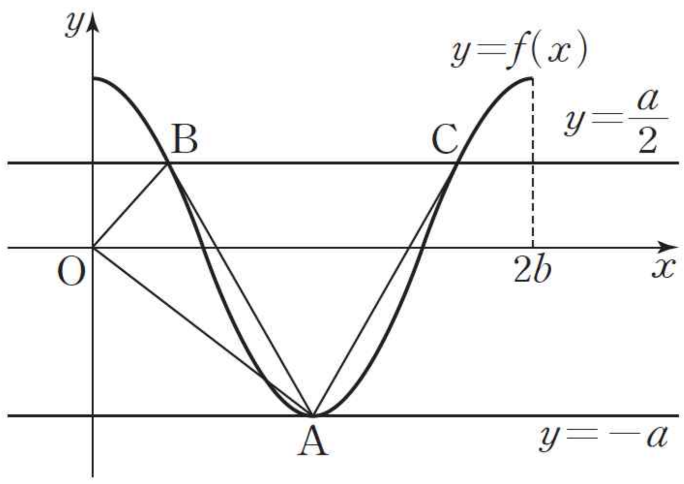
① $\frac{35}{3}$ ② $\frac{38}{3}$ ③ $\frac{41}{3}$ ④ $\frac{44}{3}$ ⑤ $\frac{47}{3}$

3. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

> (가) $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{4}$
> (나) 모든 실수 x에 대하여
> $f(x)=3x^2+ax-\int_0^1(2x-1)f(t)dt$이다.

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

4. 그림과 같이 두 양수 a, b에 대하여 닫힌구간 $[0,\ 2b]$에서 정의된 함수 $f(x)=a\cos\frac{\pi x}{b}$가 있다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-a$가 만나는 점을 A, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{a}{2}$가 만나는 두 점을 각각 B, C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$일 때, 직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기의 곱은? (단, O는 원점이고, $\overline{\mathrm{OB}}<\overline{\mathrm{OC}}$이다.) [4점]



① $-\frac{2}{3}$ ② $-\frac{13}{18}$ ③ $-\frac{7}{9}$ ④ $-\frac{5}{6}$ ⑤ $-\frac{8}{9}$

5. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1=2$, $a_na_{n+1}=(-1)^n$
(나) $a_n+b_n=n$

$\sum_{k=1}^{10}(b_{2k}+b_{2k+2})$의 값은? [4점]

① 200 ② 210 ③ 220 ④ 230 ⑤ 240

6. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)+xf'(x)=-4x^3+6x$를 만족시킨다. 실수 t에 대하여 구간 $(-\infty,\ t]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값을 $g(t)$라 할 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈 보 기 〉

ㄱ. $f(-1)=-2$

ㄴ. 함수 $g(t)$는 $t=2$에서만 미분가능하지 않다.

ㄷ. 함수 $|f(t)-g(t)|$의 최댓값은 4이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

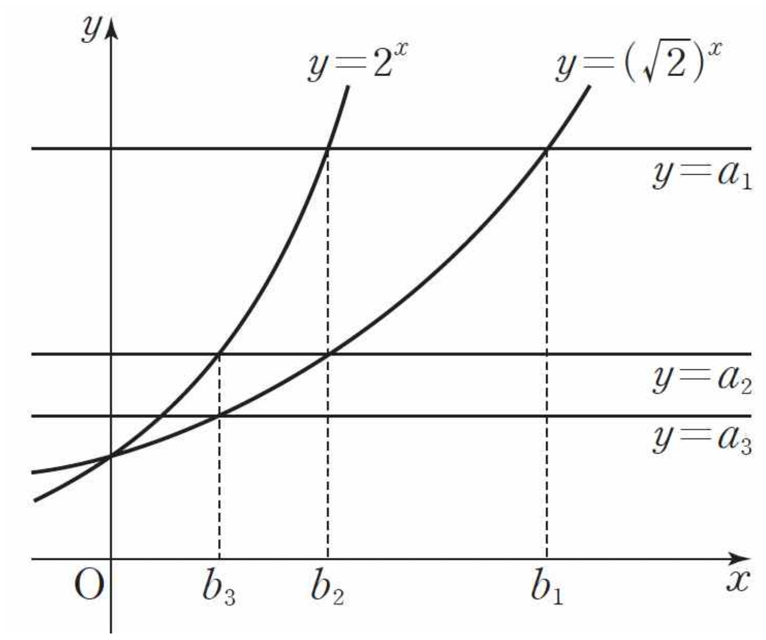
7. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2x$는 서로 다른 두 점에서 만나고, 함수 $\lvert f(x)-2x \rvert$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(나) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-2x}{x^2}=16$
(다) $f(1)>15$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2x+k$가 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 정수 k의 개수를 구하시오. [4점]

8. 자연수 n에 대하여 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$을 다음과 같이 정의하자. 그림과 같이 직선 $y=a_1$ $(a_1>1)$이 곡선 $y=(\sqrt{2})^x$과 만나는 점의 x좌표를 b_1, 곡선 $y=2^x$과 만나는 점의 x좌표를 b_2라 하고 곡선 $y=(\sqrt{2})^x$ 위의 점 중 x좌표가 b_2인 점의 y좌표를 a_2라 하자. 또 직선 $y=a_2$가 곡선 $y=2^x$과 만나는 점의 x좌표를 b_3이라 하고 곡선 $y=(\sqrt{2})^x$ 위의 점 중 x좌표가 b_3인 점의 y좌표를 a_3이라 하자. 이와 같이 직선 $y=a_n$이 곡선 $y=(\sqrt{2})^x$과 만나는 점의 x좌표를 b_n, 곡선 $y=2^x$과 만나는 점의 x좌표를 b_{n+1}이라하고 곡선 $y=(\sqrt{2})^x$ 위의 점 중 x좌표가 b_{n+1}인 점의 y좌표를 a_{n+1}이라 하자.

$a_1=4$일 때, $\sum_{n=1}^{5} \log_2 \frac{a_n}{b_n}=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 두 자연수이다.) [4점]



제 2 교시

수학 영역

5지선다형 (24학년도 수능완성 실전편 1회)

1. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} S_k = 2n^3 + 4n^2 + 2n$을 만족시킨다. a_3의 값은? [4점]

① 26 ② 28 ③ 30 ④ 32 ⑤ 34

$S_n = 2(n^3 - (n-1)^3) + 4(n^2 - (n-1)^2) + 2$

$a_3 = S_3 - S_2$ 이므로

$S_3 = 2(3^3 - 2^3) + 4(3^2 - 2^2) + 2$

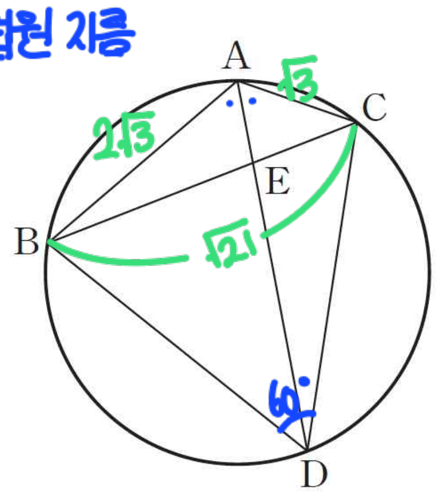
$S_2 = 2(2^3 - 1^3) + 4(2^2 - 1) + 2$

$\therefore a_3 = 60 - 28 = \boxed{32}$

2. 그림과 같이 반지름의 길이가 $\sqrt{7}$인 원에 내접하고 $\angle BAC = \frac{2}{3}\pi$인 삼각형 ABC가 있다. $\angle BAC$를 이등분하는 직선과 점 A를 포함하지 않는 호 BC가 만나는 점을 D, 선분 AD와 선분 BC가 만나는 점을 E라 하자. $\sin(\angle BDA) = \frac{\sqrt{21}}{7}$일 때, $\overline{BE}^2 + \overline{CE}^2$의 값은? [4점]

with 외접원 지름

사인 law.



① $\frac{35}{3}$ ② $\frac{38}{3}$ ③ $\frac{41}{3}$ ④ $\frac{44}{3}$ ⑤ $\frac{47}{3}$

$\frac{\overline{AB}}{\sin\angle BDA} = 2R \rightarrow \overline{AB} = 2\sqrt{7} \times \frac{\sqrt{21}}{7} = 2\sqrt{3}$

$\overline{BC} = 2R\sin\angle BDC = 2\sqrt{7} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{21}$

각 알고, 길이 두 개 안다? cos. law

$\overline{AC} = x$라 할 때

$\frac{12 + x^2 - 21}{4\sqrt{3}x} = -\frac{1}{2}$, $x = \sqrt{3}$ $(\because \overline{AB} > \overline{AC})$

각의 이등분선의 성질!

$\overline{BE} : \overline{EC} = 2 : 1 \rightarrow \begin{cases} \overline{BE} = \frac{2}{3}\sqrt{21} \\ \overline{CE} = \frac{1}{3}\sqrt{21} \end{cases}$

$\therefore \overline{BE}^2 + \overline{CE}^2 = \frac{5}{9} \cdot 21 = \boxed{\frac{35}{3}}$

3. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

(가) $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{4}$
(나) 모든 실수 x에 대하여
$f(x)=3x^2+ax-\int_0^1(2x-1)f(t)dt$이다.

↳ 변수·상수 구분!

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

(나) $f(x)=3x^2+ax-(2x-1)\cdot\underbrace{\int_0^1 f(t)dt}_{\text{상수 } k}$

(가) $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}a=\frac{7}{4}$, $a=2$.

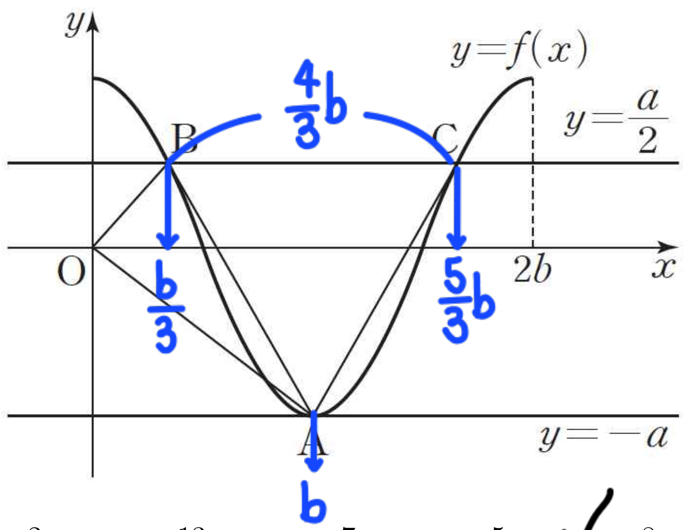
$\int_0^1 f=k$로 k 찾아주기!

$\rightarrow \int_0^1 (3x^2+2x-k(2x-1))dx=k$, $k=2$

$\therefore f(2)=12+4-6=\boxed{10}$

4. 그림과 같이 두 양수 a, b에 대하여 닫힌구간 $[0,\ 2b]$에서 정의된 함수 $f(x)=a\cos\frac{\pi x}{b}$가 있다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-a$가 만나는 점을 A, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{a}{2}$가 만나는 두 점을 각각 B, C라 하자. $\overline{AB}=\overline{BC}$일 때, 직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기의 곱은? (단, O는 원점이고, $\overline{OB}<\overline{OC}$이다.) [4점]

↳ $\overline{AB}=\overline{AC}$이므로 정삼각형



① $-\frac{2}{3}$ ② $-\frac{13}{18}$ ③ $-\frac{7}{9}$ ④ $-\frac{5}{6}$ ⑤ $-\frac{8}{9}$

$\angle ABC=60° \rightarrow \frac{4}{3}b\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}a$

$\rightarrow 3\sqrt{3}a=4b$

$(\text{OA 기울기})=\frac{-a}{b}=-\frac{4}{3\sqrt{3}}$

$(\text{OB 기울기})=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{b}{3}}=\frac{3}{2}\times\frac{a}{b}=\frac{3}{2}\times\frac{4}{3\sqrt{3}}$

$\therefore -\frac{3}{2}\times\frac{16}{27}=\boxed{-\frac{8}{9}}$

5. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1=2$, $a_n a_{n+1}=(-1)^n$
(나) $a_n+b_n=n$

$\sum_{k=1}^{10}(b_{2k}+b_{2k+2})$의 값은? [4점]

① 200 ② 210 ③ 220 ④ 230 ⑤ 240

모르면 일단 써보기.

$a_1=2$

$a_1a_2=-1 \longrightarrow a_2=-\frac{1}{2}$

$a_2a_3=1 \longrightarrow a_3=-2$

$a_3a_4=-1 \longrightarrow a_4=\frac{1}{2}$

$a_4a_5=1 \longrightarrow a_5=2=a_1$ 어??

