제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $(-\sqrt{2})^4 \times 8^{-\frac{2}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

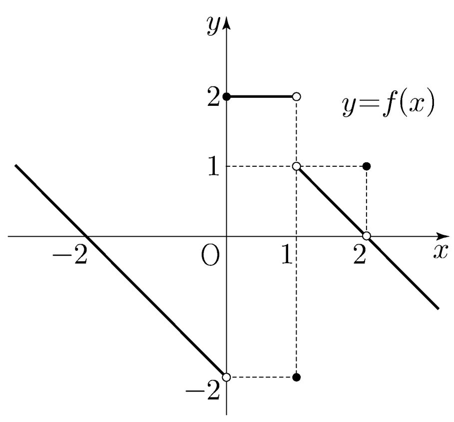
2. 함수 $f(x)=x^3+9$ 에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ 의 값은? [2점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

3. $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 인 θ 에 대하여 $\cos^2\theta=\frac{4}{9}$ 일 때, $\sin^2\theta+\cos\theta$ 의 값은? [3점]

① $-\frac{4}{9}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{2}{9}$ ④ $-\frac{1}{9}$ ⑤ 0

4. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 0-}f(x)+\lim_{x\to 1+}f(x)$ 의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

5. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1 = \frac{1}{4}, \quad a_2 + a_3 = \frac{3}{2}$$

일 때, $a_6 + a_7$의 값은? [3점]

① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32

6. 두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x) = \begin{cases} x + a & (x < -1) \\ x & (-1 \le x < 3) \\ bx - 2 & (x \ge 3) \end{cases}$$

이다. 함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a + b$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ 3 ④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

7. 닫힌구간 $[0, \pi]$에서 정의된 함수 $f(x) = -\sin 2x$가 $x = a$에서 최댓값을 갖고 $x = b$에서 최솟값을 갖는다. 곡선 $y = f(x)$ 위의 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기는? [3점]

① $\frac{1}{\pi}$ ② $\frac{2}{\pi}$ ③ $\frac{3}{\pi}$ ④ $\frac{4}{\pi}$ ⑤ $\frac{5}{\pi}$

8. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $f(5)$의 최솟값은? [3점]

(가) $f(1)=3$
(나) $1<x<5$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 5$이다.

① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25

9. 두 함수

$$f(x)=x^3-x+6, \quad g(x)=x^2+a$$

가 있다. $x\geq 0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식

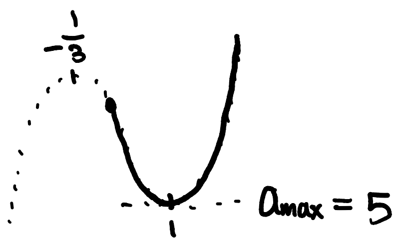
$$f(x)\geq g(x)$$

가 성립할 때, 실수 a의 최댓값은? [4점]

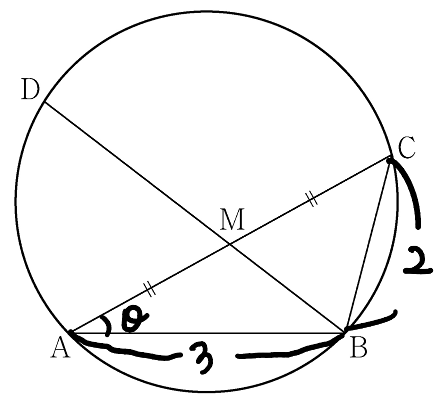
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$x^3-x+6 \geq x^2+a$

$x^3-x^2-x+6 \geq a$



10. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=2$, $\overline{AC}>3$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{7}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC의 중점을 M, 삼각형 ABC의 외접원이 직선 BM과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 D라 할 때, 선분 MD의 길이는? [4점]



① $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ ② $\frac{7\sqrt{10}}{10}$ ③ $\frac{4\sqrt{10}}{5}$ ④ $\frac{9\sqrt{10}}{10}$ ⑤ $\sqrt{10}$

AM $=k$ 라 하면

△ABC에서 코사인 법칙에 의해

$4=4k^2+9-2\cdot 2k\cdot 3\cdot\frac{7}{8}$

$4k^2-\frac{21}{2}k+5=0$

$k=2$

△ABM에서 코사인 법칙에 의해

$MB^2=4+9-2\cdot 2\cdot 3\cdot\frac{7}{8}=\frac{5}{2}$

$MB=\frac{\sqrt{10}}{2}$

$MD\cdot MB=MA\cdot MC$ 이므로

$\therefore MD=\frac{4\sqrt{10}}{5}$

모르면 초졸 수준이니 중등기하 복습 ㄱㄱ

11. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t \ge 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t) = 2 - t, \quad v_2(t) = 3t$$

