1. 2009 교육청 (2점)

$9^{-\frac{1}{2}}$의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ 1
④ $\sqrt{3}$ ⑤ 3

2. 2009 교육청 (2점)

$3^{\frac{1}{3}} \times 9^{\frac{2}{3}} \div 81^{-\frac{1}{3}}$의 값은?

① 81 ② 27 ③ $3^{\frac{5}{3}}$
④ 3 ⑤ $3^{\frac{1}{3}}$

3. 2007 교육청 (2점)

$\sqrt{3} \times 27^{\frac{1}{2}}$의 값은?

① $3\sqrt{3}$ ② 9 ③ $9\sqrt{3}$
④ 27 ⑤ $27\sqrt{3}$

4. 2005 교육청 (2점)

$6^{\frac{4}{3}} \times 2^{\frac{5}{3}} \times 3^{-\frac{1}{3}}$ 의 값은?

① 6 ② 12 ③ 24
④ 36 ⑤ 54

5. 2006 교육청 (2점)

$\frac{54^2 \times 21^3}{28}$의 값은?

① $3^8 \times 7$ ② $3^8 \times 7^2$ ③ $3^8 \times 7^3$
④ $3^9 \times 7$ ⑤ $3^9 \times 7^2$

6. 2006 교육청 (2점)

$\left(\frac{3^{\sqrt{5}}}{9}\right)^{\sqrt{5}+2}$의 값은?

① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ 3
④ 9 ⑤ $3^{\sqrt{5}}$

7. 2005 교육청 (2점)

$\frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{32} \times \sqrt[3]{27}$ 의 값은?

① $6\sqrt{3}$ ② 12 ③ $9\sqrt{2}$
④ $9\sqrt{3}$ ⑤ 18

8. 2006 교육청 (2점)

$\sqrt[3]{2\sqrt{2}} \times \sqrt[6]{8}$ 의 값은?

① 1 ② $\sqrt[3]{2}$ ③ $\sqrt{2}$
④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

9. 2010 평가원 (2점)

$\sqrt[3]{8} \div 2^{-2}$ 의 값은?9.

① 2 ② 4 ③ 8
④ 16 ⑤ 32

10. 2004 평가원 (2점)

$\{(-2)^2\}^{\frac{1}{2}} \times (\sqrt{2})^2$을 간단히 하면?

① -4 ② $-2\sqrt{2}$ ③ 2
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

11. 2004 평가원 (2점)

등식 $\dfrac{\sqrt[4]{a^6}}{\sqrt{a}\ \sqrt[3]{a}} = a^{\square}$을 만족하는 □의 값은? (단, $a>0$)

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

12. 2006 평가원 (2점)

$(3 \cdot 9^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{5}}$의 값은?

① ${}^{3}\sqrt{3}$ ② ${}^{3}\sqrt{3^2}$ ③ 3
④ ${}^{3}\sqrt{3^4}$ ⑤ ${}^{3}\sqrt{3^5}$

13. 2005 평가원 (2점)

$4^{-\frac{1}{2}} \times 8^{\frac{5}{3}}$ 의 값은?

① 2 ② 4 ③ 8
④ 16 ⑤ 32

14. 2007 교육청 (2점)

$8^{\frac{4}{3}} \times 4^{\frac{2}{3}} \div 2^{\frac{1}{3}}$ 의 값은?

① 2^3 ② 2^4 ③ 2^5
④ 2^6 ⑤ 2^7

2010 교육청 (2점)

15. $2^{\frac{2}{3}} \times 5^{-\frac{1}{3}} \times 10^{\frac{4}{3}}$의 값은?

① 2 ② 5 ③ 10
④ 20 ⑤ 40

16. 2004 교육청 (2점)

$8^{\frac{5}{6}} \times 4^{-\frac{1}{4}} \div 2^{\frac{1}{2}}$의 값은?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

17. 2009 교육청 (2점)

$8^{-\frac{1}{2}} \times \sqrt{2^5}$의 값은?

① $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 2
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

18. 2008 교육청 (2점)

$\sqrt[3]{(8\times27)^2}$ 의 값은?

19. 2008 교육청 (2점)

$\sqrt[3]{32}\times\sqrt{2}\div\sqrt[3]{4}$ 의 값은?

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$
④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

20. 2008 교육청 (2점)

$\sqrt[4]{9}\div\sqrt{27}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ 의 값은?

① 3 ② $3^{\frac{4}{3}}$ ③ $3^{\frac{5}{3}}$
④ 9 ⑤ $3^{\frac{7}{3}}$

21. 2008 평가원 (2점)

$(\sqrt{2\sqrt{6}})^4$의 값은?

① 16 ② 18 ③ 20
④ 22 ⑤ 24

22. 2008 교육청 (2점)

$2^{-\frac{1}{3}}\times4^{\frac{2}{3}}$ 의 값은?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

23. 2010 교육청 (2점)

$2^{\frac{2}{3}}\times5^{-\frac{1}{3}}\times10^{\frac{4}{3}}$ 의 값은?

① 2 ② 5 ③ 10
④ 20 ⑤ 40

24. 2010 교육청 (2점)

$\sqrt[5]{3^2}=\sqrt{9^k}$ 일 때, 상수 k의 값은?

① $\frac{3}{10}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{7}{10}$

25. 2010 평가원 (2점)

$\sqrt[5]{3^2}=\sqrt{9^k}$ 일 때, 상수 k의 값은?

① $\frac{3}{10}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{7}{10}$

26. 2010 교육청 (3점)

$4^x=2^y$을 만족하는 0이 아닌 두 실수 x, y에 대하여, $\frac{y}{x}+\frac{2x}{y}$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

27. 2007 평가원 (2점)

$2^a=3$, $2^b=45$ 일 때, 2^{2a-b} 의 값은?

① 5 ② 4 ③ 3
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

28. 2010 교육청 (3점)

0이 아닌 세 실수 a, b, c가 $\frac{a+b}{4}=\frac{b+c}{7}=\frac{c+a}{9}$를 만족시킬 때, $(2^a\times 2^b)^{\frac{1}{c}}$ 의 값은?

① $\sqrt[4]{2}$ ② $\sqrt[3]{2}$ ③ $\sqrt[3]{4}$
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

29. 2007 교육청 (2점)

$9^x=2$일 때, $\left(\frac{1}{27}\right)^{-4x}$의 값은?

① $\frac{1}{64}$ ② $\frac{1}{16}$ ③ 16
④ 64 ⑤ 256

30. 2005 교육청 (2점)

$2^x=7$, $7^{\frac{y}{2}}=16$ 일 때, xy 의 값은?

① 2 ② 4 ③ 8
④ 16 ⑤ 32

31. 2002 평가원 (2점)

다음 등식이 성립하도록 $\square$ 안에 알맞은 값을 정하시오.

$$2^{17}+4^8+16^4=2^{\square}$$

32. 2004 평가원 (3점)

$(a^{\sqrt{3}})^{2\sqrt{3}}\div a^3\times(\sqrt[3]{a})^{36}=a^k$ 일 때, k 의 값을 구하시오.
(단, $a>0$, $a\neq 1$)

33. 2002 평가원 (3점)

다음 식의 값은?

$$\frac{1}{2^{-100}+1}+\frac{1}{2^{-99}+1}+\cdots+\frac{1}{2^{-1}+1}+\frac{1}{2^0+1}+\frac{1}{2^1+1}+\cdots+\frac{1}{2^{99}+1}+\frac{1}{2^{100}+1}$$

① 50 ② $\frac{101}{2}$ ③ 100
④ $\frac{201}{2}$ ⑤ 200

34. 2006 교육청 (3점)

1 이 아닌 양수 a 에 대하여 $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}=a^{\frac{n}{m}}$ 일 때, $m+n$ 의 값을 구하시오. (단, m 과 n 은 서로소)

35. 2009 교육청 (3점)

$a>0$, $a\neq 1$에 대하여 $\left\{\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{\sqrt[3]{a^4}}}\times\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^{-4}}\right\}^6=a^k$일 때, 상수 k의 값을 구하시오.

36. 2009 교육청 (3점)

2의 네제곱근 중 양수인 것을 x라 할 때, x^n이 세 자리의 자연수가 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합은?

① 96 ② 97 ③ 98
④ 99 ⑤ 100

37. 2005 평가원 (3점)

$a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt[3]{3}$ 일 때, $\sqrt[6]{6}$ 을 a, b로 나타낸 것은?

① $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}$ ② $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}$ ③ $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{6}}$
④ $a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{3}}$ ⑤ $a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}$

38. 2004 평가원 (3점)

$a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt[4]{3}$ 일 때, $\sqrt[8]{6}$ 을 a, b로 나타내면?

① $\sqrt[4]{a}\ \sqrt{b}$ ② $\sqrt[3]{a}\ \sqrt{b}$ ③ $\sqrt{a}\ b$
④ a^2b ⑤ a^4b^2

39. 2005 교육청 (3점)

$abc=24$ 인 세 실수 a, b, c가 있다. $2^a=3^2$, $3^b=5^3$ 일 때, 5^c 의 값을 구하시오.

40. 2006 평가원 (3점)

세 양수 a, b, c에 대하여 $a^6=3$, $b^5=7$, $c^2=11$일 때, $(abc)^n$이 자연수가 되는 최소의 자연수 n의 값을 구하시오.

41. 2006 평가원 (3점)

$\sqrt{\dfrac{9^7+3^{10}}{9^4+3^4}}$ 의 값을 구하시오.

42. 2006 교육청 (3점)

집합 $A=\left\{x \mid x=\left(\dfrac{1}{256}\right)^{\frac{1}{n}},\ n\text{은 0이 아닌 정수}\right\}$의 원소 중 자연수인 것의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

43. 2004 평가원 (3점)

$a=2^{\frac{2}{3}}$, $b=3^{\frac{1}{6}}$일 때, $a^m b^n=36$을 만족하는 두 자연수 m, n의 합 $m+n$의 값을 구하시오.

44. 2006 교육청 (3점)

$x+x^{-1}=3$일 때, $x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}$의 값은?

① $\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ 4
④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{5}$

45. 2009 교육청 (3점)

실수 a, b에 대하여 $3^a=12^b=6$이 성립할 때, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$의 값은?

① 2 ② $\frac{5}{3}$ ③ $\frac{4}{3}$
④ 1 ⑤ $\frac{2}{3}$

46. 2009 교육청 (3점)

세 양수 a, b, c가 $a^x=b^{2y}=c^{3z}=7$, $abc=49$를 만족할 때, $\frac{6}{x}+\frac{3}{y}+\frac{2}{z}$의 값은?

① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

47. 2009 평가원 (3점)

실수 a가 $\frac{2^a+2^{-a}}{2^a-2^{-a}}=-2$를 만족시킬 때, 4^a+4^{-a}의 값은?

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{10}{3}$ ③ $\frac{17}{4}$
④ $\frac{26}{5}$ ⑤ $\frac{37}{6}$

48. 2004 평가원 (3점)

$x=2^{\frac{1}{4}}+2^{-\frac{1}{4}}$일 때, $\sqrt{x^2-4}+x$의 값은?

① $2^{\frac{1}{4}}$ ② $2^{\frac{3}{4}}$ ③ $2^{\frac{5}{4}}$
④ $2^{\frac{7}{4}}$ ⑤ $2^{\frac{9}{4}}$

49. 2008 교육청 (3점)

$x=\sqrt[4]{2}-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$일 때, $\sqrt{x^2+4}$의 값은?

① $\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ② $\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}$
③ $\sqrt[4]{2}-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ ④ $\sqrt[4]{2}+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$
⑤ $\sqrt[8]{2}+\frac{1}{\sqrt[8]{2}}$

50. 2007 평가원 (3점)

좌표평면에서 두 점 $(2,\ 0)$, $(0,\ 4)$를 지나는 직선 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 등식 $4^a-2^b=6$을 만족할 때, 4^a+2^b의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

51. 2008 평가원 (3점)

함수 $f(x)=2^{-x}$에 대하여 $f(2a)f(b)=4$, $f(a-b)=2$ 일 때, $2^{3a}+2^{3b}$의 값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

52. 2007 교육청 (3점)

$x-y=2$, $2^x+2^{-y}=5$일 때, 8^x+8^{-y}의 값은?

① 61 ② 62 ③ 63
④ 64 ⑤ 65

53. 2006 교육청 (3점)

양의 실수 a, b에 대하여 연산 ◎를 $a◎b=a^{2b}$이라 정의할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고르면?

[보 기]
ㄱ. $a◎1=1◎a$
ㄴ. $\frac{1}{a}◎b=\frac{1}{a◎b}$
ㄷ. $a◎\left(\frac{1}{2}b\right)=\frac{1}{2}(a◎b)$

① ㄱ ② ㄴ
③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

54. 2005 교육청 (3점)

두 양의 실수 a, b에 대하여 연산 $*$를 $a*b=\begin{cases} a^b & (a<b) \\ b^a & (a \geqq b) \end{cases}$라 정의할 때, $(2*\sqrt{2})*2\sqrt{2}$의 값은?

① $2^{\sqrt{2}}$ ② $2^{\frac{3}{2}}$ ③ $2^{2\sqrt{2}}$
④ 2^4 ⑤ 2^8

55. 2007 교육청 (3점)

다음 식을 간단히 한 것은?

$$\left(2^{x+y}+2^{x-y}\right)^2-\left(2^{x+y}-2^{x-y}\right)^2$$

① 2^{2x} ② 2^{2x+2} ③ 2^{2x+2y}
④ 2^{-2y} ⑤ 2^{-2y+2}

56. 2009 교육청 (3점)

양의 실수 전체의 집합에서 연산 $*$을 $a*b=a^b b^{-\frac{a}{2}}$으로 정의하자. $(2*4)*x=8x^{-2}$일 때, x의 값은 ?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1
④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

57. 2010 교육청 (3점)

$P_n=3^{\frac{1}{n(n+1)}}$에 대하여 $P_1\times P_2\times P_3\times\cdots\times P_{2010}=3^k$일 때, 상수 k의 값은? (단, n은 자연수이다.)

① $\frac{2009}{2010}$ ② $\frac{2010}{2011}$ ③ 1
④ $\frac{2011}{2010}$ ⑤ $\frac{2010}{2009}$

58. 2010 교육청 (3점)

$1 \leq m \leq 3$, $1 \leq n \leq 8$인 두 자연수 m, n에 대하여 $\sqrt[3]{n^m}$이 자연수가 되도록 하는 순서쌍 (m, n)의 개수는?

① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

59. 2006 교육청 (3점)

육안으로 본 별의 밝기를 겉보기 등급, 그 별이 10(pc)의 거리에 있다고 가정했을 때의 밝기를 절대 등급이라 한다. 어떤 별이 지구로부터 r(pc)만큼 떨어져 있을 때 겉보기 등급 m과 절대 등급

M은 $\left(\frac{r}{10}\right)^2 = 100^{\frac{1}{5}(m-M)}$

을 만족한다. '데네브'라는 별은 지구로부터 $10^{2.7}$(pc)만큼 떨어져 있고 겉보기 등급은 1.3이다. 이 별의 절대 등급은? (단, pc은 거리를 나타내는 단위이다.)

① -3.6 ② -4.8 ③ -6.0
④ -7.2 ⑤ -8.4

60. 2008 교육청 (3점)

양수기로 물을 끌어올릴 때, 펌프의 1분당 회전수 N, 양수량 Q, 양수할 높이 H와 양수기의 비교회전도 S 사이에는 다음과 같은 관계가 있다고 한다.

$S = NQ^{\frac{1}{2}}H^{-\frac{3}{4}}$

(단, N, Q, H의 단위는 각각 rpm, m^3/분, m이다.)
펌프의 1분당 회전수가 일정한 양수기에 대하여 양수량이 24, 양수할 높이가 5일 때의 비교회전도를 S_1, 양수량이 12, 양수할 높이가 10일 때의 비교회전도를 S_2라 하자. $\frac{S_1}{S_2}$의 값은?

① $2^{\frac{3}{4}}$ ② $2^{\frac{7}{8}}$ ③ 2
④ $2^{\frac{9}{8}}$ ⑤ $2^{\frac{5}{4}}$

61. 2008 교육청 (3점)

다음은 어느 인터넷 사이트의 지도 상단에 있는 버튼의 기능을 설명한 것이다.

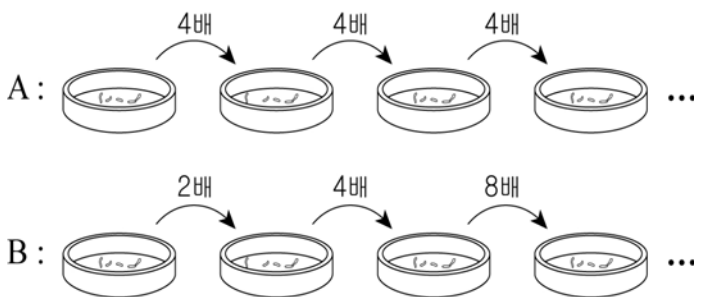
Ⅰ. 확대 버튼을 한 번 클릭할 때마다 지도가 a배로 확대되고, 3번 클릭하면 클릭 전의 2배로 확대된다.
Ⅱ. 축소 버튼을 한 번 클릭할 때마다 지도가 b배로 축소되고, 3번 클릭하면 클릭 전의 $\frac{1}{2}$배로 축소된다.

확대 버튼을 4번, 축소 버튼을 2번 클릭하면 클릭전 지도의 k배가 된다. 이 때, k의 값은?

① $2^{\frac{1}{3}}$ ② $2^{\frac{2}{3}}$ ③ 2
④ $2^{\frac{4}{3}}$ ⑤ $2^{\frac{5}{3}}$

62. 2006 교육청 (3점)

어느 연구소에서 미생물 A, B의 개체수의 변화량을 조사하였다. 어느 날 정오에 조사한 미생물 A와 B의 개체수는 각각 5120, 1이었다. 그 후 미생물 A는 시간당 4배로 일정하게 증가하였고, 미생물 B는 시간당 2배, 4배, 8배, 16배…로 증가하였다. 미생물 A의 개체수가 미생물 B의 개체수의 10배가 되는 것은 오후 몇 시인가?



① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

63. 2002 평가원 (3점)

철수가 가지고 있는 계산기는 [√] 키를 누르면 화면에 나타나 있는 양수의 양의 제곱근을 계산하여 그 값을 화면에 나타낸다. 아래와 같은 순서로 키를 눌렀을 때 화면에 나타나는 값은?

[2] [√] [√] [X] [4] [=]

① $2^{\frac{3}{4}}$ ② $2^{\frac{5}{4}}$ ③ $2^{\frac{7}{4}}$
④ $2^{\frac{9}{4}}$ ⑤ $2^{\frac{11}{4}}$

64. 2009 교육청 (3점)

과거 n년 동안 매출액이 a원에서 b원으로 변했을 때 연평균 성장률은 (연평균 성장률)$=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}-1$ 로 나타내어진다. 다음은 두 회사 A, B의 매출액을 나타낸 표이다.

(단위 억 원)

회사명	1998년 말	2008년 말
A	100	200
B	121	484

이때, 1998년 말부터 2008년 말까지 10년 동안 B 회사의 연평균 성장률은 A 회사의 k배이다. $100k$의 값을 구하시오.

(단, $2^{\frac{11}{10}}=2.14$로 계산한다.)

65. 2007 평가원 (4점)

2 이상인 두 자연수 a, b에 대하여 $R(a, b)$를 $R(a, b)=\sqrt[a]{b}$로 정의할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

[보 기]
ㄱ. $R(16, 4)=R(8, 2)$
ㄴ. $R(a, 5)\cdot R(b, 5)=R(a+b, 5)$
ㄷ. $R(a, b)=k$이면 $a=\log_k b$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

66. 2005 교육청 (4점)

$f(n)=a^{\frac{1}{n}}$ (단, $a>0$, $a\neq 1$)일 때
$f(2\cdot 3)\times f(3\cdot 4)\times\cdots\times f(9\cdot 10)=f(k)$를 만족하는 상수 k에 대하여 $10k$의 값을 구하시오.

67. 2009 교육청 (4점)

$3^{2x}-3^{x+1}=-1$일 때, $\dfrac{3^{4x}+3^{-4x}+1}{3^{2x}+3^{-2x}+1}$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

68. 2009 교육청 (4점)

$2^A=3,\ 3^B=5,\ 7^C=27$일 때, 세 수 $A,\ B,\ C$의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $A<B<C$ ② $A<C<B$ ③ $B<A<C$
④ $B<C<A$ ⑤ $C<B<A$

69. 2004 평가원 (4점)

$x^a=y^b=xy$ 인 관계가 성립할 때, $\dfrac{2(a+b)}{ab}$ 의 값은?

(단, x, y는 1이 아닌 양수, $xy\neq 1$)

① $\dfrac{1}{2}$ ② 1 ③ $\dfrac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\dfrac{5}{2}$

70. 2004 평가원 (4점)

어떤 전자레인지로 피자 n조각을 굽는데 걸리는 시간 t(분)는

$$t=1.2\times n^{0.5}$$

으로 주어진다고 한다. 이 전자레인지로 피자 8조각을 굽는데 걸리는 시간은 피자 2조각을 굽는데 걸리는 시간의 몇 배인가?

① 1배 ② $\sqrt{2}$ 배 ③ 2배
④ $2\sqrt{2}$ 배 ⑤ 4배

71. 2006 교육청 (4점)

어느 도시의 t년도 인구수를 $P\times 10^6$(명)이라 하면

$$P=5\cdot 2^{\frac{t-2001}{15}}$$

인 관계가 성립한다고 한다. 이 도시의 인구수가 2006년 인구수의 2배가 되는 해는?

① 2017년 ② 2019년 ③ 2021년
④ 2023년 ⑤ 2025년

72. 2009 교육청 (4점)

원기둥 모양의 수도관에서 단면인 원의 넓이를 S, 원의 둘레의 길이를 L이라 하고, 수도관의 기울기를 I라 하자. 이 수도관에서 물이 가득 찬 상태로 흐를 때 물의 속력을 v라 하면

$$v=c\left(\frac{S}{L}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot I^{\frac{1}{2}}\ \text{(단, } c\text{는 상수이다.)}$$

이 성립한다고 한다.
단면인 원의 반지름의 길이가 각각 a, b인 원기둥 모양의 두 수도관 A, B에서 물이 가득 찬 상태로 흐르고 있다. 두 수도관 A, B의 기울기가 각각 0.01, 0.04이고, 흐르는 물의 속력을 각각 v_{A}, v_{B}라고 하자. $\dfrac{v_{\mathrm{A}}}{v_{\mathrm{B}}}=2$일 때, $\dfrac{a}{b}$의 값은?
(단, 두 수도관 A, B에 대한 상수 c의 값은 서로 같다.)

① 4 ② $4\sqrt{2}$ ③ 8
④ $8\sqrt{2}$ ⑤ 16

73. 2006 수능 (2점)

$9^{\frac{3}{2}} \times 27^{-\frac{2}{3}}$의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② 1 ③ $\sqrt{3}$
④ 3 ⑤ $3\sqrt{3}$

74. 2002 수능 (2점)

$\sqrt[3]{2} \times \sqrt[6]{16}$ 을 간단히 하면?

① 2 ② 4 ③ $\sqrt{2}$
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $2^3\sqrt{2}$

75. 2005 수능 (2점)

$5^{\frac{2}{3}} \times 25^{-\frac{5}{6}}$의 값은?

① $\frac{1}{25}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ 1
④ 5 ⑤ 25

76. 2004 수능 (2점)

$3^{\frac{2}{3}} \times 9^{\frac{3}{2}} \div 27^{\frac{8}{9}}$ 의 값은?

① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ 3
④ $3\sqrt{3}$ ⑤ 9

77. 2006 수능 (3점)

$a = \sqrt{2}$, $b^3 = \sqrt{3}$일 때, $(ab)^2$의 값은? (단, b는 실수이다.)

① $2 \cdot 3^{\frac{1}{3}}$ ② $2^{\frac{2}{3}} \cdot 3$ ③ $2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{2}{3}}$
④ $3 \cdot 2^{\frac{1}{3}}$ ⑤ $3 \cdot 2^{\frac{1}{2}}$

78. 2010 수능 (3점)

조개류는 현탁물을 여과한다. 수온이 t(℃)이고 개체중량이 $w(g)$일 때, A조개와 B조개가 1시간 동안 여과하는 양(L)을 각각 Q_A, Q_B라고 하면 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$Q_A = 0.01t^{1.25}w^{0.25}$, $Q_B = 0.05t^{0.75}w^{0.30}$

수온이 20℃이고 A조개와 B조개의 개체중량이 각각 $8g$일 때, $\frac{Q_A}{Q_B}$의 값은 $2^a \times 5^b$이다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 유리수이다.)

① 0.15 ② 0.35 ③ 0.55
④ 0.75 ⑤ 0.95

1. 2007 평가원 (2점)

$\log_8 2\sqrt{2}$ 의 값은?

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

2. 2003 평가원 (2점)

$4\log_2\sqrt{2}+\frac{1}{2}\log_2 3-\log_2\sqrt{6}$ 을 간단히 하면?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{2}+\log_2 3$ ③ $-\frac{1}{2}$
④ $-\frac{1}{2}+\log_2 3$ ⑤ $\frac{3}{2}$

3. 2004 평가원 (2점)

$\log_2 20-\frac{1}{\log_5 2}$ 을 간단히 하면?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

4. 2009 교육청 (2점)

$\log_4 2+\log_4 8$ 의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

5. 2003 평가원 (2점)

$\log_2\sqrt{8}-\log_2\sqrt{2}$ 의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{5}{6}$ ⑤ 1

6. 2005 교육청 (2점)

$a=\log_2 3$ 일 때, 4^a 의 값은?

① 6 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 12

7. 2010 평가원 (2점)

$\log_3 6+\log_3 2-\log_3 4$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

8. 2010 평가원 (2점)

$\frac{1}{\sqrt[3]{8}}\times\log_3 81$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

9. 2010 교육청 (2점)

$\sqrt[3]{27}+\log_3\sqrt{81}$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

10. 2010 교육청 (2점)

$\log_3\left(\sqrt{3^3}\cdot\sqrt[3]{3}\right)^2$ 의 값은?

① 3 ② $\frac{10}{3}$ ③ $\frac{11}{3}$
④ 4 ⑤ $\frac{13}{3}$

11. 2010 교육청 (2점)

$\log_5 3\times\left(\log_3\sqrt{5}-\log_{\frac{1}{9}}125\right)$의 값은?

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 1
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

12. 2010 교육청 (2점)

$\log_2 3-\log_2\frac{9}{2}+\log_2 12$의 값을 구하시오.

13. 2009 평가원 (2점)

$\log_2 9\cdot\log_3\sqrt{2}$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

14. 2005 교육청 (2점)

$\log_4 64$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

15. 2006 평가원 (2점)

$\log_2 16+\log_2 \frac{1}{8}$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

16. 2009 교육청 (2점)

$\log_5 81\times\log_3 \sqrt[4]{25}$ 의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

17. 2009 교육청 (2점)

$\log_4 \frac{16}{9}+\log_2 3$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

18. 2009 평가원 (2점)

$2^{\log_2 4}\times 8^{\frac{2}{3}}$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 8
④ 16 ⑤ 32

19. 2006 교육청 (2점)

$\log_4 2+\log_{16} 2$ 를 간단히 하면?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

20. 2009 교육청 (2점)

$\log_3 4^3\times\log_2 9^3$ 의 값을 구하시오.

21. 2006 평가원 (2점)

$\log_3\sqrt{6}-\frac{1}{2}\log_3 2$ 의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 2

22. 2007 평가원 (2점)

$\log\ 2+\log_7 \dfrac{1}{7}$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

23. 2008 교육청 (2점)

$3^{\frac{2}{3}} \times 27^{\frac{1}{9}} + \log_2 8$ 의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

24. 2008 교육청 (2점)

$\log_2 \dfrac{2}{9} + 4\log_2 \sqrt{12}$ 의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

25. 2007 평가원 (2점)

$(\log_3 \sqrt{8}) \times (\log_2 9)$ 의 값은?

① $\dfrac{1}{3}$ ② 1 ③ $\dfrac{3}{2}$
④ 2 ⑤ 3

26. 2007 평가원 (2점)

$\log_2(\log_2 3) + \log_2(\log_3 4)$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ $\log_3 4$
④ $\log_2 3$ ⑤ 2

27. 2007 교육청 (2점)

$(\log_{10} 2)^2 + (\log_{10} 5)^2 + \log_{10} 4 \cdot \log_{10} 5$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

28. 2009 교육청 (2점)

$2\log\dfrac{3}{5} + \log\dfrac{1}{2} - \log 18$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

29. 2008 교육청 (2점)

$9^{\frac{3}{2}} + \log_3 81$ 의 값은?

① 27 ② 31 ③ 41
④ 61 ⑤ 85

30. 2008 교육청 (2점)

$(\log_2 16) \times \sqrt[3]{64}$ 의 값은?

① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

31. 2008 평가원 (2점)

$2^{2\log_3 9}$ 의 값은?

① -1 ② 16 ③ 0
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{1}{16}$

32. 2006 교육청 (2점)

$\frac{\log_8 a}{2} = \frac{\log_4 b}{4} = \frac{\log_2 4}{8}$ 일 때, $a^2 b$의 값은?

① 4 ② 8 ③ 16
④ 32 ⑤ 64

33. 2007 교육청 (3점)

$(\log_2 3 + \log_8 3)(\log_3 2 + \log_9 2)$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 3

34. 2005 교육청 (3점)

$\log_2 \sin 1560° + \log_2 \tan 30° + \log_2 \cot 45°$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ $\log_2 \sqrt{3}$ ⑤ $\log_2 3$

35. 2008 교육청 (3점)

$a = \log_4 (3 - \sqrt{8})$일 때, $2^a + 2^{-a}$의 값은?

① $2\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}+1$ ③ $2\sqrt{3}$
④ $2\sqrt{3}+1$ ⑤ $4\sqrt{2}$

36. 2007 교육청 (3점)

$\log_{\sqrt{2}} 9^{\log_3 8}$ 의 값을 구하시오.

37. 2009 교육청 (3점)

$\frac{1}{2}\log_2 \frac{8}{5} + \log_2 \sqrt{5}$ 의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\sqrt{5}$
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

38. 2008 교육청 (3점)

$5^a=2$, $5^b=3$ 이라 할 때, $\log_6 72$ 를 a 와 b 의 식으로 바르게 나타낸 것은?

① $\frac{a+b}{a-b}$ ② $\frac{2a+b}{b-a}$ ③ $\frac{2a-b}{a+b}$
④ $\frac{2a+b}{a+b}$ ⑤ $\frac{3a+2b}{a+b}$

39. 2004 평가원 (3점)

$\log_{10}\frac{5}{2}$의 값은? (단, $\log_{10}2=0.3010$)

① 0.2140 ② 0.3010 ③ 0.3980
④ 0.4770 ⑤ 0.6990

40. 2002 평가원 (3점)

$\log_a 3=2$, $\log_b 3=5$ 일 때 $\log_b a$ 의 값은?

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{3}{5}$

41. 2005 평가원 (3점)

두 실수 a, b 가 $a\log_3 2=4$, $\log_3 b=1-\log_3(\log_2 3)$ 을 만족시킬 때, ab 의 값을 구하시오.

42. 2010 평가원 (3점)

$a=\log_2(2+\sqrt{3})$일 때, $4^a+\frac{4}{2^a}$의 값을 구하시오.

43. 2005 교육청 (3점)

0 이 아닌 세 실수 a, b, c 에 대하여 $a+b+c=0$ 이고 $3^a=x$, $3^b=y$, $3^c=z$ 이다. 이 때, $\log_x yz+\log_y zx+\log_z xy$ 의 값은?

① -3 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 3

44. 2003 평가원 (3점)

$\log_2 x+\log_4\frac{1}{x}=5$ 일 때, $\log_4 x-\log_2\frac{1}{x}$ 의 값을 구하시오.

45. 2008 평가원 (3점)

두 실수 a, b가 $3^{a+b}=4$, $2^{a-b}=5$를 만족할 때, $3^{a^2-b^2}$의 값을 구하시오.

46. 2009 교육청 (3점)

$\log_{(x-3)}(-x^2+11x-24)$가 정의되기 위한 모든 정수 x의 합을 구하시오.

47. 2010 교육청 (3점)

서로 다른 세 실수 x, y, z가 $2^x=3^y=6^z$을 만족시킬 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $2^x \cdot 3^y = 36^z$

ㄴ. $2^z \cdot 3^{z-y} = 1$

ㄷ. $x+y=1$이면 $z=\log_6 2 \cdot \log_6 3$이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

48. 2006 교육청 (3점)

실수 a의 값에 관계없이 로그가 정의될 수 있는 것을 <보기>에서 모두 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $\log_{a^2-a+2}(a^2+1)$

ㄴ. $\log_{2|a|+1}(a^2+1)$

ㄷ. $\log_{a^2+2}(a^2-2a+1)$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

49. 2010 교육청 (3점)

다음은 'a, b가 1이 아닌 양의 실수 일 때, $\log_a b=\log_b a$이면 $\dfrac{a^2+1}{b^2+1}=\dfrac{a}{b}$이다.' ……(∗)가 성립함을 증명한 것이다.

[증 명]

$\log_b a=\dfrac{1}{\boxed{(가)}}$이고 가정에서 $\log_a b=\log_b a$이므로 $\log_a b=1$ 또는 $\log_a b=-1$이다.

(ⅰ) $\log_a b=1$일 때, $\dfrac{a^2+1}{b^2+1}=\boxed{(나)}$이고 $\dfrac{a}{b}=\boxed{(나)}$이다.

(ⅱ) $\log_a b=-1$일 때, $\dfrac{a^2+1}{b^2+1}=\boxed{(다)}$이고 $\dfrac{a}{b}=\boxed{(다)}$이다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $\dfrac{a^2+1}{b^2+1}=\dfrac{a}{b}$이므로 (∗)가 성립한다.

	(가)	(나)	(다)
①	$\log_a b$	-1	b^2
②	$\log_b \dfrac{1}{a}$	-1	ab
③	$\log_a b$	1	a^2
④	$\log_b \dfrac{1}{a}$	-1	a^2
⑤	$\log_a b$	1	b^2

50. 2006 교육청 (3점)

1 이 아닌 양수 a, b 에 대하여 $\ll a, b \gg = \log_a b$ 라 정의할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고르면?

[보 기]

ㄱ. $\ll 3, 2 \gg + \ll 3, 7 \gg = 2$
ㄴ. $\ll 3, 6 \gg - \ll 3, 2 \gg = 1$
ㄷ. $\ll 3, 4 \gg \times \ll 4, 3 \gg = 1$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ,ㄷ
④ ㄴ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

51. 2006 평가원 (3점)

자연수 n에 대하여 $f(n)=2^n-\log_2 n$이라 할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $f(2)=3$
ㄴ. $f(8)=-f(\log_2 8)$
ㄷ. $f(2^n)+n=\{f(2^{n-1})+n-1\}^2$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

52. 2004 평가원 (3점)

다음은 지수법칙 $\dfrac{a^p}{a^q}=a^{p-q}$을 이용하여 양의 실수 x, y에 대하여 $\log_a \dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$가 성립함을 증명한 과정이다.
(단, $a>0$, $a \neq 1$)

[증 명]

$p=\log_a x$, $q=\log_a y$로 놓으면
$a^p=$ (가) , $a^q=$ (나) 이고
$a^{p-q}=\dfrac{a^p}{a^q}=$ (다) 이다.
그러므로, 로그의 정의에 의하여
$p-q=\log_a$ 이다.
따라서 $\log_a \dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$이다.

위의 빈칸 (가), (나), (다)에 들어가기에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	x	x	xy
②	x	y	xy
③	y	x	xy
④	x	y	$\dfrac{x}{y}$
⑤	y	x	$\dfrac{x}{y}$

53. 2009 교육청 (3점)

두 양수 a, b에 대하여 $2^a=c$, $2^b=d$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $c^b=d^a$
ㄴ. $a+b=\log_2 cd$
ㄷ. $\dfrac{a}{b}=\log_c d$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

54. 2005 평가원 (3점)

다음은 자연수 n에 대하여 $\log_2 n$이 유리수이면 n을 $n=2^k$ (단, k는 $k \geq 0$인 정수)의 꼴로 나타낼 수 있음을 증명한 것이다.

[증 명]

자연수 n에 대하여 $\log_2 n$이 유리수라고 하자. n이 자연수이므로 $n=2^k \cdot m$을 만족시키는 $k \geq 0$인 정수 k와 홀수인 자연수 m이 존재한다. 그러면
$\log_2 n=$ (가)
따라서 $\log_2 n$이 유리수이면 $\log_2 m$도 유리수이어야 하므로 $\log_2 m=\dfrac{q}{p}$ (단, p는 자연수이고 q는 정수)로 놓을 수 있다. 그러면 (나)
m이 홀수이므로 m^p은 홀수이다. 따라서 2^q도 홀수이어야
하므로 (다)이고
$m=1$이다. 따라서 n을 $n=2^k$ (단, k는 $k \geq 0$인 정수)의 꼴로 나타낼 수 있다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

① $k\log_2 m$, $m^q=2^p$, $q=1$
② $k\log_2 m$, $m^p=2^q$, $q=1$
③ $k+\log_2 m$, $m^q=2^p$, $q=0$
④ $k+\log_2 m$, $m^p=2^q$, $q=1$
⑤ $k+\log_2 m$, $m^p=2^q$, $q=0$

55. 2007 교육청 (3점)

1이 아닌 세 양수 a, b, c에 대하여 $a=b^2=c^3$이 성립할 때, $\log_a b+\log_b c+\log_c a$의 값은?

① $\dfrac{23}{6}$ ② $\dfrac{25}{6}$ ③ $\dfrac{29}{6}$
④ $\dfrac{31}{6}$ ⑤ $\dfrac{35}{6}$

56. 2006 교육청 (3점)

등식 $\dfrac{1}{\log_3 2}+\dfrac{1}{\log_5 2}+\dfrac{1}{\log_6 2}=\dfrac{1}{\log_k 2}$이 성립할 때, 상수 k의 값을 구하시오.

57. 2007 교육청 (3점)

$2^\alpha=5$를 만족하는 α에 대하여 $\log_2(\log_5 x)+\log_2\alpha=2$의 해를 β라고 할 때, $\log_2\beta$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

58. 2007 교육청 (3점)

이차방정식 $x^2-8x+1=0$의 두 근을 α, β라 하자. $\log_2\left(\alpha+\dfrac{4}{\beta}\right)+\log_2\left(\beta+\dfrac{4}{\alpha}\right)=k$일 때, 2^k의 값을 구하시오.

59. 2006 교육청 (3점)

$1<a<b$인 두 실수 a, b에 대하여 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $\log_b a<\log_a b$
ㄴ. $\dfrac{1}{a}\log a<\dfrac{1}{b}\log b$
ㄷ. $2\log(a+b)<\log 2(a^2+b^2)$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

60. 2009 교육청 (3점)

$0<a<b<1$을 만족시키는 실수 a, b에 대하여
$A=\log_a b$, $B=\log_b(a+1)$, $C=\log_{a+1}(b+1)$
이라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $A<B<C$ ② $A<C<B$ ③ $B<A<C$
④ $B<C<A$ ⑤ $C<B<A$

61. 2009 교육청 (3점)

자연수 n에 대하여 $f(n)$을 $\log_4 n$의 정수부분이라 할 때, $f(1)+f(2)+f(4)+f(8)+f(16)$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

62. 2005 교육청 (3점)

등식 $\log_4\{\log_3(\log_2 x)\}=1$을 만족하는 x는 몇 자리의 자연수인가? (단, $\log 2=0.3010$)

① 21 ② 22 ③ 23
④ 24 ⑤ 25

63. 2006 교육청 (3점)

x보다 크지 않은 최대의 정수를 $[x]$로 나타낼 때, 옳은 내용을 <보기>에서 모두 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $1<a<10$일 때, $[\log 100a]=2$이다.
ㄴ. $[\log x]=3$인 정수 x의 개수는 9×10^3이다.
ㄷ. 자연수 n에 대하여 $[\log x]=n$이면 $[\log x^2]=2n$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

64. 2009 교육청 (3점)

어느 나라의 올해 물가지수는 전년도에 비해 4% 상승하였다. 이 나라의 물가지수가 매년 이러한 비율로 상승한다고 할 때, 물가지수가 처음으로 올해의 2배 이상이 되는 해는 앞으로 몇 년 후인가? (단, $\log 2=0.301$, $\log 1.04=0.017$로 계산한다.)

① 16 ② 18 ③ 20
④ 22 ⑤ 24

65. 2006 교육청 (4점)

세 양수 a, b, c에 대하여

$$\begin{cases}\log_2 ab+\log_2 bc=5\\ \log_2 bc+\log_2 ca=8\\ \log_2 ca+\log_2 ab=7\end{cases}$$

이 성립할 때, $a+b+c$의 값을 구하시오.

66. 2009 교육청 (3점)

어느 무선 시스템에서 송신기와 수신기 사이의 거리 R와 수신기의 수신 전력 S 사이에는 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$S=P-20\log\left(\frac{4\pi fR}{c}\right)$

(단, P는 송신기의 송신 전력, f와 c는 각각 주파수와 빛의 속도를 나타내는 상수이고, 거리의 단위는 m, 송・수신 전력의 단위는 dBm이다.)
어느 실험실에서 송신기의 위치를 고정하고 송신기와 수신기 사이의 거리에 따른 수신 전력의 변화를 측정하였다. 그 결과 두 지점 A, B에서 측정한 수신 전력이 각각 -25, -5로 나타났다. 두 지점 A, B에서 송신기까지의 거리를 각각 R_A, R_B라 할 때, $\frac{R_A}{R_B}$의 값은?

① $\frac{1}{100}$　② $\frac{1}{10}$　③ $\sqrt{10}$
④ 10　⑤ 100

67. 2007 평가원 (3점)

다음 조건을 만족시키는 세 정수 a, b, c를 더한 값을 k라 할 때, k의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.

(가) $1\leq a\leq 5$
(나) $\log_2(b-a)=3$
(다) $\log_2(c-b)=2$

68. 2009 교육청 (4점)

세 자연수 a, b, c가 다음 조건을 만족시킨다.

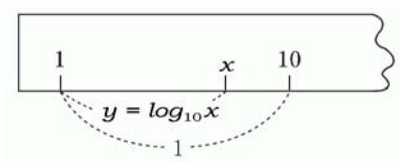
(가) $a\log_{500}2+b\log_{500}5=c$
(나) a, b, c의 최대공약수는 2이다.

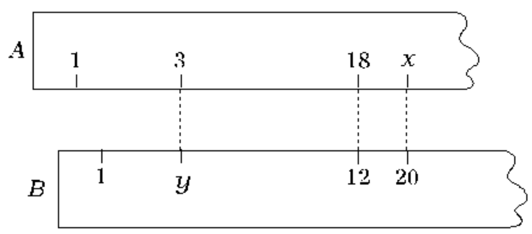
이때, $a+b+c$의 값은?

