◆ 문항카드7 (자연계열(오전)_1번 문항)

[한양대학교(서울) 문항정보]

1. 일반 정보

유형		■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사
전형명		논술 전형
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호		자연계열(오전)(수학) / 문제 1번
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 미적분, 기하
	핵심개념 및 용어	평면, 이면각, 정사영, 두 직선의 위치관계, 삼각함수, 삼수선의 정리, 삼각함수의 덧셈정리
예상 소요 시간		45분

2. 문항 및 제시문

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

공간에서 두 평면 α와 β의 교선을 l이라 하고, 두 평면이 이루는 각의 크기를 $\theta\,(0<\theta<\frac{\pi}{2})$라고 하자.

1. 평면 α 위에 삼각형 ABC가 있다. $\overline{AB}=\overline{AC}=1$이고 각 A는 직각이며 선분 BC는 직선 l과 평행할 때, 선분 AB의 평면 β 위로의 정사영의 길이를 구하시오.

2. 평면 α 위에 점 P와 Q가 있다. $\overline{PQ}=1$이고 직선 PQ가 직선 l과 이루는 각의 크기를 t라고 할 때, 선분 PQ의 평면 β 위로의 정사영의 길이를 구하시오.

3. 평면 α 위에 한 변의 길이가 1인 정삼각형 RST가 있고 이 삼각형의 평면 β 위로의 정사영을 삼각형 R′S′T′이라고 하자. $\cos\theta=\frac{3}{\pi}$일 때, $\overline{R'S'}^2+\overline{S'T'}^2+\overline{T'R'}^2$의 값을 구하시오.

3. 출제 의도

자연계열 오전 [문제 1]은 고등학교에서 고교과정의 수학을 정상적으로 이수한 학생이라면 충분히 해결할 수 있는 문제들로 구성되었으며, 모든 교과서에서 공통으로 다루는 내용을 바탕으로 출제되었다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2015-74호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취기준
문제 1-1	수학I - (2) 삼각함수 - ② 수열의 합 - ① 삼각함수 [12수학Ⅰ02-01] 일반각과 호도법의 뜻을 안다. 기하 - (3) 공간도형과 공간좌표 - ① 공간도형 [12기하03-03] 정사영의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.
문제 1-2	기하 - (3) 공간도형과 공간좌표 - ① 공간도형 [12기하03-02] 삼수선의 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 기하 - (3) 공간도형과 공간좌표 - ① 공간도형 [12기하03-03] 정사영의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.
문제 1-3	미적분 - (2) 미분법 - ① 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다. 기하 - (3) 공간도형과 공간좌표 - ① 공간도형 [12기하03-03] 정사영의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학I	김원경 외	비상	2018	65~92
	기하	황선욱 외	미래엔	2019	133~134
	기하	김원경 외	비상	2018	118~119
	미적분	고성은 외	신사고	2018	58~62
	미적분	황선욱 외	미래엔	2019	63~67

5. 문항 해설

문항1. 교선과 이루는 각도가 45도 인 선분의 정사영의 길이를 직각 이등변 삼각형을 이용하여 구하도록 묻고 있다. cosine의 정의를 이용하여 구할 수 있다.

문항2. 선분의 정사영의 길이를 구하는 문제이다. 문항1에서 좀 더 일반화된 문제로 직각 삼각형을 이용하여 구할 수 있다.

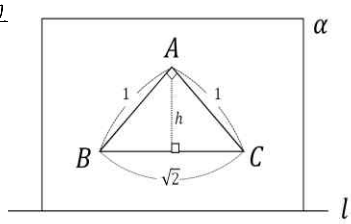
문항3. 정삼각형의 정사영의 변들의 길이의 합을 구하는 문제이다. 문항 2에서 얻어진 결과와 삼각함수 덧셈정리를 이용하여 구할 수 있다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준		배점
1	선분 $\mathrm{A'B'}$의 길이를 정확히 구했는가?	10	30
	길이를 구하는 과정이 명료하게 기술되었는가?	20	
2	선분 $\mathrm{A'B'}$의 길이를 정확히 구했는가?	10	30
	길이를 구하는 과정이 명료하게 기술되었는가?	20	
3	삼각형의 정사영의 변들의 제곱의 합을 정확히 구했는가?	10	40
	요구한 값을 구하는 과정이 타당한가?	30	

7. 예시 답안 혹은 정답

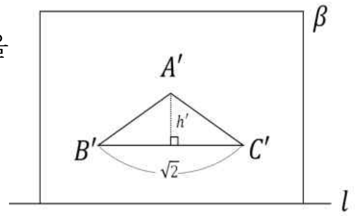
1.삼각형 ABC의 평면 β로의 정사영을 $\mathrm{A'B'C'}$이라고 하고 h와 h'을 각각 삼각형 ABC와 $\mathrm{A'B'C'}$의 높이라고 하면



$h=$ (삼각형ABC의높이) $= \sin 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$h' =$ (삼각형$\mathrm{A'B'C'}$의높이) $= h \cdot \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta$

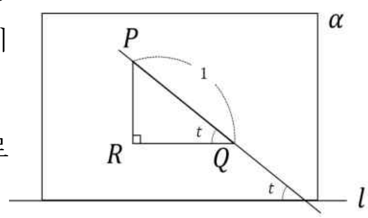
$\overline{\mathrm{A'B'}} = \sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos^2\theta} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+\cos^2\theta}$ 이다.



2. 선분 PQ를 가장 긴 변으로 하고 다음과 같은 성질을 만족하는 평면 α위의 직각삼각형 PRQ를 생각한다.

- 직선 PR과 직선 l은 수직이다.
- 직선 RQ와 직선 l은 평행이다.

이 때, $\angle \mathrm{Q}=t$, $\overline{\mathrm{PR}}=\sin t$, $\overline{\mathrm{RQ}}=\cos t$이다. 삼각형 PQR의 평면 β위로의 정사영을 $\mathrm{P'Q'R'}$이라고 하면 이 삼각형은 $\angle \mathrm{R'}=90^\circ$인 직각삼각형이다. 따라서

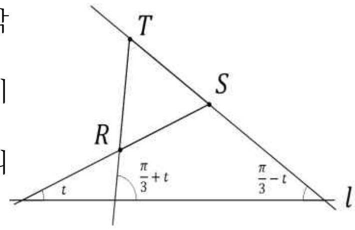


$\overline{\mathrm{P'R'}}=\sin t\cos\theta$, $\overline{\mathrm{R'Q'}}=\cos t$이므로

$\overline{\mathrm{P'Q'}}=\sqrt{\sin^2 t\cos^2\theta+\cos^2 t}$ 이다.

