제 2 교시

수학 영역

KSM

5지선다형

1. $\sqrt[3]{27} \times 4^{-\frac{1}{2}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

2. 함수 $f(x)=x^2-2x+3$ 에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f'=2x-2$

$f'(3)=4$

3. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^{10}(2a_k+3)=60$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10}a_k$ 의 값은? [3점]

① 10 ② 15 ③ 20 ④ 25 ⑤ 30

$2\Sigma+30=60$

$\Sigma=15$

4. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 4 - f(1)$$

을 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f(1)=4-f(1)$

$f(1)=2$

5. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(x^3+1)f(x)$$

라 하자. $f(1)=2$, $f'(1)=3$일 때, $g'(1)$의 값은? [3점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

$g'(x) = 3x^2 f(x) + (x^3+1)f'(x)$

$g'(1) = 3f(1) + 2f'(1) = 6+6 = 12$

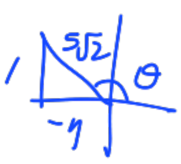
6. $\cos\theta < 0$이고 $\sin(-\theta)=\frac{1}{7}\cos\theta$일 때, $\sin\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{3\sqrt{2}}{10}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{10}$ ③ 0
④ $\frac{\sqrt{2}}{10}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{2}}{10}$

$-s = \frac{1}{7}c$

$\frac{s}{c} = -\frac{1}{7} = \tan\theta$

$\left.\begin{matrix} c<0 \\ t<0 \end{matrix}\right) \to s>0$,



$\sin\theta = \frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$

7. 상수 $a\,(a>2)$에 대하여 함수 $y=\log_2(x-a)$의 그래프의 점근선이 두 곡선 $y=\log_2\frac{x}{4}$, $y=\log_{\frac{1}{2}}x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=4$일 때, a의 값은? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

$x=a \to A(a, \log_2 \frac{a}{4})$

$B(a, \log_{\frac{1}{2}} a)$

$(\log_2 a - 2) - (-\log_2 a) = 4$

$2\log_2 a = 6$, $\log_2 a = 3$

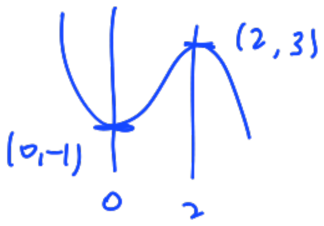
$a = 8$

8. 두 곡선 $y=2x^2-1$, $y=x^3-x^2+k$가 만나는 점의 개수가 2가 되도록 하는 양수 k의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$k=-x^3+3x^2-1$

$-3x^2+6x=-3x(x-2)$



$k=3$

9. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)a_k}=n^2+2n$$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{10}a_n$의 값은? [4점]

① $\frac{10}{21}$ ② $\frac{4}{7}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{16}{21}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

$\frac{1}{(2n-1)a_n}=2n+1$

$a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{21}\right)=\frac{10}{21}$

10. 양수 k에 대하여 함수 $f(x)$는

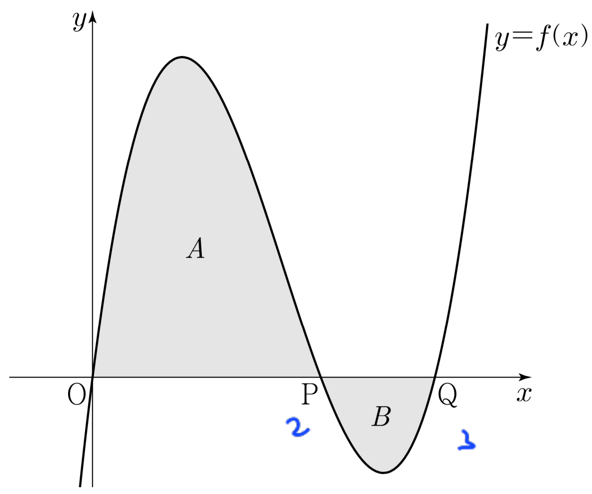
$$f(x)=kx(x-2)(x-3)$$

이다. 곡선 $y=f(x)$와 x축이 원점 O와 두 점 P, Q $(\overline{\mathrm{OP}}<\overline{\mathrm{OQ}})$에서 만난다. 곡선 $y=f(x)$와 선분 OP로 둘러싸인 영역을 A, 곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 영역을 B라 하자.

$$(A\text{의 넓이})-(B\text{의 넓이})=3$$

일 때, k의 값은? [4점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$



$\int_0^3 f(x)\,dx=3$

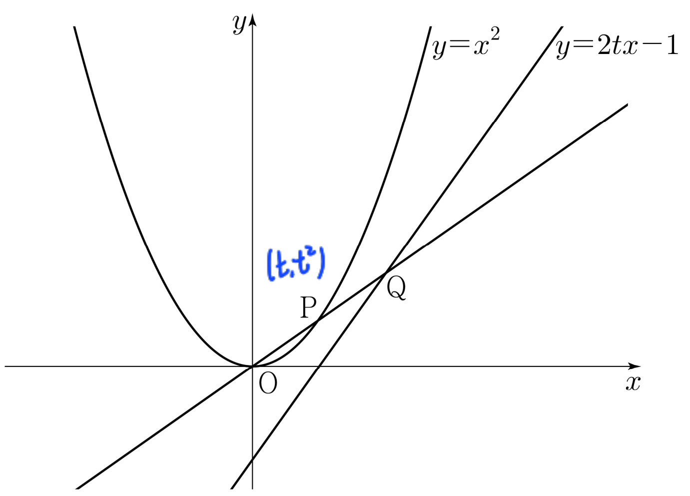
$k(x^3-5x^2+6x)$

$k\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3+3x^2\right]_0^3=3$

$k\left(\frac{81}{4}-45+27\right)=3$

$\frac{9}{4}k=3$, $k=\frac{4}{3}$

11. 그림과 같이 실수 $t\,(0<t<1)$에 대하여 곡선 $y=x^2$ 위의 점 중에서 직선 $y=2tx-1$과의 거리가 최소인 점을 P라 하고, 직선 OP가 직선 $y=2tx-1$과 만나는 점을 Q라 할 때, $\lim_{t\to1-}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{1-t}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]



① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

$y'=2x=2t$, $x=t$, $P(t,t^2)$

$OP: y=tx$, $tx=2tx-1$

$x=\frac{1}{t}$

$Q(\frac{1}{t},1)$

$\overline{PQ}=\sqrt{(t-\frac{1}{t})^2+(t^2-1)^2}$

$=\sqrt{\frac{(t^2-1)^2}{t^2}+(t^2-1)^2}$

$=\sqrt{\frac{1+t^2}{t^2}}\times|t^2-1|$

$=\left|\frac{t^2-1}{t}\right|\sqrt{1+t^2}=\frac{1-t^2}{t}\sqrt{1+t^2}$

$\lim_{t\to1-}\frac{1}{1-t}\times\frac{1-t^2}{t}\sqrt{1+t^2}$

$=\lim_{t\to1-}\frac{1+t}{t}\sqrt{1+t^2}=2\sqrt{2}$

12. $a_2=-4$이고 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 $b_n=a_n+a_{n+1}\,(n\ge1)$이라 하고, 두 집합 A, B를

$$A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\},\quad B=\{b_1,b_2,b_3,b_4,b_5\}$$

