수학, 알고 있니?

이차함수의 최대최소 구하기

-> 함수의 최대최소 구하기의 기초

최대최소가 무섭다면 오세요!

안녕하세요 수알입니다

저번 시간에 이어서 수능 함수의 기초를 다지기 위해

이차함수 최대최소 구하기에 대해 공부하겠습니다

이차함수뿐만 아니라 모든 함수에서

통할 수 있는 기본 내용까지 다룰 예정이며

실제로 수능 범위에서 어떤 식으로 활용되는지

예시를 통해 알아보겠습니다!

그럼 시작하겠습니다.

문제에서 함수의 최대최소를 구하라고 하면

무엇부터 하고 싶어야 할까요?

바로 앞선 시간에 했던

그래프 그리기

입니다

정말 너무너무 중요합니다

이차함수뿐만 아니라

삼,사차 다항함수

지수로그함수

삼각함수

유리함수

무리함수

어떤 함수든 상관없이

함수의 최대최소를 묻는다면

그래프를 그리고 싶어야 합니다

그래서 삼사차함수의 최대최소를 구할 때

미분부터 하는겁니다

그래프 그려야 하니까요!

그런데 특정 함수의 최솟값 혹은 최댓값이

존재할수도 하지 않을수도 있는데요

이 때, 정의역을 폐구간 [a,b]으로

제한해주면

최대최소의 정리에 따라

무조건 최대 최소가 존재하게 됩니다

많은 문제들이 이런 방법을 써서

최대 최소를 구하게끔 합니다

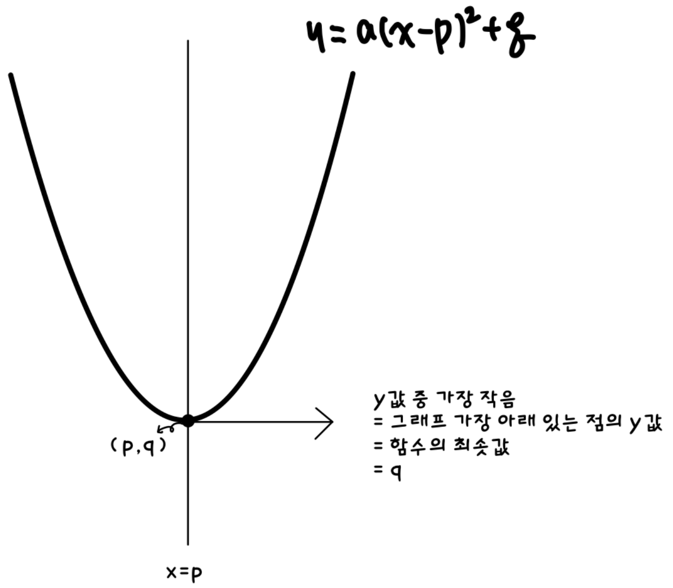
이제 가장 기본적인

이차함수의 최대최소부터 알아보겠습니다

<$y = a(x-p)^2 + q$ 의 최대 최소>

(실수 전체에서 = 모든 x에 대하여)

a>0 일 때



최고차항의 계수가 양수일 때는

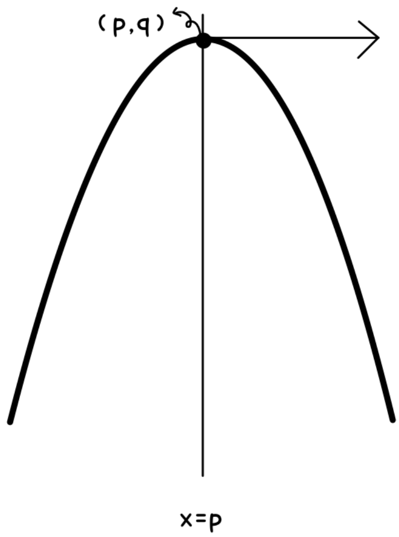
그림과 같이 아래로볼록으로 그래프가 그려지고

그래프 가장 아래있는 점의 y값이 최솟값(q) 입니다!

또한, 함수가 최소일 때 x값은 p 입니다

최댓값은 존재하지 않습니다

a<0 일 때



y값 중 가장 큼
= 그래프 가장 위에 있는 점의 y값
= 함수의 최댓값
= q

최고차항의 계수가 음수일 때는

그림과 같이 위로볼록으로 그래프가 그려지고

그래프 가장 위에 있는 점의 y값이 최댓값(q) 입니다!