① 6　② 12　③ 18
④ 24　⑤ 30

69. 2005 교육청 (4점)

그림과 같이 기점 1로부터의 거리가 $\log_{10}x$인 곳에 눈금 x를 매긴 자를 '로그자'라고 한다. '로그자'에서는 $\log_{10}1=0$이므로 기점의 로그눈금은 1이다. 두 개의 로그자 A, B의 세 개의 눈금의 위치가 그림과 같이 서로 일치할 때, $x-y$의 값을 구하시오.





70. 2009 교육청 (4점)

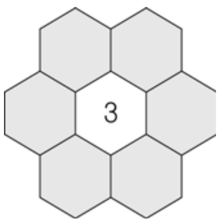
$\log_3 n$의 정수부분과 $\log_4 n$의 정수부분이 같도록 하는 두 자리의 자연수 n의 최댓값을 구하시오.

71. 2006 교육청 (4점)

자연수 x, y가 $\log_3 x + \log_9 y^2 = \log_3 (2x+y+2)$를 만족시킬 때, $2x+y$의 최댓값을 구하시오.

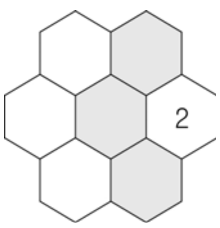
72. 2006 교육청 (4점)

보물찾기 게임을 활용한 수학 수업을 하려고 한다. 보물은 숫자가 써 있는 정육각형의 이웃하는 정육각형 안에 한 개씩 숫자의 개수만큼 숨겨져 있다. 예를 들면



[그림 Ⅰ]

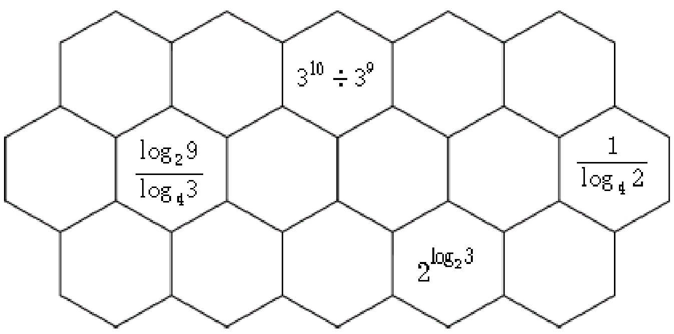
‘3’ 주위에 어두운 부분의 정육각형 6개중 3개에 보물이 숨겨져 있다.



[그림 Ⅱ]

‘2’ 주위에 어두운 부분의 정육각형 3개중 2개에 보물이 숨겨져 있다.

위의 규칙에 따라 아래 그림에 숨겨진 보물의 최대 개수를 M, 최소 개수를 m이라 할 때, $M \cdot m$의 값을 구하시오.



73. 2006 수능 (2점)

$(\log_3 27) \times 8^{\frac{1}{3}}$의 값은?

① 12 　 ② 10 　 ③ 8
④ 6 　 ⑤ 4

74. 2010 수능 (2점)

$4^{\frac{3}{2}} \times \log_3 \sqrt{3}$ 의 값은 ?

① 5 　 ② 4 　 ③ 3
④ 2 　 ⑤ 1

75. 2004 수능 (3점)

[보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $2^{\log_2 1 + \log_2 2 + \log_2 3 + \cdots + \log_2 10} = 10!$

ㄴ. $\log_2 (2^1 \times 2^2 \times 2^3 \times \cdots \times 2^{10})^2 = 55^2$

ㄷ. $(\log_2 2^1)(\log_2 2^2)(\log_2 2^3) \cdots (\log_2 2^{10}) = 55$

① ㄱ 　 ② ㄴ 　 ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ 　 ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

76. 2007 수능 (3점)

$a = \log_2 10$, $b = 2\sqrt{2}$일 때, $a \log b$의 값은?

① 1 　 ② $\dfrac{3}{2}$ 　 ③ 2
④ $\dfrac{5}{2}$ 　 ⑤ 3

77. 2006 수능 (3점)

1 보다 큰 세 실수 a, b, c 에 대하여 $\log_a c : \log_b c = 2 : 1$ 일 때, $\log_a b + \log_b a$ 의 값은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

78. 2005 수능 (3점)

두 양수 a, b 에 대하여

$$\begin{cases} ab = 27 \\ \log_3 \dfrac{b}{a} = 5 \end{cases}$$

가 성립할 때, $4\log_3 a + 9\log_3 b$ 의 값을 구하시오.

79. 2007 수능 (3점)

네 수 1, a, b, c는 이 순서대로 공비가 r인 등비수열을 이루고 $\log_8 c = \log_a b$를 만족시킨다. 공비 r의 값은? (단, $r > 1$)

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

80. 2007 수능 (3점)

$1 < a < b$인 두 실수 a, b에 대하여

$$\frac{3a}{\log_a b} = \frac{b}{2\log_b a} = \frac{3a+b}{3}$$

가 성립할 때, $10\log_a b$의 값을 구하시오.

81. 2006 수능 (4점)

$0 < a < 1$ 인 a 에 대하여 10^a 을 3 으로 나눌 때, 몫이 정수이고 나머지가 2 가 되는 모든 a의 값의 합은?

① $3\log 2$ ② $6\log 2$ ③ $1 + 3\log 2$
④ $1 + 6\log 2$ ⑤ $2 + 3\log 2$

82. 2010 수능 (2점)

$27^{\frac{1}{3}} + \log_2 4$의 값은?

① 1 ② 2
③ 3 ④ 4 ⑤ 5

1. 2007 평가원 (3점)

$1 \leq \log n < 3$인 자연수 n에 대하여 $\log_2 n$이 정수가 되도록 하는 n의 개수는?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

2. 2008 교육청 (3점)

$\left(\frac{5}{2}\right)^{100}$의 정수부분은 몇 자리수인가? (단, $\log 2 = 0.3010$)

① 38 ② 39 ③ 40
④ 41 ⑤ 42

3. 2008 교육청 (3점)

3^{10} 은 m 자리 정수이고, $\left(\frac{3}{10}\right)^{10}$ 은 소수점 아래 n 번째 자리에서 처음으로 0 이 아닌 숫자가 나타난다. 이때, $m+n$ 의 값은? (단, $\log_{10} 3 = 0.4771$)

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

4. 2009 교육청 (3점)

$2^4 \times 3^3$의 서로 다른 모든 양의 약수의 곱을 A라 할 때, A는 n자리 정수이다. $\left[\frac{A}{10^{n-1}}\right]$의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수, $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

5. 2004 평가원 (3점)

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{20}$ 은 소수점 아래 n 번째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다. 이 때, $\log_2 n$의 값은? (단, $\log_{10} 2 = 0.3010$)

① 2 ② 4
③ 6 ④ 8
⑤ 10

6. 2006 교육청 (3점)

7^{40}은 십진법으로 n자리 자연수이고 맨 앞 자리 숫자가 a, 일의 자리 숫자가 b이다. 이 때, $n+a+b$의 값을 구하시오. (단, $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$, $\log 7 = 0.8451$으로 계산한다.)

7. 2007 교육청 (3점)

$\log_3 10$의 소수부분을 α라 할 때, 3^α의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{10}{9}$ ③ $\frac{10}{3}$ ④ $\frac{100}{9}$ ⑤ $\frac{100}{3}$

8. 2006 평가원 (3점)

$\log x$의 가수 α가 $0<\alpha<\frac{1}{4}$일 때, $\log x^2$의 가수와 $\log\frac{\sqrt{10}}{x^2}$의 가수의 합은?

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

9. 2009 교육청 (3점)

자연수 k가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\log k$의 지표는 5이다.
(나) $\log\frac{\sqrt{k}}{7}$ 의 가수는 0이다.

$\frac{k}{1000}$ 의 값을 구하시오.

10. 2007 평가원 (3점)

양수 x에 대하여 $\log x$의 지표를 $f(x)$, 가수를 $g(x)$라 하자. 양수 a, b에 대하여 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $f(a^2)=2f(a)$
ㄴ. $f(a^2)+g(a^2)=2f(a)+2g(a)$
ㄷ. $g(a)+g(b)=1$ 이면 ab는 정수이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

11. 2009 교육청 (3점)

양수 x에 대하여 $\log x$의 가수를 $f(x)$라 하자. a, b가 두 자리 자연수일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $f(ab)=f(b)$ 이면 $f(a)=0$ 이다.
ㄴ. $f(a^2)=f(a)$ 를 만족시키는 a는 1개이다.
ㄷ. $f(ab)=0$ 을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는 4개이다.

① ㄴ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

12. 2009 교육청 (3점)

$\log x = 5.65$, $\log y = -1.35$를 만족시키는 두 양수 x, y를

$x = a \times 10^m$ (m은 정수, $1 \leq a < 10$)

$y = b \times 10^n$ (n은 정수, $1 \leq b < 10$)

으로 나타낼 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $\frac{x}{y}$의 값은 자연수이다.

ㄴ. $m+n=4$

ㄷ. $ab>10$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

13. 2008 교육청 (3점)

$\log_{10} A$의 지표를 n, 가수를 α 라 할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

〈보 기〉

ㄱ. $n=\alpha$이기 위한 필요충분조건은 $A=1$이다.

ㄴ. $\log_{10} 10A$의 가수와 $\log_{10}\frac{10}{A}$의 가수는 같다.

ㄷ. $\log_{10} 100A$의 지표와 $\log_{10}\frac{A}{100}$의 지표의 합은 $2n$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

14. 2008 교육청 (3점)

$x>1$인 실수 x에 대하여 $\log_{10} x$의 지표를 n이라 할 때, 옳은 것을 보기에서 모두 고르면? (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수이다.)

< 보 기 >

ㄱ. $[\log_{10} x] = n$

ㄴ. $\log_{10} 1000x$의 지표는 $3n$이다.

ㄷ. $\log_{10} x - [\log_{10} x] = \frac{1}{2}$이면 x^2은 $2n+2$ 자리의 정수이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. 2008 평가원 (3점)

1보다 큰 자연수 x, y, z에 대하여
$[\log_2 x] + [\log_2 y] + [\log_2 z] = 4$를 만족시키는 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① 48 ② 54 ③ 60
④ 66 ⑤ 72

16. 2008 교육청 (3점)

1이 아닌 양의 실수 x, y에 대하여 ◎을 $x◎y=\log_x y+\log_y x$로 정의할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, a, b는 양수)

<보 기>

ㄱ. $4◎16=\frac{5}{2}$

ㄴ. $a^k◎b^k=a◎b$

ㄷ. $a^b◎b^a=a◎b^{\frac{a}{b}}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. 2008 교육청 (3점)

$\log_2 x=5.2$일 때, $\log\frac{1}{x}$의 가수는? (단, $\log 2=0.30$)

① 0.32 ② 0.36 ③ 0.40
④ 0.44 ⑤ 0.48

18. 2005 교육청 (3점)

양수 A, $\frac{1}{A}$의 상용로그에서 지표의 합은 a이고, 가수의 합은 b이다. 이 때, a^2+b^2의 값은?(단, $\log A$의 가수는 0이 아니다.)

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

19. 2008 교육청 (3점)

$\log a$의 지표가 5이고 $\log a$의 가수와 $\log\sqrt{a}$의 가수의 합이 $\frac{3}{4}$일 때, $\log a$의 값은?

① $\frac{31}{6}$ ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{11}{2}$
④ $\frac{17}{3}$ ⑤ $\frac{35}{6}$

20. 2005 교육청 (3점)

2^{2005}은 m자리수이고, 5^{2005}은 n자리수라고 할 때, $m+n$의 값은? (단, $\log_{10}2=0.3010$)

① 2002 ② 2003 ③ 2004 ④ 2005 ⑤ 2006

21. 2010 교육청 (3점)

집합 $A=\{2^n \mid n$은 자연수$\}$의 원소 중에서 상용로그의 지표가 1인 모든 원소의 합은?

① 112 ② 114 ③ 116
④ 118 ⑤ 120

22. 2010 교육청 (3점)

다음 두 조건을 모두 만족시키는 모든 양의 실수 x의 곱은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대정수이다.)

(가) $[\log x]=[\log 365]$
(나) $\log x^3-[\log x^3]=\log\frac{1}{x}-\left[\log\frac{1}{x}\right]$

① 10^9 ② $10^{\frac{19}{2}}$ ③ 10^{10} ④ $10^{\frac{21}{2}}$ ⑤ 10^{11}

23. 2008 교육청 (3점)

$\log a$ 의 지표가 5 이고 $\log a$ 의 가수와 $\log\sqrt{a}$ 의 가수의 합이 $\frac{3}{4}$ 일 때, $\log a$ 의 값은?

① $\frac{31}{6}$ ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{11}{2}$ ④ $\frac{17}{3}$ ⑤ $\frac{35}{6}$

24. 2005 교육청 (3점)

$\log_{10}\sqrt{x}=-\frac{14}{3}$ 를 만족시키는 x 에 대하여 $\log_{10}x$ 의 지표와 가수를 각각 n, α 라 할 때, $\frac{n}{\alpha}$ 의 값은?

① -11 ② -12 ③ -13 ④ -14 ⑤ -15

25. 2005 교육청 (3점)

두 자연수 x, y 에 대하여 x^8 은 25 자리의 수, y^5 은 16 자리의 수일 때, xy 는 n 자리의 수가 된다. 이 때, n 의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

26. 2005 교육청 (3점)

<보기>의 상용로그 중 그 가수가 $\log A$ 의 가수와 항상 같은 것을 모두 고른 것은? (단, A 는 양수이다.)

<보 기>

ㄱ. $\log 10A$ ㄴ. $\log A^{10}$ ㄷ. $\log\frac{10}{A}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

27. 2004 평가원 (3점)

$\log A$ 의 지표와 가수가 이차방정식 $2x^2-33x+k=0$ 의 두 근일 때, 상수 k 의 값을 구하시오.

28. 2004 평가원 (3점)

임의의 양의 실수 x에 대하여 $\log_{10}x$의 지표를 $\ll x \gg$, 가수를 $\langle x \rangle$로 정의할 때, <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

< 보 기 >

ㄱ. $\langle 2004 \rangle + 1 = \langle 200.4 \rangle + 2$
ㄴ. $\ll x \gg = 5$이면 x의 정수 부분은 6 자리이다.
ㄷ. $\langle x \rangle + \langle y \rangle = 1$이면 $\log_{10}x + \log_{10}y$는 정수이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

29. 2004 평가원 (3점)

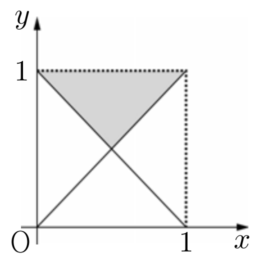
$\log x$의 지표가 3이고, $\log x$의 가수와 $\log\sqrt{x}$의 가수의 합이 $\frac{3}{4}$이다. 이때 $\log\sqrt{x}$의 가수는?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{5}{12}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{7}{12}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

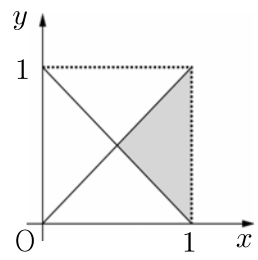
30. 2007 교육청 (3점)

정수 부분이 각각 두 자리, 세 자리인 양수 X, Y의 상용로그의 가수를 각각 x, y라 하자. XY의 정수 부분이 다섯 자리일 때, 점 $(x,\ y)$가 존재하는 영역을 어두운 부분으로 바르게 표시한 것은?

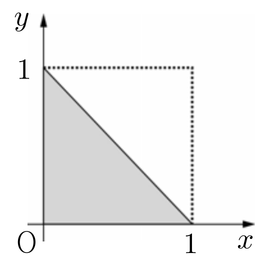
①



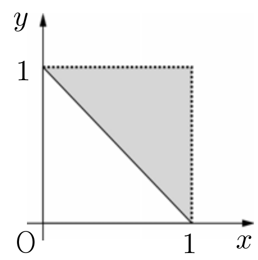
②



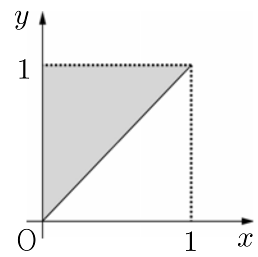
③



④



⑤



31. 2009 교육청 (3점)

$\log x$의 지표를 $f(x)$, 가수를 $g(x)$라 할 때, <보기>에서 항상 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, m, n은 1보다 큰 자연수)

<보 기>

ㄱ. $f(x^{m+n})=f(x^m)+f(x^n)$

ㄴ. 모든 짝수 a에 대하여 $g(a\cdot 5^n)=0$이 되는 자연수 n이 존재한다.

ㄷ. $g(x)+g(x^2)+\cdots+g(x^n)=1$이면 $\frac{n(n+1)}{2}\log x=f(x)+f(x^2)+\cdots+f(x^n)+1$이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

32. 2010 평가원 (3점)

이차정사각행렬 A의 $(i,\ j)$성분 a_{ij}를 상용로그 $\log(20^i\times 30^j)$의 지표라 할 때, 행렬 A의 모든 성분의 합을 구하시오. (단, $i=1,\ 2,\ \ j=1,\ 2$이다.)

33. 2009 교육청 (3점)

정수부분이 두 자리인 두 양수 a, b의 상용로그의 가수를 각각 x, y라 하자. $\log a^2b$의 지표가 4일 때, 좌표평면에서 점(x,y)가 나타내는 영역의 넓이는?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

34. 2008 교육청 (3점)

어느 제과점에서는 다음과 같은 방법으로 빵의 가격을 실질적으로 인상한다.

빵의 개당 가격은 그대로 유지하고, 무게를 그 당시 무게에서 10% 줄인다.

이 방법을 n번 시행하면 빵의 단위 무게당 가격이 처음의 1.5배 이상이 된다. n의 최솟값은?
(단, $\log 2=0.3010$, $\log 3=0.4771$로 계산한다.)

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

35. 2008 교육청 (3점)

박테리아의 수가 두 배로 늘어나는 데 걸리는 시간을 '배증시간'이라 한다. 어느 박테리아의 배증시간은 냉장 보관할 경우 12 시간이라고 한다. 냉장 보관된 이 박테리아의 수가 최초 박테리아 수의 20,000 배 이상 되려면 적어도 며칠이 경과해야 하는가? (단, $\log 2=0.3$)

① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

36. 2009 교육청 (3점)

어느 담수화 공장에서는 바닷물을 식수로 사용하기 위해 여과장치를 가동하고 있다. 바닷물이 여과기를 한 번 통과할 때마다 포함된 염분의 양의 20%가 제거된다. 제거되지 않은 염분의 양이 처음 염분의 양의 $\frac{1}{1000}$이하가 되기 위해서 여과기에 통과시켜야 하는 최소 횟수를 구하시오. (단, $\log 2=0.3010$)

37. 2008 교육청 (3점)

X선 필름의 사진농도 D, 입사하는 빛의 세기 I_0, 투과하는 빛의 세기 I사이에 $D=\log_{10}I_0-\log_{10}I$가 성립한다. X선 필름의 사진농도가 2일 때, 입사하는 빛의 세기는 투과하는 빛의 세기의 a배이다. 이때, 상수 a의 값을 구하시오.

38. 2010 교육청 (3점)

2009년도 우리나라의 이산화탄소 배출량은 6억톤이었다. 이 나라에서는 이산화탄소 배출로 인해 발생하는 지구 온난화 현상을 개선하기 위해 매년 전년도보다 5%씩 이산화탄소 배출량을 감소시키는 정책을 2010년부터 추진하고 있다. 이 정책이 계획대로 추진된다고 할 때, 이산화탄소 배출량이 처음으로 4억 톤 이하가 되는 시기는?38. (단, 측정주기는 1년이고, $\log 2=0.301$, $\log 3=0.477$, $\log 9.5=0.978$로 계산한다.)

① 2014년~2016년 ② 2017년~2019년
③ 2020년~2022년 ④ 2023년~2025년
⑤ 2026년~2028년

39. 2010 평가원 (3점)

소리의 세기가 $I\,(\mathrm{W/m^2})$인 음원으로부터 $r\,(\mathrm{m})$만큼 떨어진 지점에서 측정된 소리의 상대적 세기 P(데시벨)는

$$P=10\left(12+\log\frac{I}{r^2}\right)$$

이다. 어떤 음원으로부터 1m만큼 떨어진 지점에서 측정된 소리의 상대적 세기가 80(데시벨)일 때, 같은 음원으로부터 10m만큼 떨어진 지점에서 측정된 소리의 상대적 세기가 a(데시벨)이다. a의 값은?

① 50 ② 55 ③ 60
④ 65 ⑤ 70

40. 2007 교육청 (3점)

반사계수(Γ)란 임피던스(교류 회로에서의 전압과 전류의 비) 차에 의해 발생하는 반사량을 단순히 반사전압(V_-) 대 입력전압(V_+) 비, 즉 $\Gamma=\dfrac{V_-}{V_+}$로 계산한 값이다.

반사손실(RL)이란 반사계수(Γ)를 전력의 로그 스케일로 변환한 값을 말하며 반사계수(Γ)와 반사손실(RL)과의 관계식은 다음과 같다.

$RL=20\log\dfrac{1}{|\Gamma|}$ 입력전압이 100, 반사전압이 2일 때의 반사손실을 A, 입력전압이 100, 반사전압이 20일 때의 반사손실을 B라고 할 때, $|A-B|$의 값을 구하시오.

41. 2005 교육청 (3점)

외부 공기의 온도를 T_0, 어떤 물체의 처음 온도를 T_1, t분 후의 이 물체의 온도를 T라 할 때, 다음 관계식이 성립함이 알려져 있다. $T=T_0+(T_1-T_0)10^{-0.02t}$ (온도의 단위는 ℃)
외부 공기의 온도가 20℃, 이 물체의 처음 온도가120℃ 일 때, 이 물체의 온도가 25℃가 되는 것은 (　　)분 후이다. (　　)안에 알맞은 수를 구하시오. (단, 외부 공기의 온도는 변하지 않는다고 가정하고, $\log 2=0.3$으로 계산한다.)

42. 2005 교육청 (3점)

해저에서 발생한 지진이 지진해일을 일으킬 때, 지진해일의 높이가 H(m)이면 지진해일의 규모 M은 다음과 같다고 한다.

$M = \log_8 H$

어떤 지점에서 지진해일의 높이가 am 인 지진해일의 규모는 지진해일의 높이가 $9m$ 일 때의 지진해일의 규모의 1.5 배이다. a 의 값을 구하시오.

43. 2005 교육청 (3점)

지진 발생시 에너지의 세기를 나타내는 척도인 리히터 규모 M과 그 에너지 E사이에는 $\log_{10} E = 11.8 + 1.5M$인 관계식이 성립한다. 어느 해안에서 처음 발생한 규모 9.0 인 지진의 에너지를 E_1 , 며칠 후 발생한 규모 5.0 인 지진의 에너지를 E_2 라 할 때, $\dfrac{E_1}{E_2}$ 의 값은?

① 10^4 ② $10^{\frac{9}{2}}$ ③ 10^5 ④ $10^{\frac{11}{2}}$ ⑤ 10^6

44. 2008 교육청 (3점)

지진의 규모 R와 지진이 일어났을 때 방출되는 에너지 E 사이에는 다음과 같은 관계가 있다고 한다.

$R = 0.67\log(0.37E) + 1.46$

지진의 규모가 6.15일 때 방출되는 에너지를 E_1,

지진의 규모가 5.48일 때 방출되는 에너지를 E_2라 할 때,

$\dfrac{E_1}{E_2}$의 값을 구하시오.

45. 2009 교육청 (3점)

어느 도시의 중심온도 u(℃), 근교의 농촌온도 r(℃), 도시화된 지역의 넓이 $a(\text{km}^2)$ 사이에는 다음과 같은 관계가 있다고 한다.

$u = r + 0.05 + 1.6\log a$

10년 전에 비하여 이 도시의 도시화된 지역의 넓이가 25% 확장되었고 근교의 농촌온도는 변하지 않았을 때, 도시의 중심온도는 10년 전에 비하여 x℃ 높아졌다. x의 값은? (단, 도시 중심의 위치는 10년 전과 같고, $\log 2 = 0.30$으로 계산한다.)

① 0.12 ② 0.13 ③ 0.14 ④ 0.15 ⑤ 0.16

46. 2007 교육청 (3점)

<상용로그표>

x	$\log x$
1.26	0.10
1.32	0.12
1.38	0.14
2.00	0.30

인구가 매년 일정한 비율로 증가하는 어느 도시가 있다. 2006 년 말 현재 이 도시의 인구는 15 년 전인 1991 년 말 인구의 2 배라고 한다. 1997 년 말 이 도시의 인구는 1991 년 말 인구보다 몇 % 증가하였는지 오른쪽 상용로그표를 이용하여 구한 것은?

① 26% ② 29% ③ 32% ④ 35% ⑤ 38%

47. 2010 교육청 (3점)

어떤 물질의 화학 반응에서 이 물질의 온도 T와 화합물이 생성되는 반응 속도 v사이에는 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$\log\frac{v}{v_0} = K\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right) \text{ (단, } K,\ T_0,\ v_0\text{는 상수이다.)}$$

이 물질의 온도가 $2T_0$일 때, 화합물이 생성되는 반응 속도는 $\sqrt{10}\,v_0$이다. 이 물질의 온도가 $4T_0$일 때, 화합물이 생성되는 반응 속도는?

① $\sqrt[3]{100}\,v_0$ ② $\sqrt[4]{1000}\,v_0$ ③ $10v_0$ ④ $10\cdot\sqrt[3]{10}\,v_0$ ⑤ $10\sqrt{10}\,v_0$

48. 2010 평가원 (3점)

어느 세라믹 재료의 열전도 계수(κ)는 적절한 실험 조건에서 일정하고, 다음과 같이 계산된다고 한다.

$$\kappa = C\frac{\log t_2 - \log t_1}{T_2 - T_1}$$

(단, C는 0보다 큰 상수, T_1(℃), T_2(℃)는 실험을 시작한 후 각각 t_1(초), t_2(초)일 때 세라믹 재료의 측정 온도이다.) 이 세라믹 재료의 열전도 계수를 측정하는 실험에서 실험을 시작한 후 10초일 때와 20초일 때의 측정 온도가 각각 200℃, 202℃이었다. 실험을 시작한 후 x초일 때 측정 온도가 206℃가 되었다. x의 값은?

① 70 ② 80 ③ 90 ④ 100 ⑤ 110

49. 2010 교육청 (3점)

달걀의 신선도를 결정하는 중요한 요소 중 하나가 HU(호우 유니트)값이다. 농후단백의 높이(뭉쳐있는 흰자의 높이)가 h(mm)이고 무게가 w(g)일 때, HU는 다음과 같이 계산한다.

HU$=100\log(h+7.57-1.7\,w^{0.37})$

HU$=90$이고 무게가 50g일 때 농후단백의 높이 h의 값은?

(단, $1.7\times 50^{0.37}=7.24$, $\log 2=0.30$으로 계산한다.)

① 6.24 ② 6.50 ③ 6.87
④ 7.13 ⑤ 7.67

50. 2004 평가원 (4점)

다음 세 조건을 동시에 만족시키는 양의 실수 x, y가 있다.

Ⅰ. $\log_{10} x^2y^3=12.5$이다.
Ⅱ. x와 y의 상용로그의 지표는 같다.
Ⅲ. x와 $\frac{1}{y}$의 상용로그의 가수는 같다.

이 때, $\frac{x}{y}$의 값을 구하시오.

51. 2007 교육청 (4점)

$\log_{10}x=[\log_{10}x]$를 만족하는 $0<x<1$인 모든 x값들의 합을 S라 할 때, $99S$의 값을 구하시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수)

52. 2007 평가원 (4점)

다음 두 조건을 동시에 만족시키는 자연수 x의 개수를 구하시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

(가) $200\leq x\leq 300$
(나) $[\log_2 x]=[\log_3 x]+[\log_4 x]$

53. 2007 교육청 (4점)

$\log_{10}243=2.3856$, $\log_{10}0.0541=-1.2668$일 때, $2430^{10}\div 541$은 정수부분이 n자리수이다. 이 때, n의 값을 구하시오.

54. 2007 평가원 (4점)

두 양수 x, y에 대하여

$$\log x=6+\alpha\ \left(0<\alpha<\frac{1}{4}\right)$$

$$\log y=1+\beta\ \left(\frac{1}{2}<\beta<1\right)$$

이다. $\frac{x^2}{y}$의 정수 부분이 n자리의 수일 때, n의 값을 구하시오.

55. 2006 평가원 (4점)

$\log a^3$의 가수와 $\log b^5$의 가수가 모두 0이 되도록 하는 양의 실수 $a, b\,(1<a<10,\ 1<b<10)$에 대하여 ab의 최댓값이 $10^{\frac{q}{p}}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

56. 2010 평가원 (4점)

$0<a<b$인 a, b에 대하여 $N(a, b)$를 $a<x<b$에서 $\log x$의 가수와 $\log x^3$의 가수가 같은 실수 x의 개수라 하자. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $\log 2=0.3010$으로 계산한다.)

< 보 기 >

ㄱ. $N(\sqrt{10}\,,\ 1000)=4$

ㄴ. p가 정수이면 $N(10^p,\ 10^{p+10})=19$이다.

ㄷ. $N(2^{10},\ 2^{50})=25$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

57. 2006 교육청 (4점)

다음 세 수에 대한 상용로그의 지표의 합과 가수의 합을 차례대로 나열한 것은?

0.02, 200, 2500

① 3, $\log_{10}2$ ② 3, $\log_{10}6.5$ ③ 3, 1 ④ 4, 0 ⑤ 4, $\log_{10}6.5$

58. 2006 평가원 (4점)

자연수 k에 대하여 집합 A_k를 $A_k=\{l\mid l$은 자연수, ($\log l$의 지표)=($\log k$의 지표)$\}$라 할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $A_{10}=A_{99}$

ㄴ. $n(A_{100})=10n(A_{10})$ (단, $n(A)$는 집합 A의 원소의 개수이다.)

ㄷ. $A_p\cap A_q\neq\varphi$이면 $A_p=A_q$이다.(단, p와 q는 자연수이다.)

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

59. 2010 평가원 (4점)

$\log n$의 가수가 $\log\frac{1}{2}$의 가수보다 작은 두 자리 자연수 n의 개수를 구하시오.

60. 2010 교육청 (4점)

양수 x에 대하여 $\log x$의 가수를 $f(x)$라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $f(2010)=f(0.201)$

ㄴ. $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$

ㄷ. $x>1,\ y>1,\ f(x)+f(y)=0$이면 $x,\ y$는 모두 정수이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

61. 2010 교육청 (4점)

다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

(가) $1 < n < 10$

(나) $\log \frac{1}{n}$의 가수는 $\log n^2$의 가수보다 크다.

62. 2010 교육청 (4점)

$\log x$의 지표와 가수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 하자. 실수 M이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $10 \le M < 100$

(나) $f(M^2) = f(M) + 1$

(다) $g(M^2) = 1 - g(M)$

$36 \log M$의 값을 구하시오.

63. 2010 평가원 (4점)

$\log x = -\frac{4}{5}$일 때, x^2은 소수점 아래 a번째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자 b가 나타난다. $a+b$의 값은?
(단, $\log 2$는 0.30, $\log 3$은 0.48로 계산한다.)

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

64. 2006 교육청 (4점)

x, y가 각각 2자리, 3자리의 자연수일 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고르면?

<보 기>

ㄱ. xy는 4자리 또는 5자리의 자연수이다.

ㄴ. $y = 10x$이면 $\log_{10} x$와 $\log_{10} y$의 가수는 같다.

ㄷ. $\frac{1}{x}$은 소수 둘째 자리에서 처음으로 0이 아닌 수가 나타난다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

65. 2006 교육청 (4점)

양수 x에 대하여 $\log x$의 지표와 가수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 하자. 두 등식 $f(a) = f(b) + 2$, $g(a) = g(b) - \log 3$ 을 만족시키는 두 양수 a, b에 대하여 $3a + \frac{25}{b}$의 최솟값을 구하시오.

66. 2004 평가원 (4점)

다음 두 조건을 만족시키는 실수 x를 모두 곱한 값을 M이라 할 때, $\log_{10}M$의 값을 구하시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

Ⅰ. $[\log_{10}x]=6$

Ⅱ. $\log_{10}x^2-[\log_{10}x^2]=\log_{10}\frac{1}{x}-\left[\log_{10}\frac{1}{x}\right]$

67. 2005 교육청 (4점)

$0<x<1$에 대하여 $\left[\frac{[\log_2 x]}{\log_2 x}\right]=1$을 만족시키는 모든 x 값들의 합을 구하시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

68. 2005 평가원 (4점)

자연수 n에 대하여 $\log n$의 지표와 가수를 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f(n)=g(n)$이기 위한 필요충분조건은 $n=1$이다.

ㄴ. $10^{f(50)}\times 10^{g(50)}=50$

ㄷ. $f(10n)g(10n)=f(n)g(n)+g(n)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

69. 2005 교육청 (4점)

1이 아닌 두 양수 a, b에 대하여 $n\le\log_a b<n+1$ (n은 정수)이 성립할 때, $f(a,b)=n$으로 정의한다. 옳은 내용을 <보기>에서 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f(2,9)=4$이다.

ㄴ. $f(a,b)=2$이면 $f(b,a)=0$이다.

ㄷ. $f(a,b)=-2$이면 $f(b,a)=-1$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

70. 2005 교육청 (4점)

세 자리의 자연수 N에 대하여 $[\log 2N]=[\log N]+1$이 성립할 때, 옳은 것을 <보기> 에서 모두 고른 것은? (단, $\log 2=0.3010$이고 $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

<보 기>

ㄱ. N^2은 항상 6자리의 수이다.

ㄴ. N^3은 항상 9자리의 수이다.

ㄷ. N^4은 항상 12자리의 수이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

71. 2007 평가원 (4점)

자연수 n에 대하여 상용로그 $\log 2^n$의 지표를 a_n이라 할 때, 수열 $\{b_n\}$을

$$b_n = \begin{cases} 1 \ (a_{n+1} > a_n) \ (n=1,2,3,4,\cdots) \\ 0 \ (a_{n+1} < a_n) \ (n=1,2,3,4,\cdots) \end{cases}$$

으로 정의한다. $\sum_{k=1}^{200} b_k$의 값은?

(단, $\log 2 = 0.3010$이다.)

① 68 ② 66 ③ 64 ④ 62 ⑤ 60

72. 2007 평가원 (4점)

양의 실수 x에 대하여 상용로그 $\log x$의 가수를 $f(x)$라 하자. 50의 모든 양의 약수의 집합을 $\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n\}$이라 할 때, $\sum_{k=1}^{n} f(a_k)$의 값은?

① $\log 5$ ② $2\log 5$ ③ $3\log 5$ ④ $5\log 5$ ⑤ $6\log 5$

73. 2007 교육청 (4점)

$1 < a < 10$인 a에 대하여 $\log_{10} a^3$의 가수와 $\log_{10}\sqrt{a}$의 가수의 합이 1이 될 때, 모든 a의 값의 곱을 $10^{\frac{q}{p}}$이라 하자. 이 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

74. 2007 교육청 (4점)

$x \geq 1$일 때, $\log_2 x$의 정수 부분을 $f(x)$라고 하자. 방정식 $f(2x+12) = f(x)+3$의 해를 $\alpha \leq x < \beta$라 할 때, $\alpha+\beta$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

75. 2007 교육청 (4점)

두 자리의 자연수 N에 대하여 $\log N$의 가수가 α일 때,

$$\frac{1}{2} + \log N = \alpha + \log_4 \frac{N}{8}$$

을 만족시키는 N의 값을 구하시오.

76. 2009 교육청 (4점)

자연수 N에 대하여 N^2이 7자리 수이고, $\log N$의 가수는 $\log\frac{1}{N}$의 가수의 $\frac{1}{4}$이다. $\log N = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, $\log N$의 가수는 0이 아니고, $p,\ q$는 서로소인 자연수이다.)

77. 2008 교육청 (4점)

A는 세 자리의 자연수이고, B는 900보다 큰 세 자리의 자연수이다. $\log B$의 가수가 $\log A$의 가수의 2배일 때, 자연수 A의 값을 구하시오.

78. 2008 평가원 (4점)

두 자리의 자연수 n에 대하여
$\log_9 n-[\log_9 n]$이 최대가 되는 n의 값을 구하시오.
(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

79. 2008 교육청 (4점)

자연수 n을 n개 이어 붙여 만든 자연수를 N_n이라 하자.
예를 들어 $N_3=333$, $N_{12}=121212\cdots12$ (24자리의 수)이다.
$\log N_n$의 지표와 가수를 각각 $p(n)$, $q(n)$이라 할 때,
<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $p(15)=30$
ㄴ. $q(n)=0$ 인 자연수 n은 1 뿐이다.
ㄷ. $n=10^k$ (k는 자연수)이면 $p(n)-p(n-1)=n+k$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

80. 2008 교육청 (4점)

$\log x$의 지표가 4이고 $\log y$의 지표가 1일 때,
$\left(\log\frac{x}{y}\right)\left(\log\frac{y}{x}\right)$의 값 중에서 정수의 개수를 구하시오.

81. 2009 교육청 (4점)

세 집합
$X=\{x\,|\,x>0\}$, $Y=\{y\,|\,y$ 는 정수$\}$, $Z=\{z\,|\,0\le z<1\}$
에 대하여 두 함수 $f: X\to Y$, $g: X\to Z$가 다음을 만족한다.

집합 X의 임의의 원소 x에 대하여 $10^{f(x)+g(x)}=x$이다.

$f(a)=3$을 만족하는 양수 a에 대하여 $g(a)+g(\sqrt{a})=1$이 되는 a의 값은?

① $10^{\frac{13}{4}}$ ② $10^{\frac{10}{3}}$ ③ $10^{\frac{7}{2}}$
④ $10^{\frac{11}{3}}$ ⑤ $10^{\frac{15}{4}}$

82. 2009 교육청 (4점)

네 자리 자연수 N을 이진법의 수로 나타낼 때, 나타내어진 이진법의 수는 최소 a자릿수에서 최대 b자릿수까지 가능하다.
이때, $a+b$의 값을 구하시오.
(단, $\log 2=0.3010$)

83. 2008 평가원 (4점)

양수 x에 대하여 상용로그 $\log x$의 지표가 n일 때, $f(x)=(-1)^n$이라 하자. <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f(100)=1$

ㄴ. $f(x)=-1$이면 $f(100x)=-1$이다.

ㄷ. $f(x_1)=1$, $f(x_2)=1$이면 $f(x_1x_2)=1$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

84. 2005 평가원 (4점)

아열대 해역에 서식하는 수명이 짧은 어류의 성장 정도를 알아보는 방법 중의 하나는 길이(cm)를 측정하는 것이다. 이 해역에 서식하는 어떤 물고기의 연령 t에 따른 길이 $f(t)$를 근사적으로 추정하면 다음과 같다고 한다.
$f(t)=20\left(1-a^{-0.7(t+0.4)}\right)$ 이 물고기의 길이가 $16cm$ 이상 되기 위한 최소 연령은? (단, a는 $a>1$인 상수이고, $\log_a 5=1.4$로 계산한다.)

① 1 ② 1.6 ③ 2 ④ 2.6 ⑤ 3

85. 2009 교육청 (4점)

어떤 농산물은 유통과정을 한 번 거칠 때마다 일정한 비율로 가격이 인상된다. 이 농산물의 가격 형성 과정을 조사한 결과 유통과정을 다섯 번 거친 소비자 가격은 원산지 생산 가격의 2.24배였다. 유통과정을 한 번만 거친다면 이때의 소비자 가격은 다섯 번 거친 소비자 가격의 약 몇 %인가? (단, $\log 2.24=0.35$, $\log 1.17=0.07$로 계산한다.)

① 32 ② 37 ③ 42
④ 47 ⑤ 52

86. 2008 교육청 (4점)

어떤 생물의 개체수를 측정하기 시작하여 시간 t에서의 식이 개체수를 $N(t)$이라 할 때, 다음 관계식이 성립한다고 한다.

$$N(t)=\frac{K}{1+c\cdot a^{-bt}} \text{ (단, } a,\ b,\ c\text{는 양의 상수)}$$

이때, K는 이 생물의 최대개체량이다.
이 생물의 개체수를 측정하기 시작하여 $t=5$일 때의 개체수는 최대개체량의 $\frac{1}{2}$이었고, $t=7$일 때의 개체수는 최대개체량의 $\frac{3}{4}$이었다. 이 생물의 개체수를 측정하기 시작하여 $t=9$일 때의 개체수를 나타내는 것은?

① $\frac{6}{7}K$ ② $\frac{7}{8}K$ ③ $\frac{8}{9}K$
④ $\frac{9}{10}K$ ⑤ $\frac{10}{11}K$

87. 2004 평가원 (4점)

어느 상품의 수요량 D와 판매가격 P사이에는

$\log_a D = \log_a c - \frac{1}{3}log_a P$ (a, c는 양의 상수, $a \neq 1$)

인 관계가 성립한다고 한다. 이 상품의 판매가격이 P_1, $4P_1$일 때의 수요량을 각각 D_1, D_2라 할 때, $\frac{D_2}{D_1}$의 값은?

① $2^{-\frac{2}{3}}$ ② $2^{-\frac{1}{3}}$ ③ $2^{-\frac{1}{2}}$ ④ $2^{\frac{1}{3}}$ ⑤ $2^{\frac{2}{3}}$

88. 2006 평가원 (4점)

어느 작업장에 먼지의 양이 1m^3당 $200\mu\text{g}(1\mu\text{g} = 10^{-6}\text{g})$ 이 되면 자동으로 가동되기 시작하는 먼지 제거 장치가 있다. 이 장치가 가동되기 시작하고 t초 후 1m^3당 먼지의 양 $x(t)$는

$$x(t) = 20 + 180 \times 3^{-\frac{t}{256}} (\mu\text{g}/\text{m}^3)$$

이라 한다. 먼지 제거 장치가 가동되기 시작하고 n초 후 작업장의 1m^3당 먼지의 양이 $50\mu\text{g}$이 되었다고 할 때, n의 값을 구하시오. (단, $\log 2 = 0.30$, $\log 3 = 0.48$로 계산한다.)

89. 2008 평가원 (4점)

실외 공기 중의 이산화탄소 농도가 0.03%일 때, 실내 공간에서 공기 중의 초기 이산화탄소 농도 $c(0)$(%)를 측정한 후, t시간 뒤의 실내 공간의 이산화탄소 농도 $c(t)$(%)와 환기량 $Q(\text{m}^3/\text{시})$의 관계는 다음과 같다.

$$Q = k \times \frac{V}{t} log \frac{c(0) - 0.03}{c(t) - 0.03}$$

(단, k는 양의 상수이고, $V(\text{m}^3)$는 실내 공간의 부피이다.)