이다. 출발한 시각부터 점 P가 원점으로 돌아올 때까지 점 Q가 움직인 거리는? [4점]

t_0라 하자

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

$\int_0^{t_0} v_1(t)dt = 2t_0 - \frac{1}{2}t_0^2 = 0$ 변위 $=0$

$\Rightarrow t_0 = 4$

$\int_0^{t_0} |v_2(t)|dt = \int_0^4 3t\,dt = 24$

12. 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{10}의 값은? [4점]

(가) $a_5 \times a_7 < 0$

(나) $\sum_{k=1}^{6} |a_{k+6}| = 6 + \sum_{k=1}^{6} |a_{2k}|$

① $\frac{21}{2}$ ② 11 ③ $\frac{23}{2}$ ④ 12 ⑤ $\frac{25}{2}$

$a_n = a + 3(n-1)$ 이라 하자

(가)에 의해

$a_5 \cdot a_7 < 0 \Rightarrow (a+12)\cdot(a+18) < 0 \Rightarrow -18 < a < -12$

$+$ $-$

이고 a_6 부호는 모른다

(나)를 풀어 쓰면

$|a_7| + |a_8| + \cdots + |a_{12}| = 6 + |a_2| + |a_4| + \cdots + |a_{12}|$

$a_7 + a_9 + a_{11} = 6 - a_2 - a_4 + |a_6|$ $|a_8| + |a_{10}| + |a_{12}|$ 제거

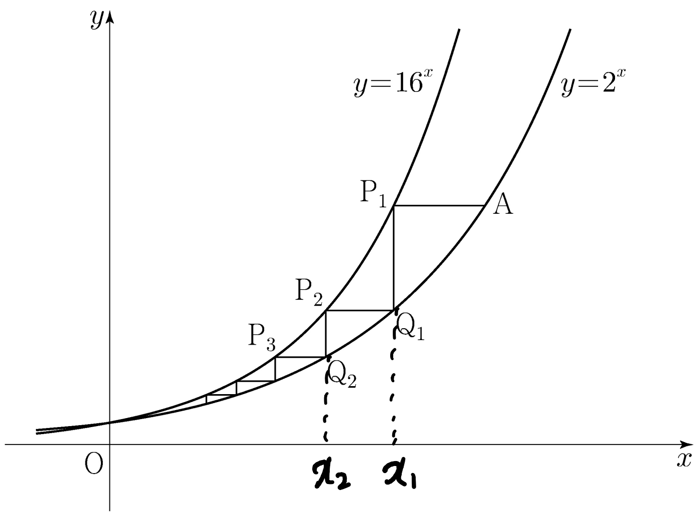
$5a + 78 = |a_6| = |a+15|$

$a = -\frac{31}{2}$

$\therefore a_{10} = -\frac{31}{2} + 27 = \frac{25}{2}$

13. 두 곡선 $y=16^x$, $y=2^x$과 한 점 $A(64,\ 2^{64})$이 있다.
점 A를 지나며 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=16^x$과 만나는 점을 P_1이라 하고, 점 P_1을 지나며 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 Q_1이라 하자.
점 Q_1을 지나며 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=16^x$과 만나는 점을 P_2라 하고, 점 P_2를 지나며 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 Q_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 두 점을 각각 P_n, Q_n이라 하고 점 Q_n의 x좌표를 x_n이라 할 때, $x_n<\frac{1}{k}$을 만족시키는 n의 최솟값이 6이 되도록 하는 자연수 k의 개수는? [4점]

① 48 ② 51 ③ 54 ④ 57 ⑤ 60



$16^{x_1}=2^{64}$
$x_1=16$

$2^{x_n}=16^{x_{n+1}}$ 이므로

$x_{n+1}=\frac{1}{4}x_n \Rightarrow x_n=16\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$x_6<\frac{1}{k}$ 이고 $x_5\ge\frac{1}{k}$ 이므로

$\frac{1}{64}<\frac{1}{k}\le\frac{1}{16} \Rightarrow 16\le k<64$

14. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases} -\int_0^x f(t)\,dt & (x<0) \\ \int_0^x f(t)\,dt & (x\ge 0)\end{cases}$$

을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

$$g'(x)=\begin{cases} -f(x) & (x<0) \\ f(x) & (x\ge 0)\end{cases}$$

가 이차함수라고 보는 게 편하다.
도함수는 유일하기 때문이다.