또한, 함수가 최대일 때 x값은 p 입니다

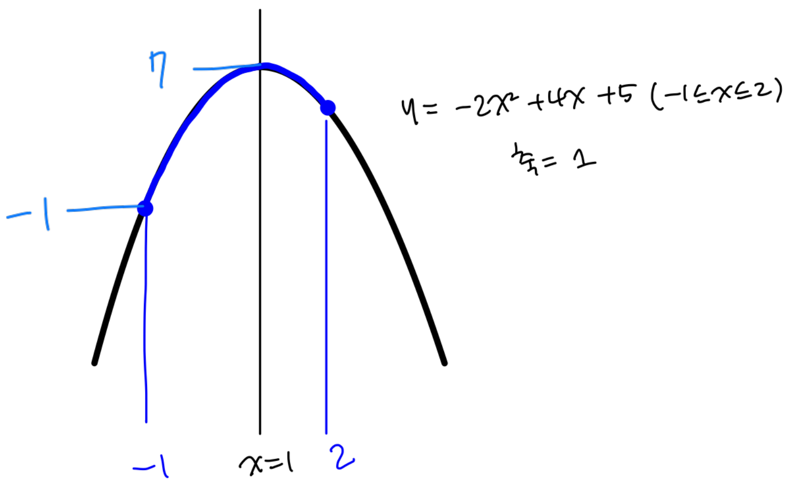
최솟값은 존재하지 않습니다

이번엔 정의역을 제한해보겠습니다

$$y = -2x^2 + 4x + 5(-1 \leq x \leq 2)$$

의 최대최소를 구하려면

역시 그래프!! 그릴 생각 해야합니다



위의 파란색으로 표시된 부분이 해당 그래프이며

축으로부터 떨어진 정도가

2보다는 -1이 멀리 떨어져 있으므로

-1일 때 함숫값이 2일 때보다 더 아랫쪽에 있음을 알 수 있습니다

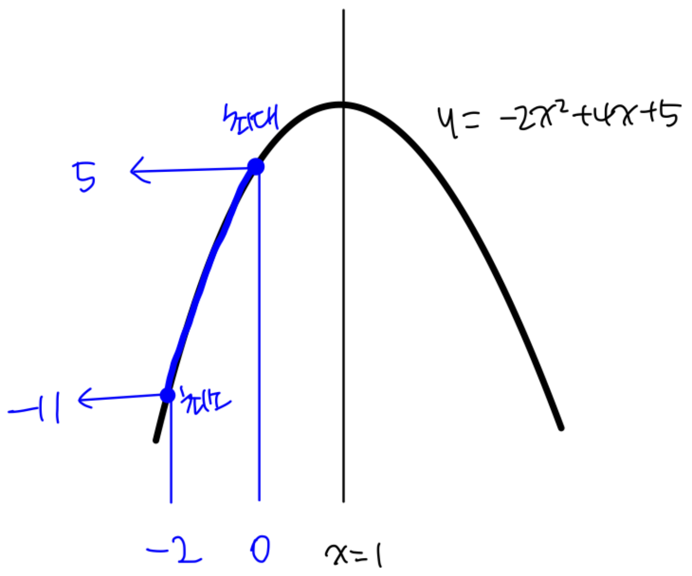
그래프의 가장 위에 있는 점의 x좌표인 1일 때 함수는 최댓값 7을 갖고

그래프의 가장 아래에 있는 점의 x좌표인 -1일 때 함수는 최솟값 -1을 갖습니다

이처럼 그래프를 그리고 최대와 최소가 되는 순간을 판단해주면 됩니다

이번엔 같은 함수식에서 정의역을 축을 포함하지 않게 잡아보겠습니다

$$y = -2x^2 + 4x + 5(-2 \leq x \leq 0)$$



파란색으로 표시된 부분이 실제 그래프이며

그래프의 가장 위에 있는 점의 x좌표인 0일 때 함수는 최댓값 5을 갖고

그래프의 가장 아래에 있는 점의 x좌표인 -2일 때 함수는 최솟값 -11을 갖습니다

이 때, 주목할 점은

이차함수의 최대최소가 항상 꼭지점과 관련있는 것은 아니라는 것입니다

반드시 정의역에 맞게 그래프를 그린 후 최대 최소를 판단해주세요

수1에서의 연계를 고려해서

어떻게 활용될 수 있는지 알아봅시다

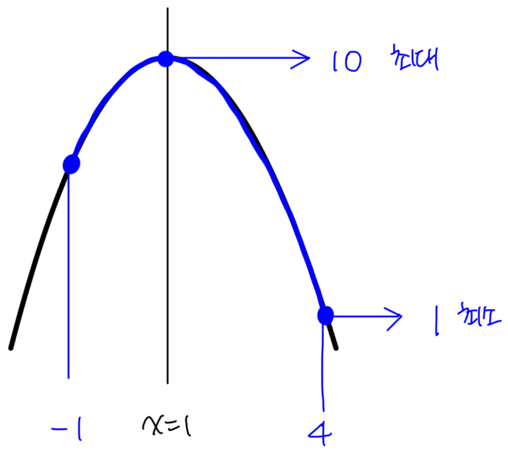
<로그함수와의 연계>

$y = log(-x^2+2x+9)(-1 \le x \le 4)$ 의 최대 최소는?