실외 공기 중의 이산화탄소 농도가 0.03%이고 환기량이 일정할 때, 초기 이산화탄소 농도가 0.83%인 빈 교실에서 환기를 시작한 후 1시간 뒤의 이산화탄소 농도를 측정하였더니 0.43%이었다. 환기를 시작한 후 t시간 뒤에 이산화탄소 농도가 0.08%가 되었다. t의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

90. 2006 교육청 (4점)

투수계수란 지층에 물이 통과하는 정도를 나타내는 계수이다. 이 투수계수 K를 구하는 식은 다음과 같다.

$$K = \frac{2.3Q}{2\pi LH} \cdot \log_{10} \frac{L}{r} \ (L \geq r)$$

(Q 주입하는 물의 양, L 시험구간, r 시험 공 반경, H 총 수두) 어느 지층의 투수계수 K를 구하는 실험에서 시험구간 L과 총 수두 H가 일정하고 주입하는 물의 양 Q와 시험 공 반경 r을 각각 처음의 2, 4배로 하여 투수계수가 처음의 $\frac{1}{2}$배가 될 때, $\frac{L}{r} = 10^n$ 이다. 이 때, $100n$의 값을 구하시오.

(단, $\log 2 = 0.3$으로 계산한다.)

91. 2006 교육청 (4점)

어떤 암석에 포함되어 있는 물질 A는 시간이 지남에 따라 점차적으로 물질 B로 변한다. 물질 A와 B의 양을 측정함으로써 그 암석의 생성연도를 알 수 있다. 암석이 생성된 t억년 후의 A의 양과 B의 양을 각각 a, b라 하면 상수 k에 대하여

$$t = k\log_{10}\left(\frac{9b}{a}+1\right)$$

이 성립한다.
처음에 물질 B는 없고 물질 A만 있는 암석이 25.2억년이 지난 후 A의 양과 B의 양의 비가 $3:1$이 되었다. 암석이 생성되어 x억년이 지난 후 A의 양과 B의 양이 같아질 때, x의 값을 구하시오. (단, $\log_{10}2 = 0.3$으로 계산한다.)

92. 2005 교육청 (4점)

사람의 키와 몸무게에 따른 표면적의 관계는 $S = aH^b W^c$ (a, b, c는 상수) (단, S는 표면적(m^2), H는 키(cm), W는 몸무게(kg))임이 알려져 있다. 철수의 키와 몸무게는 각각 $90cm$, $20kg$이고 철수 아빠의 키와 몸무게는 각각 $180cm$, $80kg$이다. 위 관계식에서 $a = 0.02$, $b = 0.4$, $c = 0.5$라 할 때, 철수 아빠의 표면적은 철수의 표면적의 약 몇 배인가?

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2.0	.3010	.3032	.3054	.3075	.3096	.3118	.3139	.3160	.3181	.3201
..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
2.4	.3802	.3820	.3838	.3856	.3874	.3892	.3909	.3927	.3945	.3962
2.5	.3979	.3997	.4014	.4031	.4048	.4065	.4082	.4099	.4116	.4133
2.6	.4150	.4166	.4183	.4200	.4216	.4232	.4249	.4265	.4281	.4298

<상용로그표>

① 2.64 ② 2.58 ③ 2.52
④ 2.46 ⑤ 2.40

93. 2006 교육청 (4점)

단일 재료로 만들어진 벽면의 소음차단 성능을 표시하는 방법 중의 하나는 음향투과손실을 측정하는 것이다. 어느 주파수 영역에서 벽면의 음향투과손실 L(데시벨)은 벽의 단위면적당 질량 $m(\mathrm{kg/m^2})$과 음향의 주파수 f(헤르츠)에 대하여
$L = 20\log mf - 48$
이라 한다. 주파수가 일정할 때, 벽의 단위면적당 질량이 5배가 되면 음향투과손실은 a(데시벨)만큼 증가한다. a의 값을 구하시오. (단, $\log 2 = 0.3$으로 계산한다.)

94. 2005 교육청 (4점)

어느 나라의 기상청에서는 기온이 T(℃)이고 풍속이 v(km/시간)일 때, 체감온도 B(℃)를 다음과 같이 계산하여 발표한다. $B = 14 + 0.6T + (0.4T - 12)v^{0.16}$ 기온이 -15℃ 이고 풍속이 x(km/시간)인 경우, 이 기상청에서 체감온도가 -25℃ 라고 발표하였을 때, x의 값은? (단, 다음 로그표를 사용하고, 계산은 소수점 아래 셋째 자리에서 반올림한다.)

x	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0
$\log x$	0.30	0.34	0.38	0.42	0.45	0.48

① 20 ② 24 ③ 28
④ 32 ⑤ 36

95. 2008 교육청 (4점)

2이상 140 이하의 자연수 n에 대하여, 1부터 n까지의 자연수를 모두 곱한 값과 $\sqrt{2\pi}\cdot n^{n+\frac{1}{2}}\cdot e^{-n}$의 값은 정수 부분의 자리수가 일치한다. 1부터 100까지의 자연수를 모두 곱한 값의 자리수는?
(단, π와 e는 무리수이고, $\log_{10}2=0.3010$, $\log_{10}\pi=0.4971$, $\log_{10}e=0.4343$으로 계산한다.)

① 152 ② 154 ③ 156 ④ 158 ⑤ 160

96. 2005 교육청 (4점)

어떤 학생이 $MP3$ 플레이어를 구입하기 위하여 가격에 대한 정보를 알아보았더니, 현재 제품 A 의 가격은 24 만원, 제품 B 의 가격은 16 만원이고, 3 개월마다 제품 A 는 10% , 제품 B 는 5% 의 가격 하락이 있었다. 이런 추세가 계속된다고 가정할 때, 두 제품의 가격 차이가 구입 시점의 제품 B 가격의 20% 이하가 되면 제품 A 를 구입하기로 하였다. 이 학생이 제품 A 를 구입할 수 있는 최초의 시기는? (단, $\log 2=0.30$, $\log 3=0.48$, $\log 0.95=-0.02$ 로 계산한다.)

① 12 개월 후 ② 15 개월 후 ③ 18 개월 후 ④ 21 개월 후 ⑤ 24 개월 후

97. 2005 교육청 (4점)

2005 년 1 월 1 일 현재 인구가 같은 두 도시 A , B 가 있다. A 도시의 인구는 매년 전년도에 비해 2% 씩 증가하고, B 도시의 인구는 매년 전년도에 비해 2% 씩 감소한다고 가정할 때, 처음으로 A 도시의 인구가 B 도시 인구의 2배 이상이 되는 시기는? (단, $\log_{10}2=0.3010$, $\log_{10}4.9=0.6902$, $\log_{10}5.1=0.7076$)

① 2020 년 ~ 2021 년 ② 2022 년 ~ 2023 년 ③ 2024 년 ~ 2025 년 ④ 2026 년 ~ 2027 년 ⑤ 2028 년 ~ 2029 년

98. 2005 교육청 (4점)

다음은 어느 신문 기사의 일부이다.

> 산소는 생명 유지에 꼭 필요한 물질이고 우리 몸의 모든 기관이나 조직들의 기능을 유지하기 위해 반드시 필요하다. 공기 중에 21% 를 차지하고 있는 산소의 농도가 18% 이하로 감소되면 산소결핍상태가 되고, 16% 정도가 되면 산소부족으로 인해 두통, 구토, 어지러움, 기억력 감퇴, 소화불량 등의 증상이 나타난다. 어느 사무실의 실내를 환기시키지 않고 10 분 간격으로 산소 농도를 측정한 결과 바로 전에 측정한 농도의 1% 가 감소하는 것으로 나타났다.

이 사무실의 현재 측정한 산소농도가 21% 일 때, 실내를 환기시키지 않은 상태에서 처음으로 18% 이하로 측정되는 시간은 몇 분 후인가?
(단, $\log 6=0.7782$, $\log 7=0.8451$, $\log 9.9=0.9956$)

① 120 분 ② 140 분 ③ 160 분 ④ 180 분 ⑤ 200 분

99. 2008 교육청 (4점)

○○보고서에 의하면 2008년 예상되는 세계 석유 소비량은 a이고 전년도에 비해 매년 2%씩 증가한다고 가정할 때, 매장된 석유는 2008년부터 40년 간 사용할 수 있는 양이라고 한다. 대체에너지 개발을 통해 2009년부터 세계 석유 소비량을 전년도에 비해 매년 1%식 감소시킨다고 할 때, 석유가 완전히 고갈되는 해는? (단, $1.02^{40}=2.208$, $\log_{10}9.9=0.9956$, $\log_{10}3.96=0.5977$)

① 2095년 ② 2099년 ③ 2104년
④ 2109년 ⑤ 2114년

100. 2008 교육청 (4점)

세균은 배양하기 쉽고 배양속도가 빠르기 때문에 유전자 연구에 많이 쓰인다. 특히, 실험실에서 가장 많이 쓰이는 세균인 대장균은 최적조건에서 20분마다 분열하여 그 수가 두 배씩 증가한다. 현재 대장균의 개체수가 2.56×10^3 일 때, 최적조건에서 대장균이 분열을 시작한지 n 시간 후에 개체수가 2.56×10^{12} 이 된다.
이 때, n 의 값을 구하시오. (단, $\log2=0.3$ 으로 계산한다.)

101. 2007 교육청 (4점)

시간이 지남에 따라 일정한 비율로 늘어나는 두 종류의 세균 A, B가 있다. A는 3시간이 지날 때마다 그 수가 2배로 늘어나고, B는 5시간이 지날 때마다 3배로 늘어난다. A세균 100마리와 B세균 1000마리를 동시에 배양하기 시작하였을 때, A의 수가 B의 수 이상이 되도록 배양하는데 걸리는 최소의 시간은? (단, $\log_{10}2=0.30$, $\log_{10}3=0.48$로 계산한다.)

① 250 ② 270 ③ 290
④ 310 ⑤ 330

102. 2006 교육청 (4점)

2005년 12월에 a원 하는 자동차를 무이자 할부로 구입하여 매월 할부금을 2006년 1월부터 시작하여 홀수 달은 남은 금액의 10%를 상환하고 짝수 달은 남은 금액의 20%를 상환하려고 한다. n회의 할부금을 상환한 후 남은 금액이 자동차 값의 $\frac{1}{10}$ 이하가 된다고 할 때, n의 최소값을 구하시오. (단, $\log2=0.30$, $\log3=0.48$으로 계산한다.)

103. 2006 교육청 (4점)

통계청에서 발표한 산업별 종사자 수에 대한 자료에 의하면 우리나라의 농업 또는 임업에 종사하는 인구는 2000년 초 216만 명에서 전년도 대비 매년 일정한 비율로 감소하여 2005년 초에는 2000년 초에 비하여 20% 감소되었다고 한다. 이러한 감소 추세가 계속된다고 할 때, 우리나라의 농업 또는 임업에 종사하는 인구가 2000년 초에 비하여 처음으로 절반 이하가 되는 해는 몇 년 초인가? (단, $\log2=0.3010$이다.)

① 2013년 ② 2016년 ③ 2019년
④ 2022년 ⑤ 2025년

104. 2006 교육청 (4점)

A 나라에 수출을 하는 B 회사가있다. B 회사는 앞으로의 수출전략을 수립하기 위해 기획팀에서 수출전망 보고서를 작성하였다.

수 출 전 망

서 론
A 나라는 최근 높은 실질성장률을 보이고 있어 우리 회사의 지속적인 수출증가세가 예상된다.

－－－－－－－－－－－－－－－ 중 략 －－－－－－－－－－－－－

긍정적인 요인	부정적인 요인
…	…

－－－－－－－－－－－－－－－ 중 략 －－－－－－－－－－－－－

결 론
매년 어떤 시기에 우리 회사 제품의

이 보고서의 결론대로 수출증가세가 유지된다고 할때, B 회사의 수출량이 현재의 3 배이상이 되는 것은 몇년 후부터인가?
(단, $\log_1 03 = 0.4771$, $\log_{10}1.08 = 0.0334$)

① 14 년후 ② 15 년후 ③ 16 년후
④ 17 년후 ⑤ 18 년후

105. 2005 교육청 (4점)

K 보험사에는 다음과 같은 종신연금 상품이 있다.

> ○ 최초 가입시 단 한번 납입한 1 억 원을 연이율 5%, 1 년 단위의 복리로 계산하여 10 년 후의 원리합계를 연금 준비금으로 한다.
> ○ 가입하여 10 년이 지난 후부터 매년 A 원씩 연금을 영구히 받는다.
> ○ n 번째의 연금 A 원을 연금 지급이 시작된 해의 가치로 환산하면 $\dfrac{A}{(1+0.05)^{n-1}}$ 원이다.
> ○ 매년 받을 수 있는 연금을 연금 지급이 시작된 해의 가치로 환산하여 모두 더한 금액이 연금 준비금과 같아지도록 한다.

2005 년 초에 이와 같은 종신연금에 가입했을 때, 2015 년 초부터 매년 받을 수 있는 연금액은? (단, $1.05^9 = 1.55$ 로 계산한다.)

① 675 만원 ② 725 만원 ③ 775 만원
④ 825 만원 ⑤ 875 만원

106. 2009 교육청 (4점)

새 차의 가격을 P, t년 후의 중고차의 가격을 W, 연평균 감가상각비율을 r라 할 때, 다음과 같은 식이 성립한다고 알려져 있다.

$$\log(1-r) = \frac{1}{t}\log\frac{W}{P}$$

새 차의 가격이 2000만 원이고 연평균 감가상각비율이 0.15일 때, 5년 후의 중고차의 가격은?
(단, $\log 2 = 0.30$, $\log 8.5 = 0.93$, $\log 8.9 = 0.95$로 계산한다.)

① 850만 원 ② 870만 원 ③ 890만 원
④ 930만 원 ⑤ 950만 원

107. 2008 수능 (3점)

자연수 n에 대하여 $\log n$의 가수를 $f(n)$이라 할 때, 집합

$$A=\{f(n)\,|\,1\leq n\leq 150,\ n\text{은 자연수}\}$$

의 원소의 개수는?

① 131 ② 133 ③ 135
④ 137 ⑤ 139

108. 1999 수능 (3점)

시간 t 에 따라 감소하는 함수 $f(t)$ 에 대하여 $f(t+c)=\frac{1}{2}f(t)$ 를 만족시키는 양의 상수 c 를 $f(t)$ 의 반감기라 한다. 함수 $f(t)=3^{-t}$ 의 반감기는?

① $\frac{1}{3}\log_3 2$ ② $\frac{1}{2}\log_3 2$ ③ $\log_3 2$
④ $2\log_3 2$ ⑤ $3\log_3 2$

109. 2006 수능 (3점)

주위가 순간적으로 어두워지더라도 사람의 눈은 그 변화를 서서히 지각하게 된다. 빛의 세기가 1000에서 10으로 순간적으로 바뀐 후 t초가 경과했을 때, 사람이 지각하는 빛의 세기 $I(t)$는

$$I(t)=10+990\times a^{-5t}\ \ (\text{단, } a\text{는 } a>1\text{인 상수})$$

이라 한다. 빛의 세기가 1000에서 10으로 순간적으로 바뀐 후, 사람이 빛의 세기를 21로 지각하는 순간까지 s초가 경과했다고 할 때, s의 값은? (단, 빛의 세기의 단위는 Td(트롤랜드)이다.)

① $\frac{1+2\log 3}{5\log a}$ ② $\frac{1+3\log 3}{5\log a}$ ③ $\frac{2+\log 3}{5\log a}$
④ $\frac{2+2\log 3}{5\log a}$ ⑤ $\frac{2+3\log 3}{5\log a}$

110. 1999 수능 (3점)

컴퓨터 중앙처리장치의 속도는 1985 년 1 MHz 이던 것이 매3 년 마다 약 4배의 비율로 빨라지고 있다. 한 연구에 의하면, 현재 기술로 이와 같은 발전을 지속할 수 있는 중앙처리장치 속도의 한계는 약 4,000MHz 라고 한다. 이 연구에서 현재 기술이 한계에 도달할 것으로 예측되는 해는? (단, MHz 는 중앙처리장치 속도의 단위이며, $\log 2=0.3$ 으로 계산한다.)

① 2003년 ② 2006년 ③ 2009년
④ 2012년 ⑤ 2024년

111. 2002 수능 (3점)

광통신에서는 광섬유를 이용하여 신호를 먼 곳까지 보낸다. 신호가 광섬유를1 km 지날 때마다 신호의 세기는1 km전의 세기의 99%가 된다고 하자. 신호의 세기가 처음 세기의 $\frac{1}{2}$이 되는 곳에 중계소를 설치하려고 할 때, 처음 신호를 보내는 곳에서 중계소까지 광섬유의 길이는 약 몇km인가?
(단, $\log 2=0.3010, \log 9.9=0.9956$ 으로 계산한다.)

① 68 ② 78 ③ 88
④ 98 ⑤ 108

112. 2011학년 수능 (3점)

지반의 상대밀도를 구하기 위하여 지반에 시험기를 넣어 조사하는 방법이 있다. 지반의 유효수직응력을 S, 시험기가 지반에 들어가면서 받는 저항력을 R라 할 때, 지반의 상대밀도 D(%)는 다음과 같이 구할 수 있다고 한다.

$D = -98 + 66\log\dfrac{R}{\sqrt{S}}$ (단, S와 R의 단위는 $metric\ ton/m^2$이다.)

지반 A의 유효수직응력은 지반 B의 유효수직응력의 1.44배이고, 시험기가 지반 A에 들어가면서 받는 저항력은 시험기가 지반 B에 들어가면서 받는 저항력의 1.5배이다. 지반 B의 상대밀도가 65(%)일 때, 지반 A의 상대밀도(%)는? 112.
(단, log2 = 0.3으로 계산한다.)

3

① 81.5 ② 78.2 ③ 74.9
④ 71.6 ⑤ 68.3

113. 2001 수능 (4점)

상용로그의 지표가 2인 수 중에서 가장 큰 정수를 a, 상용로그의 지표가 -2인 수 중에서 가장 작은 수를 b라 할 때, ab의 값은?

① 0.9 ② 0.99 ③ 1
④ 9.99 ⑤ 10

114. 2005 수능 (4점)

어느 물탱크에 서식하고 있는 박테리아를 제거하기 위하여 약품을 투여하려고 한다. 물탱크에 있는 물 1mL당 초기 박테리아 수를 C_0, 약품을 투여한 지 t시간이 지나는 순간 1mL당 박테리아 수를 C라 할 때, 다음 관계식이 성립한다고 하자.

$$\log\frac{C}{C_0} = -kt \quad (k\text{는 양의 상수})$$

물 1mL당 초기 박테리아 수가 8×10^5이고, 약품을 투여한 지 3시간이 지나는 순간 1mL당 박테리아 수는 2×10^5이 된다고 한다. 약품을 투여한 지 a시간 후에 처음으로 1mL당 박테리아 수가 8×10^3 이하가 되었다. a의 값을 구하시오. (단, $\log 2 = 0.3$으로 계산한다.)

115. 2007 수능 (4점)

어느 지역에서 1년 동안 발생하는 규모 M 이상인 지진의 평균 발생 횟수 N은 다음 식을 만족시킨다고 한다.

$$\log N = a - 0.9M \ (\text{단, } a\text{는 양의 상수})$$

이 지역에서 규모 4 이상인 지진이 1년에 평균 64번 발생할 때, 규모 x 이상인 지진은 1년에 평균 한 번 발생한다. $9x$의 값을 구하시오. (단, log2 = 0.3으로 계산한다.)

116. 2004 수능 (4점)

총 인구에서 65세 이상 인구가 차지하는 비율이 20% 이상인 사회를 '초고령화 사회'라고 한다. 2000년 어느 나라의 총 인구는 1000만 명이고 65세 이상 인구는 50만 명이었다. 총 인구는 매년 전년도보다 0.3% 씩 증가하고 65세 이상 인구는 매년 전년도보다 4% 씩 증가한다고 가정 할 때, 처음으로 '초고령화 사회'가 예측되는 시기는?
(단, log1.003 = 0.0013, log1.04 = 0.0170, log2 = 0.3010)

① 2048년 ~ 2050년 ② 2038년 ~ 2040년
③ 2028년 ~ 2030년 ④ 2018년 ~ 2020년
⑤ 2008년 ~ 2010년

117. 2010 수능 (4점)

10보다 작은 자연수 n에 대하여 $\left(\frac{n}{10}\right)^{10}$이 소수 여섯째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타날 때, n의 값은?

(단, $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$로 계산한다.)

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

118. 2011학년 수능 (4점)

자연수 A에 대하여 $\log A$의 지표를 n, 가수를 α라 할 때, $n \leq 2\alpha$가 성립하도록 하는 A의 개수를 구하시오. 118. (단, $3.1 < \sqrt{10} < 3.2$)

1. 2005 교육청 (2점)

지수부등식 $2^{x^2} < 4 \cdot 2^x$ 의 해가 $\alpha < x < \beta$ 일 때, $\alpha + \beta$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

2. 2006 교육청 (2점)

부등식 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-4} > \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{64}}}$ 를 만족시키는 정수 x의 최댓값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

3. 2007 교육청 (3점)

세 수 $A = \sqrt[3]{3}$, $B = \sqrt{\sqrt{5}}$, $C = \sqrt{\sqrt[3]{10}}$ 의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $A < B < C$ ② $A < C < B$
③ $B < A < C$ ④ $B < C < A$
⑤ $C < B < A$

4. 2006 교육청 (3점)

세 수 $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[6]{6}$ 중에서 두 수를 선택하여 a, b라고 할 때, $\frac{b}{a}$의 최댓값은?

① $\sqrt{\frac{3}{2}}$ ② $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$
③ $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ ④ $\sqrt[6]{\frac{3}{2}}$
⑤ $\sqrt[6]{\frac{1}{6}}$

5. 2006 교육청 (3점)

$\sqrt{2\sqrt{2}}$, $\sqrt{2^{\sqrt{2}}}$, $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$의 대소 관계는?

① $\sqrt{2\sqrt{2}} < \sqrt{2^{\sqrt{2}}} < (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$
② $\sqrt{2\sqrt{2}} < \sqrt{2^{\sqrt{2}}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$
③ $\sqrt{2^{\sqrt{2}}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}} < \sqrt{2\sqrt{2}}$
④ $\sqrt{2^{\sqrt{2}}} < (\sqrt{2})^{\sqrt{2}} < \sqrt{2\sqrt{2}}$
⑤ $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}} < \sqrt{2\sqrt{2}} < \sqrt{2^{\sqrt{2}}}$

6. 2006 평가원 (3점)

$0 < a < b < c < 1$을 만족하는 세 실수 a, b, c에 대하여
$A = a^a b^b c^c$, $B = a^a b^c c^b$, $C = a^b b^c c^a$
이라고 하자. 이때, A, B, C의 대소 관계로 옳은 것은?

① $C < B < A$ ② $B < C < A$
③ $C < A < B$ ④ $A < C < B$
⑤ $B < A < C$

7. 2007 교육청 (3점)

$a=3^{55}$, $b=4^{44}$, $c=5^{33}$일 때, 큰 것부터 차례로 나열한 것은?

① a, b, c　② a, c, b
③ b, c, a　④ b, a, c
⑤ c, b, a

8. 2004 평가원 (3점)

세 수 $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[4]{8}$, $\sqrt[6]{12}$ 를 작은 것부터 차례로 나열한 것은?

① $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[4]{8}$, $\sqrt[6]{12}$
② $\sqrt[4]{8}$, $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[6]{12}$
③ $\sqrt[6]{12}$, $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[4]{8}$
④ $\sqrt[6]{12}$, $\sqrt[4]{8}$, $\sqrt[3]{6}$
⑤ $\sqrt[4]{8}$, $\sqrt[6]{12}$, $\sqrt[3]{6}$

9. 2005 평가원 (3점)

세 함수 $f(x)=(1+r_1)^x$, $g(x)=\left(1+\dfrac{r_2}{2}\right)^{2x}$,

$h(x)=\left(1+\dfrac{r_3}{4}\right)^{4x}$ 에 대하여 $f(10)=g(10)=h(10)$ 일 때,

r_1 , r_2 , r_3 의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은? (단, r_1 , r_2 , r_3 는 양의 실수이다.)

① $r_1<r_2<r_3$　② $r_1<r_3<r_2$
③ $r_2<r_1<r_3$　④ $r_2<r_3<r_1$
⑤ $r_3<r_2<r_1$

10. 2005 교육청 (3점)

다음은 $\sqrt{2}^{\sqrt{3}}\times\sqrt{3}^{\sqrt{2}}$ 과 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\times\sqrt{3}^{\sqrt{3}}$ 의 대소 관계를 알아보는 과정이다.

> $\sqrt{2}^{\sqrt{3}}\times\sqrt{3}^{\sqrt{2}}-\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\times\sqrt{3}^{\sqrt{3}}$
> $=\sqrt{2}^{(\text{가})}\times\sqrt{3}^{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\sqrt{3}^{(\text{나})}\right)$
> 그런데
> $\sqrt{2}^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\ (\text{다})\ \sqrt{3}^{(\text{나})}$ 이고
> $\sqrt{2}^{(\text{가})}>0$, $\sqrt{3}^{\sqrt{2}}>0$ 이므로
> $\sqrt{2}^{\sqrt{3}}\times\sqrt{3}^{\sqrt{2}}-\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\times\sqrt{3}^{\sqrt{3}}\ (\text{다})\ 0$
> $\therefore\ \sqrt{2}^{\sqrt{3}}\times\sqrt{3}^{\sqrt{2}}\ (\text{다})\ \sqrt{2}^{\sqrt{2}}\times\sqrt{3}^{\sqrt{3}}$

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

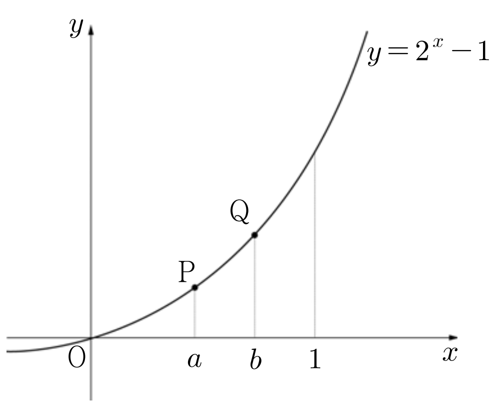
① $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}-\sqrt{2}$, $<$　② $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}-\sqrt{2}$, $>$
③ $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}-\sqrt{3}$, $<$　④ $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}-\sqrt{3}$, $>$
⑤ $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}-\sqrt{3}$, $<$

11. 2007 교육청 (3점)

그림에서 함수 $y=2^x-1$의 그래프 위의 서로 다른 두 점 P, Q의 x좌표를 각각 a, b라 할 때,

$A=\dfrac{2^a-1}{a}$, $B=\dfrac{2^b-1}{b}$, $C=\dfrac{2^b-2^a}{b-a}$

의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은? (단, $0<a<b<1$)



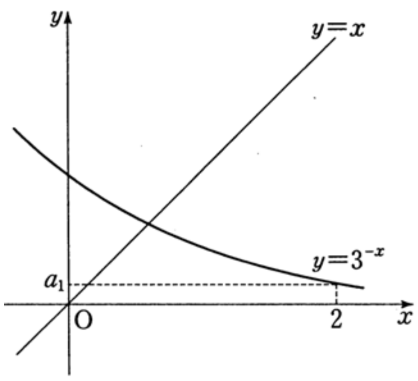
① $A<B<C$　② $A<C<B$
③ $B<A<C$　④ $B<C<A$
⑤ $C<A<B$

12. 2009 평가원 (3점)

지수함수 $f(x)=3^{-x}$에 대하여

$$a_1=f(2),\ a_{n+1}=f(a_n)\ (n=1,\ 2,\ 3)$$

일 때, a_2, a_3, a_4의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은?



① $a_2<a_3<a_4$
② $a_4<a_3<a_2$
③ $a_2<a_4<a_3$
④ $a_3<a_2<a_4$
⑤ $a_3<a_4<a_2$

13. 2004 평가원 (3점)

함수 $f(x)=a^x\,(a>0,\ a\neq1)$에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은? (단, k는 상수)

① $f(0)=1$
② $f(kx)=\{f(x)\}^k$
③ $f(x+y)=f(x)\times f(y)$
④ $f(x-y)=f(x)\div f(y)$
⑤ $f(x\times y)=f(x)+f(y)$

14. 2004 평가원 (3점)

지수함수 $f(x)=a^x$에 대한 <보기> 의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $a>0$, $a\neq1$)

〈 보 기 〉

ㄱ. $f(-x)=\dfrac{1}{f(x)}$
ㄴ. $f(x)=\sqrt{f(2x)}$
ㄷ. $f(x^3)=\{f(x)\}^3$

① ㄱ
② ㄴ
③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. 2007 평가원 (3점)

두 함수 $y=2^x$, $y=-\left(\dfrac{1}{2}\right)^x+k$의 그래프가 서로 다른 두 점A, B에서 만난다. 선분 AB의 중점의 좌표가 $\left(0,\ \dfrac{5}{4}\right)$일 때, 상수 k의 값은?

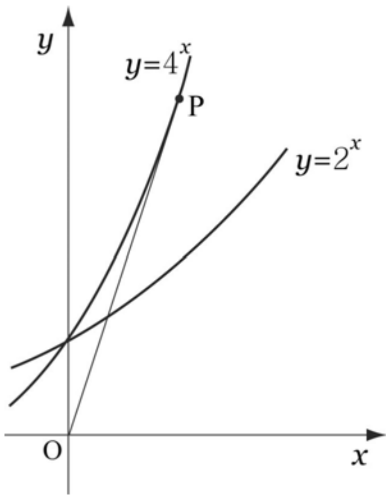
① $\dfrac{1}{2}$
② 1
③ $\dfrac{3}{2}$
④ 2
⑤ $\dfrac{5}{2}$

16. 2006 평가원 (3점)

함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동시킨 그래프가 두 점 $(-1,1)$, $(0,5)$를 지날 때, m^2+n^2의 값을 구하시오.

17. 2009 교육청 (3점)

원점 O에서 함수 $f(x)=4^x$ 위의 한 점 P를 잇는 선분 OP가 있다. 함수 $g(x)=2^x$ 의 그래프가 선분 OP를 1 : 3으로 내분할 때, 점 P의 x좌표는?



① $\frac{4}{7}$ ② $\frac{5}{7}$ ③ $\frac{6}{7}$
④ 1 ⑤ $\frac{8}{7}$

18. 2009 교육청 (3점)

정의역이 $x<4$인 두 함수 $f(x)=2^x$, $g(x)=x^2$의 그래프가 만나는 두 점을 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $x_1<x_2$)

<보 기>

ㄱ. $x_1+x_2>0$
ㄴ. $x_1\cdot y_1+x_2\cdot y_2<0$
ㄷ. $|x_1\cdot y_2|-|x_2\cdot y_1|>0$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. 2009 교육청 (3점)

$1<b<a$에 대하여 두 함수

$$f(x)=a^x,\ g(x)=\left(\frac{1}{b}\right)^x$$

가 있다. $y=k\ (k>1)$가 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프와 만나는 점의 x좌표를 각각 α, β라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $f(\sqrt{3})-g(-\sqrt{3})>0$
ㄴ. $|\beta|a^{\alpha}-|\alpha|\left(\frac{1}{b}\right)^{\beta}>|\beta|-|\alpha|$
ㄷ. $g\left(\frac{1}{3}\alpha+\frac{2}{3}\beta\right)>\frac{1}{3}g(\alpha)+\frac{2}{3}g(\beta)$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. 2010 교육청 (3점)

실수 전체의 집합에서 양의 실수의 집합으로 대응되는 함수 $f(x)$가 임의의 실수 a, b에 대하여 $f(ab)=\{f(b)\}^a$을 만족할 때, $f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{6}\right)$의 값은? (단, $f(1)=64$)

① 12 ② 13 ③ 14
④ 15 ⑤ 16

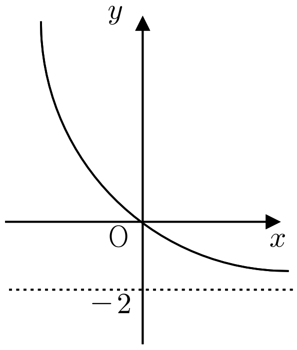
21. 2010 교육청 (3점)

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=2^{ax+b}$이 다음 두 조건을 모두 만족시킬 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.
(단, a, b는 상수이다.)

(가) $f\left(\frac{5}{2}\right)=2\sqrt{2}$
(나) 임의의 실수 x, y에 대하여 $f(x+y)=2f(x)f(y)$이다.

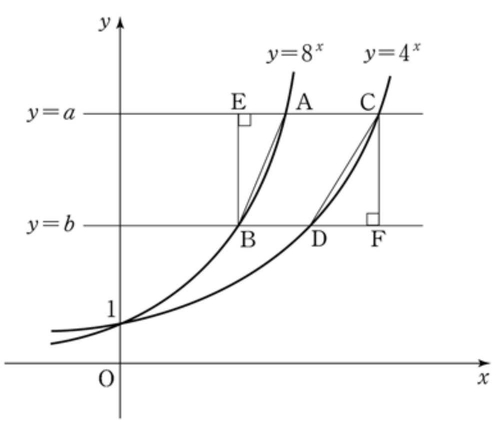
22. 2004 평가원 (3점)

그림은 지수함수 $y=2^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 후, x 축 방향으로 a 만큼, y 축 방향으로 b 만큼 평행이동한 그래프와 그 점근선을 나타낸 것이다. 이 때, $a-b$ 의 값을 구하시오.



23. 2007 평가원 (3점)

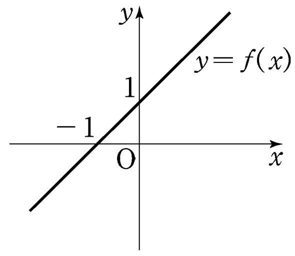
그림과 같이 함수 $y=8^x$의 그래프가 두 직선 $y=a$, $y=b$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 함수 $y=4^x$의 그래프가 두 직선 $y=a$, $y=b$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 점 B 에서 직선 $y=a$에 내린 수선의 발을 E, 점 C에서 직선 $y=b$에 내린 수선의 발을 F라 하자. 삼각형 AEB의 넓이가 20일 때, 삼각형 CDF의 넓이는? (단, $a>b>1$이다.)



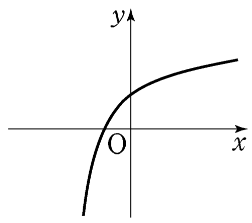
① 26　② 28　③ 30　④ 32　⑤ 34

24. 2008 교육청 (3점)

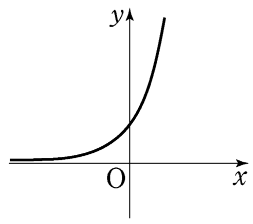
오른쪽 그림은 일차함수 $y=f(x)$의 그래프이다. 함수 $y=2^{2-f(x)}$의 그래프의 개형으로 알맞은 것은?



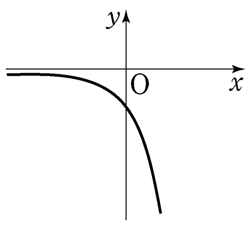
①



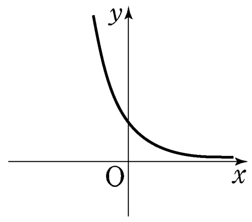
②



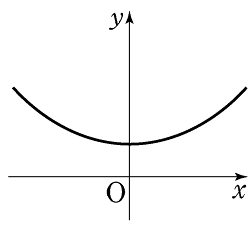
③



④



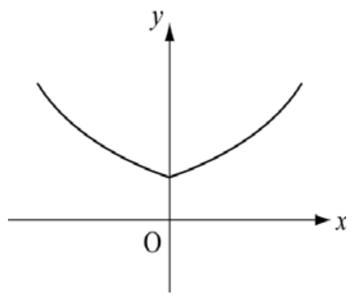
⑤



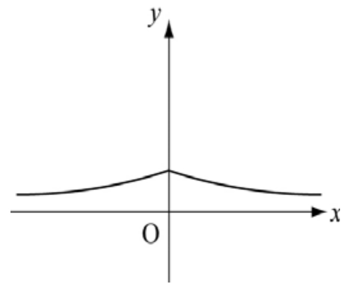
25. 2006 교육청 (3점)

두 지수함수 $f(x)=a^x\ (a>1)$, $g(x)=b^x\ (0<b<1)$ 에 대하여 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 의 그래프의 개형은?

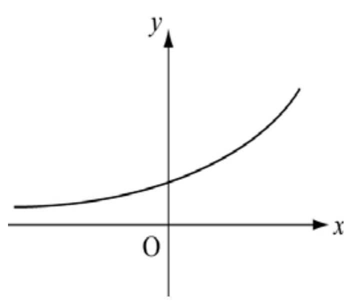
①



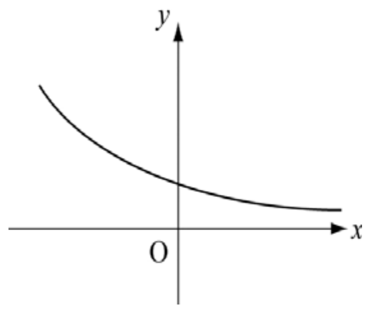
②



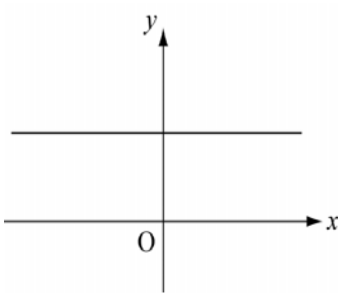
③



④



⑤



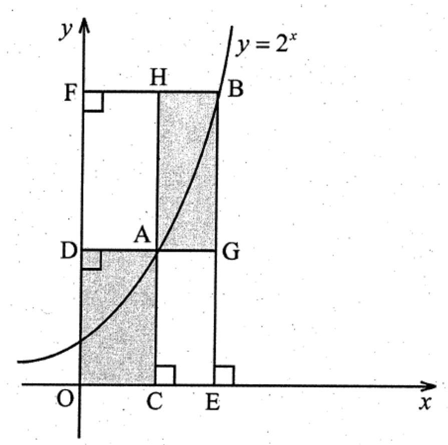
26. 2008 평가원 (3점)

두 곡선 $y=3^{x+m}$, $y=3^{-x}$이 y축과 만나는 점을 각각 A, B라고 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=8$일 때, m의 값은?

① 2　② 4　③ 6
④ 8　⑤ 10

27. 2008 교육청 (3점)

아래의 그림은 함수 $y=2^x$ 의 그래프이다. 곡선 위의 두 점 $\mathrm{A}(n,\ 2^n)$, $\mathrm{B}(n+2,\ 2^{n+2})$ 각각에서 x축과 y축에 내린 수선의 발이 C, D 와 E, F 이다. 그리고 선분 DA 의 연장선과 선분 BE 의 교점을 G , 선분 CA 의 연장선과 선분 FB 의 교점을 H 라 하자.



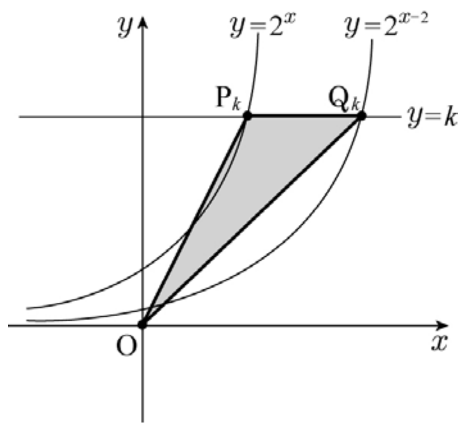
사각형 DOCA 의 넓이와 사각형 HAGB 의 넓이가 같을 때, 자연수 n 의 값은?

① 4　② 5　③ 6
④ 7　⑤ 8

28. 2010 평가원 (3점)

그림과 같이 두 곡선 $y=2^x$, $y=2^{x-2}$과 직선 $y=k$의 교점을 각각 P_k, Q_k라 하고, 삼각형 $\mathrm{OP}_k\mathrm{Q}_k$의 넓이를 A_k라 하자.

$A_1+A_4+A_7+A_{10}$의 값을 구하시오. (단, k는 자연수이고, O는 원점이다.)[28.]



29. 2008 교육청 (3점)

함수 $f(x)=3^x \cdot 2^{-2x+2}(-1 \leq x \leq 1)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라고 할 때, $M \times m$의 값을 구하시오.

30. 2007 교육청 (3점)

$-2 \leq x \leq 4$일 때, 지수함수 $y=3^{x^2-4x-3}$의 최댓값과 최솟값의 곱을 구하시오.

31. 2006 평가원 (3점)

함수 $f(x)=2^{x^2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3}$ 의 최솟값은?

① $\frac{1}{8}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\sqrt{2}$　④ $2\sqrt{2}$　⑤ 4

32. 2008 교육청 (3점)

$0 \leq x \leq 3$에서 함수 $f(x)=2^{-x^2+4x+a}$의 최솟값이 4일 때, $f(x)$의 최댓값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

33. 2008 교육청 (3점)

실수 x에 대하여 $3^{x+1}-3^x=a$, $2^{x+1}+2^x=b$일 때, 12^x을 a, b를 이용하여 나타낸 것은?

① $\frac{ab}{6}$　② $\frac{a^2b}{18}$　③ $\frac{a^2b}{12}$　④ $\frac{ab^2}{18}$　⑤ $\frac{ab^2}{12}$

34. 2020 교육청 (3점)

방정식 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{3x}=9^{3-x}$의 해를 구하시오.

35. 2008 교육청 (3점)

지수방정식 $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}-\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}+9=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\beta$를 구하면?

① 2　② 1　③ 0　④ -1　⑤ -2

36. 2010 평가원 (3점)

지수방정식 $\frac{16^x}{2}=2^{x+3}$을 만족시키는 x의 값은?

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{2}{3}$　③ 1　④ $\frac{4}{3}$　⑤ $\frac{5}{3}$

37. 2010 평가원 (3점)

지수방정식 $(2^x-8)(3^{2x}-9)=0$의 두 실근을 α, β라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하시오.

38. 2009 교육청 (3점)

방정식 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{3x}=9^{3-x}$의 해를 구하시오.

39. 2005 교육청 (3점)

연립방정식 $\begin{cases} x-y=2 \\ 2^x-2^y=6 \end{cases}$을 만족시키는 실수 x, y에 대하여 2^x+2^y의 값을 구하시오.

40. 2008 교육청 (3점)

방정식 $16^x-4^{x+3}+100=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $2^{\alpha+\beta}$의 값을 구하시오.

41. 2009 교육청 (3점)

x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} 2^x-3^{y-1}=5 \\ 2^{x+1}-3^y=-17 \end{cases}$을 만족하는 해를 $x=a$, $y=b$라 하자. a, b의 곱 ab의 값을 구하시오.

42. 2008 교육청 (3점)

연립방정식

$$\begin{cases} 3\cdot 2^x-2\cdot 3^y=6 \\ 2^{x-2}-3^{y-1}=-1 \end{cases}$$

의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하시오.

43. 2007 교육청 (3점)

x에 관한 방정식 $a^{2x}-a^x=2\,(a>0,\ a\neq 1)$의 해가 $\frac{1}{7}$이 되도록 하는 상수 a의 값을 구하시오.

