제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $2^{\sqrt{3}} \times 2^{2-\sqrt{3}}$ 의 값은? [2점]

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

$2^{\sqrt{3}+2-\sqrt{3}} = 2^2 = 4$

2. 함수 $f(x)$가

$$f'(x) = 3x^2 - 2x, \quad f(1) = 1$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f(x) = x^3 - x^2 + C$

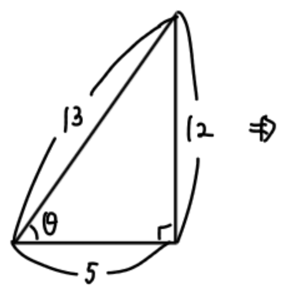
$f(1) = 1 - 1 + C = 1 \Rightarrow C = 1$

$f(2) = 8 - 4 + 1 = 5$

3. $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 인 θ에 대하여 $\tan\theta = \frac{12}{5}$ 일 때, $\sin\theta + \cos\theta$ 의 값은? [3점]

① $-\frac{17}{13}$ ② $-\frac{7}{13}$ ③ 0 ④ $\frac{7}{13}$ ⑤ $\frac{17}{13}$

제 3사분면 $\Rightarrow$ $\sin\theta < 0$, $\cos\theta < 0$, $\tan\theta > 0$

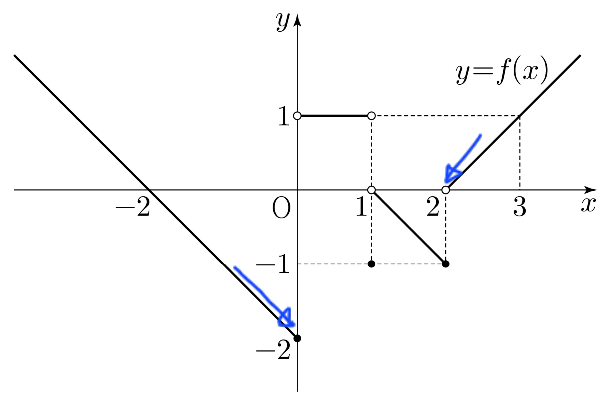


$\Rightarrow$ $\sin\theta = -\frac{12}{13}$

$\cos\theta = -\frac{5}{13}$

$\therefore \sin\theta + \cos\theta = -\frac{17}{13}$

4. 함수 $y = f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 0-} f(x) + \lim_{x\to 2+} f(x)$ 의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

$\therefore -2 + 0 = -2$

5. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(x^2+3)f(x)$$

라 하자. $f(1)=2$, $f'(1)=1$일 때, $g'(1)$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$g'(x) = (2x)f(x) + (x^2+3)f'(x)$

$g'(1) = 2\cdot 2 + 4\cdot 1 = 8$

6. 곡선 $y=3x^2-x$와 직선 $y=5x$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$3x^2-x = 5x$

$3x^2-6x=0$

$3(x)(x-2)=0$

$\Rightarrow \frac{3}{6}(2)^3 = 4$

7. 첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$a_6=2(S_3-S_2)$$ $\Leftrightarrow$ $a_6 = 2a_3$

일 때, S_{10}의 값은? [3점]

① 100 ② 110 ③ 120 ④ 130 ⑤ 140

$2+5d = 2(2+2d)$

$d=2$

$S_{10} = \frac{10(4+9\cdot 2)}{2} = 110$

8. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -2x+6 & (x<a) \\ 2x-a & (x \ge a) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$\{f(a^+)\}^2 = \{f(a^-)\}^2 \Rightarrow f(a^+) = \pm f(a^-)$

① $-2a+6 = a$ $\therefore a=2$

② $-2a+6 = -a$ $\therefore a=6$

9. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} \dfrac{1}{a_n} & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ 8a_n & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

이고 $a_{12}=\frac{1}{2}$일 때, a_1+a_4의 값은? [4점]

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{17}{4}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

$a_{12} = \frac{1}{2}$

$a_{11} = 2$

$a_{10} = \frac{1}{4}$

$a_9 = 4$

반복 ⇒

$a_4 = \frac{1}{2}$

$a_3 = 2$

$a_2 = \frac{1}{4}$

$a_1 = 4$

$\therefore a_1 + a_4 = \frac{9}{2}$

$a_8 = \frac{1}{2}$

10. $n \ge 2$인 자연수 n에 대하여 두 곡선

$$y=\log_n x, \quad y=-\log_n(x+3)+1$$

이 만나는 점의 x좌표가 1보다 크고 2보다 작도록 하는 모든 n의 값의 합은? [4점]

① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

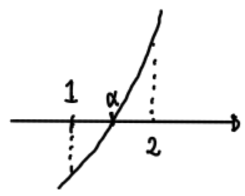
$y=\log_n x$, $y=\log_n \frac{n}{x+3}$

$\log_n x = \log_n \frac{n}{n+3} \Rightarrow x = \frac{n}{x+3}$

$x^2+3x-n=0$

$x=1 \Rightarrow 4-n<0$

$x=2 \Rightarrow 10-n>0$ } ⇒



$\therefore 4<n<10$

$5+6+7+8+9=35$

11. 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$f(0)=0,\quad f(1)=1,\quad \int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{6}$$

을 만족시킨다. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_{-3}^{2} g(x)\,dx$의 값은? [4점]

> (가) $g(x)=\begin{cases} -f(x+1)+1 & (-1<x<0) \\ f(x) & (0\le x\le 1)\end{cases}$
>
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2)=g(x)$이다.