라 하자. $n(A\cap B)=3$이 되도록 하는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{20}의 값의 합은? [4점]

① 30 ② 34 ③ 38 ④ 42 ⑤ 46

$A=\{-4-d,\ -4,\ -4+d,\ -4+2d,\ -4+3d\}$ (2d, 2d)

$B=\{-8-d,\ -8+d,\ -8+3d,\ -8+5d,\ -8+7d\}$ (2d, 2d, 2d, 2d)

$-4-d$	$-4+d$	$-4+3d$		
$-8-d$	$-8+d$	$-8+3d \rightarrow (\times)$	$a_{20}=-4+18d$	
$-8+d$	$-8+3d$	$-8+5d \rightarrow d=2$	$a_{20}=32$	46
$-8+3d$	$-8+5d$	$-8+7d \rightarrow d=1$	$a_{20}=14$	

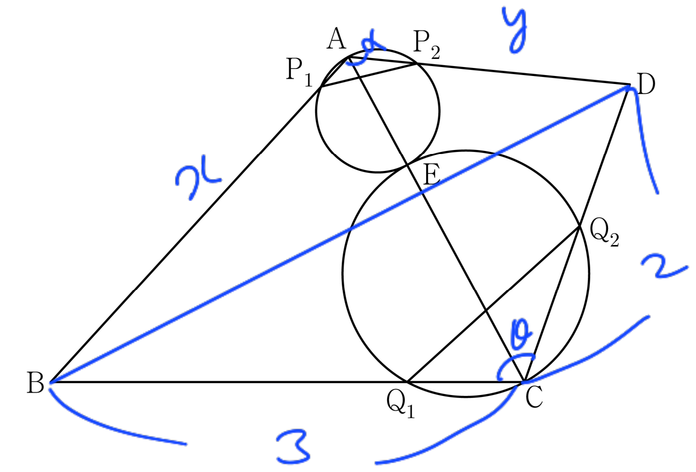
13. 그림과 같이

$$\overline{BC}=3,\ \overline{CD}=2,\ \cos(\angle BCD)=-\frac{1}{3},\ \angle DAB>\frac{\pi}{2}$$

인 사각형 ABCD에서 두 삼각형 ABC와 ACD는 모두 예각삼각형이다. 선분 AC를 1 : 2로 내분하는 점 E에 대하여 선분 AE를 지름으로 하는 원이 두 선분 AB, AD와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 각각 P_1, P_2라 하고,
선분 CE를 지름으로 하는 원이 두 선분 BC, CD와 만나는 점 중 C가 아닌 점을 각각 Q_1, Q_2라 하자.
$\overline{P_1P_2}:\overline{Q_1Q_2}=3:5\sqrt{2}$이고 삼각형 ABD의 넓이가 2일 때, $\overline{AB}+\overline{AD}$의 값은? (단, $\overline{AB}>\overline{AD}$) [4점]

$\overline{AB}=x$

$\overline{AD}=y$



① $\sqrt{21}$ ② $\sqrt{22}$ ③ $\sqrt{23}$ ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ 5

$\cos\theta=-\frac{1}{3}$, $\sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\overline{BD}^2=9+4-2\cdot3\cdot2\left(-\frac{1}{3}\right)=13+4=17$, $\overline{BD}=\sqrt{17}$

$\angle BAD=\alpha$, $\overline{AE}=2r$, $\overline{EC}=4r$,

$$\frac{\dfrac{\overline{Q_1Q_2}}{\sin\theta}=4r}{\dfrac{\overline{P_1P_2}}{\sin\alpha}=2r} \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\sin\theta}\times\frac{5\sqrt{2}}{3}=2$$

$\sin\alpha=\frac{6}{5\sqrt{2}}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{4}{5}$

$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$

$S=\frac{1}{2}xy\times\frac{4}{5}=2\to xy=5$

$\triangle ABD\to 17=x^2+y^2-2xy\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)\to x^2+y^2=11$

$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=21$

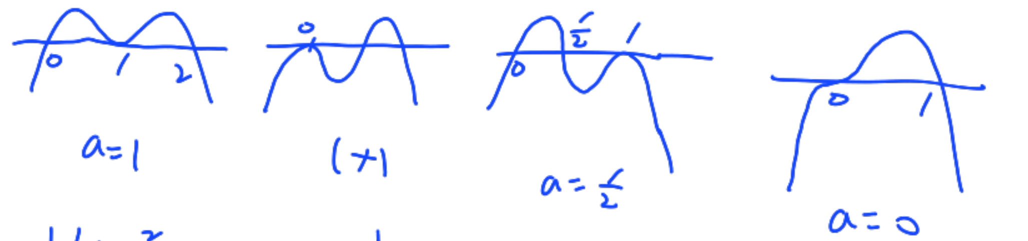
$x+y=\sqrt{21}$

14. 실수 $a\,(a\geq 0)$에 대하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 속도 $v(t)$를

$$v(t)=-t(t-1)(t-a)(t-2a)$$

라 하자. 점 P가 시각 $t=0$일 때 출발한 후 운동 방향을 한 번만 바꾸도록 하는 a에 대하여, 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량의 최댓값은? [4점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{7}{30}$ ③ $\frac{4}{15}$ ④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{1}{3}$



$-t(t-1)^2(t-2)$

$\int_0^2 -t(t-1)^2(t-2)\,dt$

$=\int_{-1}^{1} -t^2(t+1)(t-1)\,dt$

$=\int_{-1}^{1}(-t^4+t^2)\,dt$

$=2\left[-\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{3}t^3\right]_0^1$

$=\frac{4}{15}$

$-t\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-1)^2$

$\int_0^2 -t\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-1)^2\,dt$

$=\int_{-1}^{1} -t^2(t+1)\left(t+\frac{1}{2}\right)dt$

$=\int_{-1}^{1}\left(-t^4-\cancel{\frac{3}{2}t^3}-\frac{1}{2}t^2\right)dt$

$=2\left[-\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{6}t^3\right]_0^1$

$=-\frac{11}{15}$

$-t^3(t-1)$

$=-t^4+t^3$

$\int_0^2(-t^4+t^3)\,dt$

$=\left[-\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{4}t^4\right]_0^2$

$=-\frac{32}{5}+4$

$=\frac{-12}{5}$

15. 자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> $a_1 = k$이고, 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 2n - k & (a_n \le 0) \\ a_n - 2n - k & (a_n > 0) \end{cases}$$
>
> 이다.