44. 2004 평가원 (3점)

지수방정식 $4^x-3\cdot 2^x+2=0$의 모든 근의 합을 구하시오.

45. 2009 평가원 (3점)

지수방정식 $9^x - 3^{x+2} + 8 = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $3^{2\alpha} + 3^{2\beta}$의 값을 구하시오.

46. 2006 교육청 (3점)

양수 x가 $2^{3x^2-4x-9} = \frac{1}{4}$을 만족시킬 때, x의 값은?

① 1 ② $\frac{4}{3}$
③ $\frac{5}{3}$ ④ 2
⑤ $\frac{7}{3}$

47. 2009 교육청 (3점)

방정식 $4^x - 2^{x+2} + 2 = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha + \beta$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

48. 2009 교육청 (3점)

$2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 1 = 0$일 때, $\frac{2^{3x} - 2^{-3x}}{2^x - 2^{-x}}$의 값을 구하시오.

49. 2009 평가원 (3점)

지수방정식 $6 - 2^x = 2^{3-x}$의 모든 실근의 합을 구하시오.

50. 2008 교육청 (3점)

두 정수 a, b가 $2a + b = 12$를 만족할 때, $4^a + 2^b$의 최솟값을 구하시오.

51. 2005 교육청 (3점)

부등식 $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1} \geqq \left(\frac{1}{4}\right)^{x+1}$을 만족시키는 모든 자연수 x의 값들의 합을 구하시오.

52. 2006 평가원 (3점)

부등식 $9^x - 3^{x+2} + 18 < 0$의 해가 $\alpha < x < \beta$일 때, $3^\alpha 3^\beta$의 값을 구하시오. 52.

53. 2007 교육청 (3점)

지수부등식 $\frac{1}{4^x} - \frac{1}{2^{x-1}} - 8 \leqq 0$의 해는?

① $x \leqq -4$ ② $x \geqq -4$ ③ $x \geqq -2$ ④ $-4 \leqq x \leqq 2$ ⑤ $-4 \leqq x \leqq -2$

54. 2006 교육청 (3점)

x에 대한 방정식 $4^x - a \cdot 2^{x+1} + a^2 - a - 6 = 0$이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 상수 a의 값의 범위는?

① $a > -6$ ② $-6 < a < -2$ ③ $a > 0$ ④ $-2 < a < 3$ ⑤ $a > 3$

55. 2009 교육청 (3점)

모든 실수 x에 대하여 부등식 $k \cdot 2^x \leqq 4^x - 2^x + 4$가 성립하도록 하는 실수 k값의 범위는?

① $k \leqq -1$ ② $-4 \leqq k \leqq 3$ ③ $-1 \leqq k \leqq 3$ ④ $k \leqq 3$ ⑤ $k \geqq 0$

56. 2008 교육청 (3점)

지수함수 $f(x) = 2^x$, $g(x) = 3^x$에 대하여 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $g(x) - f(x) > 0$
ㄴ. $12 f(x) g(x) = f(x+2) g(x+1)$
ㄷ. $a < b$이면 $f(-2a)g(a) < f(-2b)g(b)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

57. 2008 평가원 (3점)

두 함수 $f(x)=2^{x-2}+1$, $g(x)=\log_2(x-1)+2$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f^{-1}(5)\cdot\{g(5)+1\}=20$이다.
ㄴ. $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
ㄷ. $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 만나지 않는다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

58. 2008 교육청 (4점)

함수 $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$에 대하여 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$
ㄴ. $f(x)+f(1-x)=1$
ㄷ. $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} f\left(\frac{k}{101}\right)=50$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ
③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

59. 2009 교육청 (4점)

두 함수 $f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$, $g(x)=a^{|x|}$에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $a>1$)

[보 기]

ㄱ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.
ㄴ. 임의의 실수 x에 대하여 $f(x)-g(x)\leq 0$이다.
ㄷ. $c>1$일 때, 방정식 $f(x)=c$의 한 실근을 α, 방정식 $g(x)=c$의 한 실근을 β라 하면 $|\alpha|>|\beta|$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ,ㄴ
④ ㄴ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

60. 2009 교육청 (4점)

함수 $f(x)=2^{-x+a}+1$에 대하여 함수 $g(x)$가 임의의 실수 x에 대하여 $g(f(x))=x$를 만족한다. $g(9)=-2$일 때, $g(17)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① -1 ② -2 ③ -3
④ -4 ⑤ -5

61. 2009 평가원 (4점)

함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$를 만족시키고,

$$f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|+1 \quad \left(-\frac{1}{2}\leqq x<\frac{3}{2}\right)\text{이다.}$$

자연수 n에 대하여 지수함수 $y=2^{\frac{x}{n}}$의 그래프와 함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점의 개수가 5가 되도록 하는 모든 n의 값의 합은?

① 7 ② 9 ③ 11
④ 13 ⑤ 15

62. 2008 평가원 (4점)

자연수 n에 대하여 함수 $y=2^{x+n}$의 그래프가 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프와 만나는 점을 $\mathrm{P_n}$이라 하자. 점 $\mathrm{P_n}$의 x 좌표를 a_n, y 좌표를 b_n이라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.
ㄴ. 임의의 자연수 m, n에 대하여 $b_m b_n = b_{m+n}$이다.
ㄷ. $2b_n < b_{n+1}$을 만족하는 자연수 n이 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

63. 2008 평가원 (4점)

k가 자연수일 때 $\log k$의 지표 n과 가수 α에 대하여 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P_k}$를 $\mathrm{P_k}(\alpha, \mathrm{n})$이라 하자. 점 $\mathrm{P_k}$를 곡선 $y=(\sqrt{10})^x$ 위에 있도록 하는 모든 k 값의 합은?

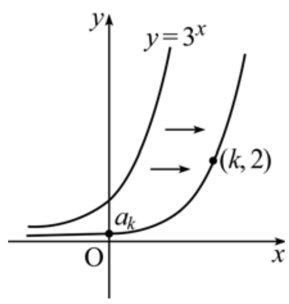
① 1210 ② 3210 ③ 5410
④ 7510 ⑤ 9410

64. 2008 교육청 (4점)

두 지수함수 $y=2^x$, $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^x+\frac{5}{2}$의 그래프가 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 선분 AB의 중점의 좌표가 (a, b)일 때, $20(a+b)$의 값을 구하시오.

65. 2008 교육청 (4점)

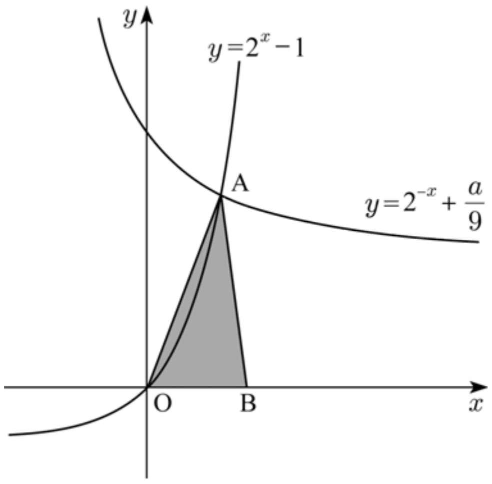
함수 $y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 평행이동시켜 점 $(k,\ 2)$ (k는 자연수)를 지나도록 하는 곡선의 y절편을 a_k라 하자. 이때 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$의 값은?



① $\frac{2}{3}$ ② 1
③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{3}{2}$
⑤ 2

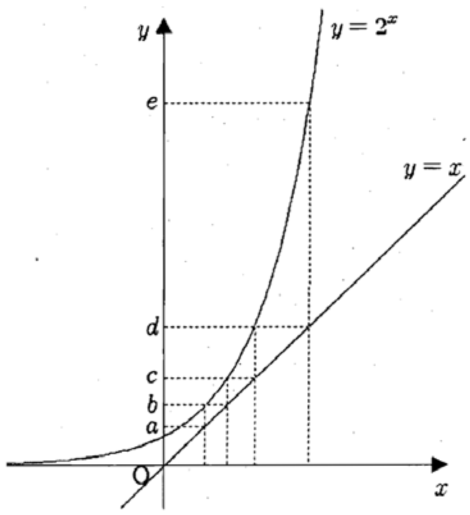
66. 2010 교육청 (4점)

그림과 같이 두 곡선 $y=2^{x}-1$, $y=2^{-x}+\frac{a}{9}$의 교점을 A라 하자. 점 B의 좌표가 $(4,\ 0)$일 때, 삼각형 AOB의 넓이가 16이 되도록 하는 양수 a의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)



67. 2008 교육청 (4점)

그림은 두 함수 $y=2^{x}$, $y=x$의 그래프이다. 이 때 $\log_{de}bc$의 값은? (단, $a>1$)

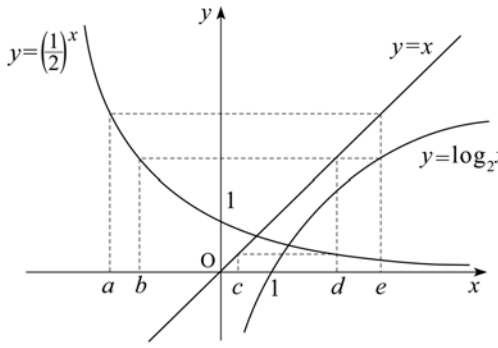


① $bc-de$　　② $\frac{bc}{de}$　　③ $\frac{a+b}{c+d}$

④ $ab-cd$　　⑤ $\frac{b+c}{d+e}$

68. 2007 평가원 (4점)

그림은 두 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$, $y=\log_{2}x$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 를 나타낸 것이다. 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? (단, 점선은 모두 좌표축에 평행하다.)



< 보 기 >

ㄱ. $\left(\frac{1}{2}\right)^{d}=c$

ㄴ. $a+d=0$

ㄷ. $ce=1$

① ㄱ　　② ㄱ, ㄴ　　③ ㄴ, ㄷ

④ ㄱ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

69. 2007 교육청 (4점)

함수 $f(x)=a^{x}$에 대한 설명으로 항상 옳은 것을 <보기>에서 모두 고르면? (단, $a>1$이다.)

〈 보기 〉

ㄱ. $f(x)>0$

ㄴ. $f(x)+f(-x)\geqq 2$

ㄷ. $f(|x|)\geqq \frac{1}{2}\{f(x)+f(-x)\}$

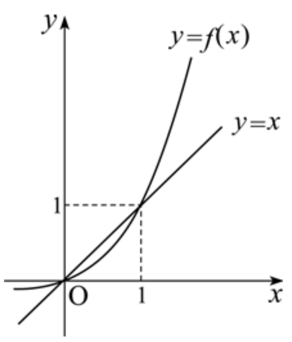
① ㄱ　　② ㄷ

③ ㄱ, ㄴ　　④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

70. 2007 평가원 (4점)

그림은 함수 $f(x)=2^x-1$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 이다. 곡선 $y=f(x)$ 위에 임의로 두 점을 잡아 그 두 점의 x좌표를 각각 a, $b\,(0<a<b)$라 할 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?



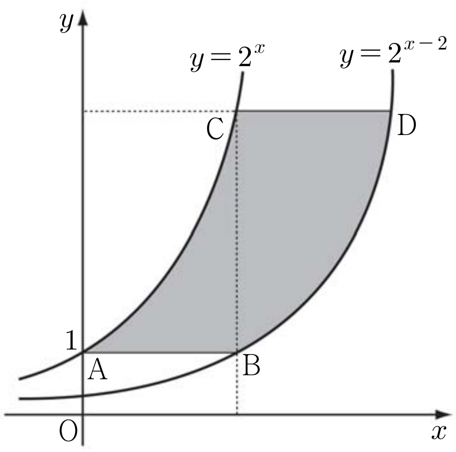
〈 보기 〉

ㄱ. $0<a<1$이면 $f(a)<a$이다.
ㄴ. $b-a<2^b-2^a$
ㄷ. $b(2^a-1)<a(2^b-1)$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

71. 2007 교육청 (4점)

다음은 지수함수 $y=2^x$과 $y=2^{x-2}$의 그래프이다. 두 선분 AB, CD와 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 할 때, S의 값을 구하시오. (단, 점선은 x축 또는 y축과 평행하다.)



72. 2006 교육청 (4점)

두 함수 $y=2^x$, $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프와 직선 $x=k$ 의 교점을 각각 P, Q라 할 때, $\overline{PQ}$의 최솟값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

73. 2010 평가원 (4점)

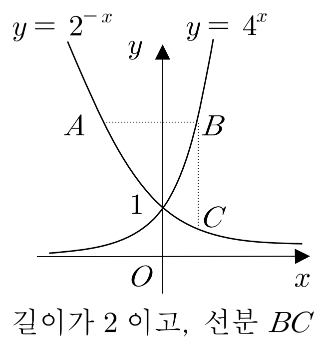
실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $-2\leq x\leq 0$일 때, $f(x)=|x+1|-1$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)+f(-x)=0$
(다) 모든 실수 x에 대하여 $f(2-x)=f(2+x)$

$-10\leq x\leq 10$에서 $y=f(x)$의 그래프와 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프의 교점의 개수는?73.

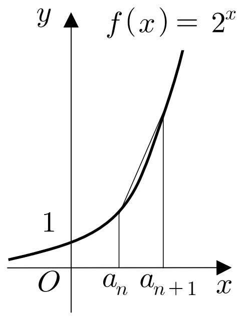
① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

74. 2005 교육청 (4점)



그림과 같이 $y=2^{-x}$ 의 그래프 위의 한 점 A를 지나고 x 축에 평행한 직선이 $y=4^x$ 의 그래프와 만나는 점을 B, 점 B를 지나고 y 축에 평행한 직선이 $y=2^{-x}$ 과 만나는 점을 C라 한다. 선분 AB의 길이가 2 이고, 선분 BC의 길이를 l 이라 할 때, $4l^3$ 의 값을 구하시오.

75. 2005 교육청 (4점)

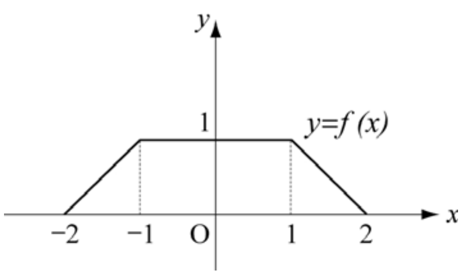


수열 $\{a_n\}$ 의 일반항이 $a_n = 2n - 1$ 로 주어지고, 함수 $f(x) = 2^x$ 에 대하여 네 점 $(a_n , 0)$, $(a_{n+1} , 0)$, $(a_n , f(a_n))$, $(a_{n+1} , f(a_{n+1}))$ 을 꼭지점으로 하는 사다리꼴의 넓이를 S_n 이라 할 때, $S_n \geqq 320$ 을 만족시키는 n의 최솟값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

76. 2006 교육청 (4점)

그림은 함수 $y=f(x)$ $(-2 \leqq x \leqq 2)$의 그래프이다.



이 때, 함수 $g(x)=a^{f(x)}$ $(a>0,\ a \neq 1)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. 함수 $y=g(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

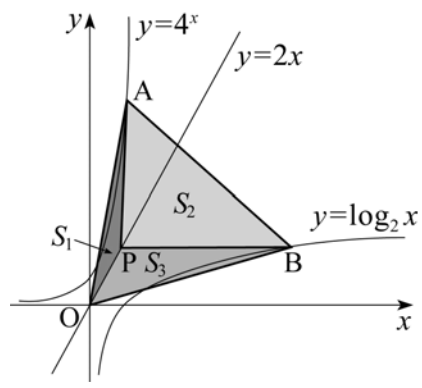
ㄴ. $0<a<1$일 때, 함수 $y=g(x)$의 최대값은 1이다.

ㄷ. $a>1$일 때, 함수 $y=g(x)$의 최소값은 1이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

77. 2008 교육청 (4점)

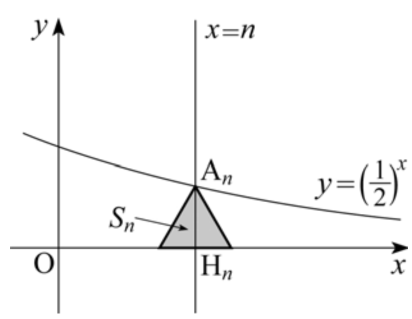
제1사분면에서 직선 $y=2x$ 위의 한 점 P를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=4^x$과 만나는 점을 A라 하고, 점 P를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점을 B라 하자. 이때, 세 삼각형 OPA, PAB, OPB의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3이라 하자. $S_1 : S_2 : S_3 = 3 : k : 7$일 때, 상수 k의 값은? (단, O는 원점이다.)



① 17 ② 18 ③ 19 ④ 20 ⑤ 21

78. 2008 교육청 (4점)

그림과 같이 직선 $x=n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$이 지수함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프 및 x축과 만나는 점을 각각 A_n, H_n이라 하자. 선분 A_nH_n을 높이로 하는 정삼각형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = a$이다. $\frac{1}{a^2}$ 의 값을 구하시오.



79. 2008 교육청 (4점)

실수에서 정의된 함수 $y=\dfrac{2^{x+3}}{2^{2x}-2^{x}+1}$ 의 최댓값은?

① 4 　 ② 5 　 ③ 6
④ 7 　 ⑤ 8

80. 2005 교육청 (4점)

임의의 실수 x 에 대하여 부등식 $2^{x+1}-2^{\frac{x+4}{2}}+a \geqq 0$ 이 성립하도록 하는 실수 a 의 최솟값은?

① 1 　 ② 2 　 ③ 3
④ 4 　 ⑤ 5

81. 2005 교육청 (4점)

함수 $y=\dfrac{3^{x+3}}{3^{2x}+3^{x}+1}$ 의 최댓값을 구하시오.

82. 2005 교육청 (4점)

다음 연립부등식이 나타내는 영역에서 2^x4^y 의 최댓값을 구하시오.

$$\begin{cases} x+3y \leqq 5 \\ 2x+y \leqq 5 \\ x \geqq 0,\ y \geqq 0 \end{cases}$$

83. 2008 평가원 (4점)

부등식 $1<m^{n-5}<n^{m-8}$을 만족시키는 자연수 m, n에 대하여

$$A=m^{\frac{1}{m-8}}\cdot n^{\frac{1}{n-5}}$$

$$B=m^{-\frac{1}{m-8}}\cdot n^{\frac{1}{n-5}}$$

$$C=m^{\frac{1}{m-8}}\cdot n^{-\frac{1}{n-5}}$$

이라고 할 때, A, B, C의 대소 관계로 옳은 것은?

① $A>B>C$ 　 ② $A>C>B$ 　 ③ $B>A>C$
④ $B>C>A$ 　 ⑤ $C>A>B$

84. 2005 수능 (3점)

부등식 $a^m < a^n < b^n < b^m$ 을 만족시키는 양수 a, b 와 자연수 m, n 에 대하여 옳은 것은?

① $a<1<b,\ m>n$
② $a<1<b,\ m<n$
③ $a<b<1,\ m<n$
④ $1<a<b,\ m>n$
⑤ $1<a<b,\ m<n$

85. 2004 수능 (3점)

두 실수 a와 b가 1이 아닌 양수일 때, 함수 $y=a^x$의 그래프와 함수 $y=\log_b x$의 그래프가 항상 만나는 경우를 모두 고른 것은?

[보 기]
ㄱ. $a>1$이고 $b>1$
ㄴ. $a>1$이고 $0<b<1$
ㄷ. $0<a<1$이고 $0<b<1$

① ㄱ
② ㄴ
③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ
⑤ ㄴ, ㄷ

86. 2007 수능 (3점)

지수함수 $f(x)=a^{x-m}$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프가 두 점에서 만나고, 두 교점의 x좌표가 1과 3일 때, $a+m$의 값은?

① $2-\sqrt{3}$
② 2
③ $1+\sqrt{3}$
④ 3
⑤ $2+\sqrt{3}$

87. 2006 수능 (3점)

정의역이 $\{x\,|\,-1 \leq x \leq 3\}$인 두 지수함수 $f(x)=4^x$, $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$에 대하여 $f(x)$의 최댓값을 M, $g(x)$의 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값은?

① 8
② 6
③ 4
④ 2
⑤ 1

88. 2008 수능 (3점)

함수 $f(x)=2^x$ 의 그래프를 x축 방향으로 m만큼, y축 방향으로 n만큼 평행이동시키면 함수 $y=g(x)$의 그래프가 되고, 이 평행이동에 의하여 점 $\mathrm{A}(1, f(1))$이 점 $\mathrm{A'}(3, g(3))$으로 이동된다. 함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $(0, 1)$을 지날 때, $m+n$의 값은?

① $\frac{11}{4}$
② 3
③ $\frac{13}{4}$
④ $\frac{7}{2}$
⑤ $\frac{15}{4}$

89. 2011 수능 (3점)

좌표평면에서 지수함수 $y=a^x$ 의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동 시킨 후, x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동시킨 그래프가 점 $(1,4)$를 지난다. 양수 a 의 값은?89.

3

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$
④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

90. 2008 수능 (4점)

함수 $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$에 대하여 옳은 것을 모두 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$
ㄴ. $f(x)+f(1-x)=1$
ㄷ. $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} f\left(\frac{k}{101}\right)=50$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

91. 2007 수능 (3점)

정의역이 $\{x\,|\,-1\leq x\leq 3\}$인 두 지수함수 $f(x)=4^x$, $g(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$에 대하여 $f(x)$의 최댓값을 M, $g(x)$의 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값은?

① 8 ② 6 ③ 4
④ 2 ⑤ 1

92. 2006 수능 (3점)

지수함수 $y=5^{x-1}$의 그래프가 두 점 $(a, 5)$, $(3, b)$를 지날 때, $a+b$의 값을 구하시오.

93. 2008 수능 (3점)

두 지수함수 $f(x)=a^{bx-1}$, $g(x)=a^{1-bx}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.
(나) $f(4)+g(4)=\dfrac{5}{2}$

두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은? (단, $0<a<1$)

① 1 ② $\dfrac{9}{8}$ ③ $\dfrac{5}{4}$
④ $\dfrac{11}{8}$ ⑤ $\dfrac{3}{2}$

94. 2005 수능 (3점)

방정식 $4^x - 7\cdot 2^x + 12 = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $2^{2\alpha} + 2^{2\beta}$의 값을 구하시오.

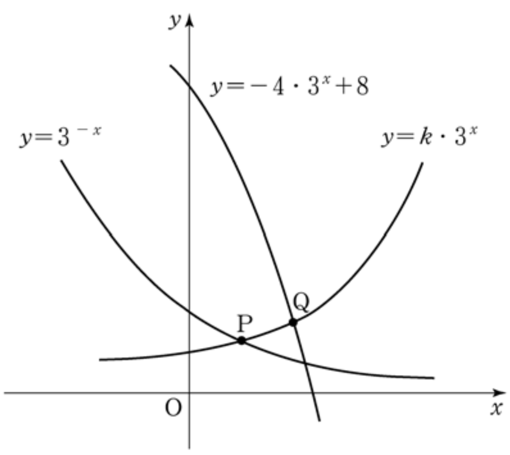
95. 2010 수능 (3점)

지수 방정식 $2^x + 2^{2-x} = 5$ 의 모든 실근의 합은 ?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

96. 2006 수능 (4점)

함수 $y = k3^x\,(0<k<1)$의 그래프가 두 함수 $y=3^{-x}$, $y=-4\cdot 3^x+8$의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 점 P와 점 Q의 x좌표의 비가 $1:2$일 때, $35k$의 값을 구하시오.



97. 2011 수능 (3점)

지수부등식 $(3^x-5)(3^x-100) < 0$ 을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합은?97.

3

① 5 ② 7 ③ 9
④ 11 ⑤ 13

98. 2008 교육청 (4점)

1이 아닌 양수 a, $b\,(a>b)$에 대하여 두 함수 $f(x)=a^x$, $g(x)=b^x$라 하자. 양수 n에 대하여 <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f(n) > g(n)$
ㄴ. $f(n) < g(-n)$이면 $a>1$이다.
ㄷ. $f(n) = g(-n)$이면 $f\left(\frac{1}{n}\right) = g\left(-\frac{1}{n}\right)$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1. 2008 교육청 (3점)

두 집합 $A=\{(x,\ y)\mid y=3^x\}$, $B=\{(x,\ y)\mid y=\log_3 x\}$에 대하여 $(a,\ b)\in A$, $(c,\ d)\in B$일 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $(a^3,\ 3b)\in A$

ㄴ. $(b,\ a)\in B$

ㄷ. $(a+d,\ bc)\in A$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2. 2007 교육청 (3점)

함수 $f(x)=\log_2 x$ 일 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, n은 자연수이다.)

< 보 기 >

ㄱ. $x>1$일 때, $f(f(x))>0$이다.

ㄴ. $x>0$일 때, $f\left(\dfrac{x}{2}\right)=f(x)-1$이다.

ㄷ. 수열 $\{f(8^n)\}$은 등차수열이다.

① ㄱ ② ㄴ
③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

3. 2007 평가원 (3점)

$x>0$ 일 때, 자연수 n에 대하여 함수 $f_n(x)$가 다음 조건을 만족한다.

(가) $f_1(x)=\log_2 x$

(나) $f_{n+1}(x)=f_n(x^2)+f_n(x)$

$f_{2007}(8)=a$ 라 할 때, $\log_{27} a$ 의 값을 구하시오.

4. 2008 교육청 (3점)

두 함수 $f(x)=2^x$, $g(x)=\log_3 x$ 에 대하여 옳은 것을 <보기>에서 모두 고르면?

<보기>

ㄱ. $f(\sqrt{3})=\{f(3)\}^{\frac{1}{2}}$

ㄴ. $g(12)=2g(2)+1$

ㄷ. $g\left(f\left(\dfrac{3}{2}\right)\right)<1$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ,ㄴ
④ ㄴ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

5. 2008 교육청 (3점)

함수 $f(x)=\log_2 x$ 의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$, $\mathrm{B}(b,\ f(b))$를 이은 선분 AB를 1:2로 내분하는 점이 x축 위에 있을 때, a^2b의 값은?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

6. 2006 교육청 (3점)

정의역이 $x\mid 5\leq x\leq 8\}$인 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-a)$의 최솟값이 -2일 때, a의 값은?

① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

7. 2006 평가원 (3점)

함수 $y=\log(10-x^2)$의 정의역을 A, 함수 $y=\log(\log x)$의 정의역을 B라 할 때, $A\cap B$의 원소 중 정수의 개수는?

① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

8. 2008 교육청 (3점)

지수함수 $y=4^{x-2}-3$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동 하였을 때, 얻을 수 있는 함수를 <보기>에서 모드 고르면? (단 이동횟수와 순서는 제한하지 않는다.)

< 보 기 >

ㄱ. $y=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{2x+3}+2$

ㄴ. $y=\dfrac{1}{2}\log_2(x+3)+1$

ㄷ. $y=\log_4(2x+3)+2$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

9. 2005 평가원 (3점)

$a>1$ 일 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. 함수 $y=a^{x-1}$의 그래프와 함수 $y=1+\log_a x$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

ㄴ. 함수 $y=-a^x$의 그래프와 함수 $y=\log_{\frac{1}{a}}x$의 그래프는 만난다.

ㄷ. 함수 $y=ka^x$의 그래프와 함수 $y=\log_a x$의 그래프가 만나도록 하는 양의 실수 k가 존재한다.

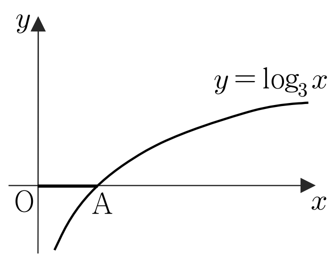
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ
③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

10. 2009 교육청 (3점)

로그함수 $y=\log_2(x+3)$의 그래프는 점 $(a,\ 6)$을 지나고, 점근선의 방정식은 $x=b$이다. 이 때, $a+b$의 값을 구하시오.

11. 2006 교육청 (3점)

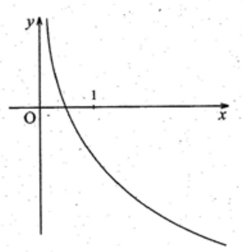
함수 $y=\log_3 x$의 그래프가 x축과 만나는 점을 A라 하자. $y=\log_3(x+a)$의 그래프가 선분 OA를 x축의 양의 방향으로 3만큼, y축의 양의 방향으로 2만큼 평행이동한 선분과 만날 때, a의 최댓값과 최솟값의 합은? (단, O는 원점이다.)



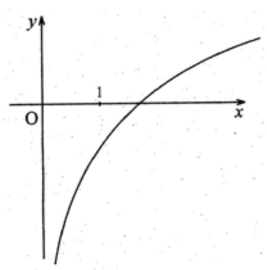
① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

12. 2008 교육청 (3점)

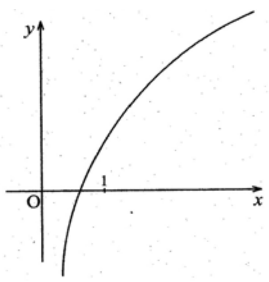
오른쪽 그림은 로그함수 $y=\log_b ax$ 의 그래프 개형이다. 로그함수 $y=\log_a bx$ 의 그래프 개형으로 옳은 것은?(단, $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $b\neq 1$인 실수)



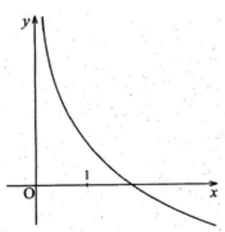
①



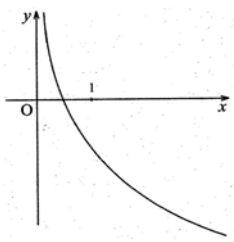
②



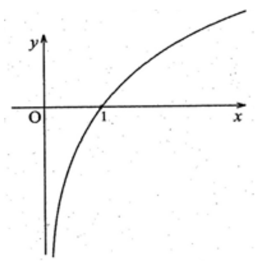
③



④



⑤



13. 2004 평가원 (3점)

두 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x$, $g(x)=\log_2 x$ 에 대하여 $(g\circ f)(-23)$의 값을 구하시오.

14. 2006 평가원 (3점)

함수 $f(x)=\log_3 x$에 대하여 $(f\circ f)(x)\leq 1$을 만족하는 자연수 x의 개수는?

① 17　② 20　③ 23　④ 26　⑤ 29

15. 2006 평가원 (3점)

함수 $f(x)=1+3\log_2 x$에 대하여 함수 $g(x)$가 $(g\circ f)(x)=x$를 만족시킬 때, $g(13)$의 값을 구하시오.

16. 2007 교육청 (3점)

로그함수 $f(x)=\log_a x$에 대하여 $f(m)=2$, $f(n)=3$일 때, $f^{-1}(7)$의 값을 m, n으로 올바르게 나타낸 것은? (단, f^{-1}는 f의 역함수)

① mn^2　② m^2n　③ m^2n^2
④ m^2n^3　⑤ m^3n^2

17. 2008 교육청 (3점)

$0<a<1<b$ 이고 $ab<1$ 인 두 실수 a, b 에 대하여

$$A=\log_a\sqrt{b},\ B=\log_{\sqrt{b}}a$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $A<0$
ㄴ. $A>B$
ㄷ. $\log_{ab}|A|+\log_{ab}|B|=0$

① ㄱ ② ㄴ
③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 2008 교육청 (3점)

서로 다른 세 양의 실수 $A,\ B,\ C$가 다음 조건을 모두 만족할 때, $A,\ B,\ C$의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

Ⅰ. $\log_{10}\dfrac{A}{B}>0$
Ⅱ. $\log_{10}A-2\log_{10}B+\log_{10}C=0$

① $A<B<C$ ② $A<C<B$
③ $B<A<C$ ④ $B<C<A$
⑤ $C<B<A$

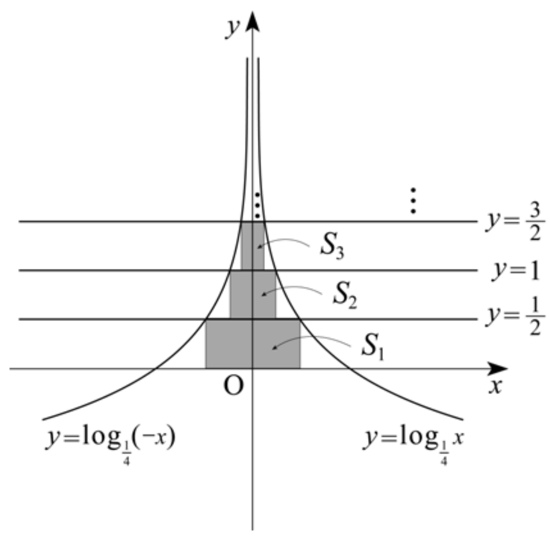
19. 2008 교육청 (3점)

부등식 $0<\log_x 2<\log_y 2$를 만족하는 $x,\ y$에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $1<x<y$ ② $0<x<a<y$ ③ $1<y<x$
④ $0<x<y<1$ ⑤ $0<y<x<1$

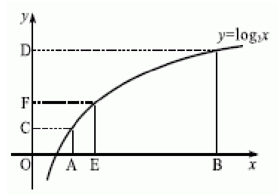
20. 2007 평가원 (3점)

두 곡선 $y=\log_{\frac{1}{4}}(-x)$, $y=\log_{\frac{1}{4}}x$ 가 직선 $y=\dfrac{1}{2}$과 만나는 두 점을 꼭지점으로 하고, 한 변이 x축 위에 있는 직사각형의 넓이를 S_1이라 하자.
두 곡선이 직선 $y=1$과 만나는 두 점을 꼭지점으로 하고, 한 변이 직선 $y=\dfrac{1}{2}$ 위에 있는 직사각형의 넓이를 S_2라 하자.
두 곡선이 직선 $y=\dfrac{3}{2}$ 과 만나는 두 점을 꼭지점으로 하고, 한 변이 직선 $y=1$ 위에 있는 직사각형의 넓이를 S_3이라 하자.
위와 같은 과정을 계속하여 얻은 n번째 직사각형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}S_n$ 의 값은?



① $\dfrac{5}{8}$ ② $\dfrac{3}{4}$ ③ $\dfrac{7}{8}$
④ 1 ⑤ $\dfrac{9}{8}$

21. 2005 교육청 (3점)



그림은 함수 $y=\log_2 x$ 의 그래프이다. 점 A 의 좌표는 $A(2,0)$ 이고 점 B 의 좌표는 $B(16,0)$ 이다. 점 F가 선분 CD를 $1:2$로 내분하는 점일 때, 점 E의 x좌표는? (단, 점선은 x축 또는 y축에 평행하다.)

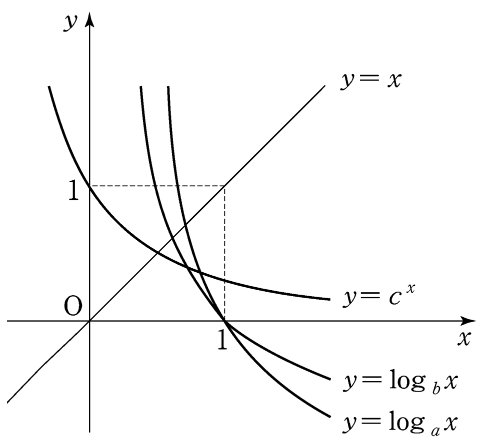
① 8 ② $6\sqrt{2}$
③ 6 ④ $4\sqrt{2}$
⑤ 4

22. 2007 평가원 (3점)

다음은 1이 아닌 세 양수 a, b, c에 대하여 세 함수

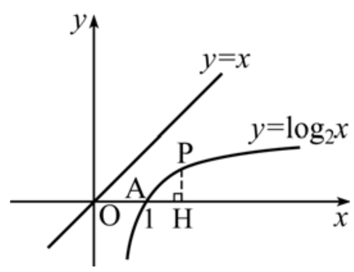
$$y=\log_a x,\ y=\log_b x,\ y=c^x$$

의 그래프를 나타낸 것이다. 세 양수 a, b, c의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은?



① $a>b>c$ ② $a>c>b$ ③ $b>a>c$
④ $b>c>a$ ⑤ $c>b>a$

23. 2006 교육청 (3점)

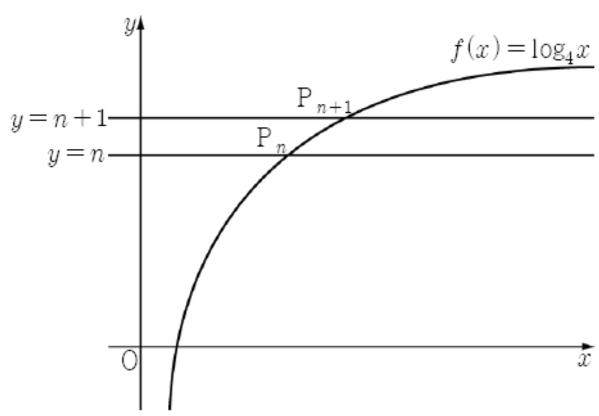


그림과 같이 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(a,\ \log_2 a)$ 에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 한다. 점 A$(1,\ 0)$ 에 대하여 $\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{PH}}$ 일 때, 점 P 에서 직선 $y=x$ 까지의 거리는? (단, $a>1$ 이다.)

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$
④ 1 ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{2}$

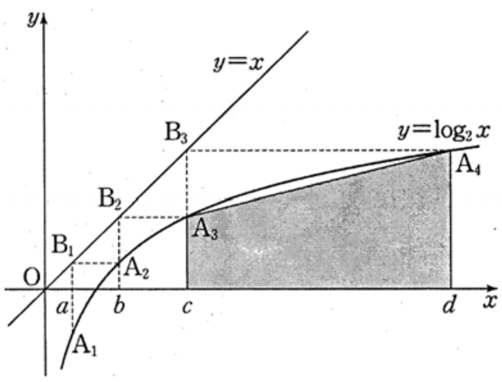
24. 2009 교육청 (3점)

함수 $f(x)=\log_4 x$의 그래프와 두 직선 $y=n,\ y=n+1$이 만나는 점을 각각 $P_n,\ P_{n+1}$이라 하자. $\overline{P_nP_{n+1}}^2=9\cdot 2^{2012}+1$을 만족하는 정수 n의 값은 구하시오.



25. 2009 평가원 (3점)

그림과 같이 함수 $y=\log_2 x$의 그래프 위의 한 점 A_1에서 y축에 평행한 직선을 그어 직선 $y=x$와 만나는 점을 B_1이라 하고, 점 B_1에서 x축에 평행한 직선을 그어 이 그래프와 만나는 점을 A_2라 하자. 이와 같은 과정을 반복하여 점 A_2로부터 점 B_2와 점 A_3을, 점 A_3으로부터 점 B_3와 점 A_4를 얻는다. 네 점 A_1, A_2, A_3, A_4의 x좌표를 차례로 a, b, c, d라 하자.
네 점 $(c,\ 0)$, $(d,\ 0)$, $(d,\ \log_2 d)$, $(c,\ \log_2 c)$를 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이를 함수 $f(x)=2^x$을 이용하여 a, b로 나타낸 것과 같은 것은?



① $\frac{1}{2}\{f(b)+f(a)\}\{(f\circ f)(b)-(f\circ f)(a)\}$

② $\frac{1}{2}\{f(b)-f(a)\}\{(f\circ f)(b)+(f\circ f)(a)\}$

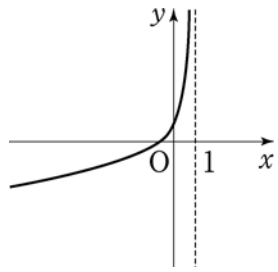
③ $\{f(b)+f(a)\}\{(f\circ f)(b)+(f\circ f)(a)\}$

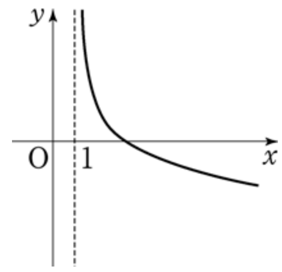
④ $\{f(b)+f(a)\}\{(f\circ f)(b)-(f\circ f)(a)\}$

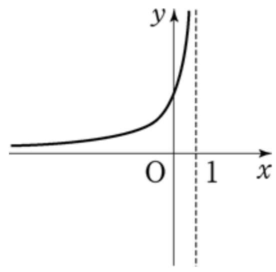
⑤ $\{f(b)-f(a)\}\{(f\circ f)(b)+(f\circ f)(a)\}$

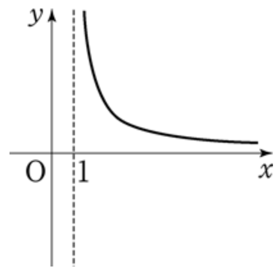
26. 2006 평가원 (3점)

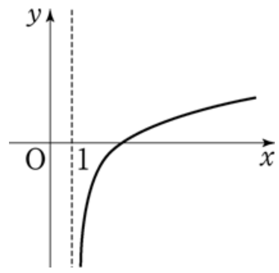
함수 $y=\log_2\dfrac{2}{x-1}$ 의 그래프의 개형으로 알맞은 것은?

①


②


③


④


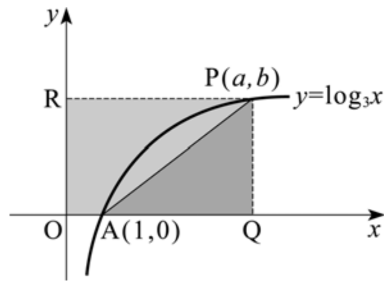
⑤


27. 2005 교육청 (3점)

곡선 $y=\log_3 x$ 위의 점 $P(a,b)$ 에서 x 축, y 축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R 라 하자. 원점 O 와 점 $A(1,0)$ 에 대하여

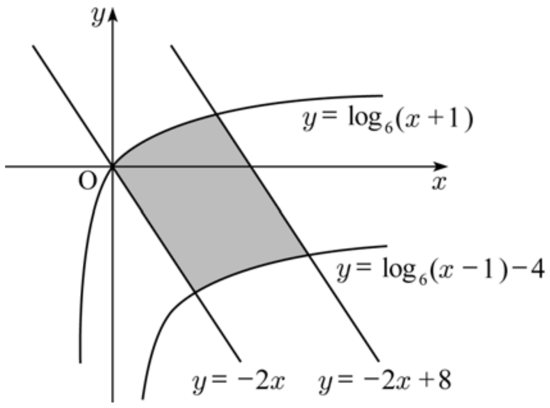
$$\frac{\text{사각형 } OAPR\text{의 넓이}}{\text{삼각형 } AQP\text{의 넓이}}=\frac{5}{4}$$ 일

때 a, b 의 곱 ab 의 값을 구하시오.



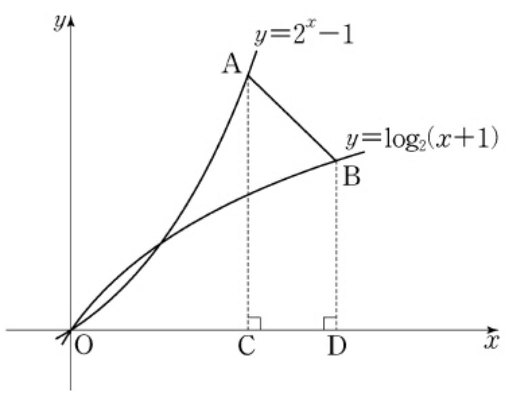
28. 2010 교육청 (3점)

그림과 같이 두 곡선 $y=\log_6(x+1)$, $y=\log_6(x-1)-4$와 두 직선 $y=-2x$, $y=-2x+8$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.