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{17}{6}$ ③ $\frac{19}{6}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{23}{6}$

Solve 1) $\int_{-1}^{0}\left(-f(x+1)+1\right)dx = -\int_0^1 f(x)\,dx + [x]_{-1}^{0}$

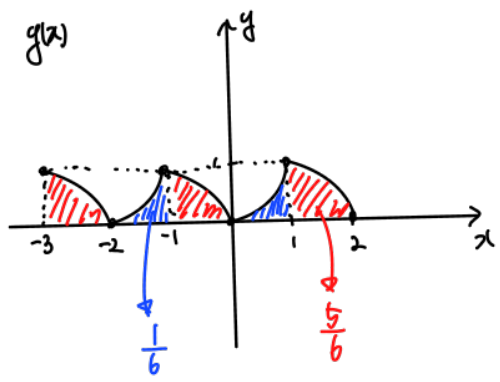
$= -\frac{1}{6}+1 = \frac{5}{6}$

⇒ $\int_{-3}^{-2} g(x)\,dx = \int_{-1}^{0} g(x)\,dx = \frac{5}{6}$

$\int_{-2}^{-1} g(x)\,dx = \int_{0}^{1} g(x)\,dx = \frac{1}{6}$ ⇒ $\int_{-3}^{2} g(x)\,dx = \frac{17}{6}$

$\int_{1}^{2} g(x)\,dx = \int_{-1}^{0} g(x)\,dx = \frac{5}{6}$

Solve 2) g(x)



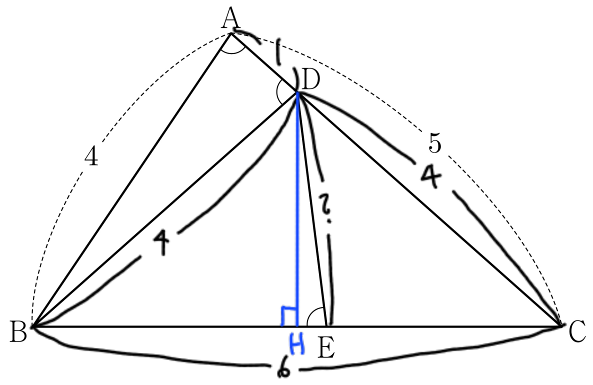
$2\times\frac{1}{6} + 3\times\frac{5}{6} = \frac{17}{6}$

⇒ 22수능 미적 30...

12. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=5$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{1}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 점 D와 선분 BC 위의 점 E에 대하여

$$\angle BAC = \angle BDA = \angle BED$$

일 때, 선분 DE의 길이는? [4점]



① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ $\frac{17}{6}$ ⑤ 3

이등변 $\overline{AB}=\overline{BD}=4$, $\overline{AD}=k$

Cosine Law

$\frac{1}{8}=\frac{16+\overline{AD}^2-16}{2\cdot 4\cdot \overline{AD}}$ ⇒ $\overline{AD}=1$ ⇒ $\overline{CD}=5-\overline{AD}=4$

$\overline{BC}^2=16+25-2\cdot4\cdot5\cdot\frac{1}{8}$ ⇒ $\overline{BC}=6$

점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{BH}=3$, $\overline{DH}=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$

$\cos(\angle BED)=\frac{1}{8}$, $\sin(\angle BED)=\frac{3}{8}\sqrt{7}=\frac{\sqrt{7}}{\overline{DE}}$

∴ $\overline{DE}=\frac{8}{3}$

13. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 구간 $(0, 1]$에서

$$f(x)=\begin{cases} 3 & (0<x<1) \\ 1 & (x=1) \end{cases}$$

이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1)=f(x)$를 만족시킨다.

$\sum_{k=1}^{20} \frac{k \times f(\sqrt{k})}{3}$의 값은? [4점]

① 150 ② 160 ③ 170 ④ 180 ⑤ 190

$f(1)=1$
$f(2)=3$
$f(3)=3$
$f(4)=1$
$\vdots$
$f(19)=3$
$f(20)=3$

$$\sum_{k=1}^{20} \frac{kf(\sqrt{k})}{3} = \sum_{k=1}^{20}\left(\frac{3k}{3}\right) - 2\cdot\left(\frac{1+4+9+16}{3}\right)$$

$$= \frac{20\cdot 21}{2} - 2\cdot 10$$

$$= 190$$

$f(\sqrt{k})=3$ 이라 하고, $k=1,4,9,16$ 일때 제외!

14. 두 양수 p, q와 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-12$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $p+q$의 값은? [4점]

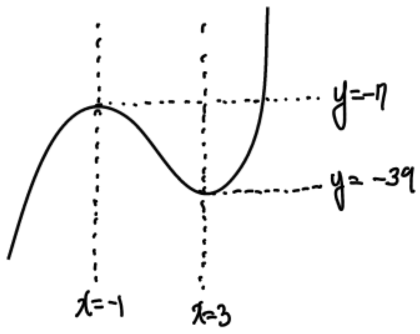
> (가) 모든 실수 x에 대하여 $xg(x)=|xf(x-p)+qx|$이다.
> (나) 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수는 1이다.