$b_{2k}=2k-a_{2k}$

$b_{2k+2}=2k+2-a_{2k+2}$

$a_{2k}+a_{2k+2}=0$ 이므로

$\sum_{k=1}^{10}(b_{2k}+b_{2k+2})=\sum_{k=1}^{10}(4k+2)$

$=\boxed{240}$

6. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)+xf'(x)=-4x^3+6x$를 만족시킨다. 실수 t에 대하여 구간 $(-\infty,\ t]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값을 $g(t)$라 할 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

곱미분 → 적분

〈 보 기 〉

ㄱ. $f(-1)=-2$

ㄴ. 함수 $g(t)$는 $t=2$에서만 미분가능하지 않다.

ㄷ. 함수 $|f(t)-g(t)|$의 최댓값은 4이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

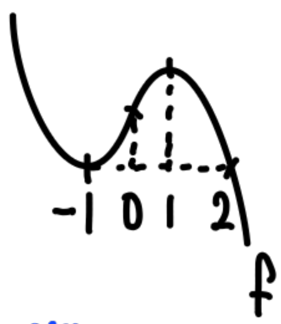
$(xf(x))'=f(x)+xf'(x)$ 이므로

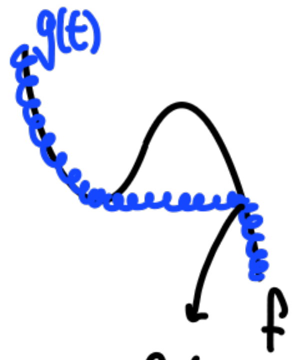
$xf(x)=-x^4+3x^2$ ($\because f$ 다항함수)

$\rightarrow f(x)=-x^3+3x$

ㄱ. (o)

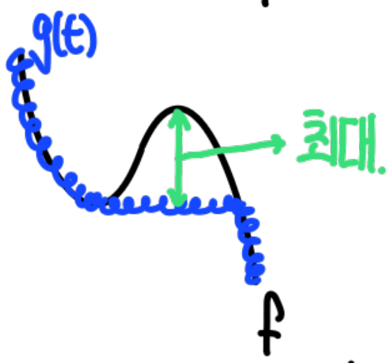
ㄴ.





2 (o)

ㄷ.



극값 차 공식: $\frac{1}{2}\cdot(1-(-1))^3=\boxed{4}$ (o)

7. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2x$는 서로 다른 두 점에서 만나고, 함수 $|f(x)-2x|$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. → 접점이 2개.

(나) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2x}{x^2}=16$

(다) $f(1)>15$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2x+k$가 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 정수 k의 개수를 구하시오. [4점]

$f(x)-2x=x^2(x-a)^2$에서

$\lim_{x\to 0}(x-a)^2=16$, $a=\pm 4$

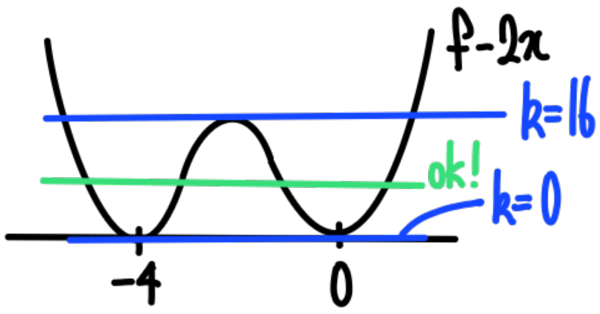
i) $a=4$일 때

$f(1)=9+2<15$ (X)

$\therefore a=-4$, $f=x^2(x+4)^2+2x$

$f=2x+k$가 네 교점이면

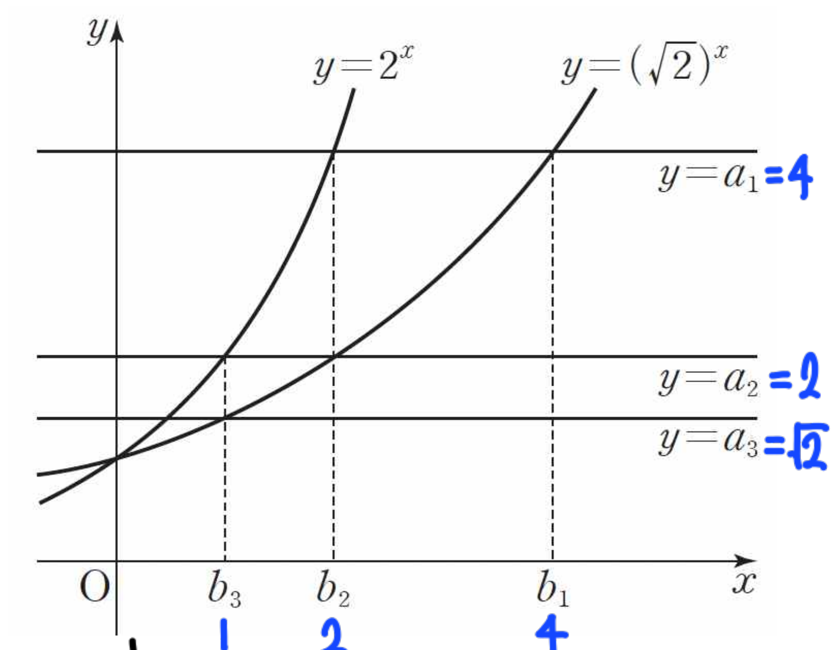
$f-2x=k$도 네 교점 갖는다.



$\therefore 0<k<16$, $\boxed{15}$

8. 자연수 n에 대하여 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$을 다음과 같이 정의하자. 그림과 같이 직선 $y=a_1$ $(a_1>1)$이 곡선 $y=(\sqrt{2})^x$과 만나는 점의 x좌표를 b_1, 곡선 $y=2^x$과 만나는 점의 x좌표를 b_2라 하고 곡선 $y=(\sqrt{2})^x$ 위의 점 중 x좌표가 b_2인 점의 y좌표를 a_2라 하자. 또 직선 $y=a_2$가 곡선 $y=2^x$과 만나는 점의 x좌표를 b_3이라 하고 곡선 $y=(\sqrt{2})^x$ 위의 점 중 x좌표가 b_3인 점의 y좌표를 a_3이라 하자. 이와 같이 직선 $y=a_n$이 곡선 $y=(\sqrt{2})^x$과 만나는 점의 x좌표를 b_n, 곡선 $y=2^x$과 만나는 점의 x좌표를 b_{n+1}이라하고 곡선 $y=(\sqrt{2})^x$ 위의 점 중 x좌표가 b_{n+1}인 점의 y좌표를 a_{n+1}이라 하자.

$a_1=4$일 때, $\sum_{n=1}^{5}\log_2\frac{a_n}{b_n}=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 두 자연수이다.) [4점]



$2^{\frac{b_1}{2}}=4$, $b_1=4$

n	1	2	3	4	5	
a_n	4	2	$\sqrt{2}$	$2^{\frac{1}{4}}$	$2^{\frac{1}{8}}$	: $a_{n+1}=a_n^2$
b_n	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	: $b_n=4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore \sum_{n=1}^{5}\log_2\frac{a_n}{b_n}=\log_2\left(1\times 1\times\sqrt{2}\times 2^{\frac{5}{4}}\times 2^{\frac{17}{8}}\right)$

$=\frac{31}{8}\rightarrow \boxed{39}$

제 2 교시

수학 영역

5지선다형 (24학년도 수능완성 실전편 2회)

1. 최솟값이 4이고 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$에 대하여 방정식 $\log_2 f(x)+\log_2 (x-3)^2=5$가 두 실근 $x=1$, $x=5$를 가질 때, $f(0)$의 값은? [4점]

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

2. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $g(x)=\int_{-x}^{x} f(t)dt$이다. $f(0)=5$, $g(1)=12$일 때, $\int_{0}^{2} g(x)dx$의 값은? [4점]

① 22 ② 24 ③ 26 ④ 28 ⑤ 30

3. 함수 $f(x)=a\sin(b\pi x)+c$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 합이 6이다.
(나) 함수 $f(x)$의 주기와 함수 $g(x)=\left\lvert\cos\left(3\pi x-\frac{1}{2}\right)\right\rvert+1$의 주기는 서로 같다.

$f\left(\frac{1}{4}\right)=1$일 때, $f\left(\frac{1}{9}\right)$의 값은? [4점]
(단, a, b, c는 상수이고, $a>0$, $b>0$이다.)

① $-1+\sqrt{3}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $1+\sqrt{3}$
④ $2+\sqrt{3}$ ⑤ $3+\sqrt{3}$

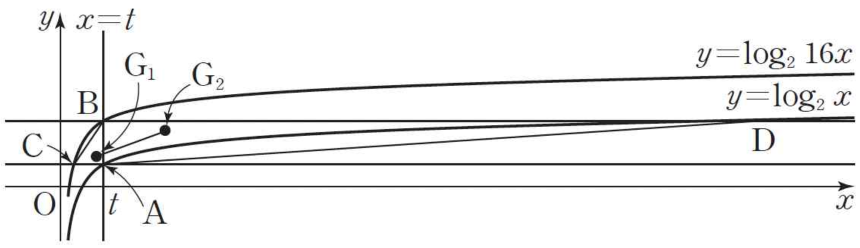
4. 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+2)$를 만족시키고 $f(x)=x-1\ (0\le x<2)$이다. **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈 보 기 〉

ㄱ. $\lim_{x\to 0-}f(x)+\lim_{x\to 2+}f(x)=0$
ㄴ. 함수 $|f(x)|$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
ㄷ. 함수 $f(x)f(x+1)$은 실수 전체의 집합에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

5. 그림과 같이 직선 $x=t$ $(t>0)$과 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_2 16x$가 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 점 A를 지나고 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=\log_2 16x$와 만나는 점을 C, 점 B를 지나고 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점을 D라 할 때, 두 삼각형 ABC, ADB의 무게중심을 각각 G_1, G_2라 하자. 직선 G_1G_2의 기울기가 $\frac{16}{255}$일 때, 삼각형 ADB의 넓이는? [4점]



① 60 ② 75 ③ 90 ④ 105 ⑤ 120

6. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 방정식 $f(x)-x=0$은 세 실근 0, 1, 2를 갖는다. 함수 $g(x)$가 $0 \le x \le 2$에서 $g(x)=f(x)$이고 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2)=g(x)+2$를 만족시킬 때, $\int_0^{2n} g(x)dx=72$를 만족시키는 자연수 n의 값은? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

7. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)>0$
(나) 방정식 $f(x)=0$은 실근을 가지며 모든 근은 10 이하의 자연수이다.
(다) 자연수 n에 대하여 $f(n)$의 $(n+2)$제곱근 중 서로 다른 실수의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n = 10$이다.

$f(11)$의 최솟값과 최댓값의 합을 구하시오. [4점]

8. 0이 아닌 두 정수 p, q에 대하여 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1 = 40$
(나) 모든 자연수 n에 대하여
$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - p & (a_n \geq 0) \\ a_n + pq & (a_n < 0) \end{cases}$$ 이다.

$a_{21} = a_1$이 되도록 하는 두 정수 p, q의 순서쌍 $(p,\ q)$에 대하여 $p+q$의 최솟값을 구하시오. [4점]

제 2 교시

수학 영역

5지선다형 (24학년도 수능완성 실전편 2회)

꼭짓점

1. 최솟값이 4이고 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$에 대하여 방정식 $\log_2 f(x)+\log_2 (x-3)^2=5$가 두 실근 $x=1$, $x=5$를 가질 때, $f(0)$의 값은? [4점]

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

로그방정식 → 로그 없애기.

$f(x)\cdot(x-3)^2=32$가 실근 $1, 5$

$\rightarrow f(1)=f(5)=8$.

$f(x)=a(x-1)(x-5)+8$

최솟값 $4 \rightarrow f(3)=4$

$f(3)=-4a+8=4$, $a=1$.

$\therefore f(0)=5a+8=\boxed{13}$

2. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $g(x)=\int_{-x}^{x} f(t)dt$이다. $f(0)=5$, $g(1)=12$일 때, $\int_0^2 g(x)dx$의 값은? [4점]

① 22 ② 24 ③ 26 ④ 28 ⑤ 30

정적분으로 정의된 함수.

대입: $g(0)=0$

미분: $g'(x)=f(x)+f(-x) \longrightarrow$ 우함수

$f(0)=5 \rightarrow g'(0)=2f(0)=10$

$\therefore g'(x)=ax^2+10$

$\rightarrow g(x)=\frac{a}{3}x^3+10x$ $(\because g(0)=0)$

$g(1)=12 \rightarrow \frac{a}{3}+10=12$, $a=6$.

$\therefore \int_0^2 g=\int_0^2 (2x^3+10x)dx=\boxed{28}$

cf> 합성함수 미분 모르는 학생들은

$f=ax^3+bx^2+cx+5$ 놓고 계산.

적분 과정에서 문자 날아간다.

3. 함수 $f(x)=a\sin(b\pi x)+c$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 합이 6이다.
↳ $c=3$
(나) 함수 $f(x)$의 주기와 함수
$g(x)=\left|\cos\left(3\pi x-\frac{1}{2}\right)\right|+1$의 주기는 서로 같다.