3. 점 R, S, T중 직선 l에 가장 가까운 점을 R이라고 하자. 이제 직선 RS가 직선 l과

이루는 각을 t라고 하면 직선 TS가 직선 l과 이루는 각은 $\dfrac{\pi}{3}-t$이고, 직선 RT가 직선 l과 이루는 각은 $\dfrac{\pi}{3}+t$이다. 문제 2의 식을 적용하면 삼각형 R′S′T′의 각 변의 길이의 제곱은 다음과 같다.



$$\overline{\mathrm{R'S'}}^2=\sin^2 t\cos^2\theta+\cos^2 t$$

$$\overline{\mathrm{T'S'}}^2=\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-t\right)\cos^2\theta+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-t\right)$$
$$=\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos t-\cos\frac{\pi}{3}\sin t\right)^2\cos^2\theta+\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos t+\sin\frac{\pi}{3}\sin t\right)^2$$

$$\overline{\mathrm{R'T'}}^2=\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+t\right)\cos^2\theta+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+t\right)$$
$$=\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos t+\cos\frac{\pi}{3}\sin t\right)^2\cos^2\theta+\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos t-\sin\frac{\pi}{3}\sin t\right)^2$$

이 세 값을 더하면

$\overline{\mathrm{R'S'}}^2+\overline{\mathrm{T'S'}}^2+\overline{\mathrm{R'T'}}^2=\dfrac{3}{2}\cos^2\theta+\dfrac{3}{2}$이다.

$\cos\theta=\dfrac{3}{\pi}$을 대입하면 답은 $\dfrac{3}{2}\times\left(\dfrac{3}{\pi}\right)^2+\dfrac{3}{2}=\dfrac{27+3\pi^2}{2\pi^2}$ 이다.

◆ 문항카드8 (자연계열(오전)_2번 문항)

[한양대학교(서울) 문항정보]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(오전)(수학) / 문제 2번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 확률과 통계, 미적분
	핵심개념 및 용어	표본평균의 분포, 정규분포, 로그함수의 미분법, 함수의 몫의 미분법, 도함수의 활용, 함수의 증가와 감소, 삼각함수의 극한
예상 소요 시간	45분	

2. 문항 및 제시문

[문제 2] 다음 물음에 답하시오. (50점)

1. 주머니에 숫자 1, 2, 3이 각각 적힌 카드 3장이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 한 장의 카드를 꺼내어 숫자를 확인한 후 다시 주머니에 넣는 시행을 54회 반복할 때, 꺼낸 카드에 적힌 수의 평균을 $\overline{X}$라 하자. 이때 표본평균 $\overline{X}$는 근사적으로 정규분포를 따른다. $-2\overline{X}$의 평균과 분산을 구하고, $\mathrm{P}\left(-2\overline{X} \geq -\frac{11}{3}\right)$의 값을 구하시오.

(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 0.5)=0.1915$, $\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1)=0.3413$, $\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1.5)=0.4332$, $\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 2)=0.4772$로 계산한다.)

2. 함수 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$를 이용하여 $a^b=b^a$을 만족시키는 서로 다른 양의 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)를 모두 구하시오.

3. $n \geq 3$인 자연수 n에 대하여 둘레의 길이가 1인 정 n각형의 넓이를 $f(n)$이라 하자. $f(12)$의 값을 구하고, $\lim_{n \to \infty} f(n)$의 값을 구하시오.

3. 출제 의도

자연계열 오전 [문제 2]는 고등학교에서 고교과정의 수학을 정상적으로 이수한 학생이라면 충분히 해결할 수 있는 문제들로 구성되었으며, 모든 교과서에서 공통으로 다루

는 내용을 바탕으로 출제되었다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2015-74호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취기준
문제 2-1	확률과 통계 - (3) 통계 - 1 확률분포 [12확통03-04] 정규분포의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다. 확률과 통계 - (3) 통계 - 2 통계적 추정 [12확통03-06] 표본평균과 모평균의 관계를 이해하고 설명할 수 있다.
문제 2-2	미적분 - (2) 미분법 - 2 여러 가지 미분법 [12미적02-06] 함수의 몫을 미분할 수 있다. 미적분 - (2) 미분법 - 3 도함수의 활용 [12미적02-13] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.
문제 2-3	수학I - (2) 삼각함수 - 2 수열의 합 - 1 삼각함수 [12수학 I 02-01] 일반각과 호도법의 뜻을 안다. 미적분 - (2) 미분법 - 1 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-04] 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학I	김원경 외	비상	2018	65~92
	미적분	류희찬 외	천재교과서	2019	68~138
	미적분	황선욱 외	미래엔	2019	63~67
	확률과 통계	황선욱 외	미래엔	2019	103~132
	미적분	황선욱 외	미래엔	2019	63~67

5. 문항 해설

문항1. 주어진 상황을 잘 파악하여 표본평균에 대한 식의 평균, 분산을 통해 표준정규분포를 활용하여 확률을 구할 수 있는지 묻고 있다.

문항2. 함수 $f(x)$의 성질과 e의 근사적 값을 이용하여 주어진 문제를 해결할 수 있는가를 묻고 있다.

문항3. 평면도형에 대한 기본적인 지식을 바탕으로 “수학I - 삼각함수- 삼각함수의 활용” 단원과 “미적분-미분법-여러 가지 함수의 미분” 단원의 삼각함수와 그 극한에 대한 다양한 지식과 성질을 적절히 활용하여, 주어진 극한값을 구할 수 있는가를 묻고 있다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점	
1	$-2\overline{X}$의 평균과 분산을 구했는가?	15	30
	표준정규분포를 활용하여 확률을 제대로 계산했는가?	15	
2	$f(x)$의 도함수를 이용하여 $f(x)$가 증가와 감소하는 구간을 구했는가?	15	40
	$f(x)$의 성질과 e의 근사적 값을 알고 가능한 경우의 수를 알아냈는가?	15	
	순서쌍 (a,b)의 모든 가능한 값 $(2,4),(4,2)$를 정확한 근거와 함께 모두 구했는가?	10	
3	$f(12)$의 값을 구했는가?	20	30
	극한값 $\lim_{n\to\infty} f(n)$을 구했는가?	10	

7. 예시 답안 혹은 정답

1. 꺼낸 카드에 적힌 수를 X라고 할 때, 표본평균 $\overline{X}$의 평균과 분산은 다음과 같이 계산된다.

$$\mathrm{E}(X)=\frac{1+2+3}{3}=2=\mathrm{E}(\overline{X}),\ \mathrm{V}(X)=\frac{(1-2)^2+(2-2)^2+(3-2)^2}{3}=\frac{2}{3},\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{54}=\frac{1}{81}$$

$n=54$가 충분히 크기 때문에 표본평균 $\overline{X}$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(2,1/81)$을 따른다. $\mathrm{E}(-2\overline{X})=-2\mathrm{E}(\overline{X})=-4,\quad \mathrm{V}(-2\overline{X})=(-2)^2\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{4}{81}$

즉, $-2\overline{X}$의 평균과 분산은 각각 -4와 $4/81$이므로 확률변수 $Z=\dfrac{-2\overline{X}+4}{\sqrt{4/81}}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,1)$을 따른다. 따라서 구하는 확률은

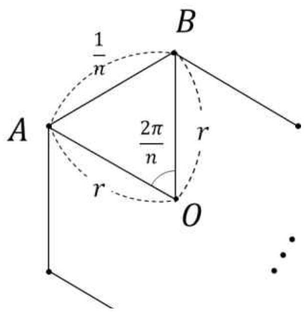
$$\mathrm{P}\left(-2\overline{X}\geq-\frac{11}{3}\right)=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{-11/3+4}{2/9}\right)=P(Z\geq 1.5)=1-\mathrm{P}(Z\leq 1.5)=0.0668$$이 된다.

2. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$를 미분하면 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$를 얻는다. 따라서 $f'(e)=0$이고, $x<e$에서 $f'(x)>0$, $x>e$에서 $f'(x)<0$임을 알 수 있다. 만일 $a<b$인 순서쌍 (a,b)가

$a^b = b^a$를 만족한다면 $\frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b}$, 즉 $f(a) = f(b)$가 성립한다. 여기서 $f(x)$가 $x < e$에서는 증가, $x > e$에서는 감소하므로, 만일 $e < a < b$ 라면 $f(a) > f(b)$, $a < b < e$라면 $f(a) < f(b)$가 되어 $f(a) = f(b)$가 불가능하다.

따라서 $a < e < b$여야만 $f(a) = f(b)$를 얻을 수 있다. 여기서 무리수 $e = 2.71...$이므로 이보다 작은 양의 정수 a는 1 또는 2여야만 하는데, 모든 $b > e$에 대해 $f(1) = 0 < f(b)$이므로 $a = 1$일수는 없다. 만일 $a = 2$라면 양의 정수 b또한 2의 제곱꼴이 되고, $b = 4$가 $a^b = b^a$를 만족함을 알 수 있다. 역시 4보다 큰 값 b'에 대해서는 $f(2) = f(4) > f(b')$이므로, $b = 4$가 $f(2) = f(b)$를 만족하는 유일한 값이다. 우리가 앞서 $a < b$를 가정했으나 대칭적으로 $b < a$ 또한 가능하고, 따라서 모든 양의 정수 순서쌍 (a,b)는 $(2,4),(4,2)$가 된다.

3. 점 O를 정 n각형의 외접원의 중심, 점 A, B를 정 n각형의 이웃한 두 꼭짓점이라고 하자. 삼각형 OAB에서



$\left(\frac{1}{n}\right)^2 = 2r^2 - 2r^2\cos\frac{2\pi}{n}$, $\quad r^2 = \frac{1}{2n^2\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)}$ 이므로

$\triangle \mathrm{OAB} = \frac{1}{2}r^2\sin\frac{2\pi}{n} = \frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{4n^2\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)}$ 이므로 정 n각형의 넓이 $f(n)$은

$f(n) = n \times \triangle \mathrm{OAB} = \frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{4n\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)}$ 이다. 따라서

$f(12) = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{48\left(1-\cos\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{48(2-\sqrt{3})} = \frac{2+\sqrt{3}}{48}$ 이고,

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{4n\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n}\cdot\frac{1+\cos\frac{2\pi}{n}}{\sin\frac{2\pi}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n}\cdot\frac{\frac{2\pi}{n}}{\sin\frac{2\pi}{n}}\cdot\frac{1+\cos\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} = \frac{1}{4\pi}$$

이다.

◆ 문항카드9 (자연계열(오후1)_1번 문항)

[한양대학교(서울) 문항정보]

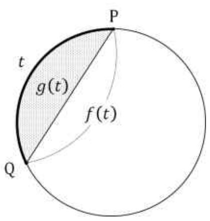
1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(오후1)(수학) / 문제 1번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅰ, 미적분
	핵심개념 및 용어	사인법칙과 코사인법칙, 삼각함수의 극한, 정적분과 급수의 합 사이의 관계, 치환적분법, 부분적분법
예상 소요 시간	45분	

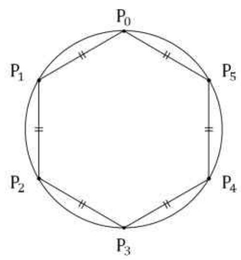
2. 문항 및 제시문

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

<가> 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원 위의 두 점 P, Q를 잇는 한 호 PQ의 길이를 t라고 할 때, 현 PQ의 길이를 $f(t)$, 현 PQ와 길이가 t인 호 PQ로 둘러싸인 도형의 넓이를 $g(t)$라고 하자.



<나> 반지름의 길이가 1인 원 위에 서로 다른 n개의 점 P_0, P_1, $\cdots$, P_{n-1}이 순서대로 놓여 있고, $\overline{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1} = \overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2} = \cdots = \overline{\mathrm{P}_{n-2}\mathrm{P}_{n-1}} = \overline{\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_0}$을 만족시킨다. 예를 들어, 오른쪽 그림은 $n=6$인 경우이다.



1. 제시문 <가>에서 주어진 식 $f(t)$, $g(t)$에 대하여 극한값 $\lim\limits_{t \to 0+} \dfrac{g(t)}{f(t)}$를 구하시오.

2. 제시문 <나>에서 주어진 n개의 점 P_0, P_1, $\cdots$, P_{n-1}에 대하여 극한값

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\overline{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1} + \overline{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2} + \cdots + \overline{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_{n-1}}}{n}$$

을 구하시오.

3. 제시문 <나>에서 주어진 n개의 점 P_0, P_1, $\cdots$, P_{n-1}에 대하여 호 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$과 현 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1, 호 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2$와 현 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2, $\cdots$, 호 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_{n-1}$과 현 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_{n-1}$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_{n-1}이라 하자. 극한값

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_1^2+S_2^2+\cdots+S_{n-1}^2}{n}$$

을 구하시오. (단, $S_1 < S_2 < \cdots < S_{n-1}$이 되도록 호를 선택한다.)

3. 출제 의도

자연계열 오후(1)의 [문제 1]은 고교수학과정 중 “미적분-미분법-여러 가지 함수의 미분” 단원의 삼각함수의 극한과 “미적분-적분법-정적분의 활용” 단원의 정적분과 급수의 합 사이의 관계, “미적분-적분법-여러 가지 적분법” 단원의 치환적분법, 부분적분법을 주요 내용으로 하고 있다. 도형의 성질을 잘 이해하고 활용하기 위한 중요한 도구인 삼각함수와 미적분의 관련 지식을 적절히 활용해서 주요 평면도형인 원이 갖고 있는 중요한 성질들을 분석하고, 정확한 논증을 통해 원하는 결과를 도출할 수 있는지를 묻고 있다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2015-74호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	**학습내용 성취기준**
문제 1-1	수학Ⅰ - (2) 삼각함수 - ① 삼각함수 [12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 미적분 - (2) 미분법 - ① 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-04] 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.
문제 1-2	미적분 - (3) 적분법 - ② 정적분의 활용 [12미적03-04] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다. 미적분 - (3) 적분법 - ① 여러 가지 적분법 [12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문제 1-3	미적분 - (3) 적분법 - ② 정적분의 활용 [12미적03-04] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다. 미적분 - (3) 적분법 - ① 여러 가지 적분법 [12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 I	이준열 외	천재교육	2018	97~111
	미적분	황선욱 외	미래엔	2019	71~74, 161~164
	미적분	고성은 외	좋은책 신사고	2019	132~136, 137~139

5. 문항 해설

문항 1. 호와 현에 대한 정보를 분석하고, 삼각함수의 극한을 구하는 도구를 적절히 활용하기

문항 2. 원의 성질에 대한 이해를 바탕으로 주어진 무한급수를 적당한 정적분으로 변환하고, 치환적분법 등의 기술을 적절히 활용하여 정적분의 값을 구하기