29. 2010 평가원 (3점)

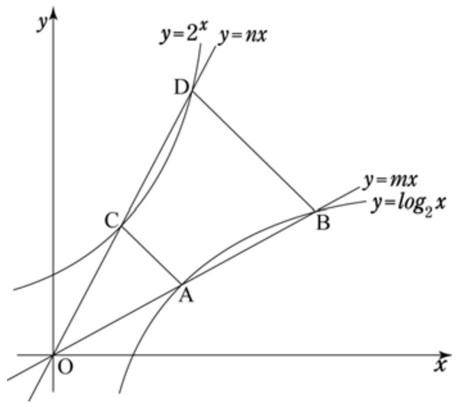
곡선 $y=2^x-1$ 위의 점 A$(2,3)$을 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=\log_2(x+1)$과 만나는 점을 B라 하자. 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 할 때, 사각형 ACDB의 넓이는?



① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{11}{4}$ ③ 3
④ $\frac{13}{4}$ ⑤ $\frac{7}{2}$

30. 2010 교육청 (3점)

그림과 같이 함수 $y=\log_2 x$의 그래프와 직선 $y=mx$의 두 교점을 A, B라 하고, 함수 $y=2^x$의 그래프와 직선 $y=nx$의 두 교점을 C, D라 하자. 사각형 ABDC는 등변사다리꼴이고 삼각형 OBD의 넓이는 삼각형 OAC의 넓이의 4배일 때, $m+n$의 값은? (단, O는 원점)



① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3
④ $\frac{10}{3}$ ⑤ 4

31. 2010 평가원 (3점)

1보다 큰 양수 a에 대하여 두 곡선 $y=a^{-x-2}$과 $y=\log_a(x-2)$가 직선 $y=1$과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{AB}=8$일 때, a의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

32. 2010 평가원 (3점)

세 함수 $f(x)=2^x$, $g(x)=x^2$, $h(x)=\log_2 x$에 대하여 $(f\circ g)(2)+(g\circ h)(2)$의 값은?

① 17 ② 19 ③ 21
④ 23 ⑤ 25

33. 2007 교육청 (3점)

$ab=16$을 만족하는 양수 a, b에 대하여
$\log_2(a+b)+\log_2(a^2+b^2)+\log_2(a^3+b^3)$의 최솟값을 구하시오.

34. 2010 교육청 (3점)

$(\log_3 x)^2-12=\log_3 x^4$을 만족하는 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha\beta$의 값을 구하시오.

35. 2008 교육청 (3점)

방정식 $(\log_2 x-6)^2+\log_2 x^2-11=0$ 의 해를 구하시오.

36. 2007 교육청 (3점)

로그 방정식 $(\log_5 x)^2-\log_5 x^3+2=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\beta$의 값을 구하시오.

37. 2006 평가원 (3점)

로그방정식 $(\log_2 x)^2-3\log_2 x+2=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\beta$의 값은?

① 2 ② 4
③ 6 ④ 8
⑤ 10

38. 2005 평가원 (3점)

방정식 $\log_4(\log_2 x)=1$ 을 만족시키는 x 의 값을 구하시오.

39. 2006 교육청 (3점)

방정식 $(\log_2 x-3)\log_2 x=1$ 을 만족시키는 모든 근의 곱은?

① 1 ② 3
③ 8 ④ 12
⑤ 16

40. 2004 평가원 (3점)

x에 대한 방정식 $(\log_2 x)\left(\log_2 \frac{16}{x}\right) = \frac{m}{16}$의 해가 존재하도록 실수 m의 값의 범위를 정할 때, m의 최댓값을 구하시오.

41. 2004 평가원 (3점)

x에 대한 로그방정식 $(\log_{10} x)^2 - k\log_{10} x - 2 = 0$의 두 근의 곱이 100일 때, 상수 k의 값은?

① 1 ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ 4

42. 2006 평가원 (3점)

로그방정식 $\left(\log_3 \frac{x}{3}\right)^2 - 20\log_9 x + 26 = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha\beta$의 값은?

① 3^8 ② 3^9 ③ 3^{10} ④ 3^{11} ⑤ 3^{12}

43. 2008 교육청 (3점)

로그방정식 $\log_{10}(y+5) = \log_{10} x + \log_{10}(y+1)$을 만족하는 두 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

44. 2005 평가원 (3점)

부등식 $\log_3(x-1) < 2$를 만족시키는 정수 x의 개수는?

① 2 ② 5 ③ 8 ④ 11 ⑤ 14

45. 2007 평가원 (3점)

$\frac{1}{2} < x < 1$, $y > 1$일 때, 부등식 $\log_x(\log_y 2x) < 0$이 나타내는 영역의 넓이를 S라 하자. 이때, $100S$의 값을 구하시오.

46. 2007 평가원 (3점)

부등식 $\log_{\frac{1}{2}}(x-5)+\log_{\frac{1}{2}}(x-6)>-1$의 해가 $\alpha<x<\beta$일 때, $\alpha+\beta$의 값은?

① 7 ② 10 ③ 13
④ 16 ⑤ 19

47. 2007 교육청 (3점)

로그부등식 $2\log_{\frac{1}{3}}(x-4)>\log_{\frac{1}{3}}(x-2)$의 해가 $a<x<b$일 때, ab의 값은?

① 8 ② 12
③ 18 ④ 24
⑤ 30

48. 2010 교육청 (3점)

부등식 $a^{x-1}<a^{2x+1}$의 해가 $x<-2$일 때, 부등식 $\log_a(x-2)<\log_a(4-x)$의 해는? (단, 상수 a는 1이 아닌 양수이다.)

① $2<x<3$ ② $3<x<4$ ③ $2<x<4$
④ $x<3$ ⑤ $x>3$

49. 2010 교육청 (3점)

로그부등식 $(1+\log_3 x)(a-\log_3 x)>0$의 해가 $\frac{1}{3}<x<9$일 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

50. 2010 평가원 (3점)

로그부등식 $\log_2(x^2+x-2)<\log_2(-2x+2)$ 의 해가 $\alpha<x<\beta$일 때, $\alpha\beta$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

51. 2006 평가원 (3점)

연립부등식

$$\begin{cases} 2^{x+3}>4 \\ 2\log(x+3)<\log(5x+15) \end{cases}$$

를 만족시키는 정수 x의 개수는?

① 2 ② 4
③ 6 ④ 8
⑤ 10

52. 2007 평가원 (3점)

부등식
$\log_3(x-3)+\log_3(x+1) < 1+\log_3 4$
의 해가 $a<x<b$일 때, ab의 값을 구하시오.

53. 2009 교육청 (3점)

두 함수 $f(x)=3^x$, $g(x)=\log_2 x$에 대하여 부등식
$$0 \leqq (g \circ f)(x) < 7$$
을 만족하는 정수 x의 개수는?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

54. 2007 평가원 (3점)

두 집합
$A=\left\{x \mid 2^{x(x-3a)} < 2^{a(x-3a)}\right\}$, $B=\left\{x \mid \log_3(x^2-2x+6) < 2\right\}$
에 대하여 $A \cap B = A$가 성립하도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $-1 \leqq a \leqq 0$ ② $-1 \leqq a \leqq \frac{1}{3}$
③ $-\frac{1}{3} \leqq a \leqq 1$ ④ $\frac{1}{3} \leqq a \leqq 3$
⑤ $1 \leqq a \leqq 3$

55. 2008 교육청 (3점)

$\log_x y+\log_y x=\frac{10}{3}$, $xy=16$ 일 때, $x+y$ 의 값을 구하시오.
(단, $1<x<y$)

56. 2007 교육청 (3점)

연립방정식 $\begin{cases} \log_2 x+\log_3 y=2 \\ (\log_3 x)(\log_4 y)=-\frac{3}{2} \end{cases}$ 의 해가 $x=a$, $y=b$일 때, $3ab$의 값은? (단, $a>1$)

① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

57. 2009 교육청 (3점)

부등식 $\log_2[-2+\log_2 x]<1$를 만족하는 모든 정수 x의 값의 합을 구하시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

58. 2009 평가원 (3점)

부등식
$$1+\log_{\frac{1}{2}} x^2 > \log_{\frac{1}{2}}(5x-8)$$
의 해가 $\alpha<x<\beta$일 때, $\alpha\beta$의 값을 구하시오.

59. 2008 교육청 (3점)

로그부등식 $\log_{\frac{1}{2}}(x-2) > -3$의 해가 $\alpha < x < \beta$일 때, $\alpha+\beta$의 값을 구하시오.

60. 2008 교육청 (3점)

로그부등식 $(\log_2 x)^2 - \log_2 x^6 + 5 < 0$을 만족하는 자연수 x의 개수를 구하시오.

61. 2009 평가원 (3점)

로그부등식 $\log_3 x + \log_3(12-x) \leqq 3$을 만족시키는 모든 정수 x의 합을 구하시오.

62. 2008 평가원 (3점)

부등식 $|a - \log_2 x| \leqq 1$을 만족시키는 x의 최댓값과 최솟값의 차가 18일 때, 2^a의 값은?

① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

63. 2004 평가원 (4점)

함수 $f(x) = 3^x + 1$의 역함수 $g(x)$에 대하여 집합 A_k를 $A_k = \{n \mid k-1 \leqq g(n) < k,\ n$은 자연수 $\}$라고 정의할 때, 집합 A_3의 원소의 개수를 구하시오.

64. 2005 교육청 (4점)

두 함수 $y = \log_4(x+p)+q$, $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+p)+q$의 역함수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 한다. 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$의 그래프가 점 $(1, 4)$에서 만나도록 두 실수 p, q의 값을 정할 때, p^2+q^2의 값을 구하시오.

65. 2009 평가원 (4점)

두 함수 $f(x) = \log x$, $g(x) = 10^x$과 실수의 부분집합 C에 대하여 두 집합 A, B를 각각 $A = \{x \mid f(x) \in C\}$, $B = \{x \mid g(x) \in C\}$라고 하자. <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $C = \left\{\frac{1}{10}, 1, 10\right\}$이면 $B = \{-1, 0, 1\}$이다.
ㄴ. 집합 C가 자연수 전체의 집합이면 집합 B는 곱셈에 대하여 닫혀있다.
ㄷ. 집합 C가 공집합이 아니면 $\{g(x) \mid x \in C\} = A$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ
③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

66. 2005 교육청 (4점)

두 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $g(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$ 에 대하여 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $a>1$ 이면 $f(a)<g(a)$ 이다.
ㄴ. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 그래프의 교점의 좌표가 (α, β) 일 때 $\alpha=\beta$ 이다.
ㄷ. 양수 a, b 에 대하여 $b<f(a)$ 이면 $2a<g(b^2)$ 이다.

① ㄴ　② ㄱ, ㄴ
③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

67. 2007 평가원 (4점)

함수 $y=\log_2 x$ 의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동시킨 그래프가 함수 $y=\log_b x$ 의 그래프와 점 $(9, 2)$에서 만날 때, $10a+b$의 값을 구하시오.

68. 2005 교육청 (4점)

$y=10^x$ 의 그래프를 x 축 방향으로 k 만큼, $y=\log_{10} x$ 의 그래프를 y 축 방향으로 k 만큼 평행이동하였더니 두 함수의 그래프가 두 점에서 만났다. 이 두 점 사이의 거리가 $\sqrt{2}$ 일 때, 상수 k 의 값은?

① $\frac{1}{9}+2\log_{10} 3$　② $\frac{1}{9}+3\log_{10} 3$
③ $9-\log_{10} 3$　④ $9-2\log_{10} 3$
⑤ $9+\log_{10} 3$

69. 2009 교육청 (4점)

자연수 k에 대하여 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 $k+1$만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 그래프가 x축과 만나는 점의 좌표를 $(a_k, 0)$이라 하자. 이때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값은?

① $55+\frac{1}{2^9}$　② $56-\frac{1}{2^9}$　③ $65-\frac{1}{2^{10}}$
④ $65+\frac{1}{2^{10}}$　⑤ $66-\frac{1}{2^{10}}$

70. 2009 교육청 (4점)

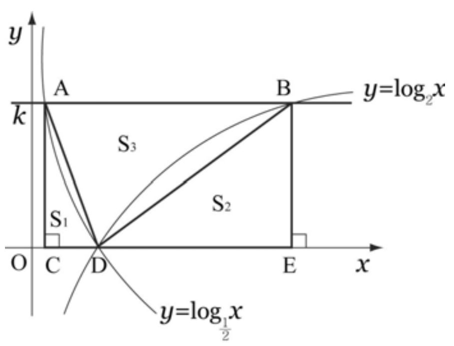
$A(3, -1)$, $B(5, -1)$, $C(5, 2)$, $D(3, 2)$를 연결하여 만든 직사각형이 있다. 로그함수 $y=\log_a(x-1)-4$가 직사각형 ABCD와 만나기 위한 a의 최댓값을 M, 최솟값을 N이라 할 때, $\left(\frac{M}{N}\right)^{12}$ 의 값을 구하시오.

71. 2009 평가원(4점)

좌표평면에서 세 점 $(15, 4)$, $(15, 1)$, $(64, 1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형과 로그함수 $y=\log_k x$의 그래프가 만나도록 하는 자연수 k의 개수를 구하시오.

72. 2009 교육청 (4점)

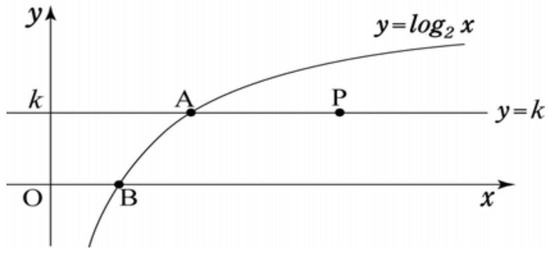
그림과 같이 두 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$와 $y=\log_2 x$가 직선 $y=k$와 만나는 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, E라 하자. $y=\log_{\frac{1}{2}}x$와 $y=\log_2 x$의 교점 D에 대하여 $\triangle$ACD, $\triangle$BDE, $\triangle$ADB의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3이라 할 때, S_1, S_2, S_3은 이 순서대로 등차수열을 이룬다. 양수 k의 값은?



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1
④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

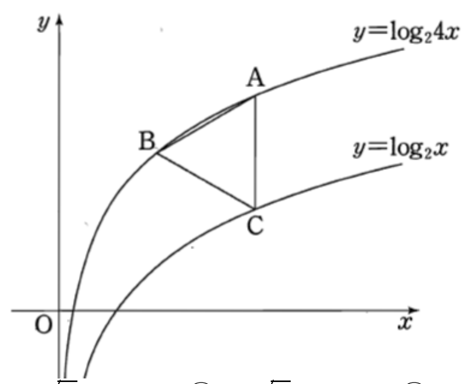
73. 2010 교육청(4점)

그림과 같이 함수 $y=\log_2 x$의 그래프와 직선 $y=k$ (k는 자연수), x축과의 교점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=k$ 위의 한 점 P에 대하여 직선 OP가 $\angle$AOB를 이등분할 때, 선분 AP의 길이를 $f(k)$라 하자. $\sum_{k=1}^{4}\{f(k)\}^2$의 값을 구하시오 .
(단, O는 원점)



74. 2010 평가원(4점)

함수 $y=\log_2 4x$의 그래프 위의 두 점 A, B와 함수 $y=\log_2 x$의 그래프 위의 점 C에 대하여, 선분 AC가 y축에 평행하고 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 점 B의 좌표는 (p, q)이다. $p^2\times 2^q$의 값은?



① $6\sqrt{3}$ ② $9\sqrt{3}$ ③ $12\sqrt{3}$ ④ $15\sqrt{3}$
⑤ $18\sqrt{3}$

75. 2006 평가원 (4점)

자연수 n에 대하여 두 함수 $y=2^x$, $y=\log_2 x$의 그래프가 직선 $x=n$과 만나는 교점의 y좌표를 각각 a, b라 하자. $a+b$가 세 자리의 자연수일 때, $a+b$의 값을 구하시오.

76. 2007 평가원 (4점)

양의 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족한다.

(가) $f(x)$의 값은 정수이다.
(나) $0\leq g(x)<1$
(다) $2^{f(x)-g(x)}=x$

이때 $f(4)+f(1000)$의 값을 구하시오.

77. 2005 교육청 (4점)

두 함수 $y=x$와 $y=\log_2 x$의 그래프를 이용하여 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $\dfrac{\log_2 x}{x}<1$

ㄴ. $\dfrac{\log_2 x}{x-1}<1\ (x\neq 1)$

ㄷ. $\dfrac{\log_2 (x+1)}{x}<1\ (x\neq 0)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ,ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

78. 2008 평가원 (4점)

함수 $y=\log_2|5x|$의 그래프와 함수 $y=\log_2(x+2)$의 그래프가 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B라고 하자. $m>2$인 자연수 m에 대하여 함수 $y=\log_2|5x|$의 그래프와 함수 $y=\log_2(x+m)$의 그래프가 만나는 서로 다른 두 점을 각각 C(p, q), D(r, s)라고 하자. <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, 점A의 x좌표는 점B의 x좌표보다 작고 $p<r$이다.)

<보기>

ㄱ. $p<-\dfrac{1}{3},\ r>\dfrac{1}{2}$

ㄴ. 직선 AB의 기울기와 직선 CD의 기울기는 같다.

ㄷ. 점 B의 y좌표와 점 C의 y좌표가 같을 때, 삼각형 CAB의 넓이와 삼각형 CBD의 넓이는 같다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

79. 2007 평가원 (4점)

함수 $f(x)=\log_5 x$이고 $a>0,\ b>0$일 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $\left\{f\left(\dfrac{a}{5}\right)\right\}^2=\left\{f\left(\dfrac{5}{a}\right)\right\}^2$

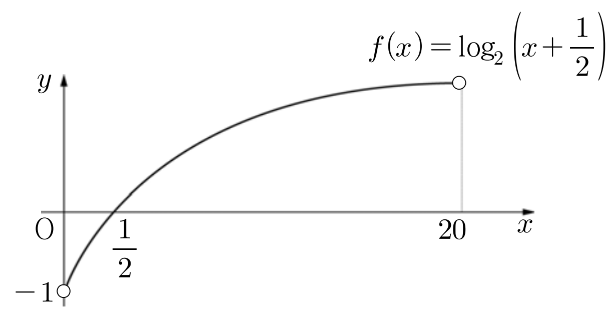
ㄴ. $f(a+1)-f(a)>f(a+2)-f(a+1)$

ㄷ. $f(a)<f(b)$이면 $f^{-1}(a)<f^{-1}(b)$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

80. 2007 교육청 (4점)

$0<x<20$에서 정의된 함수 $y=f(x)$가 다음과 같다.



함수 $g(x)=[x]^2-[x]$에 대하여 합성함수 $y=g(f(x))$의 불연속점의 개수는? (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

81. 2005 평가원 (4점)

두 점 $(1, 0)$, $(0, -m)$ 을 지나는 직선이 두 곡선 $y = 2\log x$, $y = 3\log x$ 와 각각 두 점에서 만날 때, $(1, 0)$ 이 아닌 교점을 각각 $(p, 2\log p)$, $(q, 3\log q)$ 라 하자.
<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?(단, $m > 0$, $p > 1$, $q > 1$ 이다.)

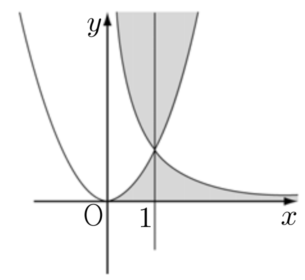
<보기>

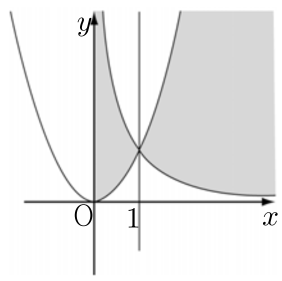
ㄱ. $p > q$　　ㄴ. $m = \dfrac{3\log q - 2\log p}{q - p}$　　ㄷ. $m > \dfrac{3\log q}{q}$

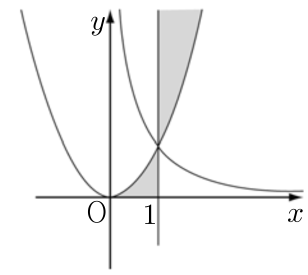
① ㄴ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

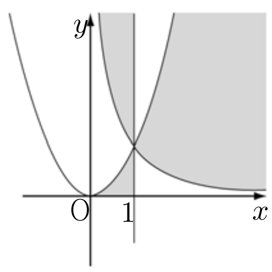
82. 2007 교육청 (4점)

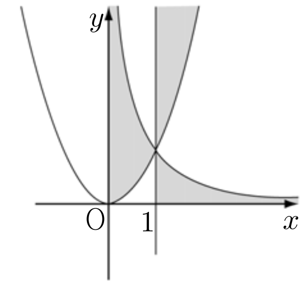
부등식 $-1 < \log_x y < 2$을 만족하는 점$(x,\ y)$가 존재하는 영역을 바르게 나타낸 것은? (단, 경계선은 포함하지 않는다.)

①


②


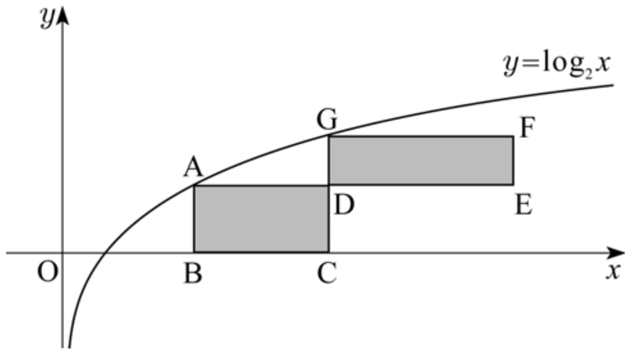
③


④


⑤


83. 2009 교육청 (4점)

그림은 각 변이 x축 또는 y축에 평행한 두 직사각형 ABCD, DEFG를 나타낸 것이다. 두 점 A, G는 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 점이고, 두 점 B, C는 x축 위의 점이다.



두 직사각형 ABCD, DEFG가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{AD} : \overline{DE} = 2 : 3$이고, $\overline{DG} = 1$이다.
(나) 두 직사각형 ABCD, DEFG의 넓이는 서로 같다.

점 E의 x좌표는?

① $\dfrac{15}{2}$　② 8　③ $6\sqrt{2}$
④ $\dfrac{19}{2}$　⑤ $7\sqrt{2}$

84. 2007 평가원 (4점)

$0 < a < 1$인 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x) = \begin{cases} a^x & (x < 0) \\ -x+1 & (0 \leq x < 1) \\ \log_a x & (x \geq 1) \end{cases}$$

일 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

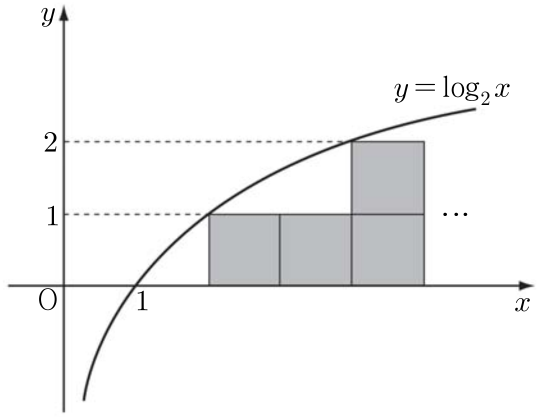
<보 기>

ㄱ. $\{f(-3)\}^5 = f(-15)$
ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$는 한 점에서 만난다.
ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

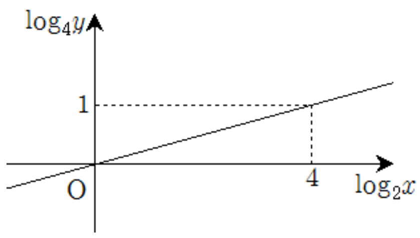
85. 2007 교육청 (4점)

그림과 같이 $y=\log_2 x$, $x=30$, $y=0$으로 둘러싸인 영역에 한 변의 길이가 1인 정사각형을 서로 겹치지 않게 그리려고 한다. 이 때, 그릴 수 있는 한 변의 길이가 1인 정사각형의 최대 개수를 구하시오. (단, 정사각형의 각 변은 x축, y축에 평행하다.)



86. 2007 교육청 (4점)

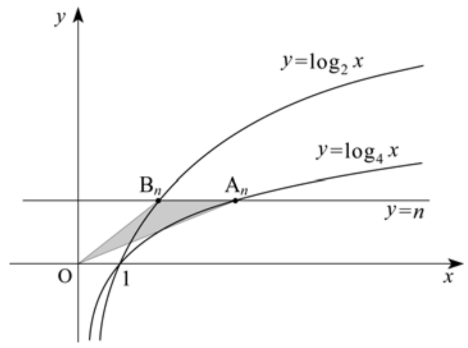
아래 그림은 $\log_2 x$와 $\log_4 y$사이의 관계를 나타낸 그래프이다.



x, y 사이에 $y=f(x)$가 성립할 때, 방정식 $4^{[f(x)]}=16$의 정수해의 합을 구하시오. (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수이다.)

87. 2007 평가원 (4점)

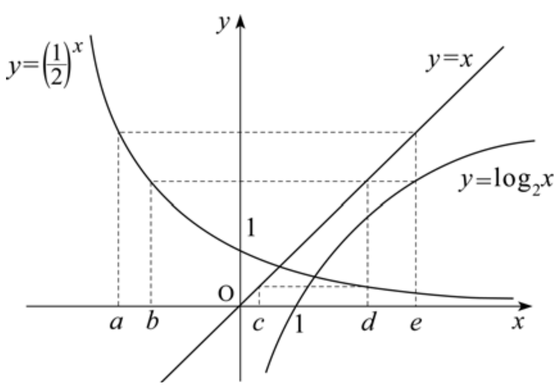
자연수 n에 대하여 두 함수 $y=\log_4 x$, $y=\log_2 x$의 그래프와 직선 $y=n$의 교점을 각각 A_n, B_n이라 하자. 삼각형 $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}}{S_n}$의 값은?



① 2 ② 3 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

88. 2007 평가원 (4점)

그림은 두 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=\log_2 x$의 그래프와 직선 $y=x$를 나타낸 것이다. 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? (단, 점선은 모두 좌표축에 평행하다.)



< 보 기 >

ㄱ. $\left(\frac{1}{2}\right)^d=c$　　ㄴ. $a+d=0$　　ㄷ. $ce=1$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄴ, ㄷ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

89. 2010 교육청(4점)

두 함수 $f(x)=a^x$과 $g(x)=\log_b x$의 교점의 개수를 k라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $a\neq1$, $a>0$, $b\neq1$, $b>0$)

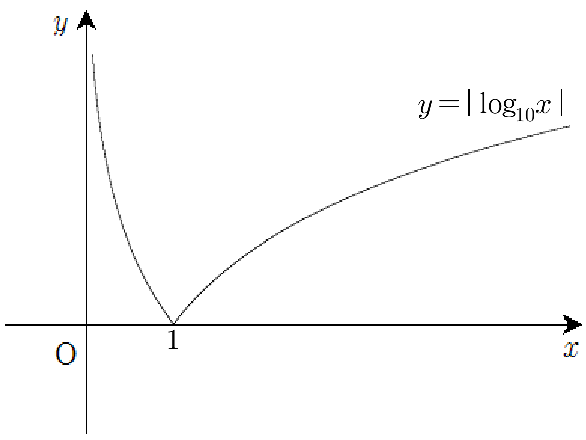
[보 기]

ㄱ. $a=\frac{1}{2}$, $b=2$이면 $k=1$이다.
ㄴ. $a=b=\sqrt{2}$이면 $k=2$이다.
ㄷ. $ab>2$이면 $k=2$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ,ㄴ
④ ㄴ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

90. 2007 교육청 (4점)

아래 그림은 함수 $y=|\log_{10}x|$의 그래프이다. x에 대한 방정식 $|\log_{10}x|=ax+b$의 세 실근의 비가 $1:2:3$일 때, 세 실근의 합은?



① $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ② $3\sqrt{3}$
③ $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ ④ $6\sqrt{3}$
⑤ $\frac{15\sqrt{3}}{2}$

91. 2007 평가원 (4점)

다음 두 조건을 동시에 만족시키는 자연수 x의 개수를 구하시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

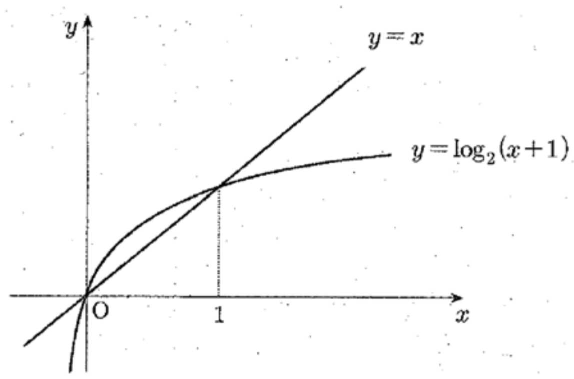
(가) $200\leq x\leq 300$
(나) $[\log_2 x]=[\log_3 x]+[\log_4 x]$

92. 2009 교육청 (4점)

함수 $y=\log_2(x+1)$의 역함수를 $y=g(x)$라 하자.
$0<a<b<1$일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $g(4)=15$
ㄴ. $g(ab)=g(a)+g(b)+1$
ㄷ. $\left(\frac{b+1}{a+1}\right)^{\frac{1}{b-a}}<2$



① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

93. 2007 교육청 (4점)

함수 $f(x)=\log_a x$, $g(x)=\log_b x$가 $0<x<1$에서 $f(x)>g(x)$이 성립하기 위한 조건으로 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $1<b<a$ ㄴ. $0<a<b<1$ ㄷ. $0<a<1<b$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

94. 2010 교육청 (4점)

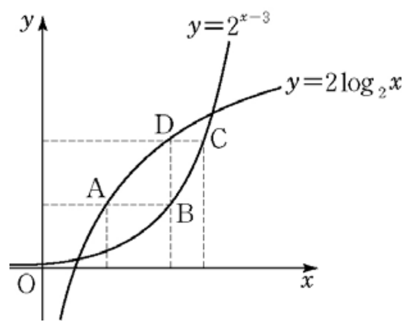
$\frac{1}{3}\le x\le 3$에서 정의된 함수 $f(x)=9x^{-2+\log_3 x}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오.

95. 2006 교육청 (4점)

두 양수 x, y에 대하여 등식
$(\log_3 x)^2+(\log_3 y)^2=\log_9 x^2+\log_9 y^2$ 이
성립할 때, xy의 최댓값은 M, 최솟값은 m이다.
$M+m$의 값을 구하시오.

96. 2008 평가원 (4점)

그림과 같이 곡선 $y=2\log_2 x$ 위의 한 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^{x-3}$과 만나는 점을B라 하자. 점 B를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=2\log_2 x$와 만나는 점을 D라 하자. 점 D를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^{x-3}$과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{AB}=2$, $\overline{BD}=2$일 때, 사각형 ABCD의 넓이는?

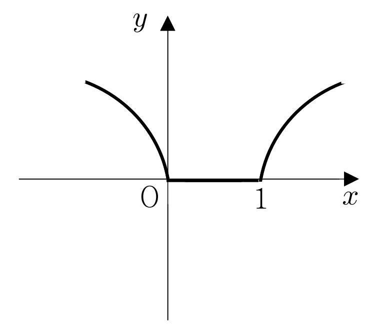


① 2 ② $1+\sqrt{2}$ ③ $\frac{5}{2}$
④ 3 ⑤ $2+\sqrt{2}$

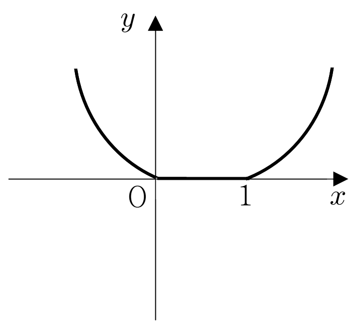
97. 2004 평가원 (4점)

두 함수 $f(x)=|x|+|x-1|$, $g(x)=\log_2 x$ 에 대하여, 합성함수 $y=(g\circ f)(x)$ 의 그래프의 개형은?

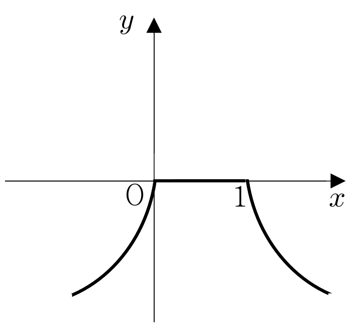
①



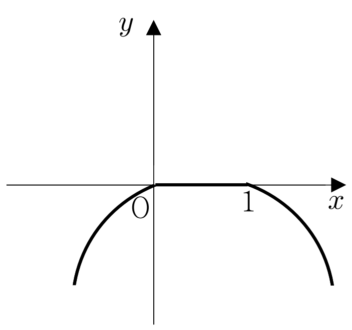
②



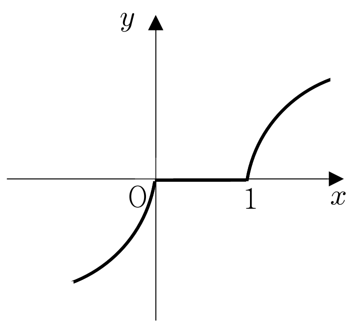
③



④



⑤



98. 2006 교육청 (4점)

로그함수 $y=\log_{a-3}(x^2-2x+65)$의 최솟값이 2일 때, 상수 a의 값을 구하시오. (단, $a>3, a\neq 4$)

99. 2005 교육청 (4점)

$2\leqq x\leqq 16$ 에서 $\log_2 x+\dfrac{12}{\log_2 x}-\log_x y=6$ 을 만족시키는 y 의 최댓값을 a , 최솟값을 b 라고 할 때, $\dfrac{a}{b}$ 의 값은?

① 2 ② 4
③ 8 ④ 16
⑤ 32

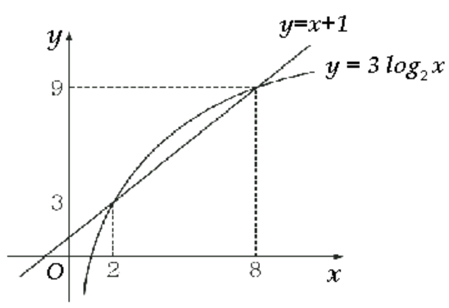
100. 2004 평가원 (4점)

$a>1, b>1$ 일 때, $\log_{a^3} b^2+\log_{b^4} a^3$ 의 최솟값은?

① 1 ② $\sqrt{2}$
③ $\sqrt{3}$ ④ 2
⑤ $\sqrt{5}$

101. 2005 교육청 (4점)

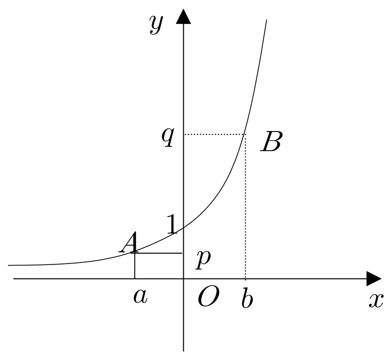
두 함수 $y=x+1$ 과 $y=3\log_2 x$ 의 그래프를 이용하여 부등식 $2^{x+2}<(x+1)^3$ 을 만족시키는 x 의 범위를 구하면 $\alpha<x<\beta$ 이다. 이 때, $\alpha+\beta$ 의 값은?



① 6 ② 7
③ 8 ④ 9
⑤ 10

102. 2006 교육청 (4점)

함수 $f(x)=3^x$의 그래프 위의 임의의 두 점 $A(a, p)$, $B(b, q)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것을 모두 고르면? (단, $a \neq b,\ b \neq 0$)



<보 기>

ㄱ. $a+b=(\log_3 p)(\log_3 q)$

ㄴ. $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=\sqrt{pq}$

ㄷ. $\dfrac{q-p}{b-a} > \dfrac{q-1}{b}$

① ㄴ ② ㄷ
③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

103. 2008 교육청 (4점)

방정식 $x^{\log_3 x} = 27x^3$ 의 모든 근의 곱을 구하시오.

104. 2008 교육청 (4점)

연립방정식

$$\begin{cases} |x|+|y|=2 \\ \log_3 x+\log_3 y=(\log_3 xy)^2 \end{cases}$$

을 만족하는 두 실수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 의 개수는?

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

105. 2004 평가원 (4점)

서로 다른 세 양수 a, b, c 에 대하여 부등식 $\log_2 a-\log_2 b > \log_2 b-\log_2 c > \log_2 c-\log_2 a$ 가 성립할 때, <보기> 중 항상 성립하는 것을 모두 고른 것은?

〈 보 기 〉

ㄱ. $a > b$ ㄴ. $b > c$ ㄷ. $c > a$

① ㄱ ② ㄴ
③ ㄷ ④ ㄱ, ㄷ
⑤ ㄴ, ㄷ

106. 2008 교육청 (4점)

연립방정식

$$\begin{cases} |x|+|y|=2 \\ \log_3 x+\log_3 y=(\log_3 xy)^2 \end{cases}$$

을 만족하는 두 실수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 의 개수는?

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

107. 2006 교육청 (4점)

좌표평면에서 $2 \leqq x \leqq 8,\ y \geqq 1$이고, 연립부등식

$$\begin{cases} \log_x y \leqq 1 \\ \log_{(10-x)} y \leqq 1 \end{cases}$$

을 만족시키는 영역의 넓이를 구하시오.

108. 2006 교육청 (4점)

집합 $A=\left\{x \,\middle|\, 1+\dfrac{1}{\log_3 x}-\dfrac{1}{\log_5 x}<0\right\}$,

$B=\{x \mid 2^a > 2^{x(x-a+1)}\}$ 에 대하여 $A \subset B$이기 위한 a의 최솟값은?

① $\dfrac{4}{3}$　② $\dfrac{5}{3}$　③ 2
④ $\dfrac{7}{3}$　⑤ $\dfrac{8}{3}$

109. 2005 교육청 (4점)

모든 실수 x에 대하여 부등식 $10^{x^2+2\log_{10}a} \geqq a^{-2x}$ 을 성립시키는 양의 정수 a의 최댓값을 구하시오.

110. 2009 교육청 (4점)

좌표평면에서 $|\log_3 x|+|\log_3 y| \leq 2$를 만족하는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에 대하여 x^2+y^2의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+9m$의 값을 구하시오.

111. 2004 평가원 (4점)

로그부등식 $\log_{10}(x^2-x-2) \leqq 1$ 을 만족하는 정수 x의 개수를 구하시오.

112. 2010 교육청 (4점)

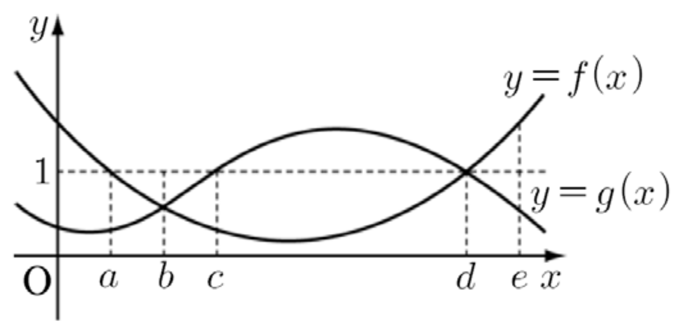
부등식 $y \geqq x^2$의 영역에 속하는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에 대하여 $\log_2(y+1)-\log_2|x|$의 최솟값은?

4

① $\dfrac{3}{4}$　② 1　③ $\dfrac{5}{4}$
④ $\dfrac{3}{2}$　⑤ $\dfrac{7}{4}$

113. 2008 교육청 (4점)

그림은 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프이다.
$0<x<e$에서 로그부등식 $\log_{f(x)} g(x)>1$를 만족하는 x 값의 범위는?



① $0<x<a$　② $a<x<b$
③ $b<x<c$　④ $c<x<d$
⑤ $d<x<e$

114. 2006 수능 (3점)

함수 $y=3+\log_3(x^2-4x+31)$의 최솟값은?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

115. 2007 수능 (4점)

$0<a<\frac{1}{2}$인 상수 a에 대하여
직선 $y=x$가 곡선 $y=\log_a x$와 만나는 점을 (p, p),
직선 $y=x$가 곡선 $y=\log_{2a} x$와 만나는 점을 (q, q)
라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $p=\frac{1}{2}$이면 $a=\frac{1}{4}$이다. ㄴ. $p<q$ ㄷ. $a^{p+q}=\frac{pq}{2^q}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

116. 2005 수능 (4점)

정의역이 $\{x|1\leq x\leq 81\}$인 함수
$y=(\log_3 x)(\log_{\frac{1}{3}} x)+2\log_3 x+10$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $\mathrm{M}+m$의 값을 구하시오.

117. 2007 수능 (2점)

부등식 $(\log_3 x)(\log_3 3x)\leq 20$을 만족시키는 자연수 x의 최댓값을 구하시오.

118. 2008 수능 (4점)

직선 $y=2-x$가 두 로그함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_3 x$의 그래프와 만나는 점을 각각 (x_1, y_1), (x_2, y_2)라 할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

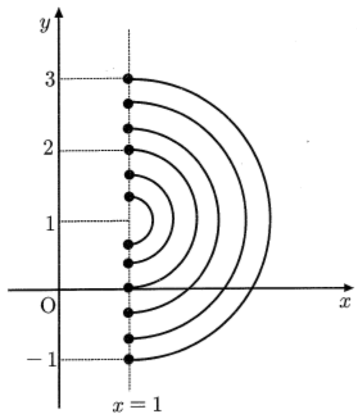
<보 기>

ㄱ. $x_1>y_2$
ㄴ. $x_2-x_1=y_1-y_2$
ㄷ. $x_1y_1>x_2y_2$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

119. 2006 수능 (4점)

그림은 중심이 (1, 1)이고 반지름의 길이가 각각 $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2$인 6개의 반원을 그린 것이다.
세 함수 $y=\log_{\frac{1}{4}} x$, $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$, $y=3^x$의 그래프가 반원과 만나는 교점의 개수를 각각 a, b, c라 하자.
a, b, c의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은?
(단, $x\geq 1$이고 반원은 지름의 양 끝점을 포함한다.)



① $a<b<c$ ② $a<c<b$ ③ $b<c<a$
④ $c<a<b$ ⑤ $c<b<a$

120. 2011 수능 (3점)

120. 로그방정식 $\log_3(x-4)=\log_9(5x+4)$의 근을 α라 할 때, α의 값을
구하시오.

121. 2010 수능 (3점)

로그부등식

$$\log_2 x \leqq \log_4(12x+28)$$

을 만족시키는 자연수 x의 개수를 구하시오.