$f\left(\frac{1}{4}\right)=1$일 때, $f\left(\frac{1}{9}\right)$의 값은? [4점]
(단, a, b, c는 상수이고, $a>0$, $b>0$이다.)

① $-1+\sqrt{3}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $1+\sqrt{3}$
④ $2+\sqrt{3}$ ⑤ $3+\sqrt{3}$

주기: $\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{3\pi}=\frac{1}{3}$. → f 주기도 $\frac{1}{3}$.
∴ $b=6$

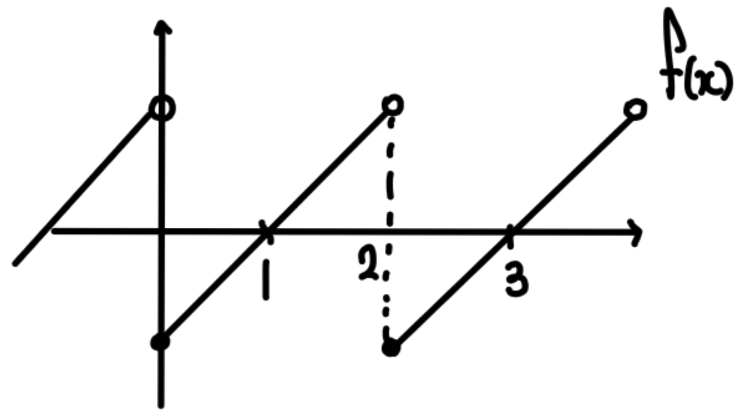
→ $f(x)=a\sin 6\pi x+3$
$f\left(\frac{1}{4}\right)=a\sin\frac{3}{2}\pi+3=-a+3=1$, $a=2$
∴ $f\left(\frac{1}{9}\right)=2\sin\frac{2}{3}\pi+3=\boxed{3+\sqrt{3}}$

4. 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+2)$를 만족시키고 $f(x)=x-1$ $(0\le x<2)$이다. **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

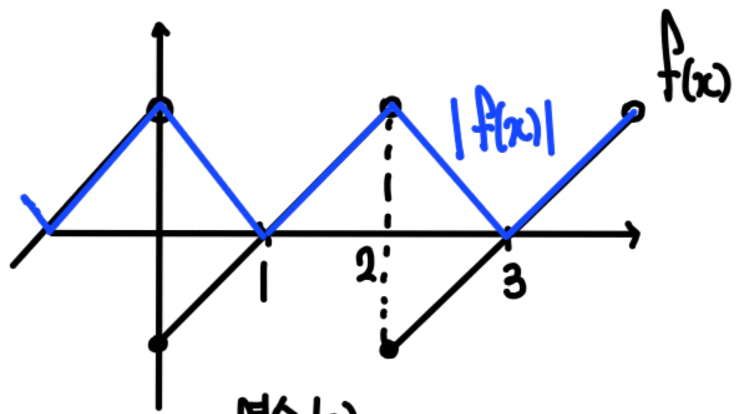
주기 2

〈 보 기 〉
ㄱ. $\lim_{x\to 0-}f(x)+\lim_{x\to 2+}f(x)=0$
ㄴ. 함수 $|f(x)|$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
ㄷ. 함수 $f(x)f(x+1)$은 실수 전체의 집합에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



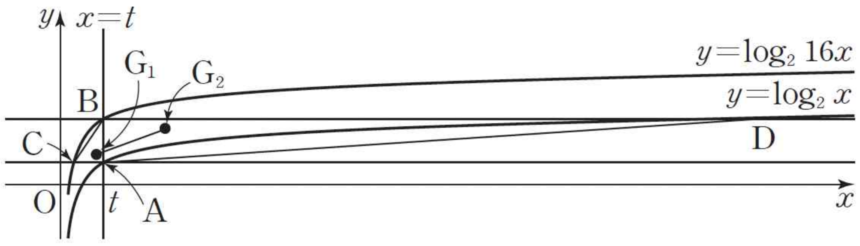
ㄱ. $f(0^-)=1$, $f(2^+)=f(0^+)=-1$. (o)

ㄴ.


연속(o)

ㄷ. 불연속점에서 1만큼 떨어진 곳에 f=0되는 지점 있으므로 ok. (o)
ex) x=0에서 f는 불연속이지만 f(x+1)은 0으로 연속.

5. 그림과 같이 직선 $x=t$ $(t>0)$과 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_2 16x$가 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 점 A를 지나고 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=\log_2 16x$와 만나는 점을 C, 점 B를 지나고 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점을 D라 할 때, 두 삼각형 ABC, ADB의 무게중심을 각각 G_1, G_2라 하자. 직선 G_1G_2의 기울기가 $\frac{16}{255}$일 때, 삼각형 ADB의 넓이는? [4점]



① 60 ② 75 ③ 90 ④ 105 ⑤ 120

그냥 노가다 문제...

A$(t, \log_2 t)$ C$(\frac{t}{16}, \log_2 t)$

B$(t, \log_2 16t)$ D$(16t, \log_2 16t)$

$\rightarrow G_1(\frac{1}{3}\cdot\frac{33}{16}t, \frac{1}{3}\cdot\log_2 16t^3)$

$G_2(\frac{1}{3}\cdot 18t, \frac{1}{3}\cdot\log_2 256t^3)$

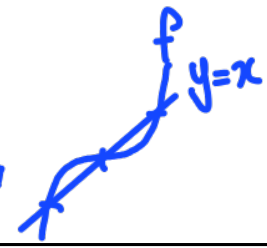
기울기 $= \dfrac{\frac{4}{3}}{\frac{85t}{16}} = \frac{4}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{16}}{\cancel{85t}} = \frac{\cancel{16}}{\cancel{255}}$

$\downarrow$

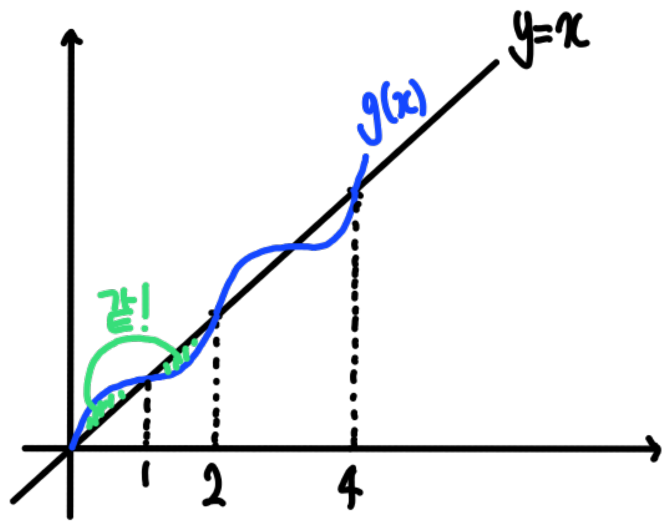
$t=4$

$\therefore$ (ADB 넓이) $= \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 15t = \boxed{120}$

6. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 방정식 $f(x)-x=0$은 세 실근 0, 1, 2를 갖는다. 함수 $g(x)$가 $0 \le x \le 2$에서 $g(x)=f(x)$이고 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2)=g(x)+2$를 만족시킬 때, $\int_0^{2n} g(x)dx = 72$를 만족시키는 자연수 n의 값은? [4점]



✓ ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10



$\int_0^{2n} g(x)dx = \frac{1}{2}\cdot 2n\cdot 2n = 2n^2$

$\therefore 2n^2 = 72,\ n=\boxed{6}$

7. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)>0$ → $f(1)\neq 0$.

(나) 방정식 $f(x)=0$은 실근을 가지며 모든 근은 10 이하의 자연수이다.

(다) 자연수 n에 대하여 $f(n)$의 $(n+2)$제곱근 중 서로 다른 실수의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n = 10$이다.

$f(11)$의 최솟값과 최댓값의 합을 구하시오. [4점]

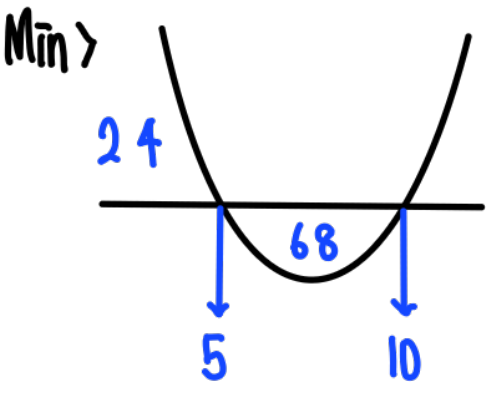
f의 (홀수)제곱근은 실수 1개.

$f(2), f(4), f(6), f(8), f(10)$ } (짝수) 제곱근에서 서로 다른 실수 $\underset{\text{홀수}}{5\text{개}}$.

2~10 중 f=0 되는 점이 하나만 있어야 함.

2~10 중 f=0 1개, f>0 2개, f<0 2개

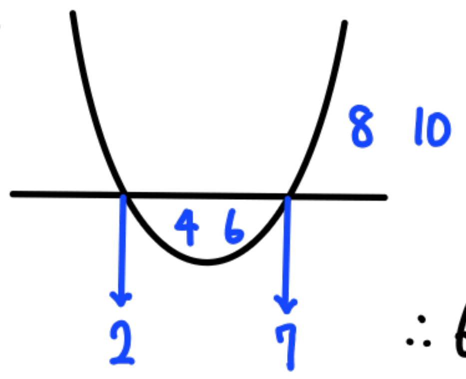
Min>



$f=(x-5)(x-10)$

$f(11)=6$ (최소)

Max>



$f=(x-2)(x-7)$

$f(11)=36$ (최대)

$\therefore 6+36=\boxed{42}$

8. 0이 아닌 두 정수 p, q에 대하여 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1 = 40$

(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - p & (a_n \geq 0) \\ a_n + pq & (a_n < 0) \end{cases}$$ 이다.

$a_{21} = a_1$이 되도록 하는 두 정수 p, q의 순서쌍 (p, q)에 대하여 $p+q$의 최솟값을 구하시오. [4점]

어려운 문제... 풀이를 공부해봅시다.

if $p<0$ → 계속 a_n 증가 → $a_{21}\neq a_1$

∴ p는 자연수.

$a_1 \sim a_{20}$ 중 (음수인 항 k / 0이상인 항 $(20-k)$

→ $a_{21} = a_1 - (20-k)p + kpq$.

$a_1 = a_{21}$ 이어야 하므로 $20-k = kq$.

q는 정수이고 k도 자연수.

$k(q+1) = 20$ → ($k=1$, $k=2$, $k=4$, $k=5$, $k=10$

i) $k=1$ → $q=19$.

수열의 어느 시점 m에 대하여

$a_{m+1} = a_1 - mp \geq 0$, $a_{m+2} = a_1 - (m+1)p < 0$

→ $\frac{40}{m+1} < p \leq \frac{40}{m}$ → ($m=13 : p=3$ / $m\leq 12 : p>3$

$p\geq 3$이므로 $p+q$ 최소 $= 22$.

같은 논리로 $k=2, 4, 5, 10$인 경우를 모두 계산해보면 $k=2$일 때가 14로 가장 작음.

$\boxed{14}$

제 2 교시

수학 영역

이번 분석서는 분석+해설로 구성하였습니다.
앞의 분석 파트에서는 시험 전반에 대한 분석뿐만 아니라 개별 문항에 대한 코멘트, 학습 방향 조언 등 6월 모의고사 시험지를 뜯어볼 수 있게 만들었습니다.

뒤의 해설 파트에서는 여러 가지 해설뿐만 아니라 이 문제 조건을 보고 무슨 생각을 했어야 했는지, 최선의 풀이는 무엇이고 학습하는 입장에서는 어디까지 연습해 보아야 하는지를 서술했습니다.

많은 분석과 많은 풀이를 모아서 학생이 쉽게 이해할 수 있도록 서술했으니 맞은 문항이라도 분석과 해설을 한 번은 보는 것을 추천드립니다. 제가 본 파일을 만들면서 정말 많이 배웠듯이 여러분들도 많이 배울 거에요.

간혹 별해 중에 난이도가 높아서 이해 안 되는 해설이 있을 수도 있습니다. 그걸 풀어서 설명하려면 한도 끝도 없기 때문에.. 상위권들을 위해서 적어놓은 것이라 좀 더 실력을 올린 후에 다시 보면 이해가 되실 거에요. 아니면 주변의 잘하는 분들에게 말로 설명을 들어보는 것도 좋습니다.

자, 그러면 분석부터 시작하겠습니다.