문항 3. 주어진 무한급수를 적당한 정적분으로 변환하고, 부분적분법 등의 기술을 적절히 활용하여 정적분의 값을 구하기

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점	
1	현 PQ의 길이 $f(t)$와 현 PQ와 호 PQ로 둘러싸인 도형의 넓이 $g(t)$를 구했는가?	20	30
	삼각함수의 극한에 대한 성질을 활용해서 $\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{g(t)}{f(t)}$를 구했는가?	10	
2	무한급수 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\overline{\mathrm{P_0P_1}}+\overline{\mathrm{P_0P_2}}+\cdots+\overline{\mathrm{P_0P_{n-1}}}}{n}$를 적당한 정적분의 식으로 변환하였는가?	20	30
	정적분의 값을 구했는가?	10	
3	무한급수 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_1^2+S_2^2+\cdots+S_{n-1}^2}{n}$를 적당한 정적분의 식으로 변환하였는가?	20	40
	정적분의 값을 구했는가?	20	

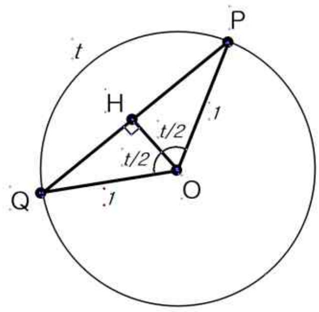
7. 예시 답안 혹은 정답

1. 오른쪽 그림에서 원의 중심 O에서 현 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$f(t) = 2\overline{\mathrm{QH}} = 2\sin\frac{t}{2}$,

$g(t) = \frac{1}{2}\times 1^2 \times t - \frac{1}{2}\times 1^2 \times \sin t = \frac{1}{2}(t - \sin t)$

이므로

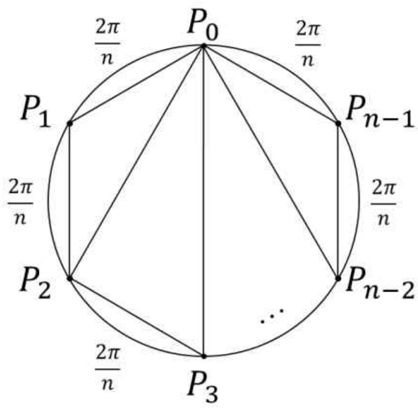


$$\lim_{t\to 0+}\frac{g(t)}{f(t)} = \lim_{t\to 0+}\frac{\frac{1}{2}(t-\sin t)}{2\sin\frac{t}{2}} = \lim_{t\to 0+}\frac{1}{2}\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right) = \frac{1}{2}\times 1\times(1-1) = 0$$

2. 1번에서 구한 $f(t)$에 대하여,

$\overline{P_0P_1} = f\left(\frac{2\pi}{n}\right)$, $\overline{P_0P_2} = f\left(\frac{2\pi}{n}\cdot 2\right)$, $\cdots$, $\overline{P_0P_{n-1}} = f\left(\frac{2\pi}{n}\cdot(n-1)\right)$이고,

$f\left(\frac{2\pi}{n}\cdot n\right) = f(2\pi) = 0$이므로,



$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{P_0P_1}+\cdots+\overline{P_0P_{n-1}}}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{2\pi}{n}\cdot k\right)\frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{2\pi}{n}\cdot k\right)\frac{1}{n} + f\left(\frac{2\pi}{n}\cdot n\right)\frac{1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2\pi}{n}\cdot k\right)\frac{1}{n}$$

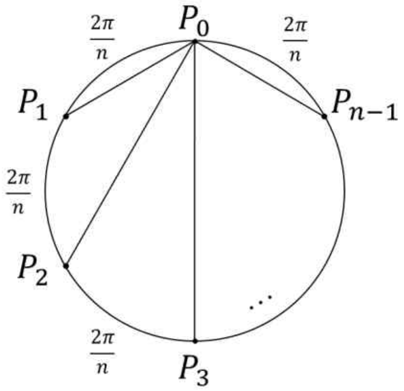
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(0+\frac{2\pi-0}{n}\cdot k\right)\frac{2\pi-0}{n}\cdot\frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt$$

이고, $f(t) = 2\sin\frac{t}{2}$ 이므로, $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt = \frac{4}{\pi}$.

3. 1번에서 구한 $g(t)$에 대하여,

$S_1 = g\left(\frac{2\pi}{n}\right)$, $S_2 = g\left(\frac{2\pi}{n}\cdot 2\right)$, $\cdots$, $S_{n-1} = g\left(\frac{2\pi}{n}\cdot(n-1)\right)$ 이고,

$g\left(\frac{2\pi}{n}\cdot n\right) = g(2\pi) = \pi$이므로,



$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_1^2+\cdots+S_{n-1}^2}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(g\left(\frac{2\pi}{n}\cdot k\right)\right)^2\frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(g\left(\frac{2\pi}{n}\cdot k\right)\right)^2\frac{1}{n}-\left(g\left(\frac{2\pi}{n}\cdot n\right)\right)^2\frac{1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(g\left(0+\frac{2\pi-0}{n}\cdot k\right)\right)^2\frac{2\pi-0}{n}\cdot\frac{1}{2\pi}\right)-\lim_{n\to\infty}\frac{\pi^2}{n}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(g(t))^2dt - 0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}(t-\sin t)\right)^2dt$$

$$= \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}\left(t^2-2t\sin t+\sin^2 t\right)dt$$ 이다.

부분적분에 의해

$\int t\sin t\,dt = -t\cos t + \sin t + C_1$, $\int \sin^2 t\,dt = \frac{1}{2}(t-\cos t\sin t) + C_2$

를 구하고, 따라서

$$\begin{aligned}\frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}\left(t^2-2t\sin t+\sin^2 t\right)dt &= \frac{1}{8\pi}\left[\frac{1}{3}t^3-2(-t\cos t+\sin t)+\frac{1}{2}(t-\cos t\sin t)\right]_0^{2\pi}\\ &= \frac{1}{8\pi}\left(\frac{8}{3}\pi^3+5\pi\right) = \frac{\pi^2}{3}+\frac{5}{8}\end{aligned}$$

◆ 문항카드10 (자연계열(오후1)_2번 문항)

[한양대학교(서울) 문항정보]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(오후1)(수학) / 문제 2번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅱ, 확률과 통계, 미적분, 기하
	핵심개념 및 용어	확률의 덧셈정리, 곱셈정리, 확률변수, 이산 확률 변수의 기댓값, 타원(장축, 단축), 접선의 방정식, 점과 직선사이의 거리, 합성함수 미분법, 부정적분, 정적분, 부분적분법
예상 소요 시간	45분	

2. 문항 및 제시문

[문제 2] 다음 물음에 답하시오. (50점)

1. 두 팀 A와 B가 배구 시합을 반복하여 어느 한 팀이 3승을 거두면 우승팀으로 결정된다. 각 시합은 팀 A가 승리할 확률이 p인 독립시행이고 무승부는 없다고 가정할 때, 우승팀이 결정될 때까지 실시한 시합 횟수의 기댓값을 p에 대한 식으로 나타내시오.