$a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은? [4점]

① 10 ② 14 ③ 18 ④ 22 ⑤ 26

$a_1 = k$

$a_2 = a_1 - 2 - k = -2$

$a_3 = a_2 + 4 - k = 2 - k$

$a_5 =$

$(k=1)$

$a_4 = -6$

$a_5 = 2 - k = 1$

$a_6 = -10$

$a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 > 0$

$(\times)$

$(k \ge 2)$

$a_4 = 8 - 2k$

$k=2 \to a_3 = 0 \ (\times)$

$k=3$

$a_5 = -9$

$a_6 = -2$

$\therefore a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0$

$(\circ)$

$k=4 \to a_4 = 0 \ (\times)$

$(k \ge 5)$

$a_5 = 16 - 3k$

$k=5$

$a_6 = -14$

$\therefore (\circ)$

$k \ge 6$

$a_6 = 26 - 4k > 0$

$k < 6.5$

$k = 6$

$\therefore 3 + 5 + 6 = 14$

단답형

16. 부등식 $2^{x-6} \le \left(\dfrac{1}{4}\right)^x$을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오. [3점]

$\boxed{3}$

$2^{x-6} \le 2^{-2x}$

$3x \le 6, \ x \le 2$

$1 + 2 = 3$

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = 8x^3 - 1$이고 $f(0) = 3$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{33}$

$f(x) = 2x^4 - x + 3$

$f(2) = 32 - 2 + 3 = 33$

18. 두 상수 a, b에 대하여 삼차함수 $f(x)=ax^3+bx+a$는 $x=1$에서 극소이다. 함수 $f(x)$의 극솟값이 -2일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값을 구하시오. [3점]

$\boxed{6}$

$f'(x)=3ax^2+b$

$f(1)=-2 \rightarrow 2a+b=-2$

$f'(1)=0 \rightarrow 3a+b=0$) $a=2$, $b=-6$

$f(x)=2x^3-6x+2$

$f'(x)=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$

$f(-1)=-2+6+2=6$

19. 두 자연수 a, b에 대하여 함수

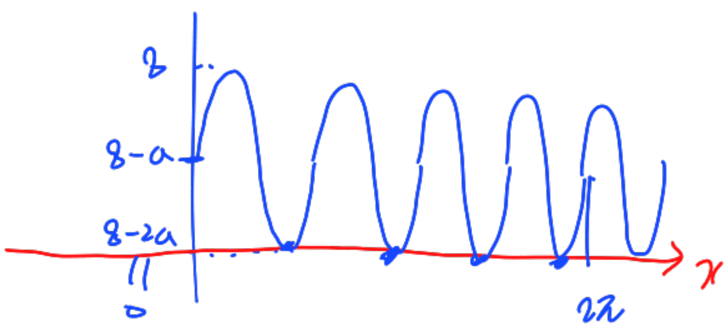
$$f(x)=a\sin bx+8-a$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값을 구하시오. [3점] $\boxed{8}$

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이다.
>
> (나) $0\leq x<2\pi$일 때, x에 대한 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

$-a+8-a\geq 0$ $a\leq 4$

최: 8
소: $8-2a$



$a=4$ $\frac{2\pi}{b}=\frac{\pi}{2}$ $b=4$

$a+b=8$

20. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

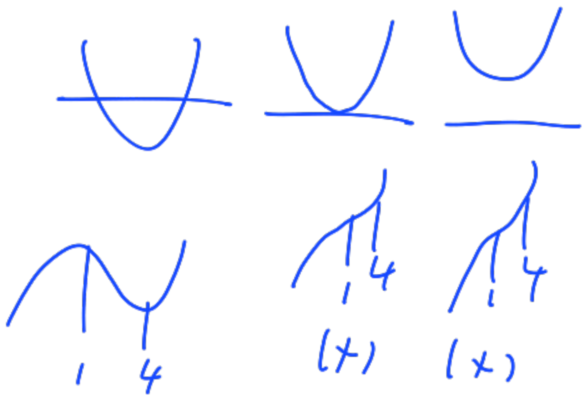
$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(9)$의 값을 구하시오. [4점] $\boxed{39}$

> $x\geq 1$인 모든 실수 x에 대하여
> $g(x)\geq g(4)$이고 $|g(x)|\geq|g(3)|$이다.

$g(0)=0$

$g'(x)=f(x)$

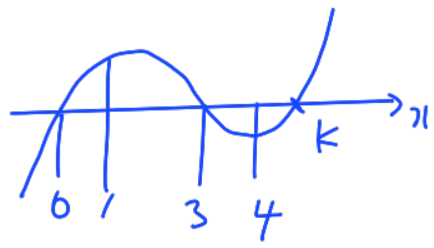


$f(x)=x^2\sim$

$g(x)=\frac{1}{3}x^3\sim$

($g(0)=0$

$g(x)$



$g(x)=\frac{1}{3}x(x-3)(x-k)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}(k+3)x^2+kx$

$g'(x)=x^2-\frac{2}{3}(k+3)x+k$

$g'(4)=16-\frac{8}{3}(k+3)+k=0$, $\frac{5}{3}k=\frac{24}{3}$, $k=\frac{24}{5}$

$f(x)=g'(x)=x^2-\frac{26}{5}x+\frac{24}{5}$

$f(9)=81-\frac{234}{5}+\frac{24}{5}=81-42=39$

21. 실수 t에 대하여 두 곡선 $y=t-\log_2 x$와 $y=2^{x-t}$이 만나는 점의 x좌표를 $f(t)$라 하자.
<보기>의 각 명제에 대하여 다음 규칙에 따라 A, B, C의 값을 정할 때, $A+B+C$의 값을 구하시오. (단, $A+B+C \neq 0$) [4점]

$\boxed{110}$

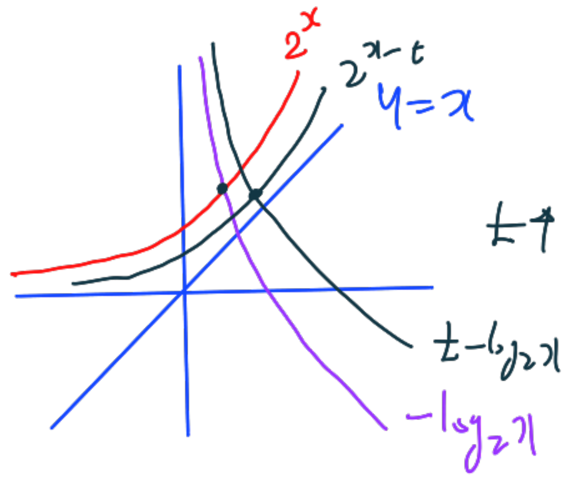
- 명제 ㄱ이 참이면 $A=100$, 거짓이면 $A=0$이다.
- 명제 ㄴ이 참이면 $B=10$, 거짓이면 $B=0$이다.
- 명제 ㄷ이 참이면 $C=1$, 거짓이면 $C=0$이다.

<보 기>

ㄱ. $f(1)=1$이고 $f(2)=2$이다.
ㄴ. 실수 t의 값이 증가하면 $f(t)$의 값도 증가한다.
~~ㄷ~~. 모든 양의 실수 t에 대하여 $f(t) \geq t$이다.