122. 2010 수능 (4점)

자연수 $n(n\geq 2)$에 대하여 직선 $y=-x+n$과 곡선 $y=|\log_2 x|$가 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표를 각각 a_n, $b_n\,(a_n<b_n)$이라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $a_2<\dfrac{1}{4}$

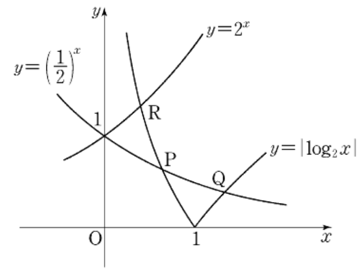
ㄴ. $0<\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<1$

ㄷ. $1-\dfrac{\log_2 n}{n}<\dfrac{b_n}{n}<1$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

123. 2011 수능 (4점)

좌표평면에서 두 곡선
$y=|\log_2 x|$와 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$이 만나는
두 점을
$P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ $(x_1<x_2)$라
하고, 두 곡선 $y=|\log_2 x|$와
$y=2^x$이 만나는 점을
$R(x_3, y_3)$이라 하자. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?123.



[보 기]

ㄱ. $\dfrac{1}{2}<x_1<1$

ㄴ. $x_2y_2-x_3y_3=0$

ㄷ. $x_2(x_1-1)>y_1(y_2-1)$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1. 2004 평가원 (2점)

<표 1>은 어느 과학공원의 관람료, <표 2>는 과학공원을 관람할 사람 수를 나타낸 것이다. <표 2>와 같이 9명이 평일에 과학공원을 관람한다면 주말 관람에 비해 절약할 수 있는 금액은?

〈표 1〉

구분	어른	청소년
평일	8,000 원	6,000 원
주말	10,000 원	7,000 원

〈표 2〉

대상	사람수
어른	4
청소년	5

① 7,000 원 ② 9,000 원 ③ 11,000 원
④ 13,000 원 ⑤ 15,000 원

2. 2005 평가원 (2점)

두 행렬 X, Y에 대하여 $X+Y=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&0\end{pmatrix}$, $X-Y=\begin{pmatrix}-1&1\\-1&-2\end{pmatrix}$일 때, X^2+XY는?

① $\begin{pmatrix}-1&1\\-1&-2\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}1&-1\\1&2\end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix}-1&-1\\1&0\end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}$

3. 2005 교육청 (2점)

$A+B=\begin{pmatrix}3&1\\5&2\end{pmatrix}$, $AX=\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}$, $BX=\begin{pmatrix}-2&-1\\5&2\end{pmatrix}$를 만족시키는 이차정사각행렬 X는?

① $\begin{pmatrix}8&4\\-24&-12\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}8&-4\\24&-12\end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix}-8&-4\\24&12\end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix}24&12\\-8&-4\end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix}24&-12\\8&-4\end{pmatrix}$

4. 2004 평가원 (2점)

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}$에 대하여 $AB-A$는?

① $\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}$

5. 2010 평가원 (2점)

행렬 $A=\begin{pmatrix}1&2\\-2&3\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 B가 $A+B=2E$를 만족시킬 때, 행렬 $A-B$의 모든 성분의 합은? (단, E는 단위행렬이다.)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

6. 2010 교육청(2점)

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}1&0\\3&-2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&-1\\4&3\end{pmatrix}$에 대하여 $A+X=3B+2X$를 만족시키는 행렬 X는?

① $\begin{pmatrix}5&-3\\9&11\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}-5&3\\-9&-11\end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix}5&3\\-9&-11\end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix}-5&3\\-9&11\end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix}-5&-3\\9&-11\end{pmatrix}$

7. 2009 교육청 (2점)

$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\3 & 4\end{pmatrix}$에 대하여 $AX=B$를 만족시키는 행렬 X의 모든 성분의 합은?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

8. 2009 교육청 (2점)

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 0\\2 & 3\end{pmatrix}$에 대하여 $X-B=3(X-2A)+B$를 만족하는 행렬 X는?

① $\begin{pmatrix}2 & -3\\-2 & 0\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}-2 & -3\\2 & 0\end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix}-2 & 3\\2 & 0\end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix}10 & -3\\-2 & 4\end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix}10 & -1\\2 & 4\end{pmatrix}$

9. 2004 평가원 (2점)

행렬 $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\b_{21} & b_{22}\\b_{31} & b_{32}\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}c_{11}\\c_{21}\\c_{31}\end{pmatrix}$ 일 때, 행렬의 연산이 정의되는 것은?

① CA ② BC ③ AC
④ ABC ⑤ $AB+C$

10. 2004 평가원 (2점)

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\-3 & -2\end{pmatrix}$에 대하여 A^2+AB의 모든 성분의 합은?

① 5 ② 10 ③ 15
④ 20 ⑤ 25

11. 2005 교육청 (2점)

$A=\begin{pmatrix}2 & 0\\-1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 2\\5 & -3\end{pmatrix}$ 일 때, $A+2X=3B$를 만족시키는 행렬 X는?

① $\begin{pmatrix}5 & 3\\8 & -6\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}5 & 3\\8 & -5\end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix}5 & 8\\3 & -6\end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix}5 & 8\\3 & -5\end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix}5 & -8\\3 & 5\end{pmatrix}$

12. 2007 교육청 (2점)

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\5 & 3\end{pmatrix}$에 대하여 $\begin{cases}X+Y=A\\X-Y=B\end{cases}$를 만족시키는 행렬 X의 모든 성분의 합은?

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

13. 2009 교육청 (2점)

두 이차정사각행렬 A, B에 대하여

$$A-B=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix},\ 2A+B=\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

를 만족할 때, 행렬 B의 모든 성분의 합은?

① -1 ② 0 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

14. 2007 평가원 (2점)

두 행렬 X, Y에 대하여 $X+Y=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,

$Y=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$일 때, $2X$는?

① $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

15. 2009 평가원 (2점)

두 행렬 A, B에 대하여

$A-2B=\begin{pmatrix} -7 & -2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

일 때, 행렬 A의 모든 성분의 합은?

① -1 ② -2 ③ -3
④ -4 ⑤ -5

16. 2009 평가원 (2점)

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$에 대하여 $X+B=AB$를 만족시키는 행렬 X는?

① $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

17. 2006 평가원 (2점)

두 행렬 A, B가 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$일 때,

행렬 $(A+B)^2$은?

① $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

18. 2008 교육청 (2점)

두 이차정사각행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$에 대하여

$3A+2X=B$가 성립할 때, 행렬 X의 모든 성분의 합은?

① -7 ② -6 ③ -5
④ -4 ⑤ -3

19. 2008 교육청 (2점)

두 행렬 A, B 에 대하여 $A+B=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $A-B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$가 성립할 때, 행렬 AB의 모든 성분의 합은?

① 24 ② 28 ③ 32
④ 36 ⑤ 40

20. 2008 교육청 (2점)

행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $A+AB$의 모든 성분의 합은?

① 15 ② 16 ③ 17
④ 18 ⑤ 19

21. 2008 교육청 (2점)

$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$일 때, 행렬 A^2+AB는?

① $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

22. 2007 평가원 (3점)

이차정사각행렬 A의 $(i,\ j)$성분 a_{ij}를 $a_{ij}=\left[\frac{3i-j}{2}\right]$ $(i=1,\ 2,\ j=1,\ 2)$로 정의할 때, 행렬 A의 모든 성분의 합은?(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

23. 2006 교육청 (3점)

어느 대학에서는 모집단위별로 수능점수와 내신점수의 반영률을 다르게 하여 두 점수를 합산한 점수로 학생을 선발한다.
<표 1>은 갑과 을의 수능과 내신의 백분위점수이고, <표 2>는 P, Q 모집단위의 점수 반영 비율이다.

학생 / 백분위점수	갑	을
수능점수	70	75
내신점수	65	60

<표 1>

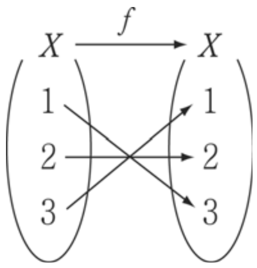
모집단위 / 구분	P	Q
수능점수	60%	70%
내신점수	40%	30%

<표 2>

$A=\begin{pmatrix} 70 & 75 \\ 65 & 60 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 70 & 65 \\ 75 & 60 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 0.6 & 0.7 \\ 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$이라고 할 때, P 모집단위에 대한 갑의 점수를 나타내는 것은?

① AC의 (1, 1)성분 ② AC의 (1, 2)성분
③ BC의 (1, 1)성분 ④ BC의 (1, 2)성분
⑤ CB의 (1, 1)성분

24. 2005 교육청 (3점)



그림과 같이 정의된 함수 $f : X \to X$ 에 대하여 3×3 행렬 A 의 $(i\,,j)$ 성분 a_{ij} 를 $a_{ij} = \begin{cases} 1 & (f(i) \geq j) \\ 0 & (f(i) < j) \end{cases}$ 으로 정의할 때, 행렬 A 의 모든 성분의 합은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

25. 2005 교육청 (3점)

어떤 건설 현장에서 10 대의 트럭으로 흙을 운반하는 데 x 대의 트럭에는 각각 10 톤, y 대의 트럭에는 각각 12 톤의 흙을 실어 모두 114 톤의 흙을 운반하려 한다. 이때, x 와 y 의 값을 구하는 식을 행렬로 나타내면 다음과 같다.
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 57 \end{pmatrix}$ 두 수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값은?

① -9 ② -8 ③ -7
④ -6 ⑤ -5

26. 2009 교육청 (3점)

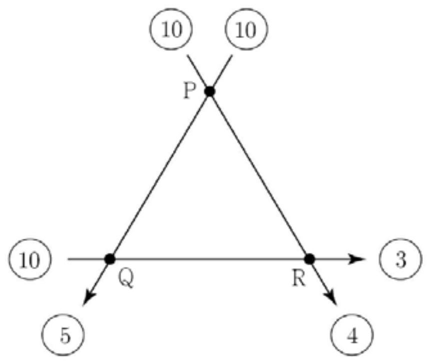
어느 컴퓨터 게임은 1000 cal 의 에너지와 100 점에서 시작되어 게임자가 아이템 P 또는 Q 를 획득할 때마다 에너지가 소모되면서 점수를 얻는 방식으로 진행된다고 한다. 이때, 게임자가 아이템 P 를 한 개 획득할 때마다 2 cal 의 에너지가 소모되면서 10 점을 얻고, 아이템 Q 를 한 개 획득할 때마다 3 cal 의 에너지가 소모되면서 20 점을 얻는다. 이 게임을 시작하여 두 가지 아이템 P, Q 를 각각 x 개, y 개 획득했을 때, 행렬 A 를

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1000 \\ 100 \end{pmatrix}$

이라 하면 행렬 A 의 제 1 행의 성분은 남아 있는 에너지를 나타내고, 제 2 행의 성분은 현재의 점수를 나타낸다. 네 상수 a, b, c, d 의 합 $a+b+c+d$ 의 값을 구하시오.

27. 2009 교육청 (3점)

컴퓨터 단층촬영은 X선을 투사하여 원하는 지점의 흡수 정도를 측정하여 영상화한다. 그림은 투사한 X선의 양이 각각 10일 때 세 지점 P, Q, R를 통과하고 나온 후의 X선의 양을 나타낸 것이다. X선이 P, Q, R지점을 한 번 통과할 때마다 각 지점에서 흡수된 양을 각각 p, q, r라 하고 연립일차방정식을 세워 행렬로 표현하면
$\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$이다. 두 실수 a, b의 합 $a+b$의 값은?
(단, X선은 동시에 투사하지 않으며 투사한 X선은 직진하고 X선의 양은 각 지점에 흡수된 양을 제외하고는 소실되지 않는다고 가정한다.)



① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

28. 2009 교육청 (3점)

갑은 절약하는 습관을 기르기 위하여 연초부터 가계부를 적기로 하였다. 1월의 외식비와 의류구입비를 합하여 보니 30만원이었다. 매달 외식비와 의류구입비를 지난달에 비해 각각 20%, 30%씩 줄였더니 2개월 후에는 외식비와 의류구입비의 합이 15만원 절감되었다. 1월의 외식비를 x만원, 의류구입비를 y만원이라 하면 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 30 \\ 15 \end{pmatrix}$이다. 행렬 A의 (2, 1)성분이 $\dfrac{b}{a}$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 서로소인 자연수이다.)

29. 2008 교육청 (3점)

행렬 A 의 (i, j) 성분 a_{ij} 가

$a_{ij}=\begin{cases} i+2j & (i \geq j) \\ 3 & (i<j) \end{cases}$ (단, $i=1, 2$ 이고 $j=1, 2$)로 정의 될 때, 행렬 A 의 모든 성분의 합을 구하시오.

30. 2009 교육청 (3점)

행렬 A의 (i,j)성분 a_{ij}를 다음과 같이 정의하자.

$$a_{ij}=\begin{cases} i+j-1 & (i \geq j) \\ i \cdot j & (i<j) \end{cases} \text{(단, } i=1,2,\ j=1,2\text{)}$$

행렬 A의 모든 성분의 합은?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

31. 2010 교육청 (3점)

이차정사각행렬 A의 $(i,\ j)$성분 a_{ij}가 아래와 같이 정의될 때, 행렬 A의 모든 성분의 합은?

$$a_{ij}=\begin{cases} i-1 & (i>j) \\ i+j & (i=j) \\ i-2j & (i<j) \end{cases}$$

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

32. 2009 교육청 (3점)

이차정사각행렬 A 의 (i, j) 성분 a_{ij} $(i=1, 2,\ j=1, 2)$를 직선 $y=x+(i+j)$ 와 원 $x^2+y^2=8$ 이 만나는 점의 개수로 정의할 때, 행렬 A 는?

① $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

33. 2008 교육청 (3점)

어떤 학급의 1학기 현재 청소구역별 학생수가 교실은 20명, 특별실은 15명일 때, <표>는 학기 변화에 따른 이 학급의 청소구역별 학생수가 바뀌는 비율을 나타낸 것이다.

<표> 학기 변화에 따른 인원 변화 비율

1학기에서 \ 2학기로	교실	특별실
교실	0.6	0.4
특별실	0.2	0.8

2학기의 청소구역별 학생 수를 교실은 x명, 특별실은 y명이라 하면 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} 20 \\ 15 \end{pmatrix}$이다. 이 때, 이차정사각행렬 A는?

① $\begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$

34. 2008 교육청 (3점)

어느 제과회사에서는 표와 같이 구성된 '고소한 세트'와 '달콤한 세트'를 판매하고 있다. 각 세트에 들어가는 과자와 사탕의 한 봉 당 가격은 각각 500원, 800원이다. 이 회사에서 판매하는 '고소한 세트' 10개와 '달콤한 세트' 15개를 구입하려고 할 때, 필요한 금액을 나타내는 행렬은? (단, 가격할인이나 포장비용은 고려하지 않는다.)

	과자(봉)	사탕(봉)
고소한 세트	5	1
달콤한 세트	2	4

① $(500\ \ 800)\begin{pmatrix}5&1\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\15\end{pmatrix}$　② $(500\ \ 800)\begin{pmatrix}5&1\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}15\\10\end{pmatrix}$

③ $(800\ \ 500)\begin{pmatrix}5&1\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\15\end{pmatrix}$　④ $(10\ \ 15)\begin{pmatrix}5&1\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}500\\800\end{pmatrix}$

⑤ $(10\ \ 15)\begin{pmatrix}5&1\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}800\\500\end{pmatrix}$

35. 2004 교육청 (3점)

좌표평면 위의 점 (x,y)를 행렬$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$로 나타내기로 하자. 영역 $D=\{(x,y)\mid 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1\}$에 속하는 임의의 두 점 (a,b), (c,d)에 대응하는 행렬 $A=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$에 대하여 $A+B=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$라 할 때, 점$(p,q)$가 나타내는 영역의 넓이는?

① 2　② $\frac{5}{2}$

③ 3　④ $\frac{7}{2}$

⑤ 4

36. 2009 교육청 (3점)

행렬 $M=\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}$에 대하여 $MA+B=\begin{pmatrix}-1&-2\\3&-6\end{pmatrix}$이다. 행렬 B의 모든 성분의 합이 18일 때, 행렬 A의 모든 성분의 합을 구하시오.

37. 2009 교육청 (3점)

두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 $A+B=2E$, $AB=E$이고, $\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}A$의 모든 성분의 합이 27일 때, A^3의 모든 성분의 합을 구하시오.

38. 2006 교육청 (3점)

행렬의 곱셈 중 <보기>에서 옳은 것을 모두 고르면?

< 보기 >

ㄱ. $(1\ \ 2)\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix}$

ㄴ. $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}(1\ \ 2)=\begin{pmatrix}3&6\\4&8\end{pmatrix}$

ㄷ. $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

39. 2007 교육청 (3점)

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ b & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 $AB=BA$가 성립할 때, $a+b$의 값은?(단, a, b는 상수이다.)

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

40. 2010 평가원 (3점)

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 5 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 AB의 모든 성분의 합은?

① 5 ② 10 ③ 15
④ 20 ⑤ 25

41. 2005 교육청 (3점)

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 A^2+AB의 모든 성분의 합은?

① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

42. 2005 교육청 (3점)

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$에 대하여 $3A+B+2X=A-2B+3X$를 만족 시키는 행렬 X의 2 행 2 열의 성분을 구하시오.

43. 2010 교육청 (3점)

두 행렬 $A=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $A^{12}+B^{12}$의 모든 성분의 합은?

① 0 ② 4 ③ 8
④ 16 ⑤ 32

44. 2010 교육청 (3점)

행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 $A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $A^2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$일 때, $abcd$의 값을 구하시오.

45. 2010 평가원 (3점)

x, y에 대한 연립방정식 $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ a & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$에 대하여 $x=b$, $y=9$가 이 연립방정식을 만족시킬 때, 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하시오.

46. 2006 교육청 (3점)

등식 $\begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 14 \\ 6 \end{pmatrix}$을 만족시키는 두 실수 x, y에 대하여 x^2+y^2의 값은?

① 22 ② 23
③ 24 ④ 25
⑤ 26

47. 2006 교육청 (3점)

행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에서 a와 d는 이차방정식 $x^2+x-6=0$의 두 근이고, b와 c는 이차방정식 $x^2-8x-7=0$의 두 근일 때, $A+A^2+\cdots+A^{10}$의 모든 성분의 합은?

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

48. 2006 교육청 (3점)

두 이차 정사각행렬 A, B가

$$A-B=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 12 & 2 \end{pmatrix},\ 2A+B=\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$$을 만족시킬 때,

행렬 A의 $(2, 1)$ 성분과 행렬 B의 $(2, 2)$ 성분의 합을 구하시오.

49. 2004 평가원 (3점)

행렬 A, B에 대하여 연산 ◎을 $A◎B=AB-BA$로 정의할 때, 옳은 것을 <보기>에서 모두 고르면? (단, 행렬 A, B, C는 이차정사각행렬이다.)

<보 기>

ㄱ. $A◎B=B◎A$
ㄴ. $3A◎2B=6(A◎B)$
ㄷ. $(A-B)◎C=(A◎C)-(B◎C)$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

50. 2006 교육청 (3점)

실수 x, y에 대하여 $x◎y$를 행렬 $\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$로 정의할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 임의의 실수 a, b에 대하여 $a◎b=b◎a$가 성립한다.
ㄴ. 임의의 실수 a, b, c, d에 대하여 $(a◎b)+(c◎d)=(a+c)◎(b+d)$가 성립한다.
ㄷ. 임의의 실수 a, b, k에 대하여 $(ka)◎(kb)=k(a◎b)$가 성립한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

51. 2007 교육청 (3점)

행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$에 대하여 이차정사각행렬 X는 $BX=AB$가 성립한다. X^{10}의 모든 성분의 합이 52일 때, m의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

52. 2009 교육청 (3점)

행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$에 대하여 $(A^n)^2=E$를 만족시키는 100 이하의 자연수 n의 개수를 구하시오. (단, E는 단위행렬이다.)

53. 2004 평가원 (3점)

행렬 $A=\begin{pmatrix} 0 & a \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 에 대하여 $(AB)^2=A^2B^2$ 이 성립할 때, $a+b$ 의 값을 구하시오.

54. 2004 평가원 (3점)

이차정사각행렬 A, B가 $A-3B=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 14 \end{pmatrix}$,

$2A-B=\begin{pmatrix} 13 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$을 만족시킬 때, 행렬 $A-B$의 모든 성분의 합을 구하시오.

55. 2005 교육청 (3점)

$x+\sqrt{3}x+y-2\sqrt{3}y-27-18\sqrt{3}=0$ 을 만족시키는 유리수 x, y 에 대하여 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$ 일 때, mn 의 값은?

① -2 ② -1
③ 0 ④ 1
⑤ 2

56. 2005 평가원 (3점)

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 에 대하여 $A^{100}B$ 의 모든 성분의 합을 구하시오.

57. 2005 평가원 (3점)

중심이 (a, b) 이고 반지름의 길이가 r 인 원에 대응되는 행렬을 $\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & r \end{pmatrix}$ 라 하자. 원 $(x+c-1)^2+y^2=c^2$ 에 대응되는 행렬이 A 이고, 원 $(x-1)^2+y^2=k^2$ 에 대응되는 행렬이 A^2 일 때, $c+k$ 의 값은? (단, $c>0$ 이고 $k>0$ 이다.)

① 6 ② 8
③ 10 ④ 12
⑤ 14

58. 2005 교육청 (3점)

어떤 사람이 두 곳의 과수원 A, B에서 사과와 복숭아를 재배하고 있다. [표1]은 과수원의 작물의 그루수를 나타낸 것이고, [표2]는 과수원의 작물 한 그루당 열매의 평균 개수를 나타낸 것이다.

(단위 : 그루)

	A	B
사과	a_{11}	a_{12}
복숭아	a_{21}	a_{22}

[표1]

(단위 : 개)

	사 과	복숭아
A	b_{11}	b_{12}
B	b_{21}	b_{22}

[표2]

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ 라 할 때, 두 과수원에서 생산된 사과의 총 개수는 (가)이고, 두 과수원의 복숭아 한 그루당 열매의 평균 개수는 (나)이다. (가), (나)에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

① a, $\frac{a}{p}$ ② a, $\frac{b}{q}$
③ a, $\frac{d}{q}$ ④ b, $\frac{c}{p}$
⑤ b, $\frac{c}{q}$

59. 2008 교육청 (3점)

두 이차정사각행렬 A, B와 영행렬 O에 대하여, $A+B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A+2B=\begin{pmatrix}k&-6\\7&-5\end{pmatrix}$, $AB=O$를 만족하는 상수 k의 값을 구하시오.

60. 2008 평가원 (3점)

자연수 n과 8 이하의 자연수 a에 대하여 $\begin{pmatrix}a&3\\0&a\end{pmatrix}^n$의 (1, 1) 성분과 (1, 2) 성분이 같을 때, 가능한 모든 a의 곱을 구하시오.

61. 2008 교육청 (3점)

이차정사각행렬 A, B가

$A^2+B^2=\begin{pmatrix}5&0\\ \frac{3}{2}&1\end{pmatrix}$, $AB+BA=\begin{pmatrix}-4&0\\ -\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$

을 만족시킬 때, 행렬 $(A+B)^{100}$의 모든 성분의 합을 구하시오.

62. 2007 교육청 (3점)

두 상수 a, b에 대하여 행렬 $A=\begin{pmatrix}-1&a\\b&2\end{pmatrix}$가 $A^2=A$이고 $a^2+b^2=10$일 때, $(a+b)^2$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

63. 2008 평가원 (3점)

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$을 중복을 허락하여 곱해서 얻어지는 행렬의 집합을 S라 하자. 다음은 S의 원소를 구하는 과정이다.

> $A^2=A$, $B^2=B$이므로 S의 원소는
> A, B, $(AB)^n$, $(BA)^n$, $(AB)^nA$, $(BA)^nB$의 형태이다.
> 한편, $AB=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$이므로 $(AB)^n=\begin{pmatrix}2^{n-1}&2^{n-1}\\2^{n-1}&2^{n-1}\end{pmatrix}$
> $BA=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}$이므로 $(BA)^n=$ (가)
> 따라서 $(AB)^nA=\begin{pmatrix}2^{n-1}&2^{n-1}\\2^{n-1}&2^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}=$ (나)
> $(BA)^nB=$(가) $\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=$ (다)
> 그러므로 S의 원소는 A, B, A, B, $2^{n-1}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$
> (가), (나), (다)의 형태이다. (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

① $\begin{pmatrix}2^n&0\\0&0\end{pmatrix}$, 2^nA, 2^nB

② $\begin{pmatrix}2^n&0\\0&0\end{pmatrix}$, 2^nA, 2^nAB

③ $\begin{pmatrix}2^n&0\\0&0\end{pmatrix}$, 2^nAB, 2^nB

④ $\begin{pmatrix}2^n&0\\2^n&0\end{pmatrix}$, 2^nB, 2^nA

⑤ $\begin{pmatrix}2^n&0\\2^n&0\end{pmatrix}$, 2^nA, 2^nB

64. 2007 평가원 (3점)

행렬 $A=\begin{pmatrix}0&2\\3&0\end{pmatrix}$에 대하여 $A^{11}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$일 때, c의 값은?

① 0 ② $2^5\cdot3^5$ ③ $2^5\cdot3^6$
④ $2^6\cdot3^5$ ⑤ $2^6\cdot3^6$

65. 2006 평가원 (3점)

행렬 $A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\-1 & -1\end{pmatrix}$에 대하여 $A^6\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$일 때, $a+b$의 값을 구하시오.

66. 2006 교육청 (3점)

이차방정식 $x^2-5x-1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, 행렬 $A=\begin{pmatrix}2 & \alpha\\ \beta & -2\end{pmatrix}$에 대하여 A^5과 같은 행렬은?

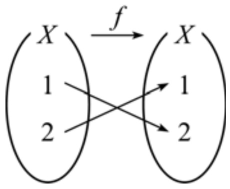
① $6A$ ② $9A$ ③ $25A$
④ $27A$ ⑤ $81A$

67. 2005 교육청 (3점)

행렬 $A=\begin{pmatrix}-2 & -3\\1 & 1\end{pmatrix}$에 대하여 $A^{2005}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$일 때, $x-y$의 값을 구하시오.

68. 2006 교육청 (3점)

집합 $X=\{1, 2\}$에서 X로의 함수 f의 대응관계가 그림과 같을 때,



이차정사각행렬 A의 (i, j)성분 a_{ij}를

$a_{ij}=\begin{cases}1 & (f(i)\neq j \text{ 일 때})\\0 & (f(i)=j \text{ 일 때})\end{cases}$ 로 정의한다.

행렬 A^{2006}과 같은 것은? (단, E는 단위행렬이다.)

① $A-E$ ② A ③ E
④ $A+E$ ⑤ $2A$

69. 2007 평가원 (3점)

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$에 대하여 $A^n=kE$ (k는 실수)를 만족시키는 1000 이하의 자연수 n의 개수를 구하시오.

70. 2006 교육청 (3점)

이차 정사각행렬 A, B에 대하여 <보기>에서 옳은 것을 모두 고르면? (단, E는 단위행렬, O는 영행렬이다.)

< 보 기 >

ㄱ. $A+B=E$이면 $A^2-B^2=A-B$이다.
ㄴ. $A^2=2A$이면 $A=O$ 또는 $A=2E$이다.
ㄷ. $AB=A$이고 $BA=B$이면 $AB=BA$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

71. 2004 평가원 (3점)

이차정사각행렬 A, B에 대하여 옳은 것을 <보기>에서 모두 고르면? (단, E는 단위행렬이다.)

<보 기>

ㄱ. $A^5=A^7=E$이면 $A=E$이다.
ㄴ. $(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$
ㄷ. $(kA)B=A(kB)=k(AB)$ (단, k는 실수)

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

72. 2005 교육청 (3점)

이차정사각행렬 A, B에 대하여 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, O는 영행렬, E는 단위행렬이다.)

< 보 기 >

ㄱ. $(A-E)^2 = A^2 - 2A + E$
ㄴ. $AB = O$, $A \neq O$이면 $B = O$이다.
ㄷ. $AB = A$, $BA = B$이면 $A^2 = A$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

73. 2007 교육청 (3점)

이차정사각행렬 X, Y에 대하여 연산 $\odot$를 $X \odot Y = XY + YX$로 정의하자. 연산 $\odot$에 대한 성질로 항상 옳은 것을 <보기>에서 모두 고르면?(단, A, B, C는 이차정사각행렬이다.)

< 보 기 >

ㄱ. $A \odot B = B \odot A$
ㄴ. $pA \odot qB = pq(A \odot B)$ (단, p, q는 실수이다.)
ㄷ. $(A+B) \odot C = (A \odot C) + (B \odot C)$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ,ㄴ
④ ㄴ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

74. 2007 평가원 (3점)

집합 $X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, x\text{는 실수} \right\}$에 대하여 $A \in X$, $B \in X$일 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $AB \in X$
ㄴ. $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$
ㄷ. $(A+B)^2 = 4AB$

① ㄱ ② ㄱ,ㄴ ③ ㄱ,ㄷ
④ ㄴ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

75. 2007 교육청 (3점)

자연수 n에 대하여 이차정사각행렬 A_1, A_2, A_3, $\cdots$, A_n을 각각 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\cdots$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}$이라 할 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?(단, X^{-1}는 X의 역행렬)

< 보 기 >

ㄱ. 자연수 m, n에 대하여 $A_m + A_n = A_{m+n}$이 성립한다.
ㄴ. 자연수 m, n에 대하여 $A_m A_n = A_{mn}$이 성립한다.
ㄷ. 자연수 n에 대하여 $A_n^{-1} = \frac{1}{n} A_n$이 성립한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ,ㄷ
④ ㄴ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

76. 2007 교육청 (4점)

이차정사각행렬 A의 (i, j) 성분을 $a_{ij} = \sin\left\{\frac{(i+j)}{2}\pi + \theta\right\}$로 정의하자. 행렬 A의 모든 성분의 합이 1일 때, θ의 값은?(단, $0 \leqq \theta \leqq \pi$이다.)

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{3}$ ③ $\frac{\pi}{2}$
④ $\frac{2}{3}\pi$ ⑤ $\frac{3}{4}\pi$

77. 2006 교육청 (4점)

이차 정사각행렬 A의 (i, j) 성분 a_{ij}가 $a_{ij} =$ ($i+2j$의 양의 약수의 개수) 일 때, 행렬 A의 모든 성분의 합을 구하시오. (단, $i = 1$, 2, $j = 1$, 2)

78. 2007 평가원 (4점)

철수는 집에서 5 km 떨어진 학교에 갈 때, 처음 x km 는 매시 4 km 의 속력으로 걸어서 가고, 나머지 y km 는 매시 8 km 의 속력으로 뛰어서 간다. 그리고 학교에서 집으로 올 때는 처음 y km 는 매시 4 km 의 속력으로 걸어서 오고, 나머지 x km 는 매시 8 km 의 속력으로 뛰어서 온다. 철수가 학교에서 집으로 올 때 걸리는 시간은 집에서 학교로 갈 때 걸리는 시간보다 15분이 더 걸린다고 한다. 이를 만족하는 x, y 에 대하여 등식 $\begin{pmatrix} 1 & p \\ 1 & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ 가 성립할 때, $p-q$ 의 값은?(단, p, q 는 상수이다.)

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

79. 2010 교육청 (4점)

행렬 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 자연수 m, n은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $A^m=A^n$
(나) m, n은 100이하의 서로 다른 자연수이다.

$|m-n|$의 최댓값을 p, 최솟값을 q라 할 때, $p+q$의 값을 구하여라.

80. 2010 평가원 (4점)

행렬 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}^n$의 $(1,2)$성분은 $2^4-2^5+2^6-2^7+2^8$이고 $(1,1)$성분은 a이다. $a+n$의 값을 구하시오. (단, n은 자연수이다.)

81. 2010 교육청 (4점)

어느 고등학교 3학년 학생 n명을 대상으로 수학과 영어 과목에 대한 방과 후 교육활동을 실시하기 위해 희망조사를 하였다. 1차에 희망한 n명의 학생을 대상으로 2차 희망조사를 하였더니 학생 수가 표와 같았고, 1, 2차 각 조사에서 수학과 영어 과목을 동시에 희망한 학생은 없었다. (단위:명)

구분	1차	2차
수학	a	c
영어	b	d
계	n	n

1차 조사에서 수학을 희망한 학생 중 4%가 2차 조사 때 영어로, 영어를 희망한 학생 중 12%가 2차 조사 때 수학으로 과목을 바꾸어 희망하였다. $\frac{1}{25}A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$일 때, 행렬 A의 모든 성분의 합을 구하시오.

82. 2009 교육청 (4점)

어떤 회사에서 새로 추진하려는 사업에 대하여 전체 사원을 대상으로 세 차례에 걸쳐 찬반 의견을 조사하였다. 1 차 조사 결과 찬성이 60 %, 반대가 40 %였다. 아래 표는 사업 설명회 이후 2 차 조사 결과 1 차 조사와 달리 찬반 의견을 바꾼 비율과 사원 토론회 이후 3 차 조사 결과 2 차 조사와 달리 찬반 의견을 바꾼 비율을 각각 나타낸 것이다.

변화 / 조사	직전조사에서 찬성한 사원 중 반대로 의견을 바꾼 비율	직전조사에서 반대한 사원 중 찬성으로 의견을 바꾼 비율
2 차 조사 결과	20 %	30 %
3 차 조사 결과	10 %	40 %

$A=(0.6\ \ 0.4)$, $B=\begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$일 때, 3 차 조사 결과 전체 사원 중에서 찬성하는 사원들의 비율을 나타내는 것은? (단, 기권한 사원은 없다.)

① ABC의 (1, 1) 성분　② ABC의 (1, 2) 성분
③ ACB의 (1, 1) 성분　④ ACB의 (1, 2) 성분
⑤ AB^2 의 (1, 1) 성분

83. 2006 교육청 (4점)

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}4&1\\1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}17&4\\4&1\end{pmatrix}$에 대하여 등식 $(x^2+y^2)A-(x-y)E=B$를 만족시키는 실수 x, y를 $\begin{cases}x=\alpha_1\\y=\beta_1\end{cases}$, $\begin{cases}x=\alpha_2\\y=\beta_2\end{cases}$ 라 하자. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{P}(\alpha_1,\ \beta_1)$, $\mathrm{Q}(\alpha_2,\ \beta_2)$ 사이의 거리는? (단, E는 단위행렬이다.)

① $\sqrt{10}$ ② $\sqrt{11}$
③ $2\sqrt{3}$ ④ $\sqrt{13}$
⑤ $\sqrt{14}$

84. 2005 교육청 (4점)

행렬 $A=\begin{pmatrix}a\,b\\c\,d\end{pmatrix}$에 대하여 $f(A)=a+d$로 정의한다. 예를 들면 $A=\begin{pmatrix}1\,2\\3\,4\end{pmatrix}$라고 할 때, $f(A)=1+4=5$이다.
<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, A, B는 이차정사각행렬이고 k는 상수이다.)

< 보 기 >
ㄱ. $f(kA)=kf(A)$
ㄴ. $f(AB)=f(BA)$
ㄷ. $f(A+B)=f(A)+f(B)$

① ㄱ ② ㄴ
③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

85. 2006 교육청 (4점)

이차정사각행렬 A, B에 대하여 등식 $A+B=3E,\ AB=4B$ 가 성립할 때, 항상 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? (단, E는 단위행렬이고 O는 영행렬이다.)

< 보 기 >
ㄱ. $A=4E$
ㄴ. $B^2+B=O$
ㄷ. $A^2-B^2=3(A-B)$

① ㄱ ② ㄴ
③ ㄷ ④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

86. 2009 교육청 (4점)

영행렬이 아닌 이차정사각행렬 A가 임의의 자연수 n에 대하여 $A^{n+1}=A^{n+2}+A^n$을 만족할 때, A^{2009}을 간단히 하면?

① $-A^3$ ② $-A^2$ ③ A
④ A^2 ⑤ A^3

87. 2009 교육청 (4점)

행렬 $A=\begin{pmatrix}m&0\\m-5&5\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 A^n의 모든 성분의 합이 2^{49}이 되도록 하는 두 자연수 m, n의 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하시오.

88. 2006 교육청 (4점)

이차정사각행렬 A, B, C에 대하여 $ABC=E$가 성립할 때, ABC와 항상 같은 행렬을 <보기>에서 모두 고른 것은? (단, E는 단위행렬)

< 보 기 >

ㄱ. ACB　　ㄴ. BCA　　ㄷ. CAB

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

89. 2006 평가원 (4점)

이차정사각행렬 A는 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가) $A^3+E=O$

(나) $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+A^{-1}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$일 때, $a+b$의 값은? (단, O는 영행렬이고 E는 단위행렬이다.)

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

90. 2009 교육청 (4점)

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\-1 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3\\-1 & -1\end{pmatrix}$에 대하여 $A^{100}+A^{99}B+A^{98}B^2+\cdots+AB^{99}+B^{100}=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$이다. 이 때, $a+b+c+d$의 값을 구하시오.

91. 2009 평가원 (4점)

행렬 $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$에 대하여

$$A^m=A^n$$

을 만족시키는 40 이하의 두 자연수 $m, n\,(m>n)$의 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하시오.

92. 2009 평가원 (4점)

집합 S가 $S=\left\{\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\right\}$일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. 집합 S에 속하는 서로 다른 두 행렬 A, B에 대하여 행렬 $A+B$의 성분은 모두 짝수이다.

ㄴ. 집합 S에 속하는 행렬 중에서 중복을 허락하여 m개의 행렬 A_1, A_2, $\cdots$, A_m을 선택하였을 때,

$$A_1+A_2+\cdots+A_m=\begin{pmatrix}9 & 9\\9 & 9\end{pmatrix}$$

가 되도록 하는 m이 존재한다.

ㄷ. 집합 S에 속하는 행렬 중에서 중복을 허락하여 n개의 행렬 A_1, A_2, $\cdots$, A_n을 선택하였을 때, 행렬 $\begin{pmatrix}1 & 3\\5 & 7\end{pmatrix}+A_1+A_2+\cdots+A_n$의 성분이 모두 짝수가 되도록 하는 n의 최솟값은 4이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

93. 2005 교육청 (4점)

행렬 $A=\begin{pmatrix}x & y\\y & -x\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$이 있다. $A^2=16E$를 만족하는 실수 x, y에 대하여 점 $P(x, y)$의 자취를 도형 C라 하자. 이 때, 점 $Q(5, 12)$에서 도형 C위의 점까지의 거리의 최댓값을 구하시오.

94. 2005 교육청 (4점)

두 행렬 $A_1=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 A_{n+1}을 다음과 같이 정의한다.(단, n은 자연수)

○ 행렬 A_n의 $(1, 1)$ 성분이 $(1, 2)$ 성분보다 작으면 $A_{n+1}=A_nP$
○ 행렬 A_n의 $(1, 1)$ 성분이 $(1, 2)$ 성분보다 작지 않으면 $A_{n+1}=-PA_n$

이 때, 행렬 A_{2005}의 $(2, 1)$ 성분은?

① -4 ② -2 ③ -1
④ 1 ⑤ 3

95. 2009 교육청 (4점)

복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)에 대하여 행렬 $M(z)$를

$$M(z)=\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}$$

로 정의하자. 예를 들어, $z=3+4i$에 대하여 $M(z)=\begin{pmatrix}3&-4\\4&3\end{pmatrix}$이다.

이 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이고, $i=\sqrt{-1}$이다.)

[보 기]

ㄱ. 두 복소수 z_1, z_2에 대하여 $M(z_1+z_2)=M(z_1)+M(z_2)$이다.
ㄴ. 두 복소수 z_1, z_2에 대하여 $M(z_1z_2)=M(z_1)M(z_2)$이다.
ㄷ. $\{M(z)\}^3=E$를 만족하는 허수 z가 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

96. 2008 교육청 (4점)

이차정사각행렬 전체의 집합 U에 대하여 집합 $X=\{A \mid A^2=A,\ A\in U\}$일 때, 옳은 것을 <보기>에서 모두 고르면? (단, E는 단위행렬이고, n은 자연수이다.)

< 보 기 >

ㄱ. $A\in X$이면 $A^n\in X$이다.
ㄴ. $A\in X$이면 $(E-A)^n\in X$이다.
ㄷ. $A\in X$, $B\in X$이면 $AB\in X$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

97. 2008 교육청 (4점)

행렬 $A=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\\6&5\end{pmatrix}^{50}$의 $(2, 1)$ 성분이 3^n일 때, n의 값을 구하시오.

98. 2008 교육청 (4점)

정수 a, b, c에 대하여 행렬 A를 $A=\begin{pmatrix}a&b\\1&c\end{pmatrix}$라 하자. $|b|\le 100$일 때, $A=A^{-1}$을 만족하는 행렬 A의 개수를 구하시오.

99. 2006 수능 (2점)

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}1&-2\\3&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&0\\1&-1\end{pmatrix}$에 대하여 $A=2B-X$를 만족시키는 행렬 X는?

① $\begin{pmatrix}3&2\\-1&-2\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}3&-2\\1&2\end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix}-1&-2\\3&2\end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix}-2&-1\\2&3\end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix}-3&1\\-2&2\end{pmatrix}$

100. 2011 수능 (2점)

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$ 에 대하여 행렬 $A(A+B)$ 의 모든 성분의 합은?100.

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

101. 2006 수능 (3점)

행렬 $A=\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}$에 대하여 $A^8=\begin{pmatrix}1&0\\a&1\end{pmatrix}$일 때, a의 값을 구하시오.

102. 2006 수능 (2점)

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&-2\\1&0\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $(A+B)A$의 모든 성분의 합은?

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

103. 2010 수능 (2점)

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $AB+2B$이 모든 성분의 합은?

① 10 ② 8 ③ 6
④ 4 ⑤ 2

104. 2010 수능 (4점)

이차정사각행렬 A와 행렬 $B=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$에 대하여 $(BA)^2=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$일 때, 행렬 $(AB)^2$은?

① $\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}$

105. 2006 수능 (4점)

이차정사각행렬 A는 모든 성분의 합이 0이고

$$A^2+A^3=-3A-3E$$

를 만족시킨다. 행렬 A^4+A^5의 모든 성분의 합을 구하시오. (단, E는 단위행렬이다.)

106. 2011 수능 (4점)

이차정사각행렬 A의 (i, j)성분 a_{ij}가

$$a_{ij}=i-j\ (i=1, 2,\ j=1, 2)$$

이다. 행렬 $A+A^2+A^3+\cdots+A^{2010}$의 $(2, 1)$의 성분은?[106.]

① -2010 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2010

107. 2011 수능 (4점)

어느 회사에서는 응시자의 추론능력시험과 공간지각능력시험의 원점수를 변환하여 사용한다. 추론능역시험의 원점수가 x, 공간지각능력시험의 원점수가 y일 때, 두 가지 변환점수 p와 q는 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

응시자 A, B, C의 각 변환점수가 표와 같을 때, 응시자 A, B, C의 추론능력시험의 원점수를 각각 a, b, c라 하자. a, b, c의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?[107.]