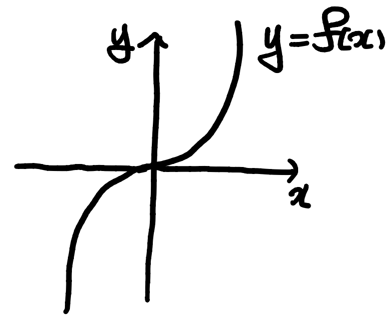
<보 기>
ㄱ. $f(0)=0$
ㄴ. 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖는다.
ㄷ. $2<f(1)<4$일 때, 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

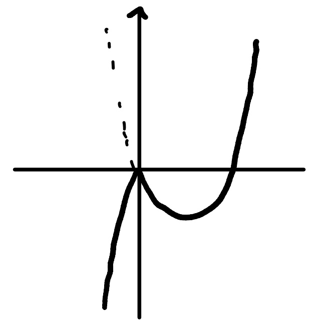
<참고>
다항함수는 C^∞ 함수
$\Rightarrow$ n계도함수가 연속
$n\in\mathbb{N}$

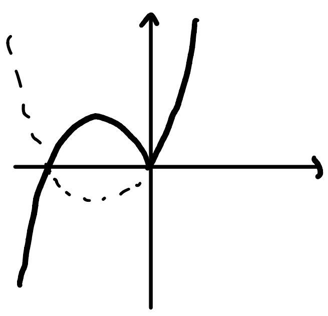
ㄱ. 다항함수의 도함수는 연속이므로
$-f(0)=f(0)=0$

ㄴ. $g'(x)$가 최고차항이 3인 이차함수려면

i) 

이렇게 생겨먹어도 되고,

이렇게 생겨 먹어도 되고  ii)

iii) 
이래도 되는데
얘 말고는 극대가 없어서
ㄴ이 참인 명제는 아니다.

ㄷ. i)은 뭔 짓을 하든 3개
$g'(x)=3x(x-\alpha)$라 하면
$f(1)=g'(1)=3-3\alpha \Rightarrow -\frac{1}{3}<\alpha<\frac{1}{3}$
$f'(0)=-3\alpha \Rightarrow -1<-3\alpha<1$
ii), iii)도 교점이 3개다 그려보길 바람 (자리 부족)

15. 자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> $a_1 = 0$이고, 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + \dfrac{1}{k+1} & (a_n \le 0) \\ a_n - \dfrac{1}{k} & (a_n > 0) \end{cases}$$
>
> 이다.

정보가 없으니 일단 써본다

$a_{22} = 0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은? [4점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

$0,\ \underbrace{\frac{1}{k+1}}_{>0},\ \underbrace{\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}}_{<0},\ \frac{2}{k+1}-\frac{1}{k},\ \begin{cases} k>1: \frac{2}{k+1}-\frac{2}{k},\ \frac{3}{k+1}-\frac{2}{k} \begin{cases} k>2 \\ k=2 \end{cases} \cdots \\ k=1: \frac{1}{k+1} \end{cases}$

여기서 패턴이 안 보이면...

0이 나오면 도르마무라

0이 나오는 주기가 k에 대하여 정해진다. ex) $k=1$ 일 때

$a_1 = a_4 = a_7 = \cdots = 0$

즉, 0이 나오는 주기가 21의 약수여야 한다.

$k=1 \Rightarrow$ 주기 3

$k=3 \Rightarrow$ 주기 7 주기는 $2k+1$ 이다

$k=10 \Rightarrow$ 주기 21

단답형

16. 방정식 $\log_2(x+2)+\log_2(x-2)=5$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=8x^3+6x^2$이고 $f(0)=-1$일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오. [3점]

18. $\sum_{k=1}^{10}(4k+a)=250$ 일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

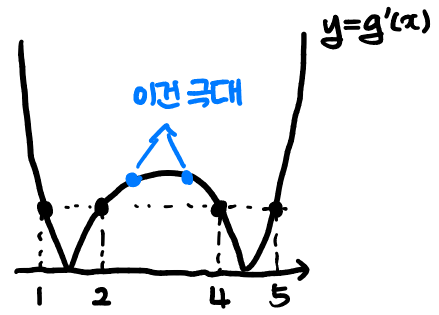
19. 함수 $f(x)=x^4+ax^2+b$는 $x=1$에서 극소이다.
함수 $f(x)$의 극댓값이 4일 때, $a+b$의 값을 구하시오.
(단, a와 b는 상수이다.) [3점]