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

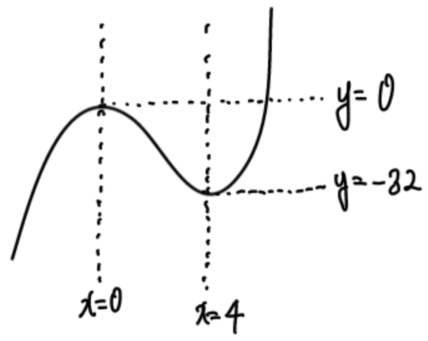
$$g(x)=\begin{cases} |f(x-p)+q| & (x\ge 0) \\ -|f(x-p)+q| & (x<0) \end{cases} \Rightarrow g'(x)=\begin{cases} f'(x-p) & (x\ge 0) \\ -f'(x-p) & (x<0) \end{cases}$$

미분가능 $\Rightarrow$ $f(-p)+q=-f(-p)-q=0$ $\quad f'(-p)=-f'(-p)=0$ $\quad \therefore p=1$ $(p>0)$

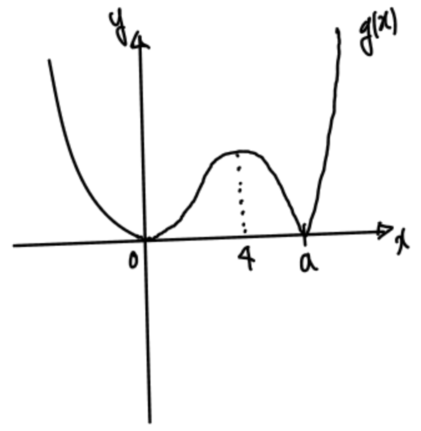
$f'(x)=3x^2-6x-9$
$\quad =3(x-3)(x+1)$



★ $p=1$ $q=7$



$\Rightarrow$



$\therefore p+q=8$

15. $-1 \le t \le 1$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$\left(\sin\frac{\pi x}{2} - t\right)\left(\cos\frac{\pi x}{2} - t\right) = 0$$

의 실근 중에서 집합 $\{x \mid 0 \le x < 4\}$에 속하는 가장 작은 값을 $\alpha(t)$, 가장 큰 값을 $\beta(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $-1 \le t < 0$인 모든 실수 t에 대하여 $\alpha(t) + \beta(t) = 5$이다.

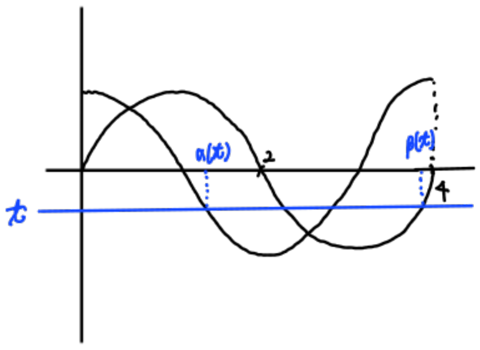
ㄴ. $\{t \mid \beta(t) - \alpha(t) = \beta(0) - \alpha(0)\} = \left\{t \,\middle|\, 0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

ㄷ. $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$인 두 실수 t_1, t_2에 대하여 $t_2 - t_1 = \frac{1}{2}$이면 $t_1 \times t_2 = \frac{1}{3}$이다. ⇒ $t_1 = \frac{-3+\sqrt{57}}{12}$, $t_2 = \frac{3+\sqrt{57}}{12}$

① ㄱ　　② ㄱ, ㄴ　　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$\sin\frac{\pi x}{2} = t$ OR $\cos\frac{\pi x}{2} = t$

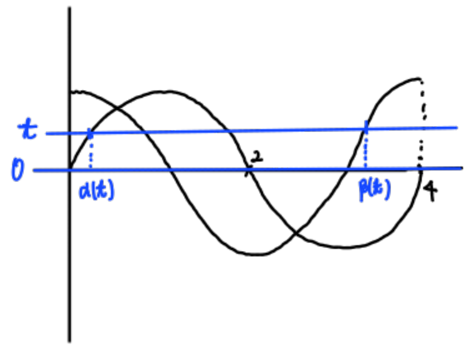
ㄱ



$\beta(t) = 5 - \alpha(t)$

$\therefore \alpha(t) + \beta(t) = 5$

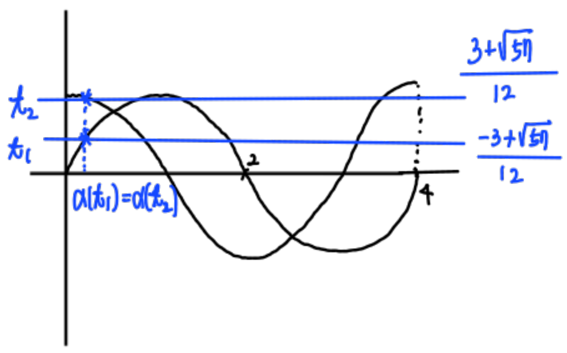
ㄴ



$\beta(t) = 3 + \alpha(t)$　$\therefore \beta(t) - \alpha(t) = 3$

$\beta(0) = 3$　$\alpha(0) = 0$　$\therefore \beta(0) - \alpha(0) = 3$

~~ㄷ.~~



$\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \frac{3+\sqrt{57}}{12}$

$\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \frac{-3+\sqrt{57}}{12}$

$\Rightarrow \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \frac{132}{144} \ne 1$ (모순)