변환점수 \ 응시자	A	B	C
p	45	50	45
q	40	50	50

① $a>b>c$ ② $a>c>b$ ③ $b>a>c$
④ $b>c>a$ ⑤ $c>b>a$

1. 2009 교육청 (2점)

$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\3 & 4\end{pmatrix}$에 대하여 $AX=B$를 만족시키는 행렬 X의 모든 성분의 합은?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

2. 2010 교육청 (2점)

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\-2 & 3\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $A^{-1}B$의 모든 성분의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

3. 2010 평가원 (2점)

두 행렬 A, B에 대하여 $A-B=\begin{pmatrix}3 & 1\\5 & 2\end{pmatrix}$일 때, $AX=\begin{pmatrix}3 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$, $BX=\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$을 만족시키는 행렬 X는?

① $\begin{pmatrix}2 & -1\\-5 & 3\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}1 & 3\\-1 & 2\end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix}-2 & 1\\5 & -3\end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix}5 & 1\\1 & -2\end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix}3 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}$

4. 2009 교육청 (2점)

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$에 대하여 등식 $AX=B$를 만족시키는 행렬 X의 모든 성분의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

5. 2005 교육청 (2점)

$A=\begin{pmatrix}4 & -3\\-1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$일 때, 행렬 $A^{-1}B$의 모든 성분의 합은? (단, A^{-1}는 A의 역행렬이다.)

① 3 ② 4
③ 5 ④ 6
⑤ 7

6. 2005 평가원 (2점)

행렬 $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\5 & 2\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $A-A^{-1}$의 모든 성분의 합은?

① 11 ② 12
③ 13 ④ 14
⑤ 15

7. 2006 교육청 (2점)

$\begin{pmatrix}1 & -1\\3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$을 만족시키는 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

8. 2006 평가원 (2점)

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}$에 대하여 $A^{-1}B$의 모든 성분의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

9. 2005 교육청 (2점)

행렬 $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\1 & 3\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$에 대하여 $(A+E)A^{-1}$의 모든 성분의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

10. 2007 교육청 (2점)

두 행렬 A, B가 $A=B^{-1}\begin{pmatrix}2 & 1\\5 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\-3 & 2\end{pmatrix}$일 때, 행렬 BAB의 모든 성분의 합은?(단, X^{-1}는 X의 역행렬)

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

11. 2007 평가원 (2점)

등식 $\begin{pmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}3 & 1\\-2 & 4\end{pmatrix}$를 만족시키는 행렬 X의 모든 성분의 합은?

① 1 ② 0 ③ -1 ④ -2 ⑤ -3

12. 2009 교육청 (2점)

이차정사각행렬 X에 대하여 $X\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$, $X^{-1}\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$일 때, $X^2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$의 모든 성분의 합은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

13. 2009 교육청 (2점)

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $(AB)^{-1}$의 모든 성분의 합은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

14. 2010 교육청 (3점)

역행렬이 존재하는 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 $A^{-1}B=\begin{pmatrix}2 & 1 \\ 5 & 3\end{pmatrix}$일 때, 행렬 $B^{-1}A$의 모든 성분의 합은?14.

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

15. 2007 평가원 (2점)

이차정사각행렬 X에 대하여

$\begin{pmatrix}2 & 1 \\ 5 & 3\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}2 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$

일 때, X의 모든 성분의 합은?

① 5　② 3　③ 0　④ -3　⑤ -5

16. 2006 평가원 (2점)

행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 \\ 2 & 4\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $A+2A^{-1}$은?

① $\begin{pmatrix}-2 & 0 \\ 0 & 2\end{pmatrix}$　② $\begin{pmatrix}-2 & 2 \\ 0 & 2\end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix}4 & -2 \\ 4 & 0\end{pmatrix}$　④ $\begin{pmatrix}5 & 0 \\ 0 & 2\end{pmatrix}$

⑤ $\begin{pmatrix}5 & 0 \\ 0 & 5\end{pmatrix}$

17. 2007 평가원 (2점)

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1 \\ 2 & 3\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $AB^{-1}+B$의 모든 성분의 합은?

① 1　② 3　③ 5　④ 7　⑤ 9

18. 2004 평가원 (2점)

행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 \\ 3 & -2\end{pmatrix}$에 대하여 $\left(A^{-1}\right)^{2004}$과 같은 행렬은?(단, O는 영행렬, E는 단위행렬, A^{-1}은 A의 역행렬)

① O　② E

③ A　④ A^{-1}

⑤ $-A$

19. 2008 교육청 (2점)

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$에 대하여 $A^{-1}X=B$를 만족시키는 행렬 X의 모든 성분의 합은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

20. 2008 교육청 (2점)

행렬 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$에 대하여 $(A-B^{-1})A^{-1}$의 모든 성분의 합은? (단, A^{-1}는 A의 역행렬이다.)

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

21. 2008 교육청 (2점)

행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$에 대하여 $(E+A)A^{-1}$의 모든 성분의 합은? (단, E는 단위행렬, A^{-1}는 A의 역행렬이다.)

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

22. 2008 평가원 (2점)

이차정사각행렬 A와 두 행렬 $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 $BA=B+E$일 때, 행렬 A의 모든 성분의 합은?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

23. 2008 평가원 (2점)

행렬 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $A(2A^{-1}+3E)$의 모든 성분의 합은? (단, E는 단위행렬이다.)

① 22 ② 24 ③ 25 ④ 27 ⑤ 28

24. 2006 교육청 (2점)

이차정사각행렬 $\begin{pmatrix} k & 3 \\ 2 & k+1 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않을 때, 모든 k값들의 합은?

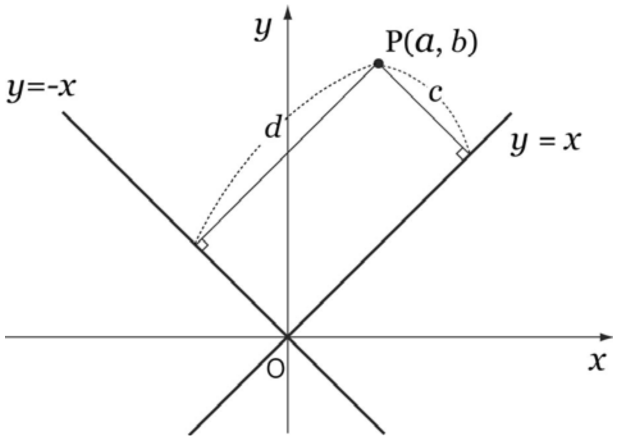
① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

25. 2009 교육청 (3점)

갑은 절약하는 습관을 기르기 위하여 연초부터 가계부를 적기로 하였다. 1월의 외식비와 의류구입비를 합하여 보니 30만원이었다. 매달 외식비와 의류구입비를 지난달에 비해 각각 20%, 30%씩 줄였더니 2개월 후에는 외식비와 의류구입비의 합이 15만원 절감되었다. 1월의 외식비를 x만원, 의류구입비를 y만원이라 하면 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 30 \\ 15 \end{pmatrix}$이다. 행렬 A의 $(2,1)$성분이 $\frac{b}{a}$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 서로소인 자연수이다.)

26. 2009 교육청 (3점)

두 부등식 $x>0$, $y>x$의 영역에 속하는 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에서 두 직선 $y=x$, $y=-x$에 이르는 거리를 각각 c, d라 하자. 이차정사각행렬 M이 $M\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$를 만족할 때, 행렬 $M+M^{-1}$의 모든 성분의 합은?



① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

27. 2007 교육청 (3점)

행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$이고 행렬 B가 $AB=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$을 만족시킬 때, $A+B$의 모든 성분의 합을 구하시오.

28. 2010 교육청 (3점)

행렬 $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $A^{-1}(2A+B)$의 모든 성분의 합을 구하시오.

29. 2010 교육청 (3점)

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & a \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$에 대하여 $AB+A^{-1}=E$가 성립할 때, 상수 a의 값은? (단, E는 단위행렬이다.)

① -1 ② 0 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

30. 2009 교육청 (3점)

행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & m\\0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$에 대하여 이차정사각행렬 X는 $BX=AB$가 성립한다. X^{10}의 모든 성분의 합이 52일 때, m의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

31. 2005 교육청 (3점)

행렬 $A=\begin{pmatrix}-2 & -3\\1 & 1\end{pmatrix}$에 대하여 $A^{2005}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$일 때, $x-y$의 값을 구하시오.

32. 2007 평가원 (3점)

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}0 & a\\3 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -5\\-1 & 2\end{pmatrix}$가 $AB^{-1}=B^{-1}A$를 만족시킬 때, a의 값을 구하시오.

33. 2007 평가원 (3점)

이차정사각행렬 A에 대하여

$A+A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\6 & 1\end{pmatrix}$

일 때, $A^2+(A^2)^{-1}$의 모든 성분의 합을 구하시오.

34. 2007 교육청 (3점)

행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & b\\0 & -1\end{pmatrix}$일 때, $(2A+A^{-1})(3A-A^{-1})$를 간단히 하면?(단, E는 단위행렬이다.)

① E ② $6E$ ③ A
④ $A+E$ ⑤ $3A+2E$

35. 2004 평가원 (3점)

이차 정사각행렬 $A=\begin{pmatrix}4 & 12\\-8 & 0\end{pmatrix}$와 두 이차 정사각행렬 B, C에 대하여 $B^{-1}=2A$, $C^{-1}=2B$가 성립할 때, 행렬 C는? (단, X^{-1}는 X의 역행렬이다.)

① $\begin{pmatrix}1 & 3\\-2 & 0\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}2 & 6\\-4 & 0\end{pmatrix}$
③ $\begin{pmatrix}4 & 12\\-8 & 0\end{pmatrix}$ ④ $\begin{pmatrix}8 & 24\\-16 & 0\end{pmatrix}$
⑤ $\begin{pmatrix}16 & 48\\-32 & 0\end{pmatrix}$

36. 2005 교육청 (3점)

행렬 $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $A^{10}+(A^{-1})^{10}$의 모든 성분의 합을 구하시오.

37. 2008 교육청 (3점)

행렬 $A=\begin{pmatrix}-2&3\\1&-2\end{pmatrix}$에 대하여 $(A^{-1})^2$의 모든 성분의 합을 구하시오. (단, A^{-1}는 A의 역행렬이다.)

38. 2008 교육청 (3점)

역행렬을 갖는 이차정사각행렬 $A,\ B,\ X$에서 $A=\begin{pmatrix}2&1\\-3&-2\end{pmatrix}$이고 $BX=AB$를 만족한다. 이 때, X^2의 모든 성분의 합은?

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

39. 2007 평가원 (3점)

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&a\\b&1\end{pmatrix}$에 대하여 이차정사각행렬 C가 $AB=CA$를 만족시킨다. $ab=4$일 때, 행렬 C의 모든 성분의 합의 최솟값은? (단, a, b는 양수이다.)

① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

40. 2009 평가원 (3점)

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&-3\\a&-1\end{pmatrix}$에 대하여 $A^{-1}B^{-1}=\begin{pmatrix}-1&b\\0&1\end{pmatrix}$일 때, $a+b$의 값은?

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$　④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

41. 2009 평가원 (3점)

행렬 $A=\begin{pmatrix}5&1\\7&2\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $A+3A^{-1}$의 모든 성분의 합을 구하시오.

42. 2005 교육청 (3점)

a, b, c는 서로 다른 한 자리의 자연수이다. 행렬 $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & 9 \end{pmatrix}$가 역행렬을 갖지 않을 때 a, b, c의 곱의 값을 구하시오.

43. 2007 평가원 (3점)

이차정사각행렬 A와 단위행렬 E에 대하여 $A^2+E=A$가 성립할 때, $A-E$의 역행렬은?

① $-A$ ② $E-A$ ③ $A-E$
④ A ⑤ $A+E$

44. 2007 평가원 (3점)

모든 성분의 합이 24인 이차정사각행렬 A가 $2A^2-A=2E$를 만족시킬 때, 행렬 $2A-E$의 역행렬의 모든 성분의 합을 구하시오.
(단, E는 단위행렬이다.)

45. 2007 평가원 (3점)

세 양수 a, b, c에 대하여 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & -c \end{pmatrix}$가 $A^4-3A^2=O$를 만족시킬 때, $a^2+2b^2+c^2$의 값은?(단, O는 영행렬이다.)

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

46. 2007 평가원 (3점)

두 양수 a, b에 대하여 $5^{\log b}=a^{2\log 5}$이고 행렬 $\begin{pmatrix} a & -1 \\ -b & 2 \end{pmatrix}$가 역행렬을 갖지 않을 때, ab의 값은?

① 8 ② 12 ③ 16
④ 25 ⑤ 27

47. 2009 교육청 (3점)

수직선 위의 서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(a)$, $\mathrm{B}(b)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점과 외분하는 점을 각각 $\mathrm{P}(c)$, $\mathrm{Q}(d)$라 하자. 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않을 때, $\dfrac{b}{a}$의 값은?

① 2 ② $\dfrac{3}{2}$ ③ $\dfrac{3}{4}$
④ $\dfrac{2}{3}$ ⑤ $\dfrac{1}{2}$

48. 2006 교육청 (3점)

$A^2-3A+E=A-2E$를 만족시키는 행렬 A의 역행렬은? (단, E는 단위행렬이다.)

① $-3(A-4E)$ ② $-\frac{1}{3}(A-4E)$

③ $\frac{1}{4}(A-4E)$ ④ $\frac{1}{3}(A+4E)$

⑤ $3(A+4E)$

49. 2009 교육청 (3점)

이차정사각행렬 A가 $A^2+A=3E$를 만족할 때, $A-3E$의 역행렬은? (단, E는 단위행렬이다.)

① $\frac{1}{2}(A+3E)$ ② $\frac{1}{3}(A-3E)$ ③ $\frac{1}{3}(A+3E)$

④ $-\frac{1}{9}(A-4E)$ ⑤ $-\frac{1}{9}(A+4E)$

50. 2006 교육청 (3점)

실수 a, b에 대하여 $|a-1|+|b-2|=0$일 때, 행렬$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$의 역행렬은?

① $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ② $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

③ $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ④ $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

⑤ $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

51. 2006 교육청 (3점)

자연수 a, b, c에 대하여 $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & c \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않고, $1+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{7}}}=\frac{178}{121}$을 만족시킬 때, A^2의 모든 성분의 합을 구하시오.

52. 2006 교육청 (3점)

이차방정식 $x^2-6x+2=0$의 두 실근 α, β에 대하여 행렬 A를 $A=\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$라 할 때, 행렬 A^2의 역행렬 $(A^2)^{-1}$의 모든 성분의 합을 구하시오.

53. 2006 교육청 (3점)

이차정사각행렬 A에 대하여 $A^4=O$일 때, 역행렬이 존재하는 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? (단, E는 단위행렬이고 O는 영행렬이다.)

ㄱ. $E-A$	ㄴ. $E+A$	ㄷ. $E+A^2$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ

③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

54. 2005 교육청 (3점)

이차정사각행렬 AB에 대하여
$AB=BA=E$, $A^2+B^2=O$가 성립할 때, 다음 중
$A-B$의 역행렬은?(단, E는 단위행렬이고, O는
영행렬이다.)

① $A+B$　② $-2(A-B)$
③ $-2(A+B)$　④ $\frac{1}{2}(A+B)$
⑤ $-\frac{1}{2}(A-B)$

55. 2005 평가원 (3점)

자연수 n에 대하여 행렬 $A=\begin{pmatrix} n+1 & 1 \\ n & 2 \end{pmatrix}$의 역행렬의 모든
성분의 합을 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은?

① -5　② -3
③ 0　④ 3
⑤ 5

56. 2005 교육청 (3점)

두 개의 주사위 A, B를 던져서 나오는 눈의 수를 각각
a, b라 한다. 행렬 $P=\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix}$에 대하여 역행렬 P^{-1}가
존재하도록 하는 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오.

57. 2005 평가원 (3점)

두 실수 x, y에 대하여 행렬 $A=\begin{pmatrix} x+y & -x \\ y & x+y \end{pmatrix}$의 역행렬이
존재하지 않고, 복소수 $z=x+y-3+xyi$의 제곱이 음의
실수일 때, xy의 값은?　(단, $i=\sqrt{-1}$이다.)

① -11　② -9
③ -7　④ -5
⑤ -3

58. 2010 교육청 (3점)

행렬로 나타낸 x, y에 대한 연립방정식
$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 6 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
가 $x=0, y=0$ 이외의 해를 갖도록 하는 모든 a값의 곱은?

① -20　② -18　③ -16
④ -14　⑤ -12

59. 2010 평가원 (3점)

x, y에 대한 연립방정식 $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$가 무수히 많은
해를 가질 때, 이 연립방정식의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 하자.
다음 조건을 만족시키는 순서쌍 (α, β)의 개수를 구하시오.
(단, k는 실수이다.)59.

(가) α, β는 모두 정수이다.
(나) $\alpha^2+\beta^2 \le 200$

60. 2006 평가원 (3점)

행렬 $A=\begin{pmatrix} 2-2^a & 1+2^{a-2} \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$이 역행렬을 갖지 않을 때, a의 값은?

① 2　　② 1
③ 0　　④ -1
⑤ -2

61. 2010 교육청 (3점)

이차정사각행렬 A, B, C가

$$AB^2C=AB=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix},\ CBA=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

을 만족할 때, 행렬 B의 모든 성분의 합은?

① 1　　② 2　　③ 3
④ 4　　⑤ 5

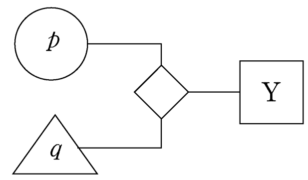
62. 2008 평가원 (3점)

행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 연립방정식 $A^n\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$의 해가 $x=\alpha$, $y=\beta$일 때, $\alpha+\beta=2$가 되게 하는 자연수 n의 값은?

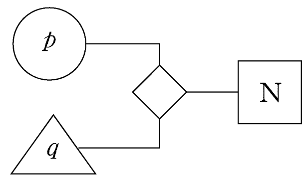
① 1　　② 2　　③ 3
④ 4　　⑤ 5

63. 2005 평가원 (3점)

두 실수 p, q에 대하여 $ad-bc=p$, $a+d=q$를 만족시키는 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$가 있다. $A+E$의 역행렬이 존재하면 [그림 1]과 같이 나타내고, $A+E$의 역행렬이 존재하지 않으면 [그림 2]와 같이 나타내기로 한다. (단, E는 단위행렬이다.)

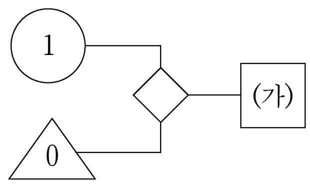


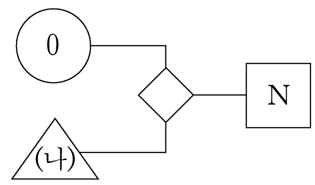
[그림1]



[그림2]

다음 그림에서 (가), (나)에 알맞은 것은?





① Y, -1　　② Y, 0
③ Y, 1　　④ N, -1
⑤ N, 1

64. 2005 교육청 (3점)

이차정사각행렬 A가 $A^2=A^5=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$를 만족할 때, A의 모든 성분의 합은?

① -3　　② -1　　③ 1
④ 3　　⑤ 5

65. 2008 교육청 (3점)

$(A-E)^2=O$을 만족하는 이차정사각행렬 A에 대하여 A의 역행렬을 $pA+qE$라 할 때, 두 실수 p, q의 합 $p+q$의 값은? (단, E는 단위행렬 O는 영행렬이다.)

① -2　② $-\frac{1}{2}$　③ 1
④ $\frac{5}{2}$　⑤ 4

66. 2008 교육청 (3점)

이차정사각행렬 A의 역행렬이 $A-E$일 때, A^3을 $pA+qE$ 꼴로 바르게 나타낸 것은? (단, p, q는 정수, E는 단위행렬이다.)

① $A-E$　② $A+E$　③ $A+2E$
④ $2A-E$　⑤ $2A+E$

67. 2008 교육청 (3점)

이차정사각행렬 A의 역행렬이 $A+2E$일 때, $A-E$의 역행렬은 $pA+qE$이다. 두 실수 p, q의 합 $p+q$의 값은? (단, E는 단위행렬이다.)

① -2　② -1
③ 0　④ 1
⑤ 2

68. 2004 평가원 (3점)

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이

$$A=(pA+qE)^{-1}$$

를 만족하도록 상수 p, q의 값을 정할 때, $p+q$의 값은?

① 3　② 1
③ 0　④ -1
⑤ -3

69. 2004 평가원 (3점)

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$에 대하여

$$A^{-1}PB=E$$

를 만족하는 행렬 P의 모든 성분의 합을 구하시오. (단, E는 단위행렬)

70. 2004 평가원 (3점)

두 이차정사각행렬 $A=\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$가

$APA^{-1}=A+A^{-1}$을 만족시킬 때, 실수 x의 값들의 합은?

(단, A^{-1}은 A의 역행렬이고 $x\neq 0$이다.)

① 5 ② 6
③ 7 ④ 8
⑤ 9

71. 2004 평가원 (3점)

다음은 이차정사각행렬 A가 $A^2+E=O$를 만족시킬 때, 임의의 실수 k에 대하여 $A+kE$의 역행렬이 존재함을 증명하는 과정이다. (단, O는 영행렬, E는 단위행렬)

> <증명>
> $A+kE$의 역행렬이 존재하는 것을 보이려면 $(A+kE)B=E$를 만족시키는 행렬 B가 존재하는 것을 보이면 된다.
> 임의의 실수 k에 대하여
> $$A^2+E=O$$
> $$(A+kE)(A-kE)+(\quad 가 \quad)E=O$$
> 위 식을 변형하면
> $$(\quad 나 \quad)(A+kE)(A-kE)=E$$
> $$\therefore (A+kE)^{-1}=(\quad 나 \quad)(A-kE)$$
> 따라서 행렬 A가 $A^2+E=O$를 만족시킬 때, 임의의 실수 k에 대하여 $A+kE$의 역행렬이 존재한다.

위의 증명과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 나열하면?

① $-(k^2+1)$, $-\dfrac{1}{k^2+1}$

② $-(k^2+1)$, $\dfrac{1}{k^2+1}$

③ 1, -1

④ k^2+1, $\dfrac{1}{k^2+1}$

⑤ k^2+1, $-\dfrac{1}{k^2+1}$

72. 2006 교육청 (3점)

이차정사각행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여

$AB=A+B=E$를 만족하는 행렬B가 존재할 때, $a+d$의 값은?

① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

73. 2010 교육청 (3점)

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$이 있다. 다음 중 실수 θ의 값에 관계없이 행렬 $X=\sin\theta A+\cos\theta E$의 역행렬과 항상 같은 행렬은?

① $\sin\theta A+\cos\theta E$ ② $\sin\theta A-\cos\theta E$
③ $-\sin\theta A+\cos\theta E$ ④ $\cos\theta A+\sin\theta E$
⑤ $\cos\theta A-\sin\theta E$

74. 2010 교육청 (3점)

실수 k와 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$에 대하여, 행렬 $A-kE$의 역행렬이 존재하지 않도록 하는 k의 값을 k_1, k_2라 할 때, $k_1^2+k_2^2$의 값은? (단, E는 단위행렬이다.)

① 37 ② 38 ③ 39
④ 40 ⑤ 41

75. 2010 교육청 (3점)

x, y에 대한 연립방정식

$$\begin{pmatrix} a & -3 \\ -3 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3x-y \\ 2y \end{pmatrix}$$

가 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 갖도록 하는 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구하시오.

76. 2010 평가원 (3점)

행렬 $\begin{pmatrix} t & t+1 \\ 2t & t^2+t \end{pmatrix}$가 역행렬을 갖지 않도록 하는 모든 t의 값의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

77. 2010 교육청 (3점)

다음 두 조건을 모두 만족시키는 실수 x, y 에 대하여 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$ 가 나타내는 도형의 길이의 최댓값은?

(가) $x^2+y^2 \le 9$
(나) 행렬 $\begin{pmatrix} m & y \\ 1 & x-3 \end{pmatrix}$은 역행렬이 존재하지 않는다.
(단, m은 실수이다.)

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

78. 2010 교육청 (3점)

행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & k \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$과 이차정사각행렬 B에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, O는 영행렬이다.)

[보 기]
ㄱ. $k=0$일 때, A^{-1}이 존재한다.
ㄴ. $k=1$일 때, $AB=O$이면 $B=O$이다.
ㄷ. $k=4$일 때, $AB=O$이면 영행렬이 아닌 행렬 B가 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

79. 2008 교육청 (3점)

이차정사각행렬 A가 $A^2-A-E=O$, $A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$를 만족한다. 연립방정식 $(A+E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 할 때, $\alpha+\beta$의 값을 구하시오. (단, E는 단위행렬, O는 영행렬이다.)

80. 2007 평가원 (3점)

x, y 에 대한 연립방정식 $\begin{pmatrix} a & 3-b \\ 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 가 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 갖도록 하는 실수 a, b 에 대하여, 좌표평면에서 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$ 를 중심으로 하고 x 축과 y 축에 동시에 접하는 원의 개수는?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

81. 2006 교육청 (3점)

연립방정식 $\begin{pmatrix} a & 8 \\ 4 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$이 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 가질 때, $a+2b$의 최솟값을 구하시오. (단, a, b는 양수이다.)

82. 2008 교육청 (3점)

연립방정식 $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$가 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 갖도록 하는 모든 실수 k의 값의 합은?

① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

83. 2008 교육청 (3점)

x, y에 대한 연립방정식 $\begin{pmatrix} |a| & |b| \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3x \\ 2y \end{pmatrix}$가 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 가질 때, 실수 a, b에 대하여 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 나타내는 도형의 둘레의 길이는?

① $4\sqrt{13}$ ② $4\sqrt{15}$ ③ $8\sqrt{13}$
④ $8\sqrt{15}$ ⑤ $8\sqrt{17}$

84. 2009 교육청 (3점)

x, y에 대한 연립방정식 $\begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ 3 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$이 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 갖도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은?

① -3 ② -2 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

85. 2009 평가원 (3점)

두 상수 a, b에 대하여 방정식 $\begin{pmatrix} 1 & a-2 \\ 2a & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 \\ b \end{pmatrix}$의 해가 무수히 많을 때, $a+b$의 값을 구하시오.

86. 2009 교육청 (3점)

x, y에 대한 연립일차방정식 $\begin{pmatrix} a+1 & 2-b \\ b+2 & a-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$이 $x=y=0$ 이외의 해를 갖도록 하는 실수 a, b에 대하여 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 나타내는 도형의 둘레의 길이는?

① 2π ② $2\sqrt{2}\pi$ ③ $2\sqrt{3}\pi$
④ 4π ⑤ $2\sqrt{5}\pi$

87. 2008 교육청 (3점)

연립방정식 $\begin{pmatrix} k-5 & 3 \\ 3 & k-5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \log x \\ \log y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \log x \\ \log y \end{pmatrix}$가 $x=y=1$ 이외의 해를 갖기 위한 k 값들의 합을 구하시오.

88. 2009 교육청 (3점)

x, y에 대한 연립일차방정식

$$\begin{pmatrix} 2^k+1 & 2^{k+3}-16 \\ 2 & 2^k-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

가 $x=y=0$ 이외의 해를 갖도록 하는 모든 실수 k의 값의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

89. 2008 교육청 (3점)

두 집합 $X=\left\{(x,\ y)\left|\begin{pmatrix} a^2+1 & 2a^2-3 \\ 2 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right.\right\}$,

$Y=\left\{(x,\ y)\left|\ y=-\dfrac{1}{x}\right.\right\}$에 대하여 $X\cap Y\neq\phi$일 때, 모든 상수 a의 값의 합은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

90. 2008 교육청 (3점)

행렬 $A=\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}$에 대응하는 직선을 $y=mx+n$으로 정의할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 자연수 k에 대하여 행렬 A^k에 대응하는 직선은 $y=m^kx+n^k$이다.

ㄴ. 역행렬이 존재하는 행렬 A에 대응하는 직선은 원점을 지나지 않는다.

ㄷ. 행렬 A와 그 역행렬 A^{-1}에 대응하는 직선은 서로 수직이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

91. 2007 평가원 (3점)

x, y 에 대한 연립방정식

$$\begin{pmatrix} a-1 & -2 \\ 8 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

가 $x=0, y=0$ 이외의 해를 갖도록 두 양수 a, b 의 값을 정할 때, $a+b$ 의 최솟값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

92. 2007 교육청 (3점)

연립일차방정식 $\begin{cases} ax+by=0 \\ (b-2)x-ay=0 \end{cases}$ 이 $x=0$, $y=0$이외의 해를 갖도록 하는 a, b에 대하여, $b-a$의 최댓값은?

① $-\sqrt{2}$ ② $1-\sqrt{2}$ ③ 1 ④ $\sqrt{2}$ ⑤ $1+\sqrt{2}$

93. 2007 평가원 (3점)

두 상수 a, b에 대하여 방정식 $\begin{pmatrix} a & -1 \\ b-1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$가 해를 갖지 않을 때, $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

94. 2007 교육청 (3점) 연

연립일차방정식 $\begin{cases} a(a+2)x-y=0 \\ (b+1)^2x+y=0 \end{cases}$이 $x=0$, $y=0$이외의 해를 가질 때, 점 (a, b)가 나타내는 도형의 길이는?

① π ② 2π ③ 4π
④ 6π ⑤ 8π

95. 2006 평가원 (3점)

실수 x, y에 대한 연립방정식

$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 4a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{10}{a} & \frac{8}{b} \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$가 $x=y=0$ 이외의 해를 가질 때, 두 양수 a, b의 곱 ab의 최댓값을 구하시오.

96. 2006 평가원 (3점)

이차정사각행렬 A가 $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$를 만족시킬 때, 연립일차방정식 $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$의 해는 $x=p, y=q$이다. $p+q$의 값은?

① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

97. 2006 교육청 (3점)

x, y에 대한 연립방정식

$\begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -b & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$가 $x=y=0$이외의 해를 가질 때, $8ab$의 최댓값을 구하시오. (단, $a>0$, $b>0$)

98. 2005 교육청 (3점)

$a^2+(b+1)^2=1$을 만족시키는 실수 a, b에 대하여 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2a+1 & 2b+1 \\ -b & a \end{pmatrix}$라 하자. 다음은 연립방정식 $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix}$가 $x=y=0$이외의 해를 가질 때, $a+b$의 값을 구하는 과정이다.

> $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
> $\therefore \begin{pmatrix} 2a & 2b+2 \\ -b-1 & a-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ …㉠
> ㉠이 $x=y=0$ 이외의 해를 가지므로 (가)이다.
> 이 때, (가)와 $a^2+(b+1)^2=1$을 연립하여 풀면 a, b의 값을 구할 수 있다.
> 따라서 $a+b=$ (나)이다.

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 내용을 바르게 짝지은 것은?

① $a(a-1)+(b+1)^2=0$, 0
② $a(a-1)+(b+1)^2=0$, 1
③ $a(a-1)+(b+1)^2=0$, 2
④ $a(a+1)+(b-1)^2=0$, 0
⑤ $a(a+1)+(b-1)^2=0$, 2

99. 2008 교육청 (3점)

두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?(단, E는 단위행렬이고, O는 영행렬이다.)

< 보 기 >

ㄱ. $A^2=E$이면 $A=E$또는 $A=-E$이다.
ㄴ. $A^2=A$일 때, $A\neq O$이면 $(A-E)$는 역행렬이 존재하지 않는다.
ㄷ. $A-B=E$이면 $A^2+B^2=2AB+E$이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

100. 2008 교육청 (3점)

이차정사각행렬 A, B에 대하여 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, O는 영행렬, E는 단위행렬이다.)

< 보 기 >

ㄱ. $A\neq O$이고 $AB=A$이면 $B=E$이다.
ㄴ. $A^2-A+E=O$이면 $A^3=-E$ 이다.
ㄷ. A^2의 역행렬이 존재하면 A^3의 역행렬도 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ
③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

101. 2010 교육청 (3점)

8. 이차정사각행렬 A가 $A^2+E=O$을 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이고, O는 영행렬이다.)101.

< 보 기 >

ㄱ. $A+A^{-1}=O$
ㄴ. A^3-E의 역행렬이 존재한다.
ㄷ. 모든 실수 k에 대하여 $A+kE$의 역행렬이 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

102. 2008 교육청 (3점)

이차정사각행렬 A에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이고 O는 영행렬이다.)

< 보 기 >

ㄱ. $A^2-4A-E=O$이면 A의 역행렬은 $A-4E$이다.
ㄴ. $A^2-A=O$이면 A의 역행렬은 존재하지 않는다.
ㄷ. A^3의 역행렬이 존재하지 않으면 A^2의 역행렬은 존재하지 않는다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

103. 2004 평가원 (3점)

이차정사각행렬 A에 대한 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, O는 영행렬, E는 단위행렬)

〈 보 기 〉

ㄱ. $(A+E)(A-E)=A^2-E$
ㄴ. $A(A+E)=O$이고 $A\neq -E$이면 $A=O$이다.
ㄷ. $A(A+E)=E$이면 A^2의 역행렬이 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ
③ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

104. 2004 평가원 (3점)

이차정사각행렬 A, B에 대하여 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, O는 영행렬, E는 단위행렬)

< 보 기 >

ㄱ. $(A+E)^2=A^2+A+E$이다.
ㄴ. $AB=BA$이면 $A^2B=BA^2$이다.
ㄷ. $AB=O$이고 $B\neq O$이면 A의 역행렬이 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ
③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

105. 2005 교육청 (3점)

이차정사각행렬 A, B에 대하여 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, O는 영행렬이다.)

< 보 기 >

ㄱ. $A^2 = O$이면 $A = O$이다.

ㄴ. A의 역행렬이 존재하면 A^2의 역행렬도 존재한다.

ㄷ. AB의 역행렬이 존재하지 않으면 A, B 중 적어도 하나는 역행렬이 존재하지 않는다.

① ㄱ ② ㄴ
③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

106. 2005 평가원 (3점)

이차정사각행렬 A, B가 역행렬을 가질 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.)

< 보 기 >

ㄱ. $(A+B)A^{-1}(A-B) = (A-B)A^{-1}(A+B)$

ㄴ. $AB^2 = E$이면 $B^{-1}A^{-1} = B$이다.

ㄷ. $AB^2 = B^2A$이면 $AB = BA$이다.

① ㄱ ② ㄷ
③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

107. 2005 교육청 (3점)

이차정사각행렬 A에 대하여 $A + A^{-1} = O$이 성립할 때, 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? (단,O 는 영행렬)

< 보 기 >

ㄱ. $A^{2005} + (A^{2005})^{-1} = O$

ㄴ. $A^{2006} + (A^{2006})^{-1} = O$

ㄷ. 자연수 n에 대하여 $A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{4n} = O$이다.

① ㄱ ② ㄴ
③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ
⑤ ㄴ, ㄷ

108. 2005 교육청 (3점)

행렬 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 A'을 $A' = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$로 정의할 때, 옳은 내용을 <보기>에서 모두 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $(A')' = A$

ㄴ. $(A + A')' = A + A'$

ㄷ. $ad - bc \neq 0$일 때, $(A^{-1})' = (A')^{-1}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ
③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

109. 2010 평가원 (3점)

두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 옳은 내용을 <보기>에서 모두 고른 것은? (단, E는 단위행렬, O는 영행렬이다.)

< 보 기 >

ㄱ. $A^2 = B^2$이면 $A = B$ 또는 $A = -B$이다.

ㄴ. $A^2 = O$이면 $E + A$의 역행렬이 존재한다.

ㄷ. $A \neq E$이고 $A^2 = A$이면 A의 역행렬이 존재하지 않는다.

① ㄴ ② ㄷ
③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

110. 2007 교육청 (3점)

자연수 n에 대하여 이차정사각행렬 A_1, A_2, A_3, $\cdots$, A_n을 각각 $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}$, $\cdots$, $\begin{pmatrix}1&0\\0&n\end{pmatrix}$이라 할 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?(단, X^{-1}는 X의 역행렬)

< 보 기 >

ㄱ. 자연수 m, n에 대하여 $A_m+A_n=A_{m+n}$이 성립한다.
ㄴ. 자연수 m, n에 대하여 $A_mA_n=A_{mn}$이 성립한다.
ㄷ. 자연수 n에 대하여 $A_n^{-1}=\frac{1}{n}A_n$이 성립한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ,ㄷ
④ ㄴ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

111. 2009 교육청 (4점)

두 이차정사각행렬 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $A(E+B)=E$ (나) $AB-BA=A+B$

다음 중 행렬 $(AB)^{20}$과 항상 같은 것은? (단, E는 단위행렬이다.)

① $-E$ ② $20E$ ③ $-A$
④ A ⑤ $20A$

112. 2006 평가원 (4점)

이차정사각행렬 A는 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가) $A^3+E=O$
(나) $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+A^{-1}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$일 때, $a+b$의 값은? (단, O는 영행렬이고 E는 단위행렬이다.)

① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

113. 2006 평가원 (4점)

두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 $AB-BA=\begin{pmatrix}p&q\\r&s\end{pmatrix}$라 할 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$이면 $ps-qr=0$이다.
ㄴ. 모든 이차정사각행렬 A, B에 대하여 $p+s=0$이다.
ㄷ. 행렬 $AB-BA$가 영행렬이면 B는 A의 역행렬이다.

① ㄱ ② ㄴ
③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

114. 2007 교육청 (4점)

이차정사각행렬 A, B에 대하여 $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$, $AB+E=O$가 성립할 때, A^2+B^2을 간단히 하면?(단, X^{-1}는 X의 역행렬, E는 단위행렬, O는 영행렬)

① A ② B ③ O
④ $-E$ ⑤ E

115. 2005 평가원 (4점)

좌표평면 위의 점 $P(x, y)$에 대하여 행렬 $A=\begin{pmatrix}x&y\\y&-x\end{pmatrix}$는 $A=100A^{-1}$을 만족시킨다. 점 P가 나타내는 도형의 둘레의 길이를 a라 할 때, $\frac{a}{\pi}$의 값을 구하시오. (단, A^{-1}은 A의 역행렬이다.)

116. 2009 교육청 (4점)

다음은 이차정사각행렬 A가 $A^3=A$를 만족할 때, $kE-A$의 역행렬이 존재하기 위한 실수 k의 조건과 그 역행렬을 구하는 과정이다. (단, O는 영행렬, E는 단위행렬이며 $A\neq O$, $A\neq\pm E$이다.)

$A^3=A$이므로

$-A=(-A)^3$

$\quad=\{(kE-A)-kE\}^3$

$\quad=(kE-A)^3-3k(kE-A)^2+3k^2(kE-A)-k^3E$

$-A=(kE-A)^3-3k(kE-A)^2+3k^2(kE-A)-k^3E$ ⋯ ①

이때, $kE-A$의 역행렬이 존재한다고 가정하고 그 역행렬을 B라고 하자.

①의 양변의 오른쪽에 B를 곱하면

$-AB=(kE-A)^3B-3k(kE-A)^2B+3k^2(kE-A)B-k^3B$

$\quad=A^2+kA+\boxed{(가)}$

$E=(kE-A)B=kB-AB$에서 $-AB=E-kB$이므로

$E-kB=A^2+kA+\boxed{(가)}$

$\therefore (k^3-k)B=A^2+kA+\boxed{(나)}$

따라서 $k\neq0$, $k\neq\pm1$일 때, $kE-A$의 역행렬 B가 존재하며

$B=\dfrac{1}{k^3-k}A^2+\dfrac{1}{k^2-1}A+\boxed{(다)}$이다.

이 과정에서 (가)~(다)에 알맞은 것을 바르게 짝지은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	k^2E-k^3B	$(k^2-1)E$	$\frac{1}{k}E$
②	k^2E-k^3B	$(-k^2-1)E$	$\frac{-k^2-1}{k^3-k}E$
③	k^2E-k^3B	$(-k^2-1)E$	$\frac{1}{k}E$
④	$-k^2E-k^3B$	$(-k^2-1)E$	$\frac{-k^2-1}{k^3-k}E$
⑤	$-k^2E-k^3B$	$(k^2-1)E$	$\frac{1}{k}E$

117. 2007 교육청 (4점)

역행렬이 존재하지 않는 행렬 $A=\begin{pmatrix}2a+1 & a-1\\ 2a-1 & a+1\end{pmatrix}$가

$E+A+A^2+\cdots+A^{2008}=pE+qA$를 만족할 때, $p+q$의 값은?

① 2009 ② 2^{1004} ③ 2^{2008}
④ $2009+2^{1004}$ ⑤ $2009+2^{2008}$

118. 2007 평가원 (4점)

행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 B_n을 다음과 같이 정의한다.

$B_n=A^n+(A^{-1})^n \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$

이때, 행렬 $B_1+B_2+B_3+\cdots+B_{100}$의 모든 성분의 합을 구하시오.

119. 2006 평가원 (4점)

이차정사각행렬 A는 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가) $A^3+E=O$

(나) $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+A^{-1}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$일 때, $a+b$의 값은? (단, O는 영행렬이고 E는 단위행렬이다.)

① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

120. 2005 교육청 (4점)

임의의 실수 k에 대하여, 행렬 $\begin{pmatrix} 2k & k-1 \\ b(k+1) & 2k+a-1 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하도록 하는 정수 a, b의 순서쌍 (a, b) 중에서 $a < b$를 만족시키는 순서쌍의 개수는?

① 3　② 4
③ 5　④ 6
⑤ 7

121. 2010 교육청 (4점)

이차정사각행렬 A는 다음 두 조건을 만족한다.

(가) $A^2-A+E=O$	(나) $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

연립방정식 $(A+E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라고 할 때, $\alpha+\beta$의 값은? (단, O는 영행렬이고, E는 단위행렬이다.)

4

① 0　② 1　③ 2
④ 3　⑤ 4

122. 2010 평가원 (4점)

x , y에 대한 연립방정식

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$

가 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 갖도록 하는 모든 실수 k의 값의 합은?

① -3　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 3

123. 2010 교육청 (4점)

x, y에 대한 연립방정식 $\begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ b-4 & 1-a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$이 $x=y=0$이외의 해를 갖도록 하는 두 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 최댓값은?

① $\frac{21}{4}$　② $\frac{11}{2}$　③ $\frac{23}{4}$
④ 6　⑤ $\frac{25}{4}$

124. 2010 교육청 (4점)

두 이차정사각행렬 A, B는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $A^2=2A+E$
(나) $AB=2E$
(다) 행렬 A의 모든 성분의 합은 7이다.

행렬 B의 모든 성분의 합은? (단, E는 단위행렬이다.)

① 6　② 7　③ 8
④ 9　⑤ 10

125. 2006 평가원 (4점)

세 양수 a, b, c에 대하여 행렬 A를 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$라 하자. 행렬 A의 역행렬이 존재하지 않을 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. a, b, c는 이 순서로 등비수열을 이룬다.
ㄴ. $A+E$의 역행렬이 존재한다. (단, E는 단위행렬이다.)
ㄷ. $A^2=A$이면 $a+c=1$이다.