20. 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$에 대하여
함수 $g(x)=\int_{x}^{x+1}|f(t)|dt$는 $x=1$과 $x=4$에서 극소이다.
$f(0)$의 값을 구하시오. [4점]

$g'(x)=|f(x+1)|-|f(x)|$

$|f(2)|-|f(1)|=0,$

$|f(5)|-|f(4)|=0$



극소는 도함수가
$-\to+$ 임을 기억하자

조건을 만족하는 점은
이차함수의 대칭성에 의해 함숫값이 같다.

$f(1)=f(5)$ 이므로

$f(x)=2(x-3)^2+k$

$f(1)+f(2)=0$ 이므로

$k=-5$

$\therefore f(0)=13$

21. 자연수 n에 대하여 $4\log_{64}\left(\dfrac{3}{4n+16}\right)$의 값이 정수가 되도록 하는 1000 이하의 모든 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

$4\log_{64}\left(\frac{3}{4n+16}\right) = \frac{2}{3}\log_2\left(\frac{3}{4n+16}\right) = m \in \mathbb{Z}$ 정수

$\frac{3}{4n+16} = 2^{\frac{3}{2}m}$ 에서

$\frac{3}{4n+16} < 1$ 은 유리수이므로 m은 짝수이며 음수다

$m = -2m'$, $m' \in \mathbb{N}$ 라 하자.

$\frac{3}{4n+16} = 2^{-3m'} \Rightarrow \frac{4n+16}{3} = 2^{3m'}$

$4n+16 = 3\cdot 2^{3m'} \Rightarrow n+4 = 3\cdot 2^{3m'-2}$

$\Rightarrow n = 3\cdot 2^{3m'-2} - 4$

$m'=1 \Rightarrow n=2$

$m'=2 \Rightarrow n=44$

$m'=3 \Rightarrow n=380$ 대략 8배 커지므로 이게 끝

$\therefore 2+44+380 = 426$

22. 두 양수 a, $b\,(b>3)$과 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} (x+3)f(x) & (x<0) \\ (x+a)f(x-b) & (x \geq 0) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킬 때, $g(4)$의 값을 구하시오. [4점]

> $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|}{(x+3)^2}$ 의 값이 존재하지 않는 실수 t의 값은 -3과 6뿐이다.

유리화하면

$\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{|g(x)|}{(x+3)^2\left(\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\right)}$ 이고

$t=-3, 6$ 일 때를 제외하면 극한이 존재하므로

$f(-3)=0$ 이어야 한다. → 극한의 존재는 분모의 영향 ⇒ $(x+3)^2$, 즉 0^2 상쇄해야함

극한을 살펴보면

$g(t)=0$ 이면 발산하고

$g(t)\neq 0$ 이면 수렴함을 알 수 있다.

$f(x) = (x+3)(x-k)$ 라 하자

$g(x)=0$의 근은 $x=-3, 6$만 존재해야 한다.

$(x+a)f(x-b)=0\ (x\geq 0)$ 에서

$b-3>0$ 이므로

$b-3=b+k=6$ 또는 $b+k<0$, $b=9$

후자의 경우 $k<-3$이므로 $g(k)=0$이라 조건에 위배된다.

따라서 $k=-3$ 이고 $b=9$이다.

g 연속함수 $\Rightarrow 3f(0) = af(-b)$

$\Rightarrow 27 = a\cdot 36 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$

$\therefore g(4) = \left(4+\frac{3}{4}\right)\cdot(2)^2 = 19$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

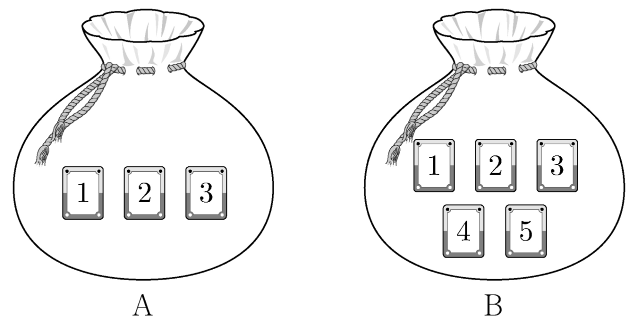
5지선다형

23. 5개의 문자 a, a, a, b, c를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32

24. 주머니 A에는 1부터 3까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 3장의 카드가 들어 있고, 주머니 B에는 1부터 5까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 5장의 카드가 들어 있다.
두 주머니 A, B에서 각각 카드를 임의로 한 장씩 꺼낼 때, 꺼낸 두 장의 카드에 적힌 수의 차가 1일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{7}{15}$ ④ $\frac{8}{15}$ ⑤ $\frac{3}{5}$