단답형

16. $\log_4 \frac{2}{3} + \log_4 24$의 값을 구하시오. [3점]　2

$\log_4 16 = 2$

17. 함수 $f(x) = x^3 - 3x + 12$가 $x = a$에서 극소일 때, $a + f(a)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [3점]　11

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$　극소 $x = a = 1$

$f(1) = 1 - 3 + 12 = 10$

$\therefore a + f(a) = 11$

18. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_2 = 36, \quad a_7 = \frac{1}{3}a_5$$

일 때, a_6의 값을 구하시오. [3점]

4

$ar = 36, \quad r^2 = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow a_6 = ar^5 = ar \cdot r^4$

$= 36 \cdot \frac{1}{9}$

$= 4$

19. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = 3t^2 - 4t + k$$

이다. 시각 $t=0$에서 점 P의 위치는 0이고, 시각 $t=1$에서 점 P의 위치는 -3이다. 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [3점]

6

$x(t) = t^3 - 2t^2 + kt$

$x(1) = 1 - 2 + k = -3 \Rightarrow \underline{k = -2}$

$x(3) = 27 - 18 - 6 = 3$

$-3 \rightarrow 3$ 위치의 변화량 : 6

20. 실수 a와 함수 $f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x + 3$에 대하여 함수

$$g(x) = \int_a^x \{f(x) - f(t)\} \times \{f(t)\}^4 dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 모든 a의 값의 합을 구하시오. [4점]

$f'(x) = 3x^2 - 24x + 45 = 3(x-3)(x-5)$

$g(x) = f(x)\int_a^x \{f(t)\}^4 dt - \int_a^x \{f(t)\}^5 dt$

$g'(x) = f'(x)\int_a^x \{f(t)\}^4 dt + \{f(x)\}^5 - \{f(x)\}^5$

$= f'(x)\int_a^x \{f(t)\}^4 dt$

$\rightarrow x = 3, 5$에서 $f'(x) = 0$

$a = 3, 5$

8

21. 다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 존재하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

24

(가) x에 대한 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$은
서로 다른 두 실근을 갖고, 각각의 실근은 중근이다.
(나) 함수 $f(x)$의 최솟값은 음의 정수이다.

i) n이 홀수

$(x^n-64)f(x)=0$

근 1개 근 0개 ⇒ 중근 불가능

ii) n이 짝수

$x^n=64 \Rightarrow x=\pm\sqrt[n]{64}$

$\therefore f(x)=(x-\sqrt[n]{64})(x+\sqrt[n]{64})$

$f(x)$의 최솟값 $-\sqrt[n]{8^4} = -2^{\frac{12}{n}}$ ⇒ 음의 정수

$n=2, 4, 6, 12$

$\therefore 2+4+6+12=24$

22. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

61

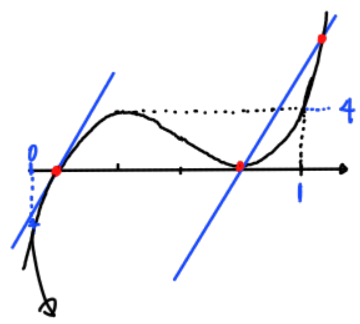
(가) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
(나) 방정식 $f(x-f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$f(1)=4$, $f'(1)=1$, $f'(0)>1$일 때, $f(0)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

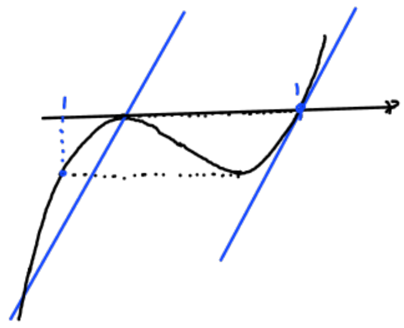
$f(x)=0 \Rightarrow x=\alpha, \beta$, $x-f(x)=\alpha, \beta$의 실근 3개

$\begin{cases} f(x)=x-\alpha \\ f(x)=x-\beta \end{cases}$

i) $f(x)$ 최고차항의 계수 ⊕

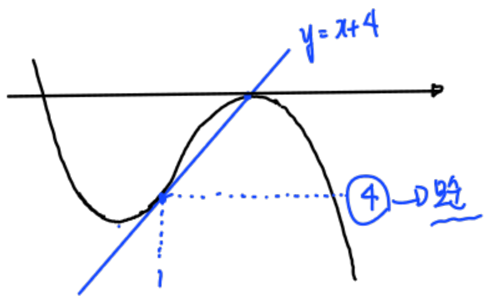


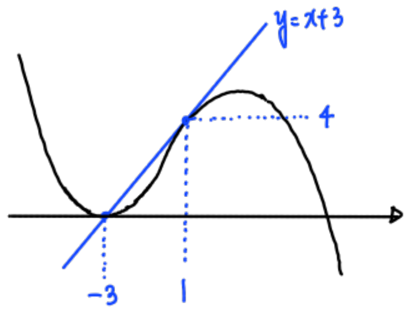
$f(0)<0$, 모순



$f(1)=0$ or ⊖, 모순

ii) $f(x)$ 최고차항의 계수 ⊖





$\Rightarrow f(x)=a(x+3)(x-1)^2+(x+3)$

$f'(x)=a(x-1)^2+a(x+3)2(x-1)+1$

$f'(-3)=16a+1=0 \quad \therefore a=-\frac{1}{16}$

$\therefore f(0)=-\frac{1}{16}\cdot 3+3=\frac{45}{16} \Rightarrow p+q=61$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. 다항식 $(2x+1)^5$ 의 전개식에서 x^3 의 계수는? [2점]