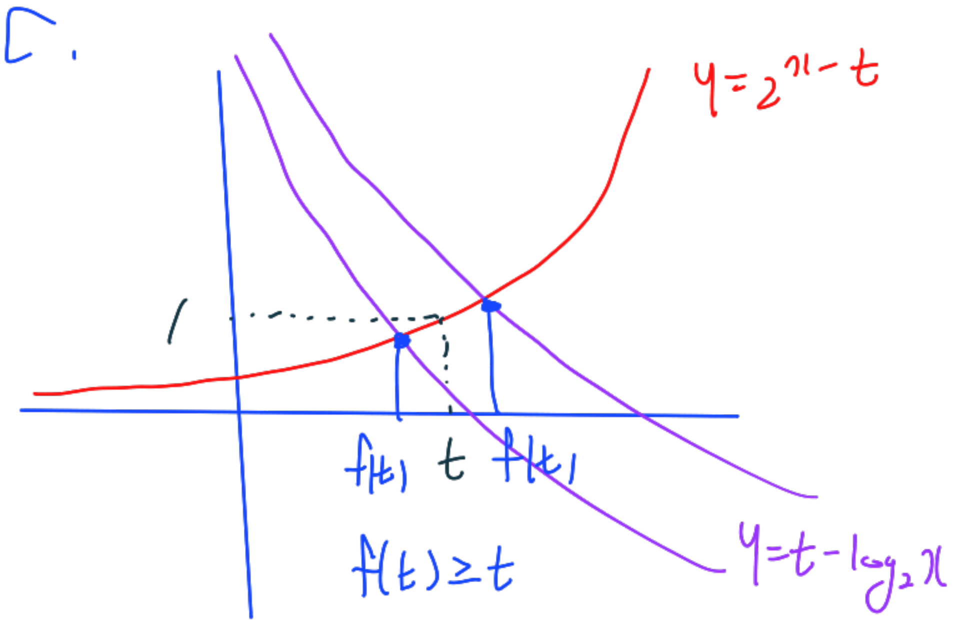
ㄱ. $t=1 \to 1-\log_2 x = 2^{x-1}$, $x=1 \to f(1)=1$
$t=2 \to 2-\log_2 x = 2^{x-2}$, $x=2 \to f(2)=2$

ㄴ.



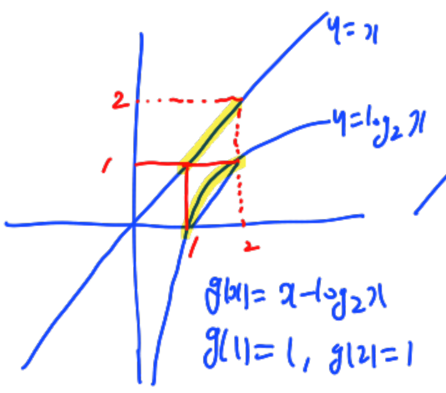
$t\uparrow \Rightarrow f(t)\uparrow$

ㄷ.



$f(t) \geq t$

$\Rightarrow t-\log_2 t \geq 1$



$1<t<2 \Rightarrow (\times)$

$g(x)=x-\log_2 x$
$g(1)=1$, $g(2)=1$
$1<x<2 \to g(x)<1$

$A=100$
$B=10$
$C=0$
$A+B+C=110$

22. 정수 $a\,(a \neq 0)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=x^3-2ax^2$$

이라 하자. 다음 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 값의 곱이 -12가 되도록 하는 a에 대하여 $f'(10)$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{380}$

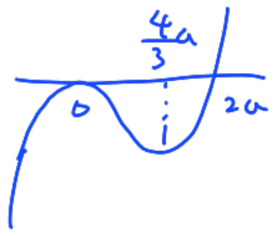
함수 $f(x)$에 대하여

$$\left\{\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right\} \times \left\{\frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}\right\} < 0$$

을 만족시키는 세 실수 x_1, x_2, x_3이 열린구간 $\left(k,\, k+\frac{3}{2}\right)$에 존재한다.

$f(x)=x^2(x-2a)$

i) $a>0$

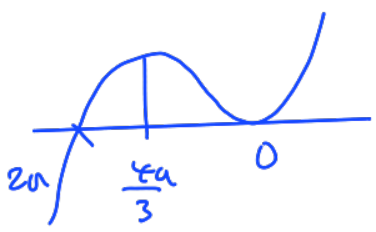


-1 (1) 3 4 (0)
-1 (1) 2 6 $(\times)$

$3<\frac{4}{3}a<\frac{9}{2}$
$4<\frac{4}{3}a<\frac{11}{2}$

$4<\frac{4}{3}a<\frac{9}{2}$
$3<a<\frac{27}{8}$
$(\times)$

ii) $a<0$



-4 -3 $-1 \to (-1, \frac{1}{2})$ ok

$-4<\frac{4}{3}a<-\frac{5}{2}$
$-3<\frac{4}{3}a<-\frac{3}{2}$
$\frac{4}{3}a \leq -2$

$-3<\frac{4}{3}a<-\frac{5}{2}$
$-\frac{9}{4}<a<-\frac{15}{8}$
$a=-2$

$f'=3x^2+8x$
$f'(10)=380$

※ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. 5개의 문자 a, a, b, c, d를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

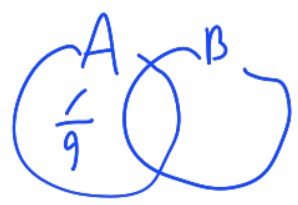
① 50 ② 55 ③ 60 ④ 65 ⑤ 70

24. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A \cap B^C) = \frac{1}{9}, \quad \mathrm{P}(B^C) = \frac{7}{18}$$

일 때, $\mathrm{P}(A \cup B)$의 값은? (단, B^C은 B의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{5}{9}$ ② $\frac{11}{18}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{13}{18}$ ⑤ $\frac{7}{9}$



$P(B) = \frac{11}{18}$

$\frac{1}{9} + \frac{11}{18} = \frac{13}{18}$

25. 흰색 손수건 4장, 검은색 손수건 5장이 들어 있는 상자가 있다. 이 상자에서 임의로 4장의 손수건을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 4장의 손수건 중에서 흰색 손수건이 2장 이상일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{4}{7}$ ③ $\frac{9}{14}$ ④ $\frac{5}{7}$ ⑤ $\frac{11}{14}$

W B
1 3
0 4

$1-\frac{{}_4C_1\cdot{}_5C_3+{}_5C_4}{{}_9C_4}$

$1-\frac{40+5}{126}=\frac{81}{126}=\frac{9}{14}$

26. 다항식 $(x-1)^6(2x+1)^7$의 전개식에서 x^2의 계수는? [3점]

① 15 ② 20 ③ 25 ④ 30 ⑤ 35

${}_6C_2\, x^2\cdot 1 \rightarrow 15$

${}_6C_1\, x\cdot(-1)\cdot {}_7C_1\cdot 2x \rightarrow -84$

${}_6C_0\cdot {}_7C_2(2x)^2 \rightarrow 84$

15

27. 한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 하자. $a\times b$가 4의 배수일 때, $a+b\le 7$일 확률은? [3점]

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{7}{15}$ ③ $\frac{8}{15}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

4 2개 → 1개
4 1개 → 10개
2&6 2개 → 4개
15개

$a+b\le 7$
4 1
4 2
4 3
1 4
2 4
3 4
2 2
7개

$\frac{7}{15}$

28. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X\to X$의 개수는? [4점]

(가) $f(1)\times f(3)\times f(5)$는 홀수이다. 홀홀홀
(나) $f(2)<f(4)$
(다) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3이다.