< 시험 전반에 대한 분석 >

현장에서 이 시험지를 보신 분들은 적잖이 당황하셨으리라 생각합니다.
21번 ㄱㄴㄷ, 30번 급수 등 형식적인 측면은 물론이고, 특수 케이스가 아닌 상황을 묻는 등 문제가 묻는 것도 바뀐 느낌이 드네요.
미적분에서도 늘 물어봤던 도형 해석 문제들이 나오지 않았죠? (제가 삼도극 마스터인데..조금 아쉽네요)

따라서, 현장에서 풀었던 학생들과 그렇지 않은 사람들이 느끼는 체감 난이도가 크게 차이 나는 시험이에요. 현장에서 본다는 것을 절대 무시해서는 안됩니다.
1등급 커트라인도 이를 반영하여 조금은 낮게 형성될 것으로 보입니다. (80 초반대)

당황스러운 준킬러가 14번이 아닌 12, 13번에 분포되어 시험 운영에 미숙한 학생들은 여기서 멘탈이 어느 정도 터졌을 것으로 보입니다.
미적분에서도 난이도가 28>>>>>>29>>30 순이라 기존과는 좀 많이 다른 문제 분포이죠.
(원래는 30>>28>=29가 일반적이었습니다.)

평가원이 전에 킬러 문항을 없애겠다고 발표한 것이 현실이 되었습니다.
원래 킬러 역할을 했던 22번과 30번이 많이 쉬워졌는데 이렇게 된다면 완전히 극단적인 차이가 날 수 있습니다.
준킬러에서 막히고 헤매는 학생들은 킬러 번호의 문제들을 보지 못하고 시험을 마치기 때문에 체감 난이도를 높게 평가하고,
그보다 잘하는 상위권, 최상위권 학생들은 준킬러를 빨리 풀고 킬러를 보니 너무 쉬워서 "아 쉽네" 라고 느끼게 됩니다.

또한, 이번 시험에서 ebs 문항이 연계된 걸 꽤 찾아볼 수 있었는데
공통 11번 - 수특 수2 level 3 3번
공통 12번 - 수특 수1 level 3 1번
미적 29번 - 수특 미적 level 3 1번 (거의 똑같다.)

출제 기조가 또 어떻게 바뀔지 모르겠지만
제가 늘 말씀드렸던 대로 ebs를 풀지 않을 이유는 없습니다. 간접연계가 어떻게 될지도 모르고 문제집을 끝내는 것도 금방이기 때문에, 선별본이든 원본 문제집이든 꼭 사서 풀어보는 것을 추천합니다.

이번에도 수특 미적을 풀었다면 미적 29번에 있어서는 확실한 연계 체감이 됐을 겁니다.
(궁금하시면 한번 찾아보세요. 문항 풀이 논리가 거의 똑같습니다.)

발문(12)이나 풀이 과정(11, 29)에서 수학 (상), (하)의 아이디어를 차용하는 문제들이 보입니다.
고1 수학 과정을 제대로 공부한 학생이라면 당연하게 풀고 넘어가는 부분들을, 접근에 어려움을 느끼고 "좀 발상적이다" 라고 생각할 수도 있습니다.

수학 (상), (하)가 수능 직접 출제범위는 아니지만
나온다고 해서 아무도 뭐라 못 하기 때문에,
또 이미 나왔던 선례들이 너무 많기 때문에
고1 수학은 한번 잡고 가는 것이 좋아보입니다.
(여름방학 때 특강을 계획하고 있습니다.)
아니면 고1 수학의 논리가 들어가는 문제들을 풀면서 학습하는 방향도 있습니다.
어쨌든 수학 (상), (하)를 경시해서는 안 됩니다.

일단 시험 전반에 대한 분석은 여기까지 하고
문항 별로 제가 하고 싶은 말을 적어보겠습니다.

< 문항별 분석 >

4번: 원래는 극한 그래프 해석 문항이 나오는 자리인데 새로운 스타일의 문항이 나왔습니다.
연속의 정의를 알고 있어야 풀 수 있겠죠

9번: 부분분수를 자연스럽게 사용할 수 있냐고 평가원이 우리한테 묻고 있네요.
a_n을 (분수-분수) 형태로 바꾸고 합을 구할 때 중간에 있는 숫자들이 소거되는 형태는 우리에게 익숙합니다.
이 문항에서 고전했던 학생들은 기출 문항을 통해 문제풀이 경험을 늘려야 합니다.
또한, 이 문제에서는 봐줬지만 수열의 합과 일반항의 관계를 사용할 때는 $S_n - S_{n-1}$이 성립하는 것이 $n \geq 2$일 때라는 것을 잊으면 안 됩니다.
첫 번째 항은 대입을 통해 따로 파악해주는 거에요.

10번: 단순히 계산을 시키는 문제이나, 해석과 공식을 통해 그 계산량을 줄일 수 있습니다.
넓이와 적분값의 관계를 파악하면 식을 줄일 수 있고 식 변형을 통해 넓이 공식을 사용할 수 있는 형태로 바꿔주면 계산도 줄일 수 있습니다.

11번: 거리가 최소 -> 접선의 기울기 평행일 때.
이 논리가 익숙하지 않으신 분들은 고1 수학을 제대로 학습하지 않았을 확률이 큽니다.
식을 세우고 계산을 하는 것도 여러 가지 방법이 있으니 제가 보여드리겠습니다.

12번: 기출에는 빈출되지 않았던 아이디어이고, 응용의 여지가 있기 때문에 꼭 학습해야 하는 문항입니다.
무작정 케이스를 분류하는 것이 아니라 문제에서 묻는 상황이 어떤 상황인지 파악하는 능력이 중요합니다.

13번: 그림은 무슨 미적분 무등비마냥 풀기 싫게 생겼습니다. 따라서 현장에서 풀었던 학생들은 충분히

당황했으리라 생각됩니다.
다만, 도형 문제가 어려운 이유는 풀이를 어디서 시작하고 어떻게 전개할지가 안 보여서인데
이 문항은 그런 부분에 있어서는 좀 친절하죠.
삼각함수의 활용 개념을 모두 사용하기도 하니
풀이 논리를 익혀두면 도움이 될 겁니다.
또한, 보조선으로 깔끔하게 해결하는 것도 좋지만
수능의 도형 문제는 “계산 문제” 입니다.
조건을 반영한 적절한 문자 설정과 식 설정으로
“답을 내는 것” 에 집중하는 것이 맞습니다.

14번: 번호대와는 좀 다른 문항이 나왔죠.
시험장에서는 단순히 계산하고 비교하면 됩니다.
분석할 때는 “왜 이 케이스들이 존재해야만 하는지” 필연성을 부여하는 것도 좋은 공부입니다.
비교의 방법도 여러 가지가 있는데, 해설에 전부 서술했으니 보고 배워가시면 됩니다.

15번: 번호가 번호인지라 시험장에서 못 보고 끝난 학생들도 많을 테고, 케이스 분류가 계속되어 ‘일단 다른 문제 풀고 와야지’ 하고 넘겼던 학생들은 결국 못 풀었을 문제입니다.
해석보단 계산의 비중이 월등히 크기 때문에 스스로 다시 풀어보면 아마 풀릴 거에요.
이런 점화식 문제는 식이 어떻게 나오든 두려워하지 말고, 일단 대입해가며 쓰는 것이 맞습니다.
두 가지 관점에서 풀이를 서술했으니 보고 배워가시면 됩니다.

19번: $f \geq 0$과 $f=0$이 결합된 문제는 문제풀이 경험에 따라 꽤 익숙할 수도, 아닐 수도 있습니다.
꽤 나오는 조건이니 학습해두어야 합니다.
또한, 정수 · 자연수 조건은 괜히 준 것이 아니니
어떻게 이용할 수 있을지 생각해보시길 바랍니다.
이 문제에서는 범위를 주고, 거기서 자연수 조건을 통해 확정값을 도출하는 형태입니다.

20번: 제가 개인적으로 크게 충격을 받았던 문제입니다. 박스 조건의 형태가 익숙해서 우리가 흔히 아는 특수한 상황을 가지고 풀어보려 했으나,
문제에서 묻는 것은 그 상황이 아니었습니다.
$x \geq 1$이라는 조건이 거의 쓰이지 않는 것을 볼 때
평가원이 일부러 저격한 것이 아닐까라는
생각까지 하게 되는 문제입니다.
개형을 찍어서 문제를 맞히는 것도 좋지만,
분석할 때는 왜 이 조건이 이렇게 되는지
“필연성” 을 부여하는 작업을 해주셔야 합니다.

21번: 전설의 ㄱㄴㄷ주관식 문항입니다.
6모 당일날 제 교양 수업 때도 이야기가 나왔습니다.
물론 여러분들 입장에서는 충분히 좋은 현상이죠
찍어서 맞을 확률이 월등히 높아졌으니까요.
ㄱ과 ㄴ선지는 쉽게 판별할 수 있지만,
시험장에서 ㄷ을 판단하지 못한 학생들이 꽤 있을 것으로 보입니다.
평가원의 ㄱㄴㄷ 합답형 문항은 앞에서 판별한 조건을 끌고 오는 형태가 많이 보입니다.
풀이 논리가 좋으니 학습할 때는 이 논리의 흐름을 따라가보시길 바랍니다.
그리고 실전에서 ㄱㄴㄷ문항을 만나면, 최상위권이 아닌 이상 일단 넘어가는 것이 맞습니다. ㄱ과 ㄴ 정도만 판별해놓고 시간이 남으면 ㄷ을 풀어보겠다 라는 마인드가 가장 좋죠.

22번: 번호대가 번호대인지라 쳐다보지도 않고
넘긴 학생들이 많았을 겁니다.
작년 수능 22번이 어려운 것도 영향을 줬겠네요.
쉽지만 재밌는 문제이니 못 푸신 분들은 스스로 풀어보시면 좋겠습니다.
박스 조건을 논리적으로 해석하는 것도 담아놨으니 보고 배워가시면 됩니다.

미적 25: 푸는 방법은 정석, 근사, 로피탈 등 여러 가지입니다. 중요한 것은 “안 막히고 풀었냐” 입니다.

미적 27: 25번과 비슷합니다. 해석 자체는 어렵지 않기 때문에, 빠르게 계산하여 답을 낼 수 있느냐가 중요합니다.

미적 28: 개인적으로 이 시험에서 가장 어려운 문항이라 생각합니다.
30번과 위치가 바뀌어도 무방하고,
어떻게 풀지조차 모르겠는 미적 고난도 문항의 특징이 담겨 있습니다.
풀이 논리를 배워가시면 큰 도움이 될 겁니다.

미적 29: 계산력, 식 조작 능력을 묻는 문제입니다.
근과 계수와의 관계를 사용하여 답을 낸 학생들은,
순수하게 대입과 식 조작을 통해서도 답을 내보시길 바랍니다.
수능장에서는 이번과 다르게 근과 계수와의 관계가 안 보일 수도 있으니까요.

미적 30: 6평이라 어쩔 수 없습니다.
쉽고 딱히 할 말은 없습니다.
이 문제의 조건을 보자마자 수열의 형태가 어떻게 될지 짐작을 했어야 합니다.
제가 문제를 보고 생각했던 그림을 그려두었습니다.

< 어떻게 공부해야 하는가? >

가장 중요한 건, 스스로의 문제 해결력을 키우는 것입니다. 실전개념과 스킬을 익히는 것도 좋지만,
그 과정을 납득하고 논리적으로 설명할 수 있어야
진짜 자신의 것이라고 할 수 있습니다.
또한, 예전과 달리 특이 케이스를 기피하는 경향이 보이기 때문에 특수한 개형을 찍어서 푸는 학생들은
공부할 때만큼은 조건을 논리적으로 해석하고 모든 경우를 고려하는 연습을 해보셔야 합니다.

제가 누누이 말씀드렸던 수학 복습도 결국은 이와 일맥상통합니다. 단순히 "풀이를 외우는 것" 이 아니라, 나보다 나은 사람이 문제를 어떻게 해석하고 풀이를 전개하는지를 보면서 그것을 따라하는 것이죠.
따라하는 것도 단순히 베끼는 것이 아닌, "왜 이렇게 이렇게 되는지" 필연성을 부여하며 스스로가 납득해야 진정으로 자신의 것이 됩니다.

물론, 늘 강조하는 "문제 많이 풀기" 는 당연히 중요합니다. 낯선 문제에 대한 풀이 경험과 고민한 시간이 여러분의 문제 해결력 증진에 큰 도움이 될 겁니다.

문항 번호와 난이도가 일치하지 않는다는 걸 극단적으로 보여준 시험이니 시험 운영에 있어서도 충분한 연습이 되어야 합니다.
실전모의고사 훈련을 통해 문제가 막혔을 때 바로바로 넘기는 능력을 터득하는 것이 좋습니다.

제 2 교시

수학 영역 Kim´s Analysis

5지선다형

1. $\sqrt[3]{27} \times 4^{-\frac{1}{2}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

분수 지수도 능숙하게 다루자!

$27^{\frac{1}{3}} \times \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = 3 \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{3}{2}}$

2. 함수 $f(x) = x^2 - 2x + 3$ 에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

미분계수의 형태 기억...