① 20 ② 40 ③ 60 ④ 80 ⑤ 100

$_5C_3 \cdot (2x)^3 (1)^2 = 80x^3$

24. 어느 동아리의 학생 20명을 대상으로 진로활동 A와 진로활동 B에 대한 선호도를 조사하였다. 이 조사에 참여한 학생은 진로활동 A와 진로활동 B 중 하나를 선택하였고, 각각의 진로활동을 선택한 학생 수는 다음과 같다.

(단위 : 명)

구분	진로활동 A	진로활동 B	합계
1학년	7	5	12
2학년	4	4	8
합계	11	9	20

이 조사에 참여한 학생 20명 중에서 임의로 선택한 한 명이 진로활동 B를 선택한 학생일 때, 이 학생이 1학년일 확률은? [3점]

→A →B

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{5}{9}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{7}{11}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{5}{20}}{\frac{9}{20}} = \frac{5}{9}$$

25. 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 네 자리의 자연수 중에서 임의로 하나의 수를 선택할 때, 선택한 수가 3500보다 클 확률은? [3점]

① $\frac{9}{25}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{11}{25}$ ④ $\frac{12}{25}$ ⑤ $\frac{13}{25}$

전체 ${}_5\Pi_4 = 5^4$

i) 천의 자리 3

3 5 _ _

$5 \times 5 = 25$

ii) 천의 자리 4, 5

_ _ _ _

$2 \times 5 \times 5 \times 5 = 250$

$\frac{275}{5^4} = \frac{11}{25}$

26. 빨간색 카드 4장, 파란색 카드 2장, 노란색 카드 1장이 있다. 이 7장의 카드를 세 명의 학생에게 남김없이 나누어 줄 때, 3가지 색의 카드를 각각 한 장 이상 받는 학생이 있도록 나누어 주는 경우의 수는? (단, 같은 색 카드끼리는 서로 구별하지 않고, 카드를 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [3점]

① 78 ② 84 ③ 90 ④ 96 ⑤ 102

① … 3가지 색 받는 학생…

${}_3C_1 = 3$

② … 파란색 분배

${}_3H_1 = {}_3C_1 = 3$

③ … 빨간색 분배

${}_3H_3 = {}_5C_3 = 10$

$\therefore 3 \cdot 3 \cdot 10 = 90$

27. 주사위 2개와 동전 4개를 동시에 던질 때, 나오는 주사위의 눈의 수의 곱과 앞면이 나오는 동전의 개수가 같을 확률은? [3점]

① $\frac{3}{64}$ ② $\frac{5}{96}$ ③ $\frac{11}{192}$ ④ $\frac{1}{16}$ ⑤ $\frac{13}{192}$

i) 앞면 4개
주사위 곱 4 (1,4), (2,2) (4,1) 3
동전 앞면 4개 $_4C_4$ 1
3가지

ii) 앞면 3개
주사위 곱 3 (1,3), (3,1) 2
동전 앞면 3개 $_4C_3$ 4
8가지

iii) 앞면 2개
주사위 곱 2 (1,2), (2,1) 2
동전 앞면 2개 $_4C_2$ 6
12가지

iv) 앞면 1개
주사위 곱 1 (1,1) 1
동전 앞면 1개 $_4C_1$ 4
4가지

전체 $6^2 \cdot 2^4 = 576$

$\therefore \frac{27}{576} = \frac{3}{64}$

28. 한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 3 이하이면 나온 눈의 수를 점수로 얻고, 나온 눈의 수가 4 이상이면 0점을 얻는다. 이 주사위를 네 번 던져 나온 눈의 수를 차례로 a, b, c, d라 할 때, 얻은 네 점수의 합이 4가 되는 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는? [4점]

① 187 ② 190 ③ 193 ④ 196 ⑤ 199

$(1,1,1,1) \Rightarrow$ 1가지

$(1,1,2,0) \Rightarrow \frac{4!}{2!} \cdot 3 = 36$가지

0은 4,5,6 가능!

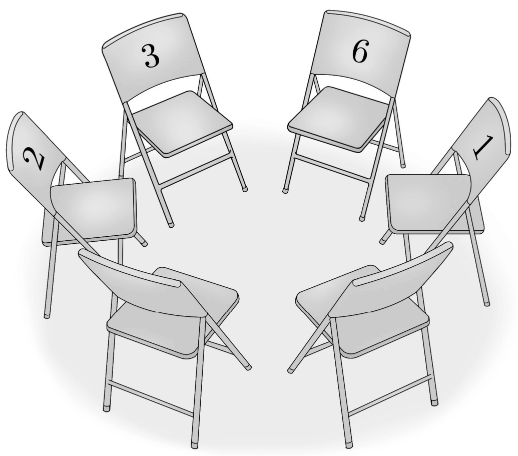
$(1,3,0,0) \Rightarrow \frac{4!}{2!} \cdot 3 \cdot 3 = 108$가지