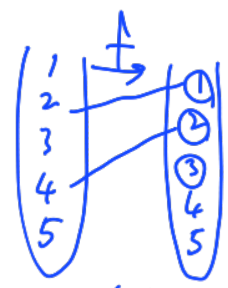
① 128 ② 132 ③ 136 ④ 140 ⑤ 144

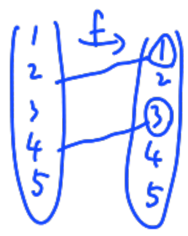
홀 짝

① 1 2 → $3\times 1=3$

$f(2)$ $f(4)$
2 4

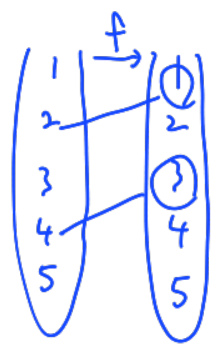
② 2 1 → ${}_3C_2\times {}_2C_1\times 2\times(2^3-1)=84$


(o)


(x)

$f(2)$ $f(4)$
홀 짝
짝 홀
홀 홀 (x) → 치역원소 2개

③ 3 0 → ${}_3C_2\times(3^3-2^3)=57$

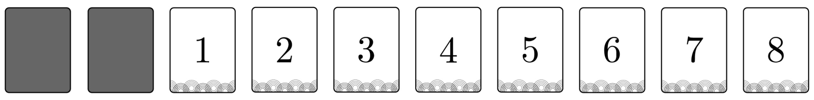


$\therefore$ 3+84+57=144

단답형

29. 그림과 같이 2장의 검은색 카드와 1부터 8까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 8장의 흰색 카드가 있다. 이 카드를 모두 한 번씩 사용하여 왼쪽에서 오른쪽으로 일렬로 배열할 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오.
(단, 검은색 카드는 서로 구별하지 않는다.) [4점] 25

(가) 흰색 카드에 적힌 수가 작은 수부터 크기순으로 왼쪽에서 오른쪽으로 배열되도록 카드가 놓여 있다.
(나) 검은색 카드 사이에는 흰색 카드가 2장 이상 놓여 있다.
(다) 검은색 카드 사이에는 3의 배수가 적힌 흰색 카드가 1장 이상 놓여 있다. 3, 6



① 3 4 5 6

$1,2 \to {}_2H_2 = 3$
$7,8 \to {}_2H_2 = 3$) $3\times3=9$

② 3 6 7 8

$1,2 \to {}_2H_2=3$
$4,5 \to {}_2H_2=3$) $3\times3=9$

12 3 45678
제외
$9-1=8$

③ 1 2 3 6

$4,5 \to {}_2H_2=3$
$7,8 \to {}_2H_2=3$) $3\times3=9$

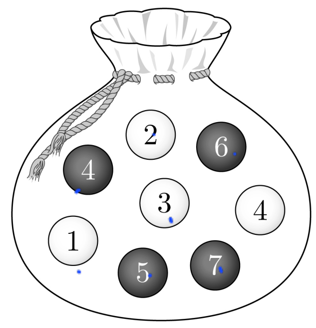
1 2 3 4 5 6 78
제외
$9-1=8$

$\therefore 9+8+8=25$

30. 주머니에 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 흰 공 4개와 숫자 4, 5, 6, 7이 하나씩 적혀 있는 검은 공 4개가 들어 있다. 이 주머니를 사용하여 다음 규칙에 따라 점수를 얻는 시행을 한다.

> 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내어
> 꺼낸 공이 서로 다른 색이면 12를 점수로 얻고,
> 꺼낸 공이 서로 같은 색이면 꺼낸 두 공에 적힌 수의 곱을 점수로 얻는다.

이 시행을 한 번 하여 얻은 점수가 24 이하의 짝수일 확률이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] 51



${}_8C_2=28$

i) 다른색 → $4+4=16$

ii) 같은색 → B B　W W
4 5　1 2
4 6　1 4
　　2 3
　　2 4
　　3 4
⇓　⇓
2 + 5 = 7

$\frac{16+7}{28}=\frac{23}{28}$

※ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+9n}-\sqrt{n^2+4n}\right)$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

$\frac{5}{1+1}$

24. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x=\frac{5t}{t^2+1},\quad y=3\ln\left(t^2+1\right)$$

에서 $t=2$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

$$\frac{\frac{6t}{t^2+1}}{\frac{5(t^2+1)-5t\cdot 2t}{(t^2+1)^2}}=\frac{6t(t^2+1)}{-5t^2+5}$$

$t=2 \rightarrow \frac{60}{-15}=-4$

25. $\lim_{x\to0}\frac{2^{ax+b}-8}{2^{bx}-1}=16$일 때, $a+b$의 값은? (단, a와 b는 0이 아닌 상수이다.) [3점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

$2^b-8=0$, $b=3$

$\lim_{x\to0}\frac{2^3(2^{ax}-1)}{2^{bx}-1}=8\times\frac{\ln2^a}{\ln2^b}=16$

$\frac{a}{b}=2$, $a=2b=6$

$\therefore a+b=9$

26. x에 대한 방정식 $\underbrace{x^2-5x+2\ln x}_{f(x)}=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 t의 값의 합은? [3점]

① $-\frac{17}{2}$ ② $-\frac{33}{4}$ ③ -8 ④ $-\frac{31}{4}$ ⑤ $-\frac{15}{2}$

$f'=2x-5+\frac{2}{x}=\frac{2x^2-5x+2}{x}=\frac{(2x-1)(x-2)}{x}$

f' 0 ⊕ $\frac{1}{2}$ ⊖ 2 ⊕

$f(\frac{1}{2})=-\frac{9}{4}-2\ln2$

$f(2)=-6+2\ln2$

$\frac{-33}{4}$

27. 실수 $t\,(0<t<\pi)$에 대하여 곡선 $y=\sin x$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ \sin t)$에서의 접선과 점 P를 지나고 기울기가 -1인 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\lim_{t\to\pi-}\dfrac{\tan\theta}{(\pi-t)^2}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{16}$　② $\frac{1}{8}$　③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{1}{2}$　⑤ 1

$y' = \cos x$　　$\tan\alpha = \cos t$

$\tan\beta = -1$

$\tan\theta = \dfrac{\cos t + 1}{1 - \cos t}$　　$\cos(\pi - x) = -\cos x$

$\pi - t = x$

$t \to \pi-$

$x \to 0+$

$\lim_{x\to 0+} \dfrac{1}{x^2} \times \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

28. 두 상수 $a\,(a>0)$, b에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a\times b$의 값은? [4점]

> (가) 모든 실수 x에 대하여
> $$\{f(x)\}^2+2f(x)=a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b$$
> 이다.
>
> (나) $f(0)=f(2)+1$　　$f(0)-f(2)=1$

① $-\frac{1}{16}$　② $-\frac{7}{64}$　③ $-\frac{5}{32}$　④ $-\frac{13}{64}$　⑤ $-\frac{1}{4}$

$(f(0))^2 + 2f(0) = a+b$

$-\ \boxed{(f(2))^2 + 2f(2) = a+b}$

$(f(0))^2 - (f(2))^2 + 2(f(0) - f(2)) = 0$

$\underbrace{(f(0) - f(2))}_{1}\,\underbrace{(f(0) + f(2) + 2)}_{0} = 0$　$\Rightarrow f(0) + f(2) = -2$