$\lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = f'(3).$

$\left(\because \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)\right)$

$f(x) = x^2 - 2x + 3$ 이므로

$f'(x) = 2x - 2,\ f'(3) = \boxed{4}$

3. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{10} (2a_k + 3) = 60$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$ 의 값은? [3점]

① 10 ② 15 ③ 20 ④ 25 ⑤ 30

이걸 변형해서

이 꼴을 뽑아내야 한다!

$\sum_{k=1}^{10} (2a_k + 3) = 2 \times \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} 3 = 60$

$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k = \boxed{15}$

4. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 4 - f(1)$$

을 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

연속 조건은 괜히 주는 게 아니다.
연속의 정의를 사용해서 푸는 문제.

($x=1$ 에서 연속) $\subset$ (실수 전체에서 연속) 이므로

$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = N.$

$N = 4 - N,\ N = f(1) = \boxed{2}$

수학 영역

5. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(x^3+1)f(x)$$

라 하자. $f(1)=2$, $f'(1)=3$일 때, $g'(1)$의 값은? [3점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

다항함수 × 다항함수이므로 $g(x)$도 다항함수이다.
다항함수는 실수 전체의 집합에서 연속·미가이다.

결국 이 조건을 주지 않았으면 g를 함부로 미분할 수 없는 것이다.
고난이도 문항에서는 이런 사소한 것들도 조건으로 사용되기 때문에 (ex. 미적 28) 챙겨두어야 한다.

$$g'(x)=3x^2f(x)+(x^3+1)f'(x)$$

$$\therefore g'(1)=3f(1)+2f'(1)=\boxed{12}$$

2사분면
3사분면

6. $\cos\theta<0$이고 $\sin(-\theta)=\frac{1}{7}\cos\theta$일 때, $\sin\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{3\sqrt{2}}{10}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{10}$ ③ 0
④ $\frac{\sqrt{2}}{10}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{2}}{10}$

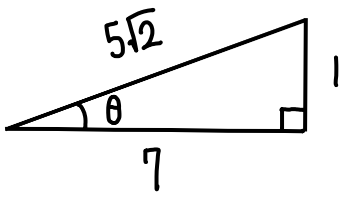
sin과 cos의 관계

$\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ 중 한 값만 알아도 나머지가 모두 결정된다는 것을 유념하자.

Sol 1 > $\sin(-\theta)=-\sin\theta$이므로

$$\frac{-\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{7}\cdot\frac{\cos\theta}{\cos\theta}\rightarrow\tan\theta=-\frac{1}{7}.$$

$\cos<0$, $\tan<0\rightarrow\sin>0$.



$\therefore\sin\theta=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{10}}$

Sol 2 > $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 이므로 양변 제곱

$$\sin^2\theta=\frac{1}{49}\cos^2\theta=\frac{1}{49}-\frac{1}{49}\sin^2\theta$$

$$\sin^2\theta=\frac{1}{50},\quad\sin\theta=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{10}}\ (\because S>0)$$

7. 상수 $a(a>2)$에 대하여 함수 $y=\log_2(x-a)$의 그래프의 점근선이 두 곡선 $y=\log_2\frac{x}{4}$, $y=\log_{\frac{1}{2}}x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{AB}=4$일 때, a의 값은? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

이게 0 되는 부분이 점근선.
$\log_2 0$은 정의되지 않으니까!
$\therefore x=a$

$$A\left(a,\ \log_2\frac{a}{4}\right),\quad B\left(a,\ -\log_2 a\right)$$

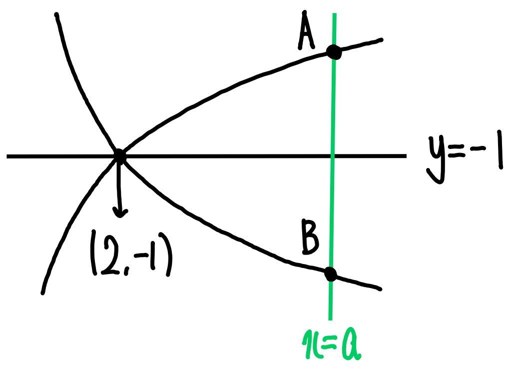
$\overline{AB}$를 구하기 위해서는 차를 구해야 되는데, 어느 쪽이 더 큰지를 모를 때는 일단 빼고 절댓값 씌우기!

$$\left|\log_2\frac{a}{4}-(-\log_2 a)\right|=\left|\log_2\frac{a^2}{4}\right|=4$$

$$a>2\ (\text{문제조건})\rightarrow\frac{a^2}{4}>1\rightarrow\log_2\frac{a^2}{4}>0.$$

$$\therefore\log_2\frac{a^2}{4}=4,\ \boxed{a=8}.\ (\because a>2>0)$$

별해>



이렇게 그려볼 수는 있겠다.

수학 영역

8. 두 곡선 $y=2x^2-1$, $y=x^3-x^2+k$가 만나는 점의 개수가 2가 되도록 하는 $\boxed{\text{양수 } k}$의 값은? [3점]

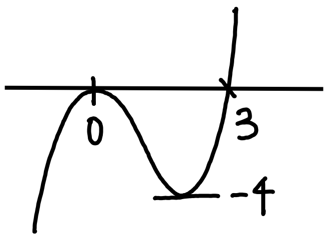
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

"서로 다른 실근 개수가 2"

보통 두 곡선의 교점 개수를 비교할 때는,
이항을 통해 (곡선) = (상수) 꼴로 바꾼다.

(이거보단 이게 편하니까)

$x^3-3x^2=-k-1$의 교점 2 → 접할 때!



i) $-k-1=0$?
$k=-1$로 조건 위배
($\because$ 양수 k)

ii) $-k-1=-4$
$\therefore k=\boxed{3}$

9. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)a_k}=n^2+2n$$ → 합을 나타낸 식

일반항 궁금해!

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{10}a_n$의 값은? [4점]

① $\frac{10}{21}$ ② $\frac{4}{7}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{16}{21}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

수열의 합과 일반항의 관계를 써주자.

$$\begin{cases} a_n=S_n-S_{n-1} & (n\geq 2) \\ a_1=S_1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{(2n-1)a_n}=n^2+2n-(n-1)^2+2(n-1)$$
$$=2n+1 \quad (n\geq 2)$$
$$\rightarrow a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \quad (n\geq 2)$$
$$\frac{1}{(2\cdot 1-1)a_1}=3,\ a_1=\frac{1}{3}$$ 이므로 위 식과 동일.

부분분수를 다루는 능력은 필수이다!

$$a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{10}a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{21}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{20}{21}=\boxed{\frac{10}{21}}$$

10. $\boxed{\text{양수 } k}$에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=kx(x-2)(x-3)$$

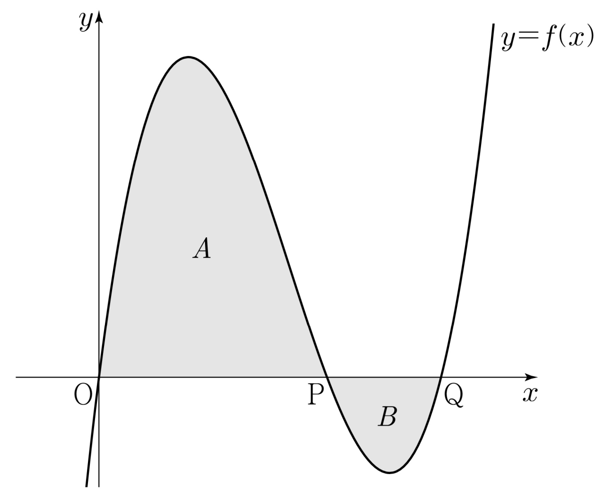
이다. 곡선 $y=f(x)$와 x축이 원점 O와 두 점 P, Q $(\overline{OP}<\overline{OQ})$에서 만난다. 곡선 $y=f(x)$와 선분 OP로 둘러싸인 영역을 A, 곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 영역을 B라 하자.

어느 영역이 더 큰지를 결정.

$$(A\text{의 넓이})-(B\text{의 넓이})=3$$

일 때, k의 값은? [4점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$



넓이 = |적분값| 이기 때문에,
적분값이 양수인 A의 적분값 = (A의 넓이)
〃 음수인 B의 적분값 = −(B의 넓이)
$\therefore$ (A의 넓이) + (−(B의 넓이))
$$=\int_0^3 f(x)dx=3.$$
↳ 모르는 값이 하나라서, 계산하면 끝 :)

별해 > 계산 줄이기

식 변형으로 계산 줄이는 풀이를 보여주는데,
실전에서 이렇게 하라는 건 아니고
그냥 "이렇게도 풀 수 있구나" 경험하면 된다.

① $kx(x-2)(x-3)=\underbrace{kx(x-3)\left(x-\frac{3}{2}\right)}_{0\sim 3\text{ 적분하면 }0.}-\underbrace{\frac{1}{2}kx(x-3)}_{\text{넓이공식}}$

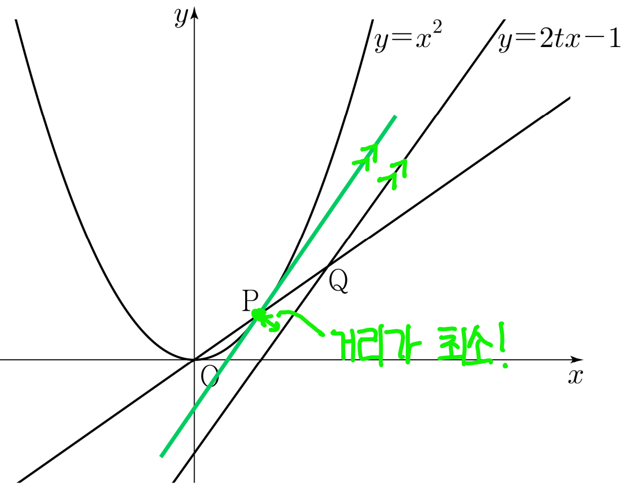
② $kx(x-2)(x-3)=\underbrace{kx^2(x-3)}_{\text{넓이 공식}}-\underbrace{2kx(x-3)}_{\text{넓이 공식}}$

고1 수학부터 나오는
익숙한 조건. "평행"

11. 그림과 같이 실수 $t\,(0<t<1)$에 대하여 곡선 $y=x^2$ 위의 점 중에서 직선 $y=2tx-1$과의 $\boxed{\text{거리가 최소}}$인 점을 P라 하고, 직선 OP가 직선 $y=2tx-1$과 만나는 점을 Q라 할 때,

$\lim\limits_{t\to 1-}\dfrac{\boxed{\overline{\mathrm{PQ}}}}{1-t}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

↳ 식을 만들면, $1-t$가 있겠지. 약분하고 계산하자.



① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

$y=x^2 \xrightarrow{\ '\ } y'=2x$.

평행: $2x=2t,\ x=t \quad \therefore P(t,t^2)$

직선 OP: $y=\dfrac{t^2-0}{t-0}x=tx$.

$y=tx$가 $y=2tx-1$과 만난다!

$tx=2tx-1 \rightarrow x=\dfrac{1}{t}. \quad \therefore Q\left(\dfrac{1}{t},1\right)$

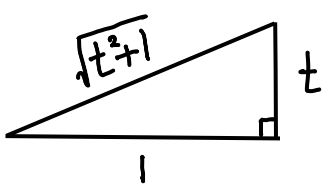
$P(t,t^2)$과 $Q\left(\dfrac{1}{t},1\right)$의 거리:

$\overline{PQ}=\sqrt{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+(t^2-1)^2}=\left|\dfrac{t^2-1}{t}\right|\times\sqrt{t^2+1}$

$(0<t<1)$이므로 절댓값을 벗기자!

$\therefore \overline{PQ}=\dfrac{1-t^2}{t}\times\sqrt{t^2+1}$

별해> 기울기가 t인 직선에서 직각삼각형을 그려주자. 길이의 비를 이용!



따라서, 빗변의 길이 $\overline{PQ}$는

$(P, Q\ x좌표\ 차)\times\dfrac{\sqrt{t^2+1}}{1}$

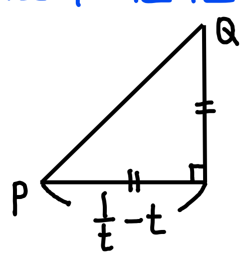
$=\left(\dfrac{1}{t}-t\right)\times\sqrt{t^2+1}=\dfrac{1-t^2}{t}\times\sqrt{t^2+1}$

마지막 계산은 그냥 하면 된다.

$$\lim_{t\to1^-}\frac{\frac{1-t^2}{t}\times\sqrt{1+t^2}}{1-t}=\lim_{t\to1^-}\left(\frac{1+t}{t}\times\sqrt{1+t^2}\right)=\boxed{2\sqrt{2}}$$

약분

별해> 직선의 기울기만 미리 $t\to1^-$ 보내도 된다.



$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{t}-t\right)$

추가적으로, 분석할 때는 거리가 0이 되는 상황이 (=곡선과 직선이 만나는) 발생하는지도 확인해보자.