$(2,2,0,0) \Rightarrow \frac{4!}{2!2!} \cdot 3 \cdot 3 = 54$가지

$\therefore 199$

단답형

29. 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6개의 의자가 있다. 이 6개의 의자를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열할 때, 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 곱이 12가 되지 않도록 배열하는 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점] 48



여사건 ★

3,4가 이웃함 ⇒ A

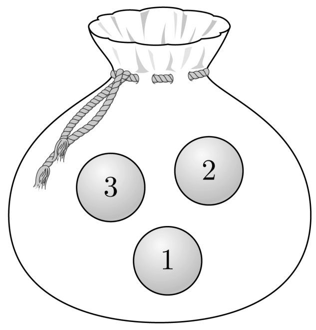
2,6이 이웃함 ⇒ B

$A+B-A\cap B = 2\cdot 4! + 2\cdot 4! - 4\cdot 3!$

$= 72$

$\therefore$ (전체) $-(A+B-A\cap B) = 5! - 72 = 48$

30. 숫자 1, 2, 3이 하나씩 적혀 있는 3개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 한다. 이 시행을 5번 반복하여 확인한 5개의 수의 곱이 6의 배수일 확률이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] 47



여사건

i) 한개의 숫자

⇒ 3

ii) 두개의 숫자

1) 1 2

4	1	⇒	5
3	2	⇒	10
2	3	⇒	10
1	4	⇒	5

⇒ 30

2) 1 3

〃 ⇒ 30개

전체 −(i)+ii))

$3^5 - 63 = 180$

$\therefore \frac{180}{243} = \frac{20}{27}$

＊ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}-n}$ 의 값은? [2점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+n+1}+n}{n^2+n+1-n^2} = 2$

24. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x=e^t+\cos t,\quad y=\sin t$$

에서 $t=0$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

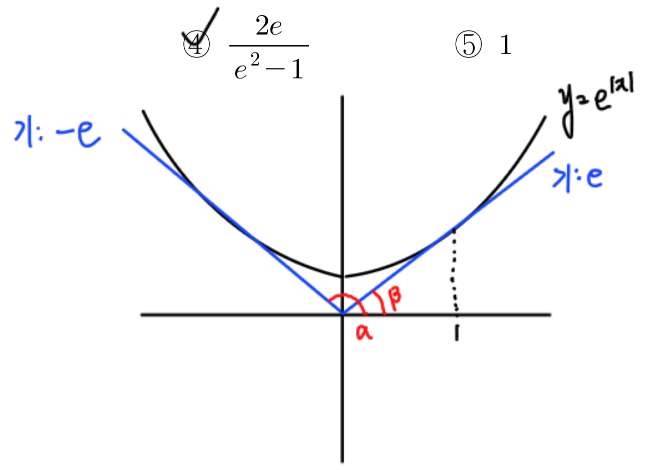
① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$　④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

$\frac{dx}{dt} = e^t - \sin t$　$\frac{dy}{dt} = \cos t$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos t}{e^t - \sin t}$　$t=0 \Rightarrow \frac{1}{1} = 1$

25. 원점에서 곡선 $y=e^{|x|}$ 에 그은 두 접선이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{e}{e^2+1}$ ② $\frac{e}{e^2-1}$ ③ $\frac{2e}{e^2+1}$ ④ $\frac{2e}{e^2-1}$ ⑤ 1



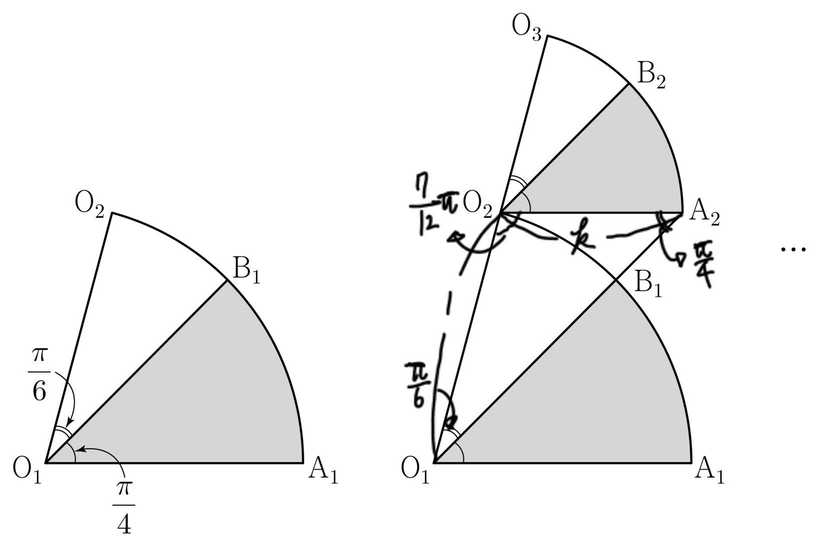
$\tan\alpha = -e$
$\tan\beta = e$

$\Rightarrow y = e^t(x-t) + e^t$ (0,0) 대입

$\therefore t=1$

$\Rightarrow \tan\theta = \tan(\alpha-\beta) = \frac{-e-e}{1+(-e)(e)} = \frac{2e}{e^2-1}$