25. 수직선의 원점에 점 P가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 6의 약수이면 점 P를 양의 방향으로 1만큼 이동시키고, 6의 약수가 아니면 점 P를 이동시키지 않는다.

이 시행을 4번 반복할 때, 4번째 시행 후 점 P의 좌표가 2 이상일 확률은? [3점]

① $\frac{13}{18}$ ② $\frac{7}{9}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ $\frac{8}{9}$ ⑤ $\frac{17}{18}$

6의 약수 2회 이상

$1-\left\{{}_4C_0\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4+{}_4C_1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\right\}=\frac{8}{9}$

26. 다항식 $(x^2+1)^4(x^3+1)^n$의 전개식에서 x^5의 계수가 12일 때, x^6의 계수는? (단, n은 자연수이다.) [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

${}_4C_1\cdot x^2\cdot{}_nC_1\cdot x^3=12x^5$

$\therefore n=3$

${}_4C_3\cdot(x^2)^3+{}_nC_2\cdot(x^3)^2=7x^6$

27. 네 문자 a, b, X, Y 중에서 중복을 허락하여 6개를 택해 일렬로 나열하려고 한다. 다음 조건이 성립하도록 나열하는 경우의 수는? [3점]

> (가) 양 끝 모두에 대문자가 나온다.
> (나) a는 한 번만 나온다.

① 384 ② 408 ③ 432 ④ 456 ⑤ 480

1 2 3 4 5 6

$_2C_1 \times {_4C_1} \times 3^3 \times {_2C_1}$

a 자리선택 나머지 자리 문자 선택

$2 \times 4 \times 27 \times 2 = 432$

28. 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 서로 다른 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 네 자리의 자연수 중에서 임의로 하나의 수를 택할 때, 택한 수가 5의 배수 또는 3500 이상일 확률은? [4점]

① $\frac{9}{20}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{11}{20}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{13}{20}$

여사건

$1\times\times\times \Rightarrow {_3C_1} \times {_3P_2} = 18$

1의 자리 5 제외 나머지

$2\times\times\times \Rightarrow 18$ 똑같음

$3\times\times\times \Rightarrow {_3P_2} \times {_2C_1} = 12$

100, 1의 자리 5 제외 10의 자리

$1 - \frac{18+18+12}{_5P_4} = 1 - \frac{48}{120} = \frac{3}{5}$

단답형

29. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) $f(f(1))=4$
>
> (나) $f(1) \le f(3) \le f(5)$

i) $f(1)=2,\ f(2)=4$ $f(1)=1,\ f(1)=5$는 불가능

$5 \times {}_4H_2 = 50$

$f(4)$ 선택 $f(3), f(5)$ 선택

ii) $f(1)=3,\ f(3)=4$

$5^2 \times {}_2C_1 = 50$

$f(2), f(4)$ 선택 $f(5)=4$ or 5

iii) $f(1)=4,\ f(4)=4$

$5 \times {}_2H_2 = 15$

$f(2)$ 선택 $f(3), f(5)$ 선택

$\therefore 115$

30. 주머니에 1부터 12까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있는 12개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 작은 수부터 크기 순서대로 a, b, c라 하자. $b-a \ge 5$일 때, $c-a \ge 10$일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

i) $b-a \ge 5$인 경우의 수

$a+5 \le b < c$

$a' = a+4$ $a' \ge 5$인 자연수

$a' < b < c$

${}_8C_3 = 56$ a'을 정하면 a도 정해진다

ii) $b-a \ge 5$이고 $c-a \ge 10$인 경우의 수

$a=1,\ c=11 \Rightarrow b=6 \sim 10$ 5

$a=1,\ c=12 \Rightarrow b=6 \sim 11$ 6

$a=2,\ c=12 \Rightarrow b=7 \sim 11$ 5

$\frac{q}{p} = \frac{16}{56} = \frac{2}{7}$

$\therefore p+q=9$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.