2. 장축의 길이가 6, 단축의 길이가 4인 타원이 있다. 네 변이 각각 이 타원에 접하는 직사각형의 한 변의 길이가 $2\sqrt{5}$일 때, 이 직사각형의 넓이를 구하시오.

3. 실수 전체의 범위에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 임의의 양수 a에 대하여 $\int_{-a}^{a}(a-|x|)f'(x)dx=0$을 만족시킨다. 이때 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$가 성립함을 보이시오.

3. 출제 의도

자연계열 오후(1) [문제 2]는 고등학교에서 고교과정의 수학을 정상적으로 이수한 학생이라면 충분히 해결할 수 있는 문제들로 구성되었으며, 모든 교과서에서 공통으로 다루는 내용을 바탕으로 출제되었다. 3개의 소문항으로 구성되어 있다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2015-74호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	**학습내용 성취기준**
문제 2-1	확률과 통계 - (2) 확률 - 1 확률의 뜻과 활용 [12확통02-03] 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 확률과 통계 - (2) 확률 - 2 조건부확률 [12확통02-06] 사건의 독립과 종속의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있다. [12확통02-07] 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 확률과 통계 - (3) 통계 - 1 확률분포 [12확통03-01] 확률변수와 확률분포의 뜻을 안다. [12확통03-02] 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다.
문제 2-2	수학 - (2) 기하 - 2 직선의 방정식 [10수학02-05] 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다. 기하 - (1) 이차곡선 - 1 이차곡선 [12기하01-02] 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다. [12기하01-04] 이차곡선과 직선의 위치 관계를 이해하고, 접선의 방정식을 구할 수 있다.
문제 2-3	수학Ⅱ - (3) 적분 - 1 부정적분 [12수학Ⅱ03-01] 부정적분의 뜻을 안다. 수학Ⅱ - (3) 적분 - 2 정적분 [12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다. 미적분 - (2) 미분 - 2 여러 가지 미분법 [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다. 미적분 - (3) 적분 - 1 여러 가지 적분법 [12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	확률과 통계	황선욱	미래엔	2019	51~87
	고등학교 수학	황선욱	미래엔	2019	132
	기하	황선욱	미래엔	2019	26~33
	수학Ⅱ	황선욱	미래엔	2019	115~122
	미적분	황선욱	미래엔	2019	87~151

5. 문항 해설

문항1. 주어진 상황을 통하여 사건에 해당하는 경우와 대응되는 확률을 파악하고 기댓값을 주어진 확률에 대한 식으로 나타낼 수 있는지 묻고 있다. 확률과 통계에서 등장하는 기본적인 개념에 대한 이해도를 묻는 문제이다.

문항2. 이차곡선에 대한 기본적인 지식을 바탕으로, 주어진 도형을 좌표평면으로 적

절히 옮겨 방정식으로 변환하고 효과적으로 분석할 수 있는가를 묻고 있다. “기하-이차곡선-타원과 직선” 단원의 타원의 접선의 방정식에 대한 지식과 성질을 적절히 활용하여, 필요한 결과를 도출할 수 있는지를 평가한다.

문항3. 구간을 나누어 적분하는 방법과 부분적분법을 이용하여 함수의 성질을 분석할 수 있는가를 묻고 있다. 간단한 합성함수 미분을 통해 필요한 결과를 도출할 수 있는지 또한 평가한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점	
1	우승팀이 결정될 경우의 수와 확률을 제대로 파악했는가?	15	30
	기댓값의 정의에 따라 이를 p에 대한 식으로 표현했는가?	15	
2	타원을 좌표평면에 두어 직사각형의 각 변을 포함하는 접선의 방정식을 구했는가?	15	30
	직사각형의 각 변의 길이를 평행한 두 직선사이의 거리로 해석하고 직사각형의 넓이를 구했는가?	15	
3	구간별 부분적분을 통해 $F(x)+F(-x)=2F(0)$임을 밝혀냈는가?	20	40
	F에 관한 식을 미분해서 필요한 결론을 도출했는가?	20	

7. 예시 답안 혹은 정답

문항1. 확률변수 X를 진행한 시합 횟수라고 하자. 우승팀이 결정될 경우의 수는 팀 A의 결과가 승승승, 패패패 (시합 3회), 패승승승, 승패승승, 승승패승, 승패패패 패승패패, 패패승패 (시합 4회), 승패패승승, 승패승패승, 승승패패승, 패승패승승, 패승승패승, 패패승승승, 승승패패패, 승패승패패, 승패패승패, 패승승패패, 패승패승패, 패패승승패 (시합 5회) 총 20가지이다. 따라서 기댓값은 다음과 같다.

$$E(X)=3[p^3+(1-p)^3]+4[3p^3(1-p)+3p(1-p)^3]+5[6p^3(1-p)^2+6p^2(1-p)^3]$$

이 기댓값 p의 함수는 $6p^4-12p^3+3p^2+3p+3$이다.

문항2. 타원을 좌표평면에 두어 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 이라 하자.

직사각형의 한 변을 포함하는 접선의 기울기를 m이라 하자.

먼저 $m=0$ 이면, 직사각형의 변의 길이는 6또는 4이고 $2\sqrt{5}$가 아니므로

$m\neq 0$ 임을 알 수 있다. 기울기 $m(\neq 0)$인 직선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{m}$

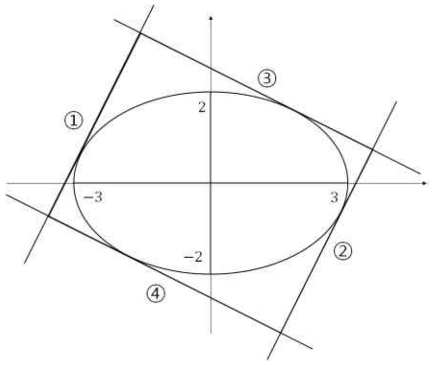
이므로, 직사각형의 네 변은 각각 다음의 접선에 포함된다.

① $y=mx+\sqrt{9m^2+4}$

② $y=mx-\sqrt{9m^2+4}$

③ $y=-\dfrac{1}{m}x+\sqrt{\dfrac{9}{m^2}+4}$

④ $y=-\dfrac{1}{m}x-\sqrt{\dfrac{9}{m^2}+4}$



직선 ①과 ②사이의 거리를 a이라고 하고, 직선 ③과 ④사이의 거리를 b라고 하면,

$a=2\sqrt{\dfrac{9m^2+4}{m^2+1}}$, $b=2\sqrt{\dfrac{9+4m^2}{1+m^2}}$ 이고, a와 b 둘 중 하나가 $2\sqrt{5}$이다.

$a=2\sqrt{5}$이면 $m=\pm\dfrac{1}{2}$이고 따라서 $b=4\sqrt{2}$이다. $b=2\sqrt{5}$이면 $m=\pm 2$이고 따라서 $a=4\sqrt{2}$이다.

두 경우 모두 직사각형의 넓이는 $ab=8\sqrt{10}$ 이다.