$x^2=2tx-1$에서 $x^2-2tx+1=0$의 판별식 확인.

$D/4=t^2-1$인데 $0<t<1$이므로 $D<0$.

만나지 않음을 알 수 있다.

12. $\boxed{a_2=-4}$이고 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 $b_n=a_n+a_{n+1}\,(n\geq 1)$이라 하고, 두 집합 A, B를

→ 등차+등차=등차.

$$A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5\},\quad B=\{b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5\}$$

라 하자. $n(A\cap B)=3$이 되도록 하는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{20}의 값의 합은? [4점] → 여러 케이스에 대해 a_n결정.

① 30 ② 34 ③ 38 ④ 42 ⑤ 46

집합 조건의 해석...
값이 같아지는 원소가 3개 있어야 한다.

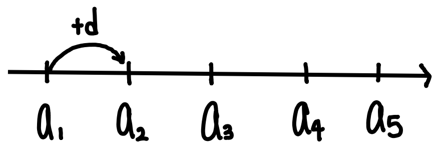
문제를 처음 보는 입장에선 수열의 식을 썼을 것이다. $a_2=-4$니까 공차 d라 하면

$a_n=d(n-2)-4$
$a_{n+1}=d(n-1)-4$
→ $b_n=2dn-3d-8$

문제에서 $a_1\sim a_5$, $b_1\sim b_5$를 묻고 있으니 일단 계산해서 나열해보자.

n	1	2	3	4	5
a_n	-4-d	-4	-4+d	-4+2d	-4+3d
b_n	-8-d	-8+d	-8+3d	-8+5d	-8+7d

b_n의 공차가 a_n 공차의 두 배인데 같은 값이 3개 생기려면



1) b_1 b_2 b_3
2) b_2 b_3 b_4
3) b_3 $\xrightarrow{+2d}$ b_4 b_5 이어야 한다.

1) $a_1=b_1$
$-4-d=-8-d$ → 모순

2) $a_1=b_2$
$-4-d=-8+d$ → $d=2$.
$\therefore a_{20}=2\cdot 18-4=32$

3) $a_1=b_3$
$-4-d=-8+3d$ → $d=1$
$\therefore a_{20}=1\cdot 18-4=14$

$\therefore 32+14=\boxed{46}$

물론, 수학적 센스가 있는 사람들은 일반항을 구하지 않고도 해결했을 것이다.
또는, $b_n=a_n+a_{n+1}$임을 이용하여

a_n : $-4-d$ -4 $-4+d$ $-4+2d$ $-4+3d$
b_n : $-8-d$ $-8+d$ $-8+3d$ $-8+5d$ ...

이렇게도 나타낼 수 있겠다.

실제로 문제를 풀 때도
조건에 밑줄을 쳐주자.

13. 그림과 같이

BD 나온다 / 둔각 (sin>0, cos<0)

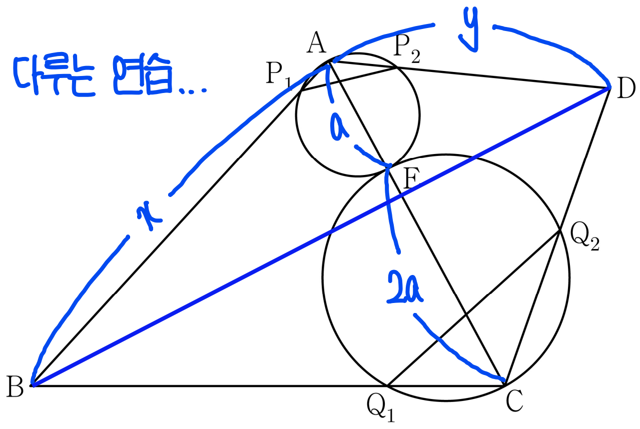
$\overline{BC}=3$, $\overline{CD}=2$, $\cos(\angle BCD)=-\frac{1}{3}$, $\angle DAB>\frac{\pi}{2}$

인 사각형 ABCD에서 두 삼각형 ABC와 ACD는 모두 예각삼각형이다. 선분 AC를 1:2로 내분하는 점 E에 대하여 선분 AE를 지름으로 하는 원이 두 선분 AB, AD와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 각각 P_1, P_2라 하고, 선분 CE를 지름으로 하는 원이 두 선분 BC, CD와 만나는 점 중 C가 아닌 점을 각각 Q_1, Q_2라 하자.

미지수 잡자.

$\overline{P_1P_2}:\overline{Q_1Q_2}=3:5\sqrt{2}$이고 삼각형 ABD의 넓이가 2일 때, $\overline{AB}+\overline{AD}$의 값은? (단, $\overline{AB}>\overline{AD}$) [4점]

비례식 다루는 연습...



① $\sqrt{21}$ ② $\sqrt{22}$ ③ $\sqrt{23}$ ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ 5

우리가 모르는 게 $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{AC}$이므로
모르면 어떻게 한다? 미지수!

$\overline{AB}=x$, $\overline{AD}=y$, $\overline{AE}=a$, $\overline{EC}=2a$.

구할 수 있는 값 먼저 구하는 게 원칙.

$\overline{BD}^2=2^2+3^2-2\cdot2\cdot3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)$
$=17$, $\overline{BD}=\sqrt{17}$

"지름으로 한다"라는 표현을 잊으면 안된다.
외접원의 지름 → 사인법칙

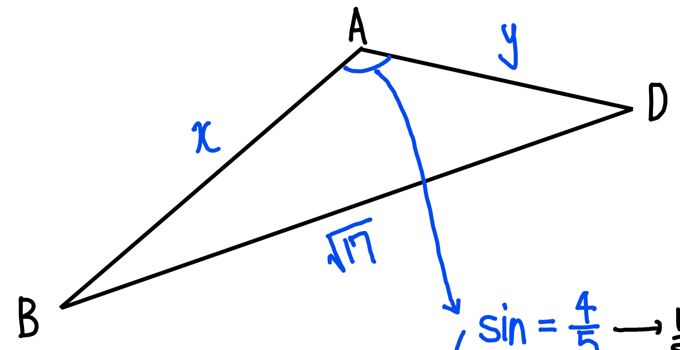
$\overline{P_1P_2}=a\sin\angle BAD$

$\overline{Q_1Q_2}=2a\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{4\sqrt{2}}{3}a$.

$a\sin\angle BAD:\frac{4\sqrt{2}}{3}a=3:5\sqrt{2}$

↳ $\sin\angle BAD=\frac{4}{5}\rightarrow\cos\angle BAD=-\frac{3}{5}$

모르는 게 x와 y이므로
x와 y에 관련된 식 2개를 만들면 되겠다.



$\sin=\frac{4}{5}$ → 넓이로 식 한개.
$\cos=-\frac{3}{5}$ → 코사인법칙

계산은 스스로 해보자...

$x^2+y^2=11$, $xy=5$ 이므로

$(x+y)^2=11+5\times2=21$

$\therefore x+y=\boxed{\sqrt{21}}$

도형 문제의 특성상 접근 방법, 접근 순서가
여러 가지이나 분석의 측면에서 이 풀이만
익히면 충분하다고 판단하였다.

14. 실수 $a\,(a \geq 0)$에 대하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$를

$$v(t) = -t(t-1)(t-a)(t-2a)$$ → 근 0, 1, a, 2a

라 하자. 점 P가 시각 $t=0$일 때 출발한 후 운동 방향을 한 번만 바꾸도록 하는 a에 대하여, 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량의 최댓값은? [4점]

↳ 변위(부호 포함)이라 받아들이자.

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{7}{30}$ ③ $\frac{4}{15}$ ④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

v(t)의 부호 변화가 한 번만 일어난다.
엥? 양수인 근은 3개 아닌가?
아 겹치는 근이 한 쌍 있구나.
중근이면 부호 변화가 일어나지 않으니까.

i) $a=0 \rightarrow \int_0^2 -t^3(t-1)dt = -\frac{12}{5}$

ii) $a=1 \rightarrow \underbrace{\int_0^2 -t(t-1)^2(t-2)dt}_{} = \frac{4}{15}$

↳ 평행이동할 수도...

$= \int_{-1}^{1} -(t+1)\cdot t^2 \cdot (t-1)dt$

$= -\int_{-1}^{1}(t^4-t^2)dt$ ← 계산이 쉽다.

iii) $2a=1 \rightarrow \int_0^2 -t\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-1)^2 dt = -\frac{11}{15}$

$\therefore \boxed{\frac{4}{15}}$일 때가 가장 크다.

별해> A>B를 보이는 방법 중 하나는,
A-B>0을 보이는 것이다.

ex) $A = \int_0^2 -t(t-1)^2(t-2)dt$

$B = \int_0^2 -t(t-1)^2\left(t-\frac{1}{2}\right)dt$

$\rightarrow A-B = \int_0^2 \frac{3}{2}t(t-1)^2 dt > 0,$

$\therefore A>B$

여기부터는 지적 유희다.

a=1인 케이스를 A, 2a=1인 케이스를 B..

x=0에서의 접선의 기울기는 A에서가 크다.

B의 적분값 >0 되는 구간은 $0 \sim \frac{1}{2}$인데

이는 A의 구간인 0~2보다 작고,

둘의 최고차항의 계수가 같으며

시작점인 x=0에서의 미분계수도 A>B이므로

A의 값이 B의 값보다 크지 않을까... 라고

추측해볼 수 있다.

15. 자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

↳ $k>0$. 자연수·정수 집중.

> $a_1 = k$이고, 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 2n - k & (a_n \le 0) \\ a_n - 2n - k & (a_n > 0) \end{cases}$$
>
> 이다.

$a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은? [4점]

$\neq 0$.

① 10 ② 14 ③ 18 ④ 22 ⑤ 26

본인이 직접 해보는 게 제일 좋다.

$a_1 = k > 0 \rightarrow a_2 = k - 2 - k = -2 < 0$

여기까진 부호가 확정인데,

a_3부터 문제가 생긴다.

$a_3 = 2 - k \rightarrow$ 부호와 자연수 조건으로 케이스!

$2-k>0$은 곧 $0<k<2$이므로 $k=1$일 때.

if $k=1$: $a_4=-6$, $a_5=1$, $a_6=-10$ (X)

if $2-k<0$:

a_4 a_5 a_6

$8-2k \xrightarrow{k>4} 16-3k \xrightarrow{k>5} 26-4k$: $k=6$ ok.

$16-3k \xrightarrow{k=5} -14$: ok.

$8-2k \xrightarrow{k=3} -9 \longrightarrow -2$: ok.

$\therefore k = 3, 5, 6$

$\boxed{14}$

별해 > 경험이 좀 있으면, 선지의 k 합이 별로 크지 않다는 것이 보인다.
k는 자연수니까, 1부터 대입하는 것도..?

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6		
$k=1$	1	-2	1	-6	1	-10	>0	(X)
$k=2$	2	-2	0				$=0$	(X)
✓ $k=3$	3	-2	-1	2	-9	-2	<0	(O)
$k=4$	4	-2	-2	0			$=0$	(X)
✓ $k=5$	5	-2	-3	-2	1	-14	<0	(O)
✓ $k=6$	6	-2	-4	-4	-2	$+2$	<0	(O)

$k \ge 7$부터는 조건을 만족하지 않는다.

15. 자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> $a_1 = k$이고, 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 2n - k & (a_n \le 0) \\ a_n - 2n - k & (a_n > 0) \end{cases}$$
>
> 이다.

$a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은? [4점]

① 10　② 14　③ 18　④ 22　⑤ 26

단답형

16. 부등식 $2^{x-6} \le \left(\frac{1}{4}\right)^x$을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오. [3점]

범위를 먼저 찾아야...

지수 부등식의 기본은, 밑을 통일하는 것!

$2^{x-6} \le 2^{-2x}$

밑이 1보다 크므로 부등호 유지

$x-6 \le -2x$, $x \le 2$

자연수 x : 1, 2

합 : $\boxed{3}$

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = 8x^3 - 1$이고 $f(0) = 3$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

도함수 주고

원함수 결정해야...

부정적분 : $f(x) = 2x^4 - x + C$ (C는 적분상수)

$f(0) = C = 3$.

$\therefore f(2) = 32 - 2 + 3 = \boxed{33}$

18. 두 상수 a, b에 대하여 삼차함수 $f(x)=ax^3+bx+a$는 $x=1$에서 극소이다. 함수 $f(x)$의 극솟값이 -2일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값을 구하시오. [3점]

극소라고 다 $f'=0$ 이 아니다! 미분가능한 함수일 때만!

함숫값 조건.

$$\left.\begin{array}{l} f'(1)=3a+b=0 \\ f(1)=2a+b=-2 \end{array}\right\rangle a=2,\ b=-6$$

$f'=6x^2-6=6(x-1)(x+1)$ 이므로 $x=-1$ 극대.

$\therefore f(-1)=-a-b+a=-b=\boxed{6}$

정수, 자연수 조건은 주목해야 한다.