이 함수를 $y = logx$ (겉함수) 에 $y = -x^2+2x+9$ (속함수) 를 합성한 것으로 이해해봅시다

우선 로그의 진수부분 (속함수) 에 있는

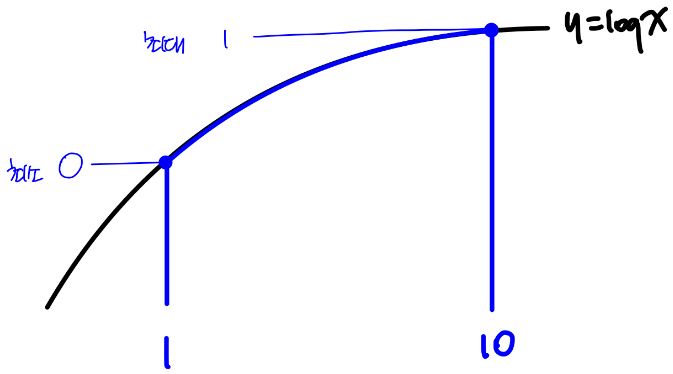
$-x^2+2x+9$ 의 최대 최소를 구해봅시다



그림과 같이 $1 \le -x^2+2x+9 \le 10$ 임을 알 수 있습니다

그럼 위 문제는

$1 \leq x \leq 10$ 에서 $y = logx$ 의 최대최소를 구하는 문제로 바뀌고



다음과 같이 최댓값은 1 최솟값은 0으로 결정됩니다

다음은 <지수함수와 연계>

$y = (a^x)^2 - 4a^x + 5$ 의 최대 최소를 구하려면

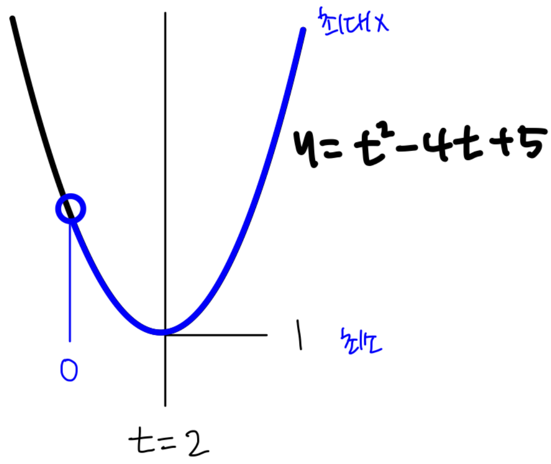
먼저 함수를 $y = x^2 - 4x + 5$ (겉함수) 에 $y = a^x$ (속함수) 를 합성한 것으로 이해합니다

속함수 a^x 는 모든 x에 대하여 0보다 크므로

$a^x = t$ 로 치환하면

$y = t^2 - 4t + 5$ 의 $t > 0$ 에서의 최대최소를 구하는 문제로 바뀝니다

그래프 상황을 그려보면



위 그림과 같이 함수는 t=2 즉, $x = log_a 2$ 일 때 최솟값 1을 가지며

최대는 가지지 않는 것을 알 수 있습니다

이외에도 이차함수의 최대최소 개념은 여러 상황에서 응용될 수 있습니다

삼각함수와도 합성이 가능하고

문제 상황에서 변수를 주고 그에 대한 이차식이 세워지면

이차함수의 최대최소의 개념을 활용하여 문제를 풀 수 있어야 합니다

예를 들어, 문제 상황에서 식을 세우다보니

$-a^2 + 3a, a > 0$ 의 최댓값을 구해야 한다면

$-a^2 + 3a$ 를 a에 대한 함수로 해석해서

a가 $\frac{3}{2}$ 일 때 최댓값을 가지므로 $\frac{9}{4}$ 가 최댓값이 됩니다.

이번 칼럼을 정리해보겠습니다

1. 함수의 최대최소를 물어보면

반.드.시

그래프!!!부터 그려서 최대최소의 위치를 판단해야 한다

2. 이차함수의 최대최소는 축을 기준으로 하는 특수성이 있다

정의역에 축의 x값이 포함되는지 아닌지에 유의하자

3. 지수로그, 삼각함수 등 다양한 함수들과

이차함수가 합성된 함수의 최대최소를 구할 때가 많다

이 때, 합성된 속함수의 정의역에 맞게 치역을 구하고

그 치역을 겉함수의 정의역으로 이해해서 문제를 해결하자

다음 편은 이차함수와 방정식 부등식에 대해 다뤄보겠습니다

-끝-