문항3. $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하자. 구간 $[-a,a]$를 $[-a,0]$과 $[0,a]$로 나누어 각각 부분적분하면

$$\int_0^a (a-x)f'(x)dx=\Big[(a-x)f(x)\Big]_0^a+\int_0^a f(x)dx=F(a)-F(0)-af(0),$$

$$\int_{-a}^0 (a+x)f'(x)dx=\Big[(a+x)f(x)\Big]_{-a}^0-\int_{-a}^0 f(x)dx=F(-a)-F(0)+af(0)$$

를 얻는다. 이를 합하면 $\int_{-a}^a (a-|x|)f'(x)dx=F(a)+F(-a)-2F(0)$이 되고, 따라서 주어진 조건에 의해 모든 $x\ge 0$에 대해 $F(x)=-F(-x)+2F(0)$임을 알 수 있다. 여기서 양변을 x에 대해 미분하면 $f(x)=f(-x)$가 모든 $x>0$에 대해 성립한다. $x=0$인 경우에는 당연히 $f(x)=f(-x)$이고, $x<0$인 경우에도 대칭성에 의해 $f(x)=f(-(-x))=f(-x)$임을 알 수 있다. 따라서 모든 x에 대해 $f(x)=f(-x)$가 성립한다.

◆ 문항카드11 (자연계열(오후2)_1번 문항)

[한양대학교(서울) 문항정보]

1. 일반 정보

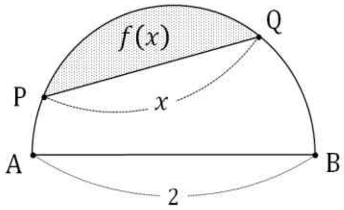
유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(오후2)(수학) / 문제 1번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅰ, 수학Ⅱ, 확률과 통계, 미적분
	핵심개념 및 용어	등비수열의 합, 확률분포, 매개변수로 나타낸 함수의 미분법, 합성함수의 미분법, 평균값의 정리, 이계도함수
예상 소요 시간	45분	

2. 문항 및 제시문

[문제 1] 다음 물음에 답하시오. (50점)

1. 한 개의 동전을 같은 면이 연속으로 두 번 나올 때까지 반복하여 던지되, 최대 3000번까지만 던질 수 있다. 이때 동전을 던진 횟수가 2022 이하일 확률을 구하시오. (단, 동전의 앞면과 뒷면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$로 동일하다.)

2. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위의 두 점 P, Q에 대하여 현 PQ의 길이가 $x\,(0<x<2)$ 일 때, 호 PQ와 현 PQ로 둘러싸인 도형의 넓이를 $f(x)$라고 하자. 함수 $f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수를 구하시오.



3. 함수 $f(x)=\ln(\ln(x+e))$와 양의 실수 a, b에 대하여 부등식 $f(a+b) < f(a)+f(b)$가 항상 성립함을 보이시오.

3. 출제 의도

자연계열 오후(2) [문제 1]은 고등학교에서 고교과정의 수학을 정상적으로 이수한 학생이라면 충분히 해결할 수 있는 문제들로 구성되었으며, 모든 교과서에서 공통으로 다루는 내용을 바탕으로 출제되었다. 다음 3개의 소문항으로 구성되어 있다. 문항1은 주어진 상황을 이해하고 사건이 일어나는 경우의 규칙성을 찾아 각 확률을 구할 수 있는지를 묻고 있다. 문항2는 원 안에서 호와 현을 같은 매개변수로 표현하여 미분계수를 구할 수 있는지를 묻고 있다. 또한 문항3은 이계도함수를 통해 도함수의 그래프의 개형의 성질을 이해하여 평균값 정리를 활용할 수 있는지 묻고 있다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2015-74호 [별책8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취기준
문제 1-1	수학Ⅰ- (3) 수열 - ① 등차수열과 등비수열 [12수학Ⅰ03-03] 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. 확률과 통계 - (2) 확률 - ② 조건부확률 [12확통02-07] 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문제 1-2	수학Ⅰ- (2) 삼각함수 - ① 삼각함수 [12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 미적분 - (2) 미분법 - ② 여러 가지 미분법 [12미적02-08] 매개변수로 나타낸 함수를 미분할 수 있다.
문제 1-3	수학Ⅱ - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용 [12수학Ⅱ02-07] 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다. 미적분 - (2) 미분법 - ② 여러 가지 미분법 [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다. 미적분 - (2) 미분법 - ② 여러 가지 미분법 [12미적02-10] 이계도함수를 구할 수 있다. 미적분 - (2) 미분법 - ③ 도함수의 활용 [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학Ⅰ	이준열 외	천재교육	2019	131~136
	확률과 통계	황선욱 외	미래엔	2019	60~61
	수학Ⅰ	이준열 외	천재교육	2019	102~107
	수학Ⅱ	고성은 외	좋은책신사고	2018	55~56
	미적분	황선욱 외	미래엔	2019	90~92
	수학Ⅱ	황선욱 외	미래엔	2019	78~80
	미적분	황선욱 외	미래엔	2019	86~89
	미적분	황선욱 외	미래엔	2019	98~99
	미적분	황선욱 외	미래엔	2019	110~117

5. 문항 해설

문항1. 주어진 상황에서 사건이 일어나는 경우와 대응하는 확률을 적절하게 파악하고 문제의 확률을 구할 수 있는지 묻고 있다. 등비수열의 합을 사용하여 원하는 확률을 효과적으로 계산할 수 있는지 평가한다.

문항2. 호와 현에 대한 정보를 적절히 분석하고, 코사인법칙 등의 기본적인 도구를

활용할 수 있는지를 묻고 있다. 매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 사용하여 원하는 미분계수를 찾아낼 수 있는지를 평가한다.

문항3. 함수 $f(x)$의 성질을 도함수와 이계도함수를 통해 적절히 분석하고, 평균값 정리를 활용하여 부등식을 증명해낼 수 있는지를 평가한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점	
1	동전을 x번 던질 때 같은 면이 연속으로 두 번 나오는 사건의 확률을 찾아내고, 이 확률과 등비수열의 항 사이의 관계를 파악했는가?	10	20
	등비수열의 합을 활용하여 문제의 확률을 구했는가?	10	
2	현 PQ의 길이 x와 현 PQ와 호 PQ로 둘러싸인 도형의 넓이 $f(x)$를 부채꼴의 중심각 t에 대한 매개변수 방정식으로 표현했는가?	20	40
	매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 사용해서 미분계수 $f'(1)$을 구했는가?	20	
3	함수 $f(x)$의 도함수와 이계도함수를 계산하여 도함수가 감소함수임을 밝혔는가?	15	40
	주어진 부등식을 평균값 정리를 이용하여 변형했는가?	15	
	도함수가 감소한다는 사실과 평균값 정리를 종합하여 주어진 부등식을 알맞게 증명하였는가?	10	

7. 예시 답안 혹은 정답

1. 동전을 x번 던질 때 처음으로 같은 면이 두 번 연속으로 나오는 사건을 A_x 라고 하자. 동전을 한 번 던질 경우 같은 면이 연속으로 두 번 나오게 되는 사건은 불가능하다. 즉 동전을 1번 던질 때 같은 면이 두 번 연속으로 나오는 확률은 $\mathrm{P}(A_1)=0$이다. 동전을 두 번 던질 경우, 4가지의 결과 중 2가지, (앞면, 앞면), (뒷면, 뒷면)과 같이 동전의 같은 면을 두 번 연속으로 얻을 수 있다. 따라서 사건 A_2가 일어날 확률은 $\mathrm{P}(A_2)=2/4=1/2=0.5^{2-1}$이 된다.