19. 두 자연수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=a\sin bx+8-a$$

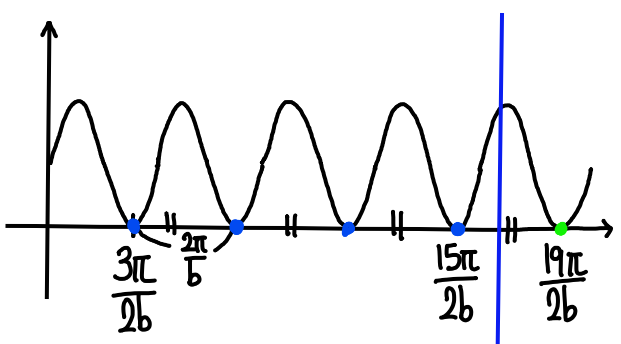
가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값을 구하시오. [3점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이다.
(나) $0\leq x<2\pi$일 때, x에 대한 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

원래 $f\geq 0$ 이면 x축에 접하거나 만나지 않는데

(나)에서 $f=0$의 실근이 존재함을 말하고 있다.

$\therefore$ f의 최솟값 $=0=-a+8-a$, $a=4$



$\frac{15\pi}{2b}<2\pi\leq\frac{19\pi}{2b}$

$\downarrow$

$\frac{15}{4}<b\leq\frac{19}{4}$

$\downarrow$

4.

이 사이에 $x=2\pi$가 존재해야 한다.

$\frac{15\pi}{2b}=2\pi$ 이면 실근 3개

$\frac{19\pi}{2b}=2\pi$ 까지 실근 4개이므로

논리가 22번과 비슷한 느낌이..

$\therefore a+b=\boxed{8}$

20. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

다항 → 연속, 미가

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(9)$의 값을 구하시오. [4점]

f를 결정해야 하는데, 모르는 문자 2개.

$\downarrow$

식 2개 찾자.

$x\geq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\geq g(4)$이고 $\lvert g(x)\rvert\geq\lvert g(3)\rvert$이다.

정적분으로 정의된 함수를 만나면,
무조건 해야 하는 두 가지 행동:

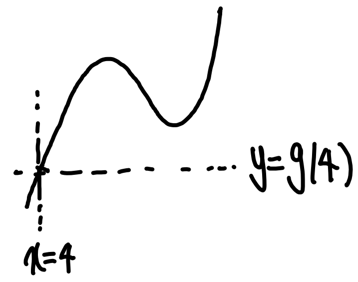
① 대입 : $g(0)=0$

② 미분 : $g'(x)=f(x)$

$g(x)$가 미분가능한데 $g(x)\geq g(4)$?

$g(x)$는 $x=4$에서 극소를 가져야 한다. $\therefore g'(4)=0$

참고로, 이 논리는 $x\geq 1$ 범위 안에 4가 포함되기 때문에 가능하다.



$x\geq 1$이 아니라 $x\geq 6$ 이러면 이런 케이스도 존재할 수 있다.

비슷한 논리로, $\lvert g\rvert$가 $x=3$에서 최소인데

$\lvert g\rvert$가 $x=3$에서 미분가능하면 $g'(3)=0$ 이다.

$g'(3)=g'(4)=0$ 이면서 $g(0)=0$인 삼차함수는 존재 불가능하므로 모순.

$\therefore$ $\lvert g\rvert$는 $x=3$에서 미분불가 $\rightarrow g(3)=0$.

1) f의 입장에서 계산:

$$f=x^2+ax+b \text{ with } \begin{cases} f(4)=g'(4)=0 \\ \int_0^3 f=g(3)=0 \end{cases}$$

2) g의 입장에서 계산:

$$g=\frac{1}{3}x(x-3)(x-p) \text{ with } g'(4) \rightarrow f.$$

21. 실수 t에 대하여 두 곡선 $y=t-\log_2 x$와 $y=2^{x-t}$이 만나는 점의 x좌표를 $f(t)$라 하자. → f(t)를 몰라도 식은 세우겠네.
<보기>의 각 명제에 대하여 다음 규칙에 따라 A, B, C의 값을 정할 때, $A+B+C$의 값을 구하시오. (단, $A+B+C\neq 0$) [4점]
↳ 이러다 A+B+C+D+E 나오면...

- 명제 ㄱ이 참이면 $A=100$, 거짓이면 $A=0$이다.
- 명제 ㄴ이 참이면 $B=10$, 거짓이면 $B=0$이다. 아 예...
- 명제 ㄷ이 참이면 $C=1$, 거짓이면 $C=0$이다.

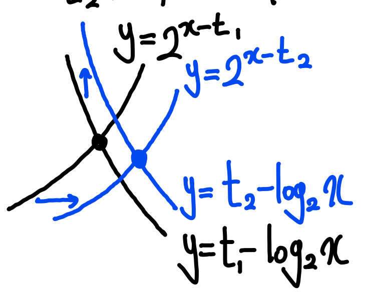
<보 기>

ㄱ. $f(1)=1$이고 $f(2)=2$이다.
ㄴ. 실수 t의 값이 증가하면 $f(t)$의 값도 증가한다.
~~ㄷ~~. 모든 양의 실수 t에 대하여 $f(t)\geq t$이다.

$t-\log_2 f(t)=2^{f(t)-t}$

ㄱ. $f(1)=1$ (o), $f(2)=2$ (o) → ok.

ㄴ. x축, y축 없이 함수만 그려서
경향성 파악하는 연습!
$t_2>t_1$일 때



t가 증가하니까 f(t)도 증가하네. ok.

별해> 미적 선택자들은 양변을
미분할 수 있다.
$\log_2 f(t)$가 정의되려면 $f>0$이므로
식을 정리하면 $f'=$ //// >0.

(ㄷ선지는 여기 언급한 것 말고도
회전이동, 지수로그 고정점 근처 한칸 등등..
접근 방법은 많으나 오른쪽 두 풀이가
가장 과하지 않고 바람직하여 수록함.)

~~ㄷ~~. 사실 ㄷ 때문에 이 문제가 존재한다고
봐도 무방하다.
실전에서는 ㄱ, ㄴ 풀고 ㄷ 한 1분
풀었는데 안 나오면 찍고 넘어가자.
50% 확률로 4점을 받을 수 있다.

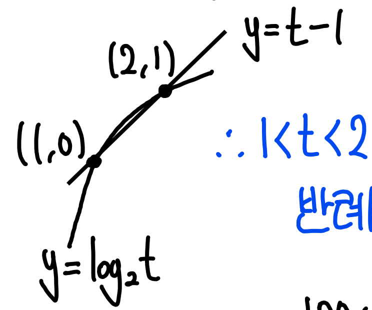
→ 14번에서도 쓴 논리다.

$f(t)\geq t \Leftrightarrow f(t)-t\geq 0$.
같다는 말이다...

$t-\log_2 f(t)=2^{f(t)-t}$에서

$t=\log_2 f(t)+2^{f(t)-t}\geq \log_2 t+1$

$t-1\geq \log_2 t$가 "모든" t에서 성립?



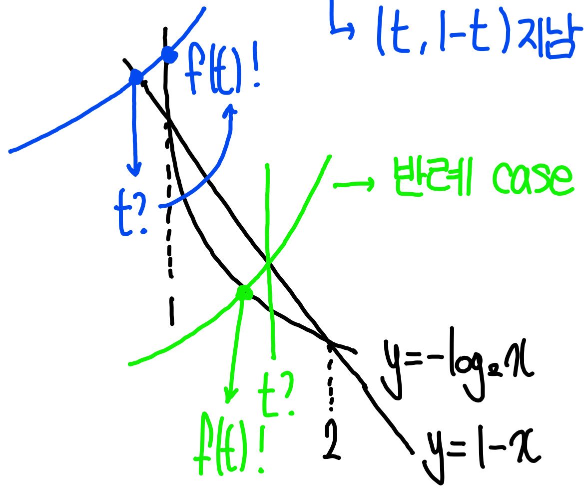
∴ $1<t<2$에선 성립하지 않는다.
반례 존재 → X.

∴ $100+10+0=\boxed{110}$

별해> 좀더 경향성에 집중.

처음 식은 t 변화 → 두 곡선 다 변화 라서
우리가 관찰하기 힘들다.
t를 옮겨서 한 곡선이라도 고정시키자.

$-\log_2 x=2^{x-t}-t$
↳ $(t, 1-t)$지남 → $y=1-x$ 지남.



쫄지 말자!

22. 정수 a $(a \neq 0)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=x^3-2ax^2$$ → 다항함수 → 연속·미가

이라 하자. 다음 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 값의 곱이 -12가 되도록 하는 a에 대하여 $f'(10)$의 값을 구하시오. [4점]

> 함수 $f(x)$에 대하여
>
> $$\left\{\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right\}\times\left\{\frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}\right\}<0$$
>
> 을 만족시키는 세 실수 x_1, x_2, x_3이 열린구간 $\left(k,\ k+\frac{3}{2}\right)$에 존재한다.

구간 길이 $\frac{3}{2}$

정수 적어도 1개 많아야 2개

$f'(C_1)$과 같다. $(x_1<C_1<x_2)$

$f'(C_2)$와 같다. $(x_2<C_2<x_3)$

평균값 정리 (f 미가 → 사용가능)

$f'(C_1)f'(C_2)<0$이면 사잇값 정리로 $f'(C_3)=0$ 만족시키는 C_3 in $C_1<C_3<C_2$

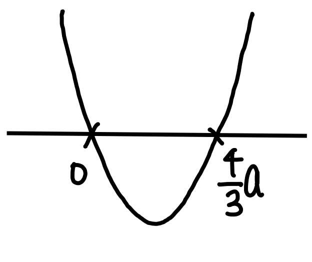
$\therefore$ $f'(C_3)=0$ 만족시키는 C_3이 열린구간 $\left(k,\ k+\frac{3}{2}\right)$에 있으면 된다.

(물론 직관·논리로 풀어도 된다.)

$$f'(x)=3x^2-4ax=3x\left(x-\frac{4}{3}a\right)$$

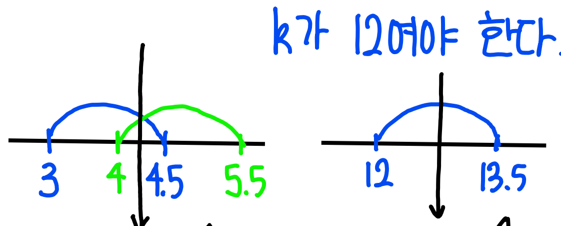
문제는, a가 0보다 왼쪽인지 오른쪽인지 모른다... → Case!

i) $a>0$



정해진 0을 먼저 공략해보면, $k=-1$일 때 $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$에 0존재. (o)

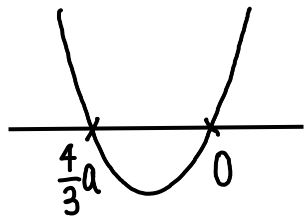
곱이 -12 이므로 k가 3, 4 이거나 k가 12여야 한다.



여기에 $\frac{4}{3}a$ 존재. → 만족시키는 정수 a x.

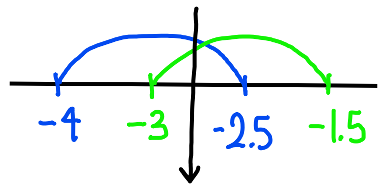
여기에 $\frac{4}{3}a$ 존재 → $k=13$도 가능해짐. x.

ii) $a<0$



0근방의 k를 찾는 건 i)과 동일하다. $\therefore k=-1$.

곱이 12가 되어야 하므로 $k=-3, -4$임을 직감하고 체크해보자.



$$-3<\frac{4}{3}a<-\frac{5}{2}$$

$$-\frac{9}{4}<a<-\frac{15}{8} \longrightarrow a=-2.$$

(공부할 때는 나머지 안되는 케이스도 다 점검해보자.)

$\therefore$ $f'=3x^2+8x \rightarrow f'(10)=\boxed{380}$

제 2 교시

수학 영역(미적분)

여기부턴 사고과정 없이 해설만... 써볼게요

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+9n}-\sqrt{n^2+4n}\right)$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

지금 ∞ − ∞ 꼴 부정형이므로
식 조작을 통해 바꿔 주어야 한다.

$$\frac{\left(\sqrt{n^2+9n}-\sqrt{n^2+4n}\right)\left(\sqrt{n^2+9n}+\sqrt{n^2+4n}\right)}{\left(\sqrt{n^2+9n}+\sqrt{n^2+4n}\right)}$$

$$=\frac{5n}{\sqrt{n^2+9n}+\sqrt{n^2+4n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\lim} \boxed{\frac{5}{2}}$$

(참고)

$$\frac{5n\times\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{9}{n}}+\sqrt{1+\frac{4}{n}}} \xrightarrow[n\to\infty]{\lim} \frac{5}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}$$

24. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x=\frac{5t}{t^2+1},\quad y=3\ln\left(t^2+1\right)$$

에서 $t=2$일 때, $\boxed{\frac{dy}{dx}}$의 값은? [3점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

$\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$를 구해서 나눈다!

$$\frac{dy}{dt}=\frac{6t}{t^2+1}$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{5(t^2+1)-5t\cdot 2t}{(t^2+1)^2}=\frac{5(1-t^2)}{(t^2+1)^2}$$

$$=\frac{dy}{dx}=\frac{6t(t^2+1)}{5(1-t^2)}$$

$$\therefore\ t=2 \longrightarrow \boxed{-4}$$

수학 영역(미적분)

25. $\lim_{x\to 0}\frac{2^{ax+b}-8}{2^{bx}-1}=16$일 때, $a+b$의 값은?
(단, a와 b는 0이 아닌 상수이다.) [3점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

응꼴 → $2^{0+b}-8=0$, $b=3$.