$\therefore f(0) = -\frac{1}{2},\ f(2) = \frac{3}{2},\ a+b = -\frac{3}{4}$

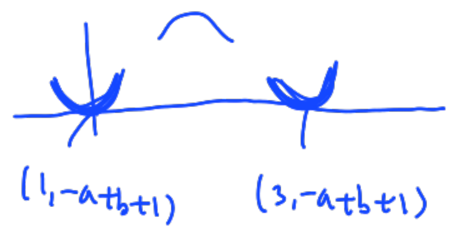
(가) $(f(x)+1)^2 = \underbrace{a\cos^3\pi x \times e^{\sin^2\pi x} + b + 1}_{//\ g(x)} \geq 0$

$g'(x) = 3a\cos^2\pi x(-\pi\sin\pi x)e^{\sin^2\pi x} + a\cos^3\pi x\left(e^{\sin^2\pi x}\right)\cdot 2\sin\pi x\cdot\pi\cos\pi x$

$= a\pi\cos^2\pi x\,\cancel{e^{\sin^2\pi x}}\cdot\sin\pi x\left(\underbrace{-3+2\cos^2\pi x}_{\ominus}\right)$

g': 0 ⊖ 1 ⊕ 2 ⊖ 3 ⊕ . . .

g



$-a+b+1 \geq 0$

$f(0) = -\frac{1}{2}$

$f(2) = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \exists c,\ f(c) = -1$

$(\because f(x)$: 연속$),\ c\in(0,2)$

$\therefore g(x)$의 최솟값 0

$-a+b+1 = 0$

$a+b = -\frac{3}{4}$

$-a+b = -1$

$b = -\frac{7}{8},\ a = \frac{1}{8}$

$ab = -\frac{7}{64}$

단답형

29. 세 실수 a, b, k에 대하여 두 점 $\mathrm{A}(a,\,a+k)$, $\mathrm{B}(b,\,b+k)$가 곡선 $C: x^2-2xy+2y^2=15$ 위에 있다. 곡선 C 위의 점 A에서의 접선과 곡선 C 위의 점 B에서의 접선이 서로 수직일 때, k^2의 값을 구하시오. (단, $a+2k\neq 0$, $b+2k\neq 0$) [4점]

$(x-y)^2+y^2=15$

$a\neq b$ $\boxed{5}$

$(a,a+k)\rightarrow k^2+(a+k)^2=15$

$(b,b+k)\rightarrow k^2+(b+k)^2=15$

$k^2+(x+k)^2=15$ $x: a,b$

$x^2+2kx+2k^2-15=0$

$a+b=-2k$

$ab=2k^2-15$

$2x-2(y+xy')+4yy'=0$

$x-y-xy'+2yy'=0$, $y'=\dfrac{y-x}{2y-x}$

$(a,a+k)\rightarrow \dfrac{k}{a+2k}$

$(b,b+k)\rightarrow \dfrac{k}{b+2k}$

$\dfrac{k^2}{(a+2k)(b+2k)}=-1$

$k^2=-4k^2-2(a+b)k-ab$

$5k^2+2(a+b)k+ab=0$

$5k^2-4k^2+2k^2-15=0$

$k^2=5$

30. 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$을 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n=\begin{cases}-1 & (a_n\leq -1)\\ a_n & (a_n>-1)\end{cases}$$

이라 할 때, 수열 $\{b_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}$은 수렴하고 그 합은 -3이다.
(나) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}$은 수렴하고 그 합은 8이다. $r<0$

$b_3=-1$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$의 값을 구하시오. [4점] $\boxed{24}$

$b_3=-1 \Rightarrow a_3\leq -1$, $ar^2\leq -1$ $a<0$

$|r|\geq 1\rightarrow \sum b_{2n-1}$: 발산

$\therefore |r|<1 \rightarrow -1<r<0$

a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6

$\ominus$ $\oplus$ $\ominus$ $\oplus$ $\ominus$ $\oplus$, $b_{2n}=a_{2n}$

$a_1=\dfrac{a_3}{r^2}\leq -1$ $\therefore a_1\leq -1$, $b_1=-1$

$b_1=-1$, $b_3=-1$, if) $b_5=-1\rightarrow \sum_{1}^{\infty} b_{2n-1}\neq -3$

$\therefore b_5=a_5$ $(a_5>-1)$

$\sum_{1}^{\infty} b_{2n-1}=b_1+b_3+(b_5+b_7+\cdots)$

$=-1-1+a_5+a_7+a_9+\cdots=-3$

$\Rightarrow \dfrac{ar^4}{1-r^2}=-1$,

$\sum_{1}^{\infty} b_{2n}=\sum_{1}^{\infty} a_{2n}=\dfrac{ar}{1-r^2}=8$

$r^3=-\dfrac{1}{8}$

$r=-\dfrac{1}{2}$

$a=-12$

$\sum_{1}^{\infty}|a_n|=\dfrac{12}{1-\frac{1}{2}}=24$

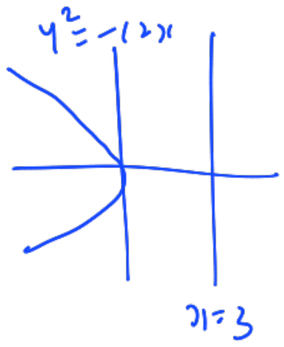
※ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서, **「선택과목(기하)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시 수학 영역(기하)

5지선다형

23. 포물선 $y^2 = -12(x-1)$의 준선을 $x=k$라 할 때, 상수 k의 값은? [2점]

① 4 ② 7 ③ 10 ④ 13 ⑤ 16



$\to x=4$

24. 한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점 A, B, C에 대하여

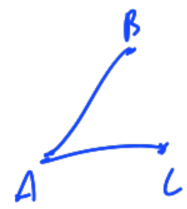
$$2\overrightarrow{AB} + p\overrightarrow{BC} = q\overrightarrow{CA}$$

일 때, $p-q$의 값은? (단, p와 q는 실수이다.) [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$2\overrightarrow{AB} + p\overrightarrow{AC} - p\overrightarrow{AB} = -q\overrightarrow{AC}$

$\underbrace{(2-p)}_{=0}\overrightarrow{AB} = \underbrace{(-q-p)}_{=0}\overrightarrow{AC}$

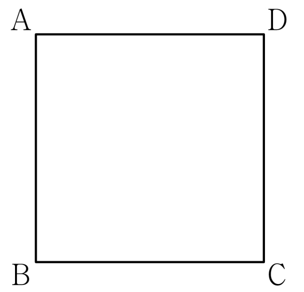


$\begin{cases} p=2 \\ q=-2 \end{cases}$

25. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD에서

$$(\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{AC}+3k\overrightarrow{CD})=0$$

일 때, 실수 k의 값은? [3점]