유사하게, 우리가 전 단계에서 멈추지 않고 동전을 계속 던진 경우에는 정확하게 결과들의 절반만큼 같은 면이 두 번 연속으로 나오는 것을 알 수 있다. 즉, 다음이 성립한다.

$\mathrm{P}(A_3)=\mathrm{P}(A_2)/2=0.5^{3-1}$

$\mathrm{P}(A_4)=\mathrm{P}(A_3)/2=0.5^{4-1}$

$\vdots$

$\mathrm{P}(A_x)=\mathrm{P}(A_{x-1})/2=0.5^{x-1}$, $(x=2,3,4\cdots,2022)$

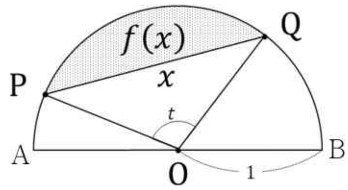
따라서 동전을 던진 횟수가 2022 이하일 확률은 $\sum_{x=2}^{2022}\mathrm{P}(A_x)=\sum_{x=2}^{2022}0.5^{x-1}$이 되고 이는 첫째항이 0.5, 공비가 0.5인 등비수열을 첫째항부터 제 2021항까지 더한 것과 같다.

따라서 등비수열의 합은 $\dfrac{0.5(1-0.5^{2021})}{1-0.5}=1-0.5^{2021}$이 된다.

2. 선분 AB의 중점을 O라 하자. 부채꼴 OPQ의 중심각을 $t\,(0<t<\pi)$라 하면,

$x=\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{1^2+1^2-2\times1\times1\times\cos t}=\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}$,

$y=f(x)=\dfrac{1}{2}\times1^2\times t-\dfrac{1}{2}\times1^2\times\sin t=\dfrac{1}{2}(t-\sin t)$ 이다.



$t=\dfrac{\pi}{3}$일 때 $x=1$이므로 $x=1$에서의 $f(x)$의 미분계수 $f'(1)$

은 $t=\dfrac{\pi}{3}$일 때 $\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$의 값이다.

$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1-\cos t}{2}$, $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{\sin t}{\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}}$ 이므로, $f'(1)=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ 이다.

3. $f'(x)=\dfrac{1}{(x+e)\ln(x+e)}$ 이고 이를 한 번 더 미분하면

$$f''(x)=-\frac{1+\ln(x+e)}{(x+e)^2(\ln(x+e))^2}$$

이므로 모든 $x>0$에 대해 $f''(x)<0$이다. 즉, f'은 감소한다.

일반성을 잃지 않고 $a\ge b$라 가정하자. 그러면 평균값 정리에 의해 $\dfrac{f(a+b)-f(a)}{b}=f'(z)$인 z가 열린 구간 $(a,a+b)$에서 항상 존재하고,

$\dfrac{f(b)}{b}=\dfrac{f(b)-f(0)}{b-0}=f'(w)$인 w가 열린 구간 $(0,b)$에서 항상 존재한다.

그런데 $0<w<b\le a<z<a+b$이므로 $w<z$, 따라서 $f'(w)>f'(z)$임을 알 수 있다. 이를 정리하면 $f(a+b)<f(a)+f(b)$를 얻는다.

◆ 문항카드12 (자연계열(오후2)_2번 문항)

[한양대학교(서울) 문항정보]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	논술 전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(오후2)(수학) / 문제 2번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학Ⅰ, 미적분, 기하
	핵심개념 및 용어	점과 직선 사이의 거리, 코사인 법칙, 쌍곡선과 타원의 정의 및 접선의 방정식, 정적분의 계산
예상 소요 시간	45분	

2. 문항 및 제시문

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

<가> 쌍곡선 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{27}=\frac{1}{2}$ 위의 두 점 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

- 점 A는 제1사분면에 있고, 점 B는 제3사분면에 있다.
- 위 쌍곡선의 두 초점을 F, F′이라 할 때,

$\cos(\angle \mathrm{FAF'})=\cos(\angle \mathrm{F'BF})=\frac{7}{25}$이다.

<나> 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (단, $0<b<a$)의 두 초점을 $\mathrm{F_1}$, $\mathrm{F_2}$라 하고 타원 위의 점 P에서의 접선을 l이라 하자. 점 P의 x좌표를 t라고 할 때, 원점으로부터 접선 l까지 거리의 제곱을 $f(t)$라 하고 $\overline{\mathrm{PF_1}}\times\overline{\mathrm{PF_2}}$를 $h(t)$라 하자.

1. 제시문 <가>에서 두 점 A, B의 좌표를 각각 구하시오.

2. 제시문 <나>에서 $b=\frac{\sqrt{3}}{2}a$일 때, $\frac{1}{a^3}\int_0^a f(t)dt$의 값을 구하시오.

3. 제시문 <나>에서 $f(t)\times h(t)$를 a와 b에 대한 식으로 나타내시오.

3. 출제 의도

'자연계열 (오후 2)'의 [문제 2]는 3개의 소문항으로 출제하였다. 각 문항은 고등학교 수학과 교육과정에서 문항과 관련된 과목의 모든 교과서가 공통적으로 다루는 개념을 활용하였다. 따라서 해당 과목을 이수한 학생이라면 '쌍곡선의 정의'에 대한 이해를 핵심으로 하여 쌍곡선의 접선의 방정식, 점과 직선 사이의 거리, 코사인 법칙과 여러 가지 적분법 등의 개념을 활용하여 수학적 사고력을 발휘하여 문제를 해결할 수 있다. 이 과정에서 학생의 논리적인 서술 능력의 수준을 측정하는데 주안점을 두었다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2015-74호 [별책 8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취기준
문제 2-1	기하 - (1) 이차곡선 - ① 이차곡선 [12기하01-03] 쌍곡선의 뜻을 알고, 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있다. 수학Ⅰ - (2) 삼각함수 - ① 삼각함수 [12수학Ⅰ02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
문제 2-2	기하 - (1) 이차곡선 - ① 이차곡선 [12기하01-02] 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다. 수학 - (2) 기하 - ② 직선의 방정식 [10수학02-05] 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다. 미적분 - (3) 적분법 - ① 여러 가지 적분법 [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.
문제 2-3	기하 - (1) 이차곡선 - ① 이차곡선 [12기하01-02] 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다. 수학 - (2) 기하 - ② 직선의 방정식 [10수학02-01] 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	홍성복 외	지학사	2018	98~100
	수학	류준열 외	천재교육	2018	102~105
	미적분	고성은 외	미래엔	2019	135
	미적분	황선욱 외	신사고	2019	146
	기하	김원경 외	비상	2019	16~25, 39~41
	기하	황선욱 외	신사고	2019	26~35, 42~47

5. 문항 해설

문항 1은 쌍곡선의 정의와 코사인 법칙을 활용하여 원하는 점의 좌표를 구할 수 있는지를 묻는다.