① 근사

($x\to 0$일 때 $e^{\Delta x}-1\approx \Delta x$)

$$\lim_{x\to 0}\frac{8(2^{ax}-1)}{bx}=\lim_{x\to 0}\frac{8\cdot ax}{3x}=16$$

∴ $a=6$, $a+b=\boxed{9}$

② ㄹㅍㅌ

$$\lim_{x\to 0}\frac{8(2^{ax}-1)}{2^{3x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{8(a\cancel{\ln 2}\cdot \cancel{2^{ax}})}{3\cancel{\ln 2}\cdot\cancel{2^{3x}}}=16.$$

∴ $\frac{8a}{3}=16$, $a=6$

③ 정석풀이

$$\lim\frac{8(2^{ax}-1)}{2^{3x}-1}=\lim\frac{8\cdot\frac{e^{(\ln 2^a)x}-1}{(\ln 2^a)x}\cdot(\ln 2^a)x}{\frac{e^{(\ln 2^3)x}-1}{(\ln 2^3)x}\cdot(\ln 2^3)x}$$

$$=8\cdot\frac{a\ln 2}{3\ln 2}=\frac{8}{3}a=16.$$

26. x에 대한 방정식 $x^2-5x+2\ln x=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 t의 값의 합은? [3점]

① $-\frac{17}{2}$ ② $-\frac{33}{4}$ ③ -8 ④ $-\frac{31}{4}$ ⑤ $-\frac{15}{2}$

낯선 함수

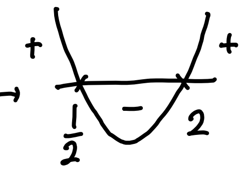
1) 정의역: $x>0$.

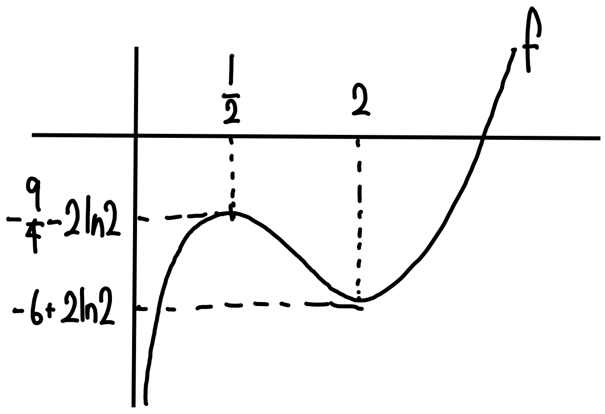
2) 대칭, 주기: 딱히?

3) 특별한 점: 딱히?

4) $\lim_{x\to 0^+}f=-\infty$, $\lim_{x\to\infty}f=\infty$.

도함수로...

$y'=\frac{(2x-1)(x-2)}{x}\to$ 



실근 2개 → 교점 2개 → 접할 때!

∴ $\left(-\frac{9}{4}-2\ln 2\right)+\left(-6+2\ln 2\right)=\boxed{-\frac{33}{4}}$

27. 실수 $t\,(0<t<\pi)$에 대하여 곡선 $y=\sin x$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ \sin t)$에서의 접선과 점 P를 지나고 기울기가 -1인 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\lim_{t\to\pi-}\frac{\tan\theta}{(\pi-t)^2}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

$y'=\cos x \to$ 기울기 $=\cos t$

$\tan\theta=\left|\frac{\cos t-(-1)}{1+\cos t\cdot(-1)}\right|=\left|\frac{\cos t+1}{1-\cos t}\right|$

$\lim_{t\to\pi-}\frac{\tan\theta}{(\pi-t)^2}=\lim_{t\to\pi-}\frac{|1+\cos t|}{|1-\cos t|\,(\pi-t)^2}$

$=\lim_{t\to\pi-}\frac{1+\cos t}{(1-\cos t)(\pi-t)^2}$ 계산...

① 근사

$1+\cos t=1-\cos(\pi-t)\approx\frac{1}{2}(\pi-t)^2$

$\to\lim_{t\to\pi-}\frac{\frac{1}{2}\cdot(\pi-t)^2}{(1+\cos t)(\pi-t)^2}=\boxed{\frac{1}{4}}$

② 로피탈

$\lim_{t\to\pi-}\frac{1}{1+\cos t}=\frac{1}{2}$로 미리 보내고

$\lim_{t\to\pi-}\frac{1+\cos t}{(\pi-t)^2}=\lim_{t\to\pi}\frac{-\sin t}{2(t-\pi)}=\lim_{t\to\pi}\frac{-\cos t}{2}=\frac{1}{2}$.

$\therefore \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\boxed{\frac{1}{4}}$

③ 정석풀이

$\pi-t=x$ 치환..

$\lim_{t\to\pi-}\frac{1+\cos t}{(1-\cos t)(\pi-t)^2}=\lim_{x\to0+}\frac{1-\cos x}{(1+\cos x)\cdot x^2}=\boxed{\frac{1}{4}}$

28. 두 상수 $a\,(a>0)$, b에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a\times b$의 값은? [4점]

ㄴ 미분가능한지는 모름.

(가) 모든 실수 x에 대하여

$$\{f(x)\}^2+2f(x)=a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b$$

이다.

ㄴ 항등식 : 대입, 관찰

(나) $f(0)=f(2)+1$

보기가 음수인데 $a>0\rightarrow b<0$

① $-\frac{1}{16}$ ② $-\frac{7}{64}$ ③ $-\frac{5}{32}$ ④ $-\frac{13}{64}$ ⑤ $-\frac{1}{4}$

$x=0$: $f(0)^2+2f(0)=a+b$

$x=2$: $f(2)^2+2f(2)=a+b$

빼면 $\rightarrow f(0)+f(2)+2=0$.

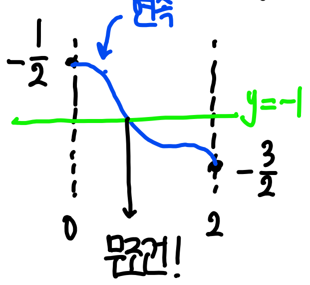
(나)와 연계 : $f(0)=-\frac{1}{2}$, $f(2)=-\frac{3}{2}$

ㄴ $a+b=-\frac{3}{4}$

뭘 안 썼냐? 연속.

$$(f(x)+1)^2=\underbrace{a\cos^3\pi x\cdot e^{\sin^2\pi x}+b+1}_{=g(x)}$$

$\therefore f(x)=\sqrt{g(x)}-1$ or $-\sqrt{g(x)}-1$



바뀌는 점 : $g=0$일 때.

$f=-1$일때.

$\therefore f$가 실수 전체에서 정의되려면 $\sqrt{\ }$ 안에 있는 $g\geq 0$이어야 하는데, $g=0$인 점이 무조건 존재해야 함.

$\therefore g$ 최소 $=0$

$\cos\pi x=t$ 치환 $\rightarrow -1\leq t\leq 1$.

$g'\geq 0$이므로 g최소는 $t=\cos\pi x=-1$일때.

$\therefore g(-1)=0$으로 $-a+b=-1$.

식 2 문자 2 $\rightarrow a=\frac{1}{8}$, $b=-\frac{7}{8}\rightarrow \boxed{-\frac{7}{64}}$

별해> $f(0)=-\frac{1}{2}$, $f(2)=-\frac{3}{2}$

사잇값 정리 $\rightarrow f(c)=-1$인 c 존재.

$f^2+2f\geq -1$이므로 우변도 ≥ -1이다.

최솟값 -1 가짐.

나머지는 원래와 동일.

대칭성이나 합성함수 n축 풀이도 있지만, 문제가 원하는 것과는 좀 거리가 있어 수록하지 않았습니다.

궁금하신 분들은 인터넷에 검색해보시는 게...

단답형

29. 세 실수 a, b, k에 대하여 두 점 $\mathrm{A}(a, a+k)$, $\mathrm{B}(b, b+k)$가 곡선 $C: x^2-2xy+2y^2=15$ 위에 있다. 곡선 C 위의 점 A에서의 접선과 곡선 C 위의 점 B에서의 접선이 서로 수직일 때, k^2의 값을 구하시오. (단, $a+2k \neq 0$, $b+2k \neq 0$) [4점]

Sol 1 > 계산

점 A → 대입
점 B → 대입
접선 기울기 곱 = −1

식 3개 문자 3개 … 한 번은 꼭 해보자.

Sol 2 > 관찰

A, B → $y=x+k$ 위의 점.

$$\begin{cases} (x-y)^2+y^2=15 \\ y=x+k \end{cases} \Rightarrow \text{교점 } a, b$$

↓

$k^2+(x+k)^2=15$

$x^2+2kx+2k^2-15=0$ 이므로

근과 계수와의 관계

↓

$$\begin{cases} a+b=-2k \\ ab=2k^2-15 \end{cases}$$

접선 수직 : $\dfrac{k}{\underbrace{a+2k}_{=-b}} \times \dfrac{k}{\underbrace{b+2k}_{=-a}} = -1$

$\therefore k^2=-ab=15-2k^2$,

$k^2=\boxed{5}$

30. 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$을 모든 자연수 n에 대하여

확정값

$$b_n = \begin{cases} -1 & (a_n \le -1) \\ a_n & (a_n > -1) \end{cases}$$

이라 할 때, 수열 $\{b_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}$은 수렴하고 그 합은 -3이다.
>
> (나) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}$은 수렴하고 그 합은 8이다.

$b_3 = -1$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$의 값을 구하시오. [4점]

$\rightarrow a_3 \le -1$

$r^2 < 1$.

(가) $a_1 < -1$이고 $r^2 < 1$

$\Sigma b_{2n-1} = \underset{-1}{\underset{\parallel}{b_1}} + \underset{-1}{\underset{\parallel}{b_3}} + \underset{-1}{\underset{\nparallel}{b_5}} + \cdots = -3$

$\therefore$ $n \ge 3$에서 $-1 < a_{2n-1} < 0$

$\dfrac{a_1 r^4}{1-r^2} = -1 \quad \cdots$ Ⓐ

(나) if $0 < r < 1 \rightarrow a_n < 0$ in 모든자연수.

$\rightarrow b_n < 0 \rightarrow \Sigma b_{2n} < 0$. 모순.

$\therefore -1 < r < 0$

$\dfrac{a_1 r}{1-r^2} = 8 \quad \cdots$ Ⓑ

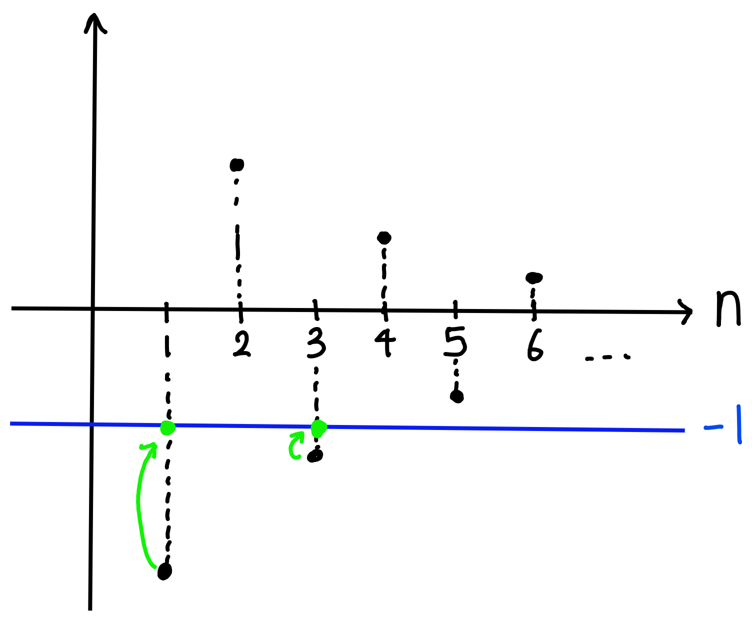
$\therefore \dfrac{Ⓐ}{Ⓑ} \Rightarrow r^3 = -\dfrac{1}{8}$, $r = -\dfrac{1}{2}$.

$\downarrow$

$a_1 = -12$.

$\therefore |a_n| = 12 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \dfrac{12}{1-\frac{1}{2}} = \boxed{24}$



문제 상황 (참고용)