26. 그림과 같이 중심이 O_1, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{5\pi}{12}$인 부채꼴 $\mathrm{O}_1\mathrm{A}_1\mathrm{O}_2$가 있다. 호 $\mathrm{A}_1\mathrm{O}_2$ 위에 점 B_1을 $\angle\mathrm{A}_1\mathrm{O}_1\mathrm{B}_1 = \frac{\pi}{4}$가 되도록 잡고, 부채꼴 $\mathrm{O}_1\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 점 O_2를 지나고 선분 $\mathrm{O}_1\mathrm{A}_1$에 평행한 직선이 직선 $\mathrm{O}_1\mathrm{B}_1$과 만나는 점을 A_2라 하자. 중심이 O_2이고 중심각의 크기가 $\frac{5\pi}{12}$인 부채꼴 $\mathrm{O}_2\mathrm{A}_2\mathrm{O}_3$을 부채꼴 $\mathrm{O}_1\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$과 겹치지 않도록 그린다. 호 $\mathrm{A}_2\mathrm{O}_3$ 위에 점 B_2를 $\angle\mathrm{A}_2\mathrm{O}_2\mathrm{B}_2 = \frac{\pi}{4}$가 되도록 잡고, 부채꼴 $\mathrm{O}_2\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2$에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]



R_1 R_2 $\cdots$

① $\frac{3\pi}{16}$ ② $\frac{7\pi}{32}$ ③ $\frac{\pi}{4}$ ④ $\frac{9\pi}{32}$ ⑤ $\frac{5\pi}{16}$

$S_1 = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$

$\angle \mathrm{A}_2\mathrm{O}_2\mathrm{O}_1 = \frac{7}{12}\pi$, $\angle \mathrm{O}_2\mathrm{A}_2\mathrm{O}_1 = \frac{\pi}{4}$

사인법칙 : $\frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{k}{\sin\frac{\pi}{6}} \Rightarrow k = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$R_1 : R_2$ 닮음비 $= 1 : \frac{\sqrt{2}}{2}$

넓이비 $= 1 : \frac{1}{2}$

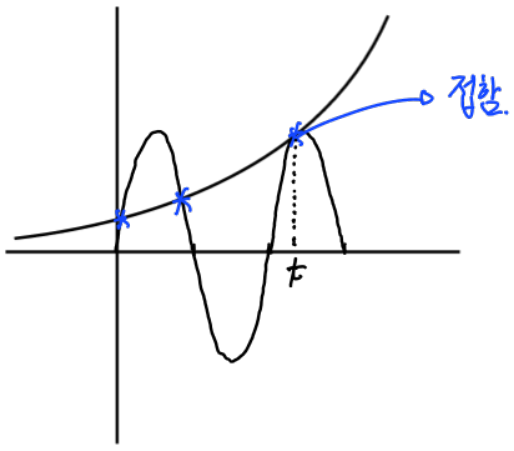
$\therefore \frac{\frac{\pi}{8}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{4}$

27. 두 함수

$$f(x)=e^{x}, \quad g(x)=k\sin x$$

에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 양의 실근의 개수가 3일 때, 양수 k의 값은? [3점]

① $\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{2}}$ ② $\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}}$ ③ $\sqrt{2}e^{2\pi}$
④ $\sqrt{2}e^{\frac{9\pi}{4}}$ ⑤ $\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{2}}$



$f'(x)=e^{x} \Rightarrow f'(t)=e^{t}, \ f(t)=e^{t}$

$g'(x)=k\cos x \Rightarrow g'(t)=k\cos t, \ g(t)=k\sin t$

① $e^{t}=k\sin t$
② $e^{t}=k\cos t$ $\Big\} \Rightarrow \sin t=\cos t$

$\therefore t=\frac{9}{4}\pi \ \left(\because 2\pi < t < \frac{5}{2}\pi\right)$

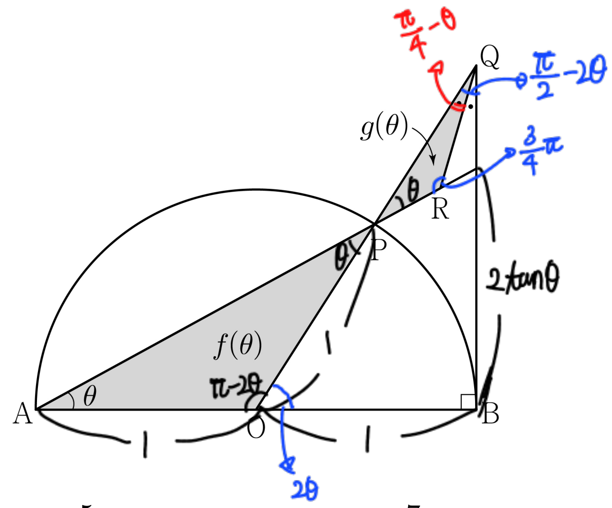
① 에 대입

$\Rightarrow e^{\frac{9}{4}\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}k$

$\therefore k=\sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}$

28. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 P가 있다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 점 B를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 직선 OP와 만나는 점을 Q라 하고, $\angle OQB$의 이등분선이 직선 AP와 만나는 점을 R라 하자. $\angle OAP=\theta$일 때, 삼각형 OAP의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PQR의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.