문항 2는 타원의 접선 방정식을 구한 후 원점으로부터 그 접선까지의 거리를 나타내는 함수를 구하여 이를 정적분하는 문제이다.

문항 3은 타원의 초점으로부터 타원위의 점까지의 거리를 구하여 문항 2에서 얻어진 값과 곱한 결과를 계산하도록 하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점	
1	$\overline{\mathrm{AF}}$와 $\overline{\mathrm{AF'}}$을 제대로 구했는가?	15	30
	두 점 A, B의 좌표를 제대로 구했는가?	15	
2	$f(t)$를 정확히 구했는가?	20	40
	정적분을 정확히 하였는가?	20	
3	$f(t)\times g(t)$를 a 와 b에 대한 식으로 정확히 나타내었는가?	10	30
	식을 구하는 과정이 명료하게 기술되었는가?	20	

7. 예시 답안 혹은 정답

1. 주어진 쌍곡선을 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$으로 표현하면 $a^2=\dfrac{5}{2}$, $b^2=\dfrac{27}{2}$.

따라서 초점 F의 x좌표를 양수 c라 하면 $c=\sqrt{a^2+b^2}=4$

또한 $p=\overline{\mathrm{AF}}$, $q=\overline{\mathrm{AF'}}$라 하면, 쌍곡선의 정의와 코사인 법칙에 의하여

$$q-p=2a=\sqrt{10},\quad \cos(\angle \mathrm{F'AF})=\frac{7}{25}=\frac{p^2+q^2-8^2}{2pq}$$

즉, $q=p+\sqrt{10}$이고 $14pq=25(p^2+q^2-64)$

첫 번째 식을 두 번째 식에 대입하면 $14p^2+14\sqrt{10}p=25(2p^2+2\sqrt{10}p-54)$

정리하면 $2p^2+2\sqrt{10}p-75=0$

그러므로 $p=\dfrac{3}{2}\sqrt{10}$이고 $q=\dfrac{5}{2}\sqrt{10}$

점 A의 좌표를 (x_0, y_0)이라고 하면

$\overline{\mathrm{AF}'}^2 = \dfrac{125}{2} = (x_0+4)^2 + y_0^2$이고 $\overline{\mathrm{AF}}^2 = \dfrac{45}{2} = (x_0-4)^2 + y_0^2$

이를 연립하여 풀면 $x_0 = \dfrac{5}{2}$, $y_0 = \dfrac{9}{2}$. 즉, A의 좌표는 $\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{9}{2}\right)$

비슷하게 점 B의 좌표를 구하면 $\left(-\dfrac{5}{2}, -\dfrac{9}{2}\right)$

2. 점 P의 좌표를 (t, s)라 하면 접선의 기울기는 $-\dfrac{b^2 t}{a^2 s}$,

접선의 방정식은 $y - s = -\dfrac{b^2 t}{a^2 s}(x - t)$이다.

이를 정리하면 $b^2 tx + a^2 sy = b^2 t^2 + a^2 s^2$이다.

$\dfrac{t^2}{a^2} + \dfrac{s^2}{b^2} = 1$이므로 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$b^2 tx + a^2 sy - a^2 b^2 = 0$

따라서 $f(t) = \left(\dfrac{a^2 b^2}{\sqrt{b^4 t^2 + a^4 s^2}}\right)^2$ 이다.

$s^2 = \dfrac{a^2 b^2 - b^2 t^2}{a^2}$ 이므로

$$f(t) = \frac{a^4 b^4}{b^4 t^2 + a^4 \dfrac{a^2 b^2 - b^2 t^2}{a^2}} = \frac{a^4 b^4}{b^4 t^2 + a^4 b^2 - a^2 b^2 t^2}$$

$$= \frac{a^4 b^4}{a^4 b^2 + b^2 (b^2 - a^2) t^2} = \frac{a^4 b^2}{a^4 + (b^2 - a^2) t^2} \text{ 이다.}$$

$a^2 - b^2 = c^2$ $(b < a)$ 중 양수인 c를 선택하면

$$f(t) = \frac{a^4 b^2}{a^4 - c^2 t^2} = \frac{a^4 b^2}{2a^2}\left(\frac{1}{a^2 - ct} + \frac{1}{a^2 + ct}\right)\text{이다.}$$

$\displaystyle\int \frac{1}{a^2 + ct} dt = \frac{1}{c} \ln\left(a^2 + ct\right) + C_1$,

$\displaystyle\int \frac{1}{a^2 - ct} dt = -\frac{1}{c} \ln\left(a^2 - ct\right) + C_2$ (C_1, C_2는 상수)이므로,

$$\int_0^a f(t) dt = \frac{a^4 b^2}{2a^2} \frac{1}{c}\left[\ln\left(a^2 + ct\right) - \ln\left(a^2 - ct\right)\right]_0^a = \frac{a^4 b^2}{2a^2 c} \ln \frac{a^2 + ca}{a^2 - ca} \quad \cdots \text{(A)}$$

$b = \dfrac{\sqrt{3}}{2} a$ 이면 $b^2 = \dfrac{3}{4} a^2$, $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{3}{4} a^2} = \dfrac{a}{2}$ 이다.

따라서 (A)$= \dfrac{a^2\frac{3}{4}a^2}{2\frac{a}{2}} \ln \dfrac{a^2+\frac{a^2}{2}}{a^2-\frac{a^2}{2}} = \dfrac{3}{4}a^3 \ln 3$ 이므로

$\dfrac{1}{a^3}\displaystyle\int_0^a f(t)dt = \dfrac{3}{4}\ln 3$이다.

3. 문제 2번에서 선택한 양수 c를 사용하여 $\mathrm{F}_1=(c,0)=(\sqrt{a^2-b^2},0)$,

$\mathrm{F}_2=(-c,0)=(-\sqrt{a^2-b^2},0)$이라고 하자. 점 P의 좌표를 (t,s)라 하면

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PF}_1}^2 &= (c-t)^2+s^2\\ &= c^2-2ct+t^2+\frac{a^2b^2-b^2t^2}{a^2}\\ &= \frac{a^2c^2-2cta^2+a^2t^2+a^2b^2-b^2t^2}{a^2}\\ &= \frac{a^2(b^2+c^2)+t^2(a^2-b^2)-2cta^2}{a^2}\\ &= \frac{a^4+t^2c^2-2cta^2}{a^2}=\frac{(a^2-tc)^2}{a^2}\end{aligned}$$

$\overline{\mathrm{PF}_2}^2 = \dfrac{(a^2+tc)^2}{a^2}$이다.

따라서 $h(t)=\dfrac{a^4-t^2c^2}{a^2}$이다.

2번에 의해 $f(t)=\dfrac{a^4b^2}{a^4+(b^2-a^2)t^2}$이다.

$$\therefore f(t)h(t)=\frac{a^4b^2}{a^4+(b^2-a^2)t^2}\times\frac{a^4-t^2c^2}{a^2}=a^2b^2$$