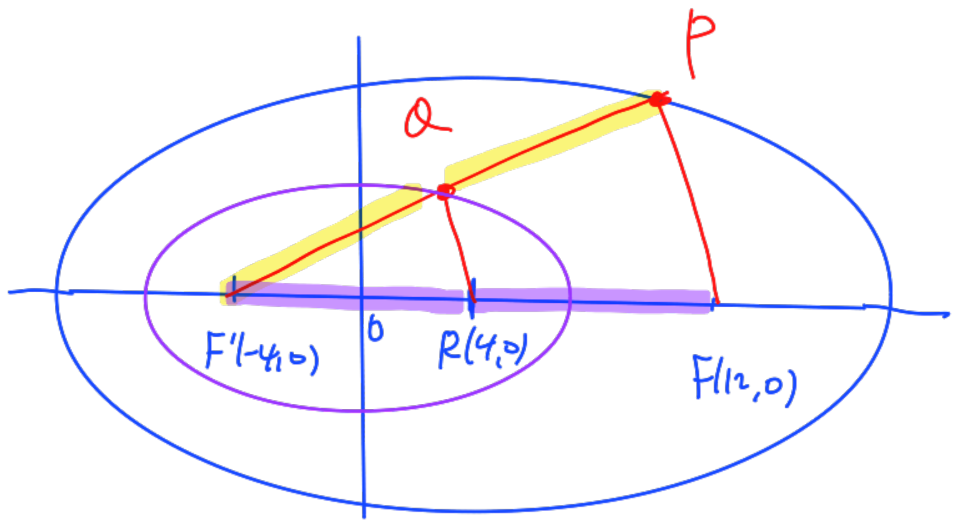
① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

$\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-3k+k\cdot\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$

$1-3k+k=0,\ k=\frac{1}{2}$

26. 두 초점이 $\mathrm{F}(12,0)$, $\mathrm{F}'(-4,0)$이고, 장축의 길이가 24인 타원 C가 있다. $\overline{\mathrm{F'F}}=\overline{\mathrm{F'P}}$인 타원 C 위의 점 P에 대하여 선분 F'P의 중점을 Q라 하자. 한 초점이 F'인 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$이 점 Q를 지날 때, $\overline{\mathrm{PF}}+a^2+b^2$의 값은? (단, a와 b는 양수이다.) [3점]

① 46 ② 52 ③ 58 ④ 64 ⑤ 70



$\overline{PF'}=\overline{F'F}=16$ ∴ $\overline{PF}=8$

$\overline{F'P}+\overline{PF}=24$ ∴ $\overline{F'Q}+\overline{QR}=12=2a$

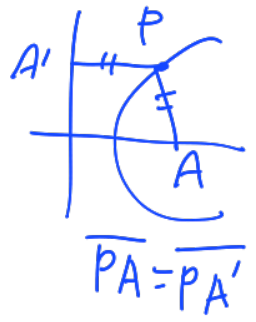
$a=6,\ c=4$

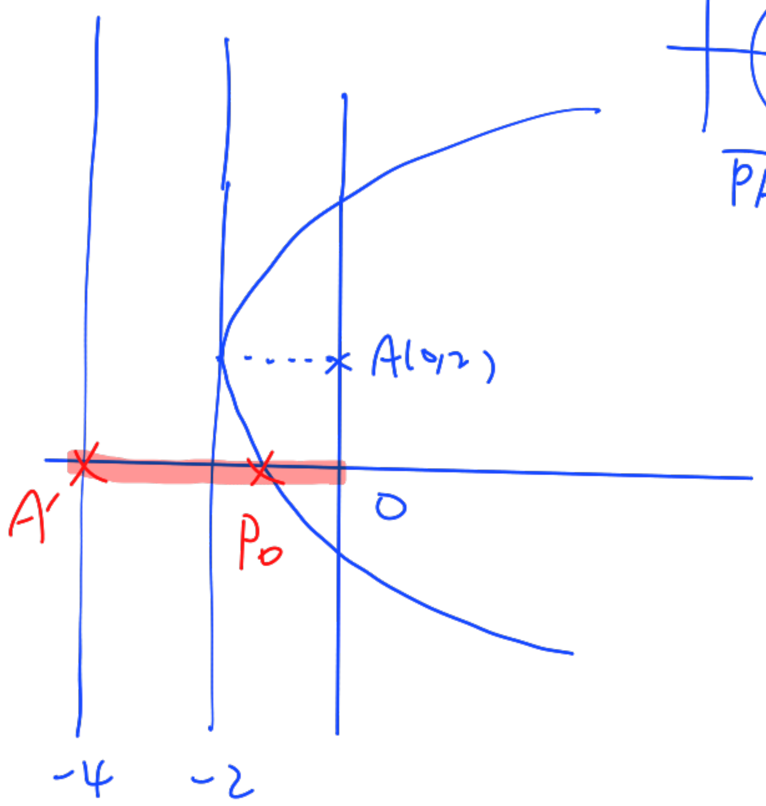
$b^2=a^2-c^2=20$

∴ $\overline{PF}+a^2+b^2=8+36+20=64$

27. 포물선 $(y-2)^2=8(x+2)$ 위의 점 P와 점 A$(0, 2)$에 대하여 $\overline{\mathrm{OP}}+\overline{\mathrm{PA}}$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P를 P_0이라 하자. $\overline{\mathrm{OQ}}+\overline{\mathrm{QA}}=\overline{\mathrm{OP}_0}+\overline{\mathrm{P}_0\mathrm{A}}$를 만족시키는 점 Q에 대하여 점 Q의 y좌표의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, M^2+m^2의 값은? (단, O는 원점이다.) [3점]

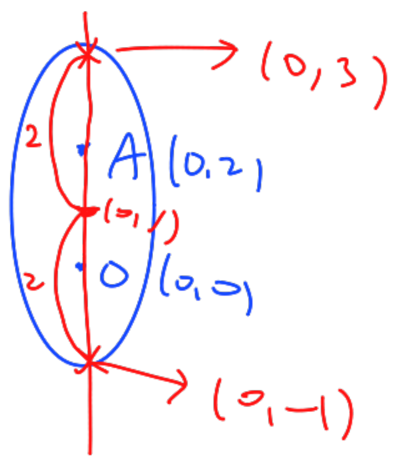
① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12





$\overline{OP}+\overline{PA}=\overline{OP}+\overline{PA'}\le\overline{OA'}=4$

$\therefore\ \overline{OQ}+\overline{QA}=4 \Rightarrow$ 타원



$M=3,\ m=-1$

$M^2+m^2=10$

28. 좌표평면의 네 점 A$(2, 6)$, B$(6, 2)$, C$(4, 4)$, D$(8, 6)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 점 X의 집합을 S라 하자.