$\lim_{\theta\to 0+}\frac{g(\theta)}{\theta^{4}\times f(\theta)}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

이등변 $\triangle AOP \Rightarrow \angle APO=\theta, \ \angle AOP=\pi-2\theta$

$f(\theta)=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin(\pi-2\theta)=\frac{\sin2\theta}{2}$

$\overline{PQ}=\overline{OQ}-1=\sec2\theta-1$

Sine Law $\Rightarrow \frac{\sec2\theta-1}{\sin\frac{3}{4}\pi}=\frac{\overline{QR}}{\sin\theta}=\frac{\overline{PR}}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}$

$\overline{QR}=\sqrt{2}(\sec2\theta-1)\sin\theta$

$\overline{PR}=\sqrt{2}(\sec2\theta-1)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$

$g(\theta)=\frac{1}{2}\cdot\overline{PR}\cdot\overline{QR}\cdot\sin\frac{3}{4}\pi=(\sec2\theta-1)^{2}\sin\theta\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\sin\frac{3}{4}\pi$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^{4}\cdot f(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{(\sec2\theta-1)^{2}}{16\theta^{4}}\cdot16\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\cdot\sin\frac{3}{4}\pi}{\frac{\theta^{4}}{\theta^{4}}\cdot\frac{\sin2\theta}{2\theta}}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}\cdot16\cdot\frac{1}{2}}{1}=2$$

단답형

29. $t>2e$인 실수 t에 대하여 함수 $f(x)=t(\ln x)^2-x^2$이 $x=k$에서 극대일 때, 실수 k의 값을 $g(t)$라 하면 $g(t)$는 미분가능한 함수이다. $g(\alpha)=e^2$인 실수 α에 대하여 $\alpha\times\{g'(\alpha)\}^2=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

17

$f'(x)=2t\left(\frac{\ln x}{x}\right)-2x$

$f'(k)=2t\left(\frac{\ln k}{k}\right)-2k=0 \Rightarrow t\ln k=k^2$

$t\ln\{g(t)\}=\{g(t)\}^2$

t에 대해 미분

$g(\alpha)=e^2 \Rightarrow 2\alpha=e^4 \qquad \therefore \alpha=\frac{e^4}{2}$

$\ln\{g(t)\}+t\cdot\frac{g'(t)}{g(t)}=2\cdot g(t)\,g'(t)$

$g\left(\frac{e^4}{2}\right)=e^2 \Rightarrow 2+\frac{e^4}{2}\cdot\frac{g'\left(\frac{e^4}{2}\right)}{e^2}=2\cdot e^2\cdot g'\left(\frac{e^4}{2}\right)$

$\therefore g'\left(\frac{e^4}{2}\right)=\frac{4}{3e^2}$

$\therefore \alpha\times\{g'(\alpha)\}^2=\frac{e^4}{2}\cdot\frac{16}{9e^4}=\frac{8}{9}$

$p+q=17$

30. $t>\frac{1}{2}\ln 2$인 실수 t에 대하여 곡선 $y=\ln(1+e^{2x}-e^{-2t})$과 직선 $y=x+t$가 만나는 서로 다른 두 점 사이의 거리를 $f(t)$라 할 때, $f'(\ln 2)=\frac{q}{p}\sqrt{2}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

11

두 점의 x좌표 $=\alpha, \beta$

$f(t)=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(\beta-\alpha)^2}=\sqrt{2}(\beta-\alpha)$

$x+t=\ln(1+e^{2x}-e^{-2t}) \Rightarrow e^{x+t}=1+e^{2x}-e^{-2t}$

$\Leftrightarrow e^{2x}-e^t\cdot e^x+1-e^{-2t}=0$

$e^x=k$ 치환 $\Rightarrow k^2-e^tk+1-e^{-2t}=0$

$e^\alpha, e^\beta=\frac{e^t\pm\sqrt{e^{2t}-4(1-e^{-2t})}}{2} \Rightarrow \alpha,\beta=\ln\left(\frac{e^t\pm\sqrt{e^{2t}-4(1-e^{-2t})}}{2}\right)$

$f(t)=\sqrt{2}\left(\ln\left(\frac{e^t+\sqrt{e^{2t}-4(1-e^{-2t})}}{2}\right)-\ln\left(\frac{e^t-\sqrt{e^{2t}-4(1-e^{-2t})}}{2}\right)\right)$

$=\sqrt{2}\left(\ln\left(\frac{\left(e^t+\sqrt{e^{2t}-4(1-e^{-2t})}\right)^2}{4(1-e^{-2t})}\right)\right)$

$-\ln 4-\ln(1-e^{-2t})$

$f'(t)=\sqrt{2}\cdot\left(2\cdot\frac{e^t+\frac{2e^{2t}-8e^{-2t}}{2\sqrt{e^{2t}-4(1-e^{-2t})}}}{e^t+\sqrt{e^{2t}-4(1-e^{-2t})}}-\frac{2\cdot e^{-2t}}{1-e^{-2t}}\right)$

$f'(\ln 2)=\sqrt{2}\cdot\left(2\cdot\frac{2+\frac{8-2}{2\sqrt{4-4(1-\frac{1}{4})}}}{2+\sqrt{4-4(1-\frac{1}{4})}}-\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}\right)$

$=\sqrt{2}\cdot\left(2\cdot\frac{5}{3}-\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{3}\sqrt{2}$

$\therefore p+q=11$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.