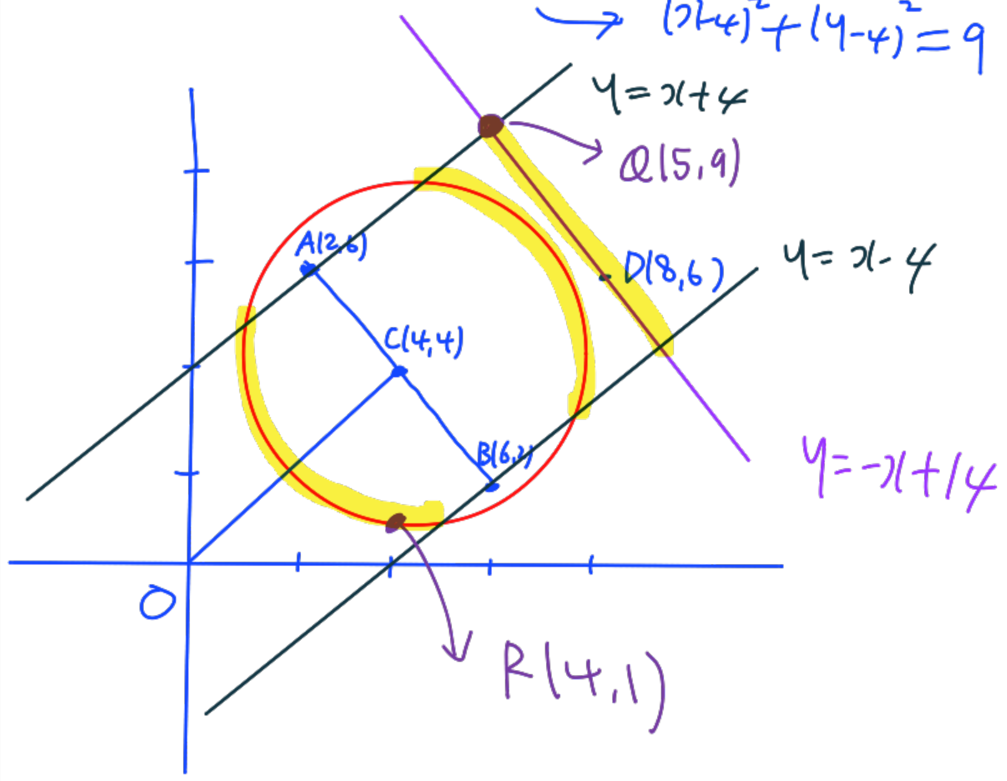
> (가) $\{(\overrightarrow{\mathrm{OX}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}\}\times\{|\overrightarrow{\mathrm{OX}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}|-3\}=0$
>
> (나) 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OX}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$가 서로 평행하도록 하는 선분 AB 위의 점 P가 존재한다. $\overrightarrow{PX}\,//\,\overrightarrow{OC}$

집합 S에 속하는 점 중에서 y좌표가 최대인 점을 Q, y좌표가 최소인 점을 R이라 할 때, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① 25 ② 26 ③ 27 ④ 28 ⑤ 29

$\overrightarrow{DX}\cdot\overrightarrow{OC}=0$ or $|\overrightarrow{CX}|=3$

$\rightarrow (x-4)^2+(y-4)^2=9$



$\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OR}=(5,9)\cdot(4,1)=20+9=29$

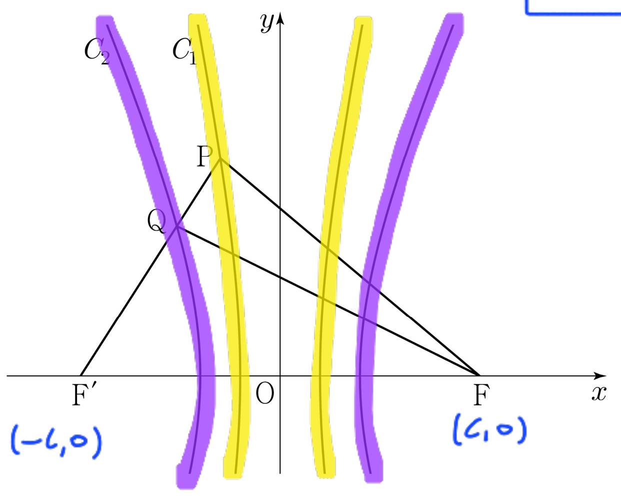
단답형

29. 두 점 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)\ (c>0)$을 초점으로 하는 두 쌍곡선

$$C_1 : x^2 - \frac{y^2}{24} = 1, \quad C_2 : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{21} = 1$$

이 있다. 쌍곡선 C_1 위에 있는 제2사분면 위의 점 P에 대하여 선분 PF′이 쌍곡선 C_2와 만나는 점을 Q라 하자.
$\overline{PQ}+\overline{QF}$, $2\overline{PF'}$, $\overline{PF}+\overline{PF'}$이 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 직선 PQ의 기울기는 m이다. $60m$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{80}$



$c^2 = 1+24 = 25.\ c=5$

$\overline{PF} - \overline{PF'} = 2$

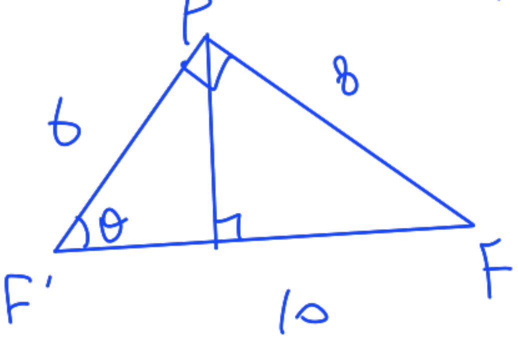
$\overline{QF} - \overline{QF'} = 4$

등차중항 $\Rightarrow 4\overline{PF'} = \overline{PF} + \overline{PF'} + \overline{PQ} + \overline{QF}$

$= (2+\overline{PF'}) + \overline{PF'} + (\overline{PF'} - \overline{QF'}) + \overline{QF}$

$= 2 + 3\overline{PF'} + 4$

$\therefore \overline{PF'} = 6,\ \overline{PF} = 8$



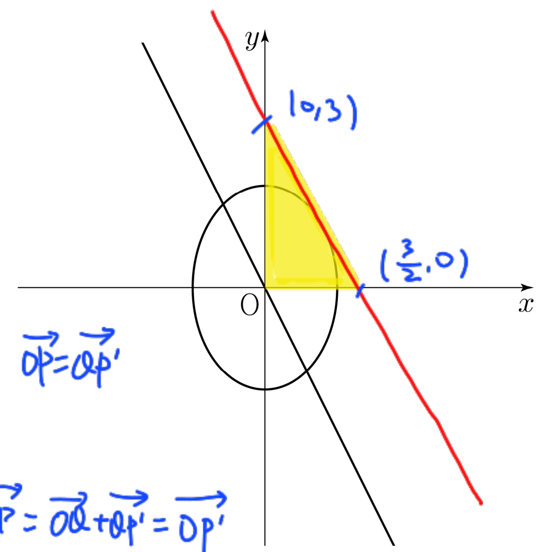
$\tan\theta = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} = m,\ 60m = 80$

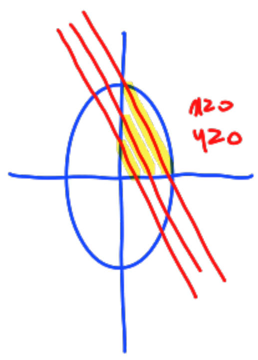
30. 직선 $2x+y=0$ 위를 움직이는 점 P와 타원 $2x^2+y^2=3$ 위를 움직이는 점 Q에 대하여

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$$

를 만족시키고, x좌표와 y좌표가 모두 0 이상인 모든 점 X가 나타내는 영역의 넓이는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$\boxed{13}$





$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{QP'}$

$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP'} = \overrightarrow{OP'}$

$\frac{x^2}{\frac{3}{2}} + \frac{y^2}{3} = 1$, 기:-2

$y = -2x \pm \sqrt{6+3}$

$y = -2x \pm 3 \rightarrow y = -2x+3$

$(0,3)$, $(\frac{3}{2},0)$

$S = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4} = \frac{q}{p}$

＊ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.