① ㄴ　② ㄷ
③ ㄱ, ㄴ　④ ㄱ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

126. 2006 평가원 (4점)

수직선 위의 두 점 A(a), B(b)에 대하여 선분 AB를 2 : 3으로 내분하는 점을 P(p), 3 : 2로 내분하는 점을 Q(q)라 하자. 이차정사각행렬 M을 이용하여 $M\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$로 나타낼 때, 행렬 M^{-1}의 모든 성분의 곱을 구하시오.

127. 2004 평가원 (4점)

임의의 실수 x에 대하여 행렬 $A=\begin{pmatrix} x+2a & -4 \\ 3 & x+a \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하도록 하는 정수 a의 개수를 구하시오.

128. 2006 교육청 (4점)

5 이하의 세 자연수 x, y, z에 대하여 두 행렬 A, B를

$A=\begin{pmatrix} x & y \\ 1 & z \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} \log x & \log y \\ 0 & \log z \end{pmatrix}$라 하자.

A의 역행렬 A^{-1}가 존재할 때, $A^{-1}BA=B$를 만족시키는 행렬 A의 개수는?

① 1 ② 2
③ 4 ④ 8
⑤ 16

129. 2009 평가원 (4점)

5보다 크고 50보다 작은 두 자연수 a, b에 대하여 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a^2 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않을 때, $a+b$의 값은 ?

① 28 ② 32 ③ 36
④ 40 ⑤ 44

130. 2004 평가원 (4점)

행렬 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$에 대하여 방정식 $AX=kX$가 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 이외의 해를 가지도록 하는 상수 k의 값은 a, b이다. 이 때, a^3+b^3의 값을 구하시오.

131. 2004 평가원 (4점)

철수가 운영하는 A, B 두 매장의 2002년 총매출액의 합은 70억 원이었다. 2003년은 2002년보다 B 매장의 매출액이 10% 감소하였으나 두 매장의 총매출액은 2억 원이 증가하였다. 2002년 A, B 두 매장의 매출액을 각각 x, y(억 원)이라고 하면

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0.2 & -0.1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 70 \\ 2 \end{pmatrix}$$

이다. 이때 2003년의 A 매장의 매출액은 □억 원이다. □ 안에 알맞은 수를 구하시오.

132. 2007 교육청 (4점)

실수 a, b에 대하여 행렬

$\begin{pmatrix} x^2+2x+a^2+b^2 & x+1 \\ x-1 & 2 \end{pmatrix}$

이 역행렬을 갖지 않도록 하는 실수 x가 존재할 때, 점 (a, b)가 그리는 영역의 넓이는?

① $\frac{1}{2}\pi$ ② π ③ $\frac{3}{2}\pi$
④ 2π ⑤ $\frac{5}{2}\pi$

133. 2007 평가원 (4점)

행렬로 나타낸 x, y에 관한 연립일차방정식 $\begin{pmatrix} k-6 & -2 \\ 2 & k-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$의 해가 무수히 많을 때, 상수 k의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

134. 2009 교육청 (4점)

x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} k^2x+(1-2k)y=1 \\ (k+6)x+(k-8)y=1 \end{cases}$이 해를 갖지 않도록 하는 모든 실수 k의 값의 합은?

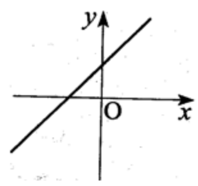
① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

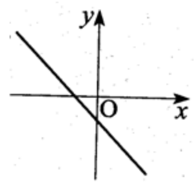
135. 2005 교육청 (4점)

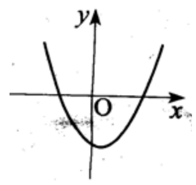
실수 x, y에 대한 연립일차방정식 $\begin{cases} ax+by=t \\ cx+dy=-t^2 \end{cases}$ 에 대하여 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$의 역행렬이 $\begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$일 때, $x+y$의 최댓값을 구하시오. (단, t는 실수)

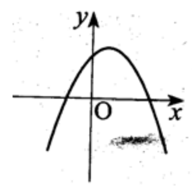
136. 2005 교육청 (4점)

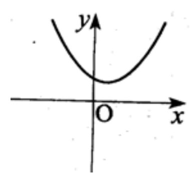
모든 실수 x에 대하여 p, q에 대한 연립방정식 $\begin{pmatrix} 2 & f(x) \\ -1 & f(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$가 단 한쌍의 해를 가질 때, 다음 중 함수 $y=f(x)$의 그래프가 될 수 있는 것은?

①


②


③


④


⑤


137. 2005 교육청 (4점)

두 양수 a, b에 대하여 x, y에 대한 연립방정식 $\begin{pmatrix} a+1 & 8 \\ 2 & b+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$가 $x=y=0$ 이외의 해를 갖는다고 할 때, $a+b$의 최솟값을 구하시오.

138. 2009 교육청 (4점)

두 정수 a, b가 다음 조건을 만족시킬 때, 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오.

(가) $b \leq a+7$
(나) x, y에 대한 연립방정식 $\begin{pmatrix} a+1 & b \\ 1 & a+3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$이 해를 갖지 않는다.

139. 2006 교육청 (4점)

두 약국 P, Q 에서 판매하는 혈압약과 관절염약의 1갑의 가격은 <표1>과 같고, 갑, 을 두 환자가 매월 구입해야 하는 혈압약과 관절염약의 수량은 <표2>와 같다.

(단위 원)

	혈압약	관절염약
P 약국	30,000	10,000
Q 약국	20,000	20,000

<표1>

(단위 갑)

	갑	을
혈압약	1	2
관절염약	1	3

<표2>

갑이 x 개월, 을이 y 개월 동안 혈압약과 관절염약을 P 약국에서 구입하면 갑과 을의 약값의 합은 600,000 원이고, Q 약국에서 구입하면 갑과 을의 약값의 합은 640,000 원이다. 행렬을 이용하여 x, y 의 값을 구하는 과정에서 다음 등식을 얻었다.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} a & -9 \\ -4 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 60 \\ 64 \end{pmatrix}$$

두 상수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값은?

① 10　② 11　③ 12　④ 13　⑤ 14

140. 2010 교육청 (4점)

좌표평면 위에서 부등식 $x^2+y^2<1$을 만족하는 영역에 존재하는 임의의 서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$에 대하여 행렬 $M=\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$라 하자. 행렬 $M+kE$의 역행렬이 항상 존재하기 위한 양수 k의 최솟값은? (단, E는 단위행렬이다.)

4

① 1　② $\sqrt{2}$　③ 2　④ $2\sqrt{2}$　⑤ 4

141. 2010 교육청 (4점)

이차정사각행렬 A, B에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, O는 영행렬이고, E는 단위행렬이다.)

[보 기]

ㄱ. $A^2=E$, $B^2=E$이면 $(ABA)^2=E$이다.

ㄴ. $A^2=O$, $B^2=O$이면 $AB=O$이다.

ㄷ. $(A+E)^2=O$, $AB=A$이면 $B=E$이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

142. 2010 교육청 (4점)

두 이차정사각행렬 A, B가 $A+BA=2E$, $AB+BA=-A+B$를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.)

[보 기]

ㄱ. A^{-1}이 존재한다.

ㄴ. $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

ㄷ. $A+B=4E$

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

143. 2010 교육청 (4점)

영행렬이 아닌 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?
(단, O는 영행렬이고, E는 단위행렬이다.)

4

[보 기]

ㄱ. $AB=O$이면 $A^2B^2=O$
ㄴ. $A+B=E$이면 $AB=BA$
ㄷ. $A^2=O$이면 행렬 $A+E$의 역행렬이 존재하지 않는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

144. 2010 평가원 (4점)

이차정사각행렬 A, B, P가

$$AP=P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},\quad BP=P\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

를 만족시킨다. P가 역행렬을 가질 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $a=c$이고, $b=d$이면 $A=B$이다.
ㄴ. $AB=BA$
ㄷ. $A-B$가 역행렬을 가지면 $a\neq c$이고, $b\neq d$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

145. 2010 평가원 (4점)

이차정사각행렬 A, B, C에 대하여 $ABC=E$이고 $ACB=E$일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?
(단, E는 단위행렬이다.)
[4점][2010년 9월 평가원]

[보 기]

ㄱ. $A=E$ 이면 $B=E$ 이다.
ㄴ. $AB=BA$
ㄷ. 모든 자연수 n에 대하여 $A^nB^nC^n=E$ 이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

146. 2007 평가원 (4점)

두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 $AB=BA$가 성립하기 위한 충분조건인 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.)

< 보 기 >

ㄱ. $A+B=2E$
ㄴ. $A^2B=BA^2$
ㄷ. $A^2B=A+E$

① ㄱ ② ㄱ,ㄴ ③ ㄱ,ㄷ
④ ㄴ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

147. 2009 교육청 (4점)

이차정사각행렬 M에 대하여 $d(M)$을

$M^n=E$인 자연수 n이 존재하면 n의 최솟값,

$M^n=E$인 자연수 n이 존재하지 않으면 0

이라 하자. 예를 들어 $P=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$이면 $P^2=E$이므로 $d(P)=2$, $Q=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$이면 $Q^n=E$인 자연수 n이 존재하지 않으므로 $d(Q)=0$이다. 이때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, A, B는 이차정사각행렬이고, E는 단위행렬이다.)

< 보 기 >

ㄱ. $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}$이면 $d(A)=3$이다.
ㄴ. A의 역행렬이 존재하면 $d(A)\neq 0$이다.
ㄷ. $AB=BA$이고 $d(A)=2$, $d(B)=3$이면 $d(AB)=6$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

148. 2006 교육청 (4점)

두행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}$에 대하여

$S=\{X \ X=A^n, \ n\text{은 자연수}\}$

$T=\{Y \ Y=B^n, \ n\text{은 자연수}\}$

라 하자 <보기>에서 옳은 것을 모두 고르면?

< 보 기 >

ㄱ. $X\in S$이면 $X^2\in S$이다.
ㄴ. $X\in S$, $Y\in T$이면 . $XY\in S$이다
ㄷ. $Y\in T$이면 Y는 항상 역행렬을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ
③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

149. 2006 교육청 (4점)

이차 정사각행렬 A, B에 대하여 $AB=BA$일때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고르면? (단, E는 단위행렬, O는 영행렬이다.)

< 보 기 >

ㄱ. $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$
ㄴ. $AB+BA=O$이면 $A=O$또는 $B=O$이다.
ㄷ. $A+2BA=AB+E$이면 A의 역행열은 $B+E$이다.

① ㄱ ② ㄴ
③ ㄱ,ㄷ ④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

150. 2007 평가원 (4점)

두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 $A^2=A$이고 $B=-A$일 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $A^3=A$
ㄴ. $B^2=-B$
ㄷ. $A+3E$는 역행렬을 갖는다. (단, E는 단위행렬이다.)

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ,ㄴ
④ ㄴ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

151. 2009 교육청 (4점)

집합 $S=\{X \mid X^2=O, \ X\text{는 이차정사각행렬}\}$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $A\in S$이면 A의 역행렬이 존재하지 않는다.
ㄴ. 이차정사각행렬 A의 역행렬이 존재하지 않으면 $A\in S$이다.
ㄷ. $A\in S$, $B\in S$이면 $AB\in S$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

152. 2009 교육청 (4점)

이차정사각행렬 A, B에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $ABAB=A^2B^2$이면 $AB=BA$이다.
ㄴ. A의 역행렬이 존재하지 않으면 $A^2=kA$를 만족하는 실수k가 존재한다.
ㄷ. AB의 역행렬이 존재하지 않으면 A, B중 적어도 하나는 역행렬이 존재하지 않는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ,ㄷ
④ ㄴ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

153. 2007 평가원 (4점)

모든 성분이 양수인 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $L(A)$를 다음과 같이 정의한다.

$L(A)=\begin{pmatrix} \log_2 a & \log_2 b \\ \log_2 c & \log_2 d \end{pmatrix}$

<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$일 때, $L(8A)=3A$이다.
ㄴ. $L(A)=E$를 만족시키는 행렬 A는 역행렬을 갖는다. (단, E는 단위행렬이다.)
ㄷ. $L(A^2)=2L(A)$를 만족시키는 행렬 A가 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ,ㄴ
④ ㄴ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

154. 2009 교육청 (4점)

기울기가 0이 아닌 두 직선 $y=ax+b$, $y=cx+d$에 대하여 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라고 정의할 때, <보기>에서 항상 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 두 직선이 만나지 않으면 행렬 A의 역행렬이 존재한다.
ㄴ. 두 직선이 일치하면 행렬 A의 역행렬이 존재하지 않는다.
ㄷ. 두 직선이 x축 위에서 만나면 행렬 A의 역행렬이 존재하지 않는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

155. 2010 교육청 (4점)

역행렬을 가지는 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.)

[보 기]

ㄱ. $ABA=E$이면 $AB=BA$이다.
ㄴ. $A^{-1}+B^{-1}=E$이면 $AB=BA$이다.
ㄷ. $AB=BA$이면 $A^{-1}(B+B^{-1})A=B+B^{-1}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

156. 2004 수능 (2점)

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$에 대하여 $AX=B$를 만족시키는 행렬 X의 모든 성분의 합은?

① 2 ② 1 ③ 0
④ -1 ⑤ -2

157. 2005 수능 (2점)

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$에 대하여 $2A+X=AB$를 만족시키는 행렬 X는?

① $\begin{pmatrix}1&5\\3&-1\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}2&4\\-1&2\end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix}2&5\\7&0\end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix}2&7\\4&5\end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix}4&6\\1&2\end{pmatrix}$

158. 2006 수능 (2점)

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&1\\3&3\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $(A+B)^{-1}$의 모든 성분의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

159. 2007 수능 (3점)

행렬 $A=\begin{pmatrix}2n&-7\\-1&n\end{pmatrix}$의 역행렬 A^{-1}의 성분이 모두 자연수가 되는 자연수 n의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

160. 2006 수능 (3점)

$(A+E)^2=A$를 만족시키는 이차정사각행렬 A와 행렬 $\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$에 대하여 $(A+A^{-1})\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-7\end{pmatrix}$
이 성립할 때, p^2+q^2의 값을 구하시오.
(단, E는 단위행렬이다.)

161. 2009 수능 (3점)

x, y에 대한 연립방정식

$$\begin{pmatrix}5-\log_2 a&2\\3&\log_2 a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

이 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 갖도록 하는 모든 a값의 합은?

① 8 ② 10 ③ 12
④ 16 ⑤ 20

162. 2004 수능 (3점)

이차방정식 $x^2-4x-1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, 두 행렬의 곱 $\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\0&\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta&\alpha\\0&\beta\end{pmatrix}$의 모든 성분의 합을 구하시오.

163. 2007 수능 (3점)

단위행렬이 아닌 두 이차정사각행렬 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) A, B는 모두 역행렬을 가진다.
(나) $BAB=E$, $ABA=A^{-1}$

$A^n=E$가 성립하는 자연수 n의 최솟값은? (단, E는 단위행렬이다.)

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

164. 2005 수능 (3점)

다음 세 조건을 만족시키는 영행렬이 아닌 모든 이차정사각행렬 A, B에 대하여 B^3+2BA^3과 항상 같은 행렬은?(단, E는 단위행렬이다.)

(가) $AB=BA$
(나) $(E-B)^2=E-B$
(다) $AB=-B$

① $2A$ ② $-A$ ③ E
④ $2B$ ⑤ $-B$

165. 2006 수능 (3점)

두 이차정사각행렬 A, B가 $A^2=E$, $B^2=B$를 만족시킬 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?(단, E는 단위행렬이다.)

[보 기]

ㄱ. 행렬 B가 역행렬을 가지면 $B=E$이다.
ㄴ. $(E-A)^5=2^4(E-A)$
ㄷ. $(E-ABA)^2=E-ABA$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

166. 2004 수능 (3점)

다음은 지난해에 어느 회사에서 생산한 두 제품 ㉮와 ㉯의제품 한 개당 제조원가와 판매 가격 및 그 해 판매량을 나타낸 표이다.

제품명 \ 가격	㉮	㉯
제조원가	a_{11}	a_{12}
판매 가격	a_{21}	a_{22}

판매량 \ 제품명	상반기	하반기
㉮	b_{11}	b_{12}
㉯	b_{21}	b_{22}

위의 표를 각각 행렬 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$와 $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$로 나타내고, 이 두 행렬의 곱 AB를 $AB=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라 하자.

제품 한 개당 판매 이익금을 판매 가격에서 제조원가를 뺀 값으로 정의할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $a+b$는 지난해 상반기에 판매된 제품의 제조원가 총액이다.
ㄴ. $c+d$는 지난해 1년 동안에 판매된 제품의 판매 총액이다.
ㄷ. $d-b$는 지난해 하반기에 판매된 제품의 판매 이익금 총액이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

167. 2008 수능 (4점)

이차정사각행렬 A는 모든 성분의 합이 0이고

$$A^2+A^3=-3A-3E$$

를 만족시킨다. 행렬 A^4+A^5의 모든 성분의 합을 구하시오. (단, E는 단위행렬이다.)

168. 2009 수능 (4점)

이차정사각행렬 A와 행렬 $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여

$(BA)^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$일 때, 행렬 $(AB)^2$은?

① $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

169. 2004 수능 (2점)

이차정사각행렬 A, B에 대하여 항상 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? (단, E는 단위행렬이고 O는 영행렬이다.)

[보 기]

ㄱ. $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$
ㄴ. $A^2+A-2E=O$이면 A는 역행렬을 갖는다.
ㄷ. $A\neq O$이고 $A^2=A$이면 $A=E$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

170. 2007 수능 (4점)

0이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 두 이차정사각행렬 A, B가 $AB=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $a=b$이면 A의 역행렬 A^{-1}이 존재한다.
ㄴ. $a=b$이면 $AB=BA$이다.
ㄷ. $a\neq b$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$이면 $AB=BA$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

171. 2008 수능 (4점)

집합 U를

$$U=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \ a, b, c, d\text{는 1이 아닌 양수}\right\}$$

라 하자. U의 부분집합 S를

$$S=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \log_a d=\log_b c,\ a\neq b,\ bc\neq 1\right\}$$

이라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $A=\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$이면 $A\in S$이다.
ㄴ. $A\in U$이고 A가 역행렬을 가지면 $A\in S$이다.
ㄷ. $A\in S$이면 A는 역행렬을 가진다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

172. 2009 수능 (4점)

이차정사각행렬 A와 B에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, O는 영행렬이고, E는 단위행렬이다.)

[보 기]

ㄱ. $(A+B)^2=(A-B)^2$이면 $AB=O$이다.

ㄴ. $A^2=E,\ B^2=B$이면 $(ABA)^2=ABA$이다.

ㄷ. $A(A+E)=E,\ AB=-E$이면 $B^2=A+2E$이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

173. 2006 수능 (4점)

이차정사각행렬 $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여

$$D(X)=ad-bc$$

라 하자. 이차정사각행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & p \end{pmatrix}$에 대하여

$$D(A^2)=D(5A)$$

를 만족시키는 모든 상수 p의 합을 구하시오.

174. 2005 수능 (4점)

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 집합 $S,\ T$를

$$S=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ n\text{은 자연수}\right\}$$

$$T=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=B^n\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ n\text{은 자연수}\right\}$$

라 하자. <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\in S$이면 $\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}\in T$이다.

ㄴ. $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\in S,\ \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\in S$이면 $\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}\in S$이다.

ㄷ. $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\in S,\ \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}\in T$이면

행렬 $\begin{pmatrix} a & p \\ b & q \end{pmatrix}$는 역행렬을 갖는다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

175. 2011 수능 (4점)

1×2행렬을 원소로 갖는 집합 S와 2×1행렬을 원소로 갖는 집합 T가 다음과 같다.

$$S=\{(a\ b)\mid a+b\neq0\},\quad T=\left\{\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \middle| pq\neq0\right\}$$

집합 S의 원소 A에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? 175.

4

[보 기]

ㄱ.집합 T의 원소 P에 대하여 PA는 역행렬을 갖지 않는다.

ㄴ.집합 S의 원소 B와 집합 T의 원소 P에 대하여 $PA=PB$ 이면 $A=B$이다.

ㄷ. 집합 T의 원소 중에는 $PA\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$을 만족하는 P가 있다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ,ㄴ
④ ㄴ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

1. 2007 교육청 (2점)

등비수열 $\{a_n\}$에서 $a_2+a_4=810$, $a_5+a_7=30$일 때, a_{10}의 값은?

① $\frac{1}{9}$　② $\frac{1}{3}$　③ 1
④ 3　⑤ 9

2. 2006 교육청 (2점)

각 항이 실수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1+a_2=\frac{5}{8}$, $a_1a_2a_3=\frac{1}{8}$일 때, 첫째항의 값은?

① $\frac{1}{16}$　② $\frac{1}{8}$　③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{2}$　⑤ 1

3. 2005 교육청 (2점)

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 \cdot a_3 \cdot a_8 = 64$ 일 때, a_4 의 값은?

① 2　② 4　③ 8
④ 16　⑤ 32

4. 2005 교육청 (2점)

세 수 1, x, 5는 이 순서대로 등차수열을 이루고, 세 수 1, y, 5는 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, x^2+y^2 의 값을 구하시오.

5. 2005 교육청 (3점)

3		7
	11	

표의 빈 칸에 6개의 자연수를 한 칸에 하나씩 써넣어 가로, 세로, 대각선 방향으로 각각 등차수열을 이루도록 할 때, 빈 칸에 써넣을 6개의 수의 합을 구하시오.

6. 2010 평가원 (3점)

등비수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 a_{10}=9$일 때, 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 10항까지의 곱은?6.

① 3^{10}　② 3^{11}　③ 3^{12}
④ 3^{13}　⑤ 3^{14}

7. 2005 교육청 (3점)

직각삼각형의 세 변의 길이 a, b, c가 공차가 d인 등차수열을 이룬다고 한다. 이때, 이 직각삼각형의 넓이를 d의 식으로 나타내면?

① $4d^2$ ② $6d^2$ ③ $8d^2$
④ $10d^2$ ⑤ $12d^2$

8. 2007 평가원 (3점)

공차가 $d\,(d \neq 0)$인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{T_n\}$을

$T_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1}a_n \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

으로 정의할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

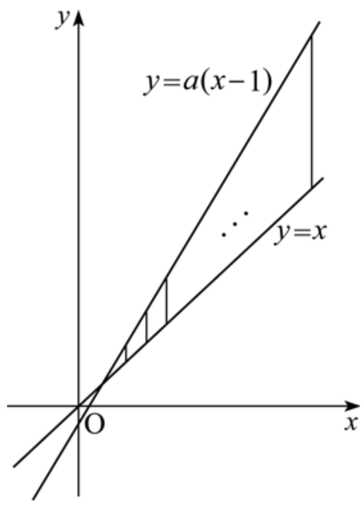
< 보 기 >

ㄱ. $T_4 = 2d$
ㄴ. $T_5 = a_3$
ㄷ. 수열 $\{T_{2n}\}$은 등차수열이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

9. 2007 평가원 (3점)

그림과 같이 두 직선 $y = x$, $y = a(x-1)$ $(a > 1)$의 교점에서 오른쪽 방향으로 y축에 평행한 14개의 선분을 같은 간격으로 그었다.



이들 중 가장 짧은 선분의 길이는 3이고, 가장 긴 선분의 길이는 42일 때, 14개의 선분의 길이의 합을 구하시오.(단, 각 선분의 양 끝점은 두 직선 위에 있다.)

10. 2008 교육청 (3점)

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$a_1 = 1$, $a_1 - a_2 + a_3 + a_4 - a_5 + a_6 = 17$일 때, $a_8 + a_9$의 값을 구하시오.

11. 2009 교육청 (3점)

등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_3=40$, $a_8=30$일 때, $|a_2+a_4+\cdots+a_{2n}|$이 최소가 되는 자연수 n의 값을 구하시오.

12. 2008 교육청 (3점)

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2=-1$, $a_1+2a_3=0$일 때, a_{10}의 값은?

① 17 ② 19 ③ 21
④ 23 ⑤ 25

13. 2005 교육청 (3점)

공차가 $d_1\,(d_1 \neq 0)$인 등차수열
a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, …에 대하여 두 수열
a_1+a_2, a_3+a_4, a_5+a_6, a_7+a_8…,
$a_1+a_2+a_3$, $a_4+a_5+a_6$, $a_7+a_8+a_9$, …의 공차를 각각
d_2, d_3라고 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $2d_2=3d_3$ ② $3d_2=2d_3$ ③ $5d_2=2d_3$
④ $7d_2=3d_3$ ⑤ $9d_2=4d_3$

14. 2005 교육청 5(3점)

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_6+a_{11}+a_{15}+a_{20}=32$일 때, $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{25}$의 합을 구하시오.

15. 2007 교육청 (3점)

등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차가 각각 -2, 3일 때, 등차수열 $\{3a_n+5b_n\}$의 공차는?

① 4 ② 6 ③ 8
④ 9 ⑤ 15

16. 2006 평가원 (3점)

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1+a_3=6$, $a_4-a_2=6$이 성립할 때, a_6의 값을 구하시오.

17. 2006 교육청 (3점)

첫째항이 -10인 등차수열$\{a_n\}$에서 첫째항부터 제 7 항까지의 합과 제 7 항의 값이 같을 때, 첫째항부터 제 10 항까지의 합을 구하시오.

18. 2004 평가원 (3점)

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = 2n^2 + 3n$ 일 때, a_{10} 은?

① 11　　② 21　　③ 31
④ 41　　⑤ 51

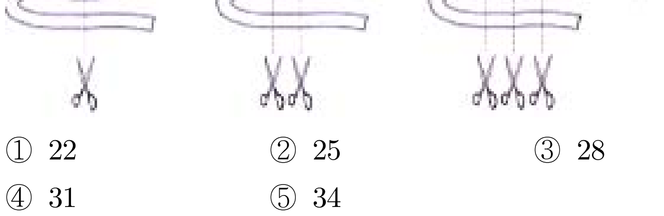
19. 2006 교육청 (3점)

등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $(a_1 + a_2) : (a_3 + a_4) = 1 : 2$ 가 성립할 때, $a_1 : a_4$ 는? (단, $a_1 \neq 0$이다.)

① 1 : 2　　② 1 : 3
③ 2 : 3　　④ 2 : 5
⑤ 3 : 5

20. 2004 교육청 (3점)

다음 그림과 같이 2번 접어 세 겹으로 만든 리본을 가위로 평행하게 1번, 2번, 3번, …자르면 리본은 각각 몇 개의 조각으로 나뉘어진다. 이와 같이 2번 접어 세 겹으로 만든 리본을 가위로 평행하게 10번 자를 때, 나뉘어진 리본의 최대 개수는?



① 22　　② 25　　③ 28
④ 31　　⑤ 34

21. 2006 평가원 (3점)

첫째항이 400, 공차가 -5인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_3}} + \frac{1}{\sqrt{a_3}+\sqrt{a_5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{a_{59}}+\sqrt{a_{61}}}$$ 의 값은?

① 1　　② 3　　③ 5
④ 7　　⑤ 9

22. 2007 교육청 (3점)

등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_3 = -2$, $a_9 = 46$일 때, $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_{10}|$의 값을 구하시오.

23. 2010 교육청 (3점)

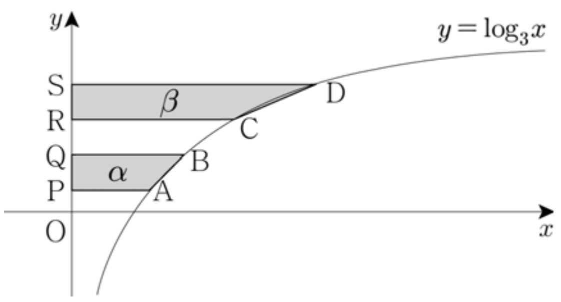
등차수열 $\{a_n\}$이 $a_3 = 2$, $a_6 = 17$을 만족시킬 때, a_8의 값을 구하시오.

24. 2010 평가원 (3점)

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2+a_4+a_6=30$일 때, a_1+a_7의 값을 구하시오.[24.]

25. 2009 교육청 (3점)

그림과 같이 함수 $y=\log_3 x$의 그래프 위의 서로 다른 네 점 A, B, C, D에서 y축에 내린 수선의 발을 각각 P, Q, R, S라 하자. 두 사각형 ABQP, CDSR의 넓이를 각각 α, β라 하고, 네 점 P, Q, R, S의 y좌표를 각각 p, q, r, s라 하자. p, q, r, s가 이 순서대로 등차수열을 이루고, $\beta=3\alpha$일 때, $s-p$의 값은?



① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

26. 2009 교육청 (3점)

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1a_6=0$, $a_2a_5=36$일 때, a_3a_4의 값은?

① 46 ② 48 ③ 50
④ 52 ⑤ 54

27. 2005 평가원 (3점)

첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$에서 $\sum_{n=1}^{10} a_n=200$일 때, a_{11}의 값을 구하시오.

28. 2006 평가원 (3점)

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=n^2-3n$일 때, a_{100}의 값을 구하시오.

29. 2006 교육청 (3점)

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 다항식 $2x^2+x+1$을 $x-n$으로 나눈 나머지라 할 때, a_5의 값을 구하시오.

30. 2008 교육청 (3점)

두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$a_1+b_1=45,\quad \sum_{k=1}^{10} a_k+\sum_{k=1}^{10} b_k=500$$

일 때, $a_{10}+b_{10}$ 의 값을 구하시오.

31. 2008 교육청 (3점)

수학자 드 므와브르에 대하여 다음과 같은 일화가 전해지고 있다.

> 드 므와브르는 자신의 수면 시간이 매일 15분씩 길어진다는 것을 깨닫고, 수면 시간이 24시간이 되는 날을 계산하여 그날에 자신이 죽을 것이라고 예측하였다. 그런데, 놀랍게도 그날에 수면하는 상태에서 생을 마쳤다.

드 므와브르가 매일 밤 12시에 잠든다고 가정할 때, 처음 이 사실을 알게 된 날의 수면 시간이 14시간이었다면 그날부터 생을 마칠 때까지 깨어있는 시간의 합은?

① 197　② 205　③ 214　④ 224　⑤ 235

32. 2009 교육청 (3점)

첫째항이 1인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2+a_4=2(a_5-4)$일 때, 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합을 구하시오.

33. 2008 교육청 (3점)

첫째항이 $a\ (a\neq 0)$이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$이 임의의 자연수 m, n에 대하여 $a_m+a_n=a_{m+n}$을 만족시킨다. $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값을 나타내는 것은?

① $25a$　② $35a$　③ $45a$　④ $55a$　⑤ $65a$

34. 2010 교육청 (3점)

등차수열 $\{a_n\}$과 등비수열 $\{b_n\}$은 다음 조건을 만족한다.

> (가) $a_1=2,\ b_1=2$
> (나) $a_2=b_2,\ a_4=b_4$

a_5+b_5의 값을 구하시오. (단, 수열 $\{b_n\}$의 공비는 1이 아니다.)

35. 2010 교육청 (3점)

다음과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$이 있다.

$$a_1=1,\quad \frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

a_{20}의 값은?

① $\frac{2}{21}$　② $\frac{4}{21}$　③ $\frac{5}{21}$　④ $\frac{2}{7}$　⑤ $\frac{3}{7}$

36. 2010 평가원 (3점)

1과 2사이에 n개의 수를 넣어 만든 등차수열

$1,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ 2$

의 합이 24일 때, n의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

37. 2010 평가원 (3점)

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_3=5,\ a_6-a_4=4$일 때, a_{10}의 값을 구하시오.

38. 2010 교육청 (3점)

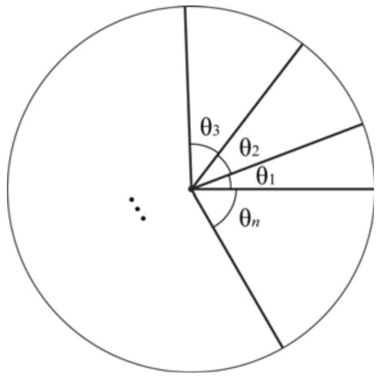
첫째항과 공차가 같은 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $S_n=ka_n$을 만족하는 k가 두 자리 자연수가 되게 하는 n의 최댓값은? (단, $a_1\neq 0$)

3

① 191 ② 193 ③ 195
④ 197 ⑤ 199

39. 2007 교육청 (3점)

넓이가 A인 원을 중심각이 $\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3,\ \cdots,\ \theta_n$인 n개의 부채꼴로 나누고 중심각이 $\theta_k(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$인 부채꼴의 넓이를 A_k이라 하자. 수열 $\{\theta_n\}$이 등차수열을 이루고, $\sum_{k=1}^{n}\theta_k=2\pi$이다. $A_1+A_n=\frac{1}{5}A$일 때, n의 값은?



① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

40. 2009 교육청 (3점)

공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$은 $b_n=a_{3n-2}+2a_{3n-1}+a_{3n}$이다. $\sum_{k=1}^{n}a_k=A_n,\ \sum_{k=1}^{n}b_k=B_n$일 때 $\lim_{n\to\infty}\frac{B_n}{A_n}$의 값을 구하시오.

41. 2010 교육청 (3점)

수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이

$$S_n = 5(2^n - 1)\ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

을 만족시킬 때, a_7의 값은?

① 315 ② 320 ③ 325
④ 330 ⑤ 335

42. 2010 평가원 (3점)

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2a_4 = 16$, $a_3a_5 = 64$일 때, a_7의 값을 구하시오.

43. 2010 교육청 (3점)

$(x+a)^{10}$의 전개식에서 세 항 x, x^2, x^4의 계수가 이 순서로 등비수열을 이룰 때, 상수 a의 값은? (단, $a \neq 0$)

① $\frac{28}{27}$ ② $\frac{27}{26}$ ③ $\frac{26}{25}$
④ $\frac{25}{24}$ ⑤ $\frac{24}{23}$

44. 2007 평가원(3점)

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_7 = 12$, $\frac{a_6 a_{10}}{a_5} = 36$

이 성립할 때, a_{15}의 값을 구하시오.

45. 2006 교육청(3점)

서로 다른 여섯 개의 수 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$이 차례대로 등비수열을 이룬다. a_1과 a_6의 곱이 $25a_3$과 같을 때, a_4를 구하시오.

46. 2009 교육청(3점)

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{2a_n - a_{n+1}\}$은 첫째항이 8, 공비가 -2인 등비수열을 이룬다. 이 때, a_5의 값을 구하시오.

47. 2006 교육청(3점)

세 양수 a, b, c 는 이 순서대로 등비수열을 이루고, 다음 두 조건을 만족한다.

(가) $a+b+c=\frac{7}{2}$

(나) $abc=1$

$a^2+b^2+c^2$ 의 값은?

① $\frac{13}{4}$ ② $\frac{15}{4}$ ③ $\frac{17}{4}$ ④ $\frac{19}{4}$ ⑤ $\frac{21}{4}$

48. 2008 교육청(3점)

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1a_2=6$, $a_3a_4=12$일 때, a_7a_8의 값을 구하시오.

49. 2008 교육청(3점)

일반항이 $a_n=3p^{n-1}$, $b_n=-3q^{n-1}$ 인 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여 $c_n=a_n\cdot b_n$ 인 수열 $\{c_n\}$ 이 있다. $c_5=4\sqrt{2}\,c_3$ 이고 $c_9=k\,c_5$ 일 때, 상수 k 의 값을 구하시오. (단, $pq\neq 0$)

50. 2008 교육청(3점)

공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{3a_{n+1}-a_n\}$의 공비는?(단, $a_1\neq 0$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

51. 2009 교육청(3점)

두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여

$$a_4b_4=3,\quad a_7b_7=6$$

일 때, $a_{16}b_{16}$ 의 값은?

① 30 ② 36 ③ 42 ④ 48 ⑤ 54

52. 2008 교육청(3점)

등비수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제5항까지의 합이 $\frac{31}{2}$이고 곱이 32일 때, $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}$ 의 값은?

① $\frac{31}{4}$ ② $\frac{31}{8}$ ③ $\frac{31}{12}$ ④ $\frac{8}{31}$ ⑤ $\frac{4}{31}$

53. 2005 평가원(3점)

수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_n = 2^n + (-1)^n$ 일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9$ 의 값은?

① $2^{10} - 3$　② $2^{10} - 1$
③ 2^{10}　④ $2^{10} + 1$
⑤ $2^{10} + 3$

54. 2005 교육청(3점)

첫째항이 1 , 공비가 3 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. 수열 $\{S_n + p\}$ 가 등비수열을 이루도록 하는 상수 p 의 값은?

① 1　② $\frac{1}{2}$
③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{1}{4}$
⑤ $\frac{1}{5}$

55. 2006 교육청(3점)

서로 다른 두 실수 a, b 에 대하여 2, $\frac{a^2}{2}$, b 가 이 순서대로 등차수열을 이루고 $a+2$, b, 1 이 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, a^2+b^2 의 값은?

① 3　② 4
③ 5　④ 6
⑤ 7

56. 2007 평가원(3점)

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 + n$ 일 때, a_{47}의 값을 구하시오.

57. 2008 교육청(3점)

수열 $\{a_n\}$ 이
0.23, 0.2323, 0.232323, 0.23232323, $\cdots$
일 때, 일반항 a_n 은 $a_n = \frac{23}{a}\{b - (10^c)^n\}$ 이다. $a+b+c$ 의 값을 구하시오. (단, a, b, c 는 정수)

58. 2009 평가원(3점)

네 수 1, x, y, z가 이 순서대로 등차수열을 이루고 $6x + z = 5y$를 만족시킨다. $x+y+z$의 값을 구하시오.

59. 2008 교육청(3점)

세 수 $\sin\theta$, $\frac{\sqrt{3}}{4}$, $\cos\theta$가 이 순서로 등차수열을 이룰 때, $3|\tan\theta + \cot\theta|$의 값을 구하시오.

60. 2008 교육청(3점)

세 수 $1-a,\ 10,\ 2+2a$ 가 이 순서로 등차수열을 이룰 때, a 의 값을 구하시오.

61. 2008 교육청(3점)

세 순환소수 $0.\dot{1},\ 0.0\dot{a},\ 0.00\dot{9}$ 가 이 순서로 등비수열을 이룰 때, 한 자리 자연수 a 의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

62. 2008 교육청(3점)

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n 이 $S_n=2\cdot 3^n-2$ 일 때, 옳은 것을 <보기>에서 모두 고르면?

< 보 기 >

ㄱ. $a_3=36$
ㄴ. $\{a_n\}$ 은 등비수열이다.
ㄷ. $\{\log_{10} a_n\}$ 은 등차수열이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

63. 2008 평가원(3점)

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n=2^n-1$일 때, a_9의 값을 구하시오.

64. 2009 평가원(3점)

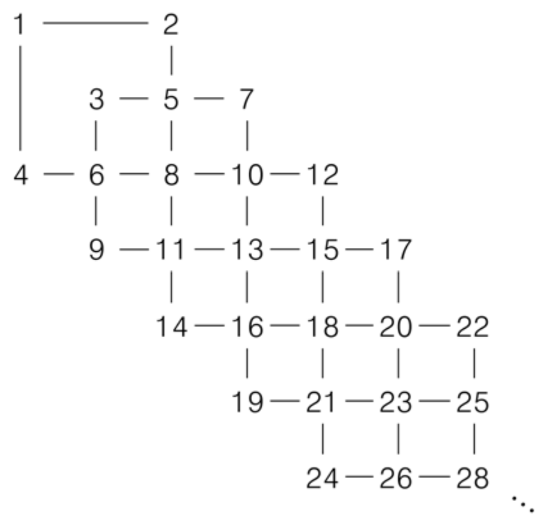
등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2=6,\ a_5=162$일 때, $\sum_{k=1}^{n} a_k \geqq 1000$을 만족시키는 n의 최솟값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

65. 2008 교육청(4점)

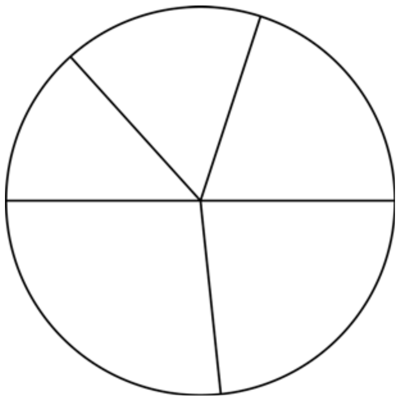
그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형들을 한 변의 길이가 1인 정사각형이 만들어지도록 겹치게 그리고, 교점과 꼭지점에 자연수를 규칙적으로 적었다. 이때, 한 변의 길이가 2인 각 정사각형의 네 꼭짓점에 적힌 자연수를 성분으로 하는 이차정사각행렬을 성분의 합이 작은 것부터 차례로 A_1, A_2, A_3, $\cdots$, A_n, $\cdots$ 이라 하자.

예를 들면 $A_1=\begin{pmatrix}1&2\\4&8\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}3&7\\9&13\end{pmatrix}$이다. 행렬 A_{10}의 모든 성분의 합을 구하시오.



66. 2008 교육청(4점)

그림과 같이 반지름의 길이가 15 인 원을 5 개의 부채꼴로 나누었더니 부채꼴의 넓이가 작은 것부터 차례로 등차수열을 이루었다. 가장 큰 부채꼴의 넓이가 가장 작은 부채꼴의 넓이의 2 배일 때, 가장 큰 부채꼴의 넓이는 $k\pi$ 이다. 이때 k 의 값을 구하시오.



67. 2009 교육청(4점)

등차수열 $\{a_n\}$의 공차와 각 항이 0이 아닌 실수일 때, 방정식 $a_{n+2}x^2+2a_{n+1}x+a_n=0$의 한 근을 b_n이라 하면 등차수열$\left\{\dfrac{b_n}{b_n+1}\right\}$의 공차는? (단, $b_n \neq -1$)

① $-\dfrac{1}{2}$ ② $-\dfrac{1}{4}$ ③ $\dfrac{1}{8}$
④ $\dfrac{1}{4}$ ⑤ $\dfrac{1}{2}$

68. 2008 평가원(4점)

공차가 d_1, d_2인 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 각각 S_n, T_n이라 하자.

$$S_nT_n=n^2(n^2-1)$$

일 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $a_n=n$이면 $b_n=4n-4$이다.
ㄴ. $d_1 d_2=4$
ㄷ. $a_1 \neq 0$이면 $a_n=n$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

69. 2004 평가원(4점)

x에 관한 삼차방정식 $x^3-9x^2+23x-k=0$의 세 실근이 등차수열을 이룰 때, 상수 k의 값은?

① 9 ② 11
③ 13 ④ 15
⑤ 17

70. 2006 평가원(4점)

다음은 어느 시력검사표에 표시된 시력과 그에 해당되는 문자의 크기를 나타낸 것의 일부이다.

시력	0.1	0.2	0.3	0.4	⋯	1.0
문자의 크기	a_1	a_2	a_3	a_4	⋯	a_{10}

문자의 크기 a_n은 다음 관계식을 만족시킨다.

$$a_1 = 10A,\ a_{n+1} = \frac{10A \cdot a_n}{10A + a_n}$$

(단, A는 상수이고 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9$이다.)
이 시력검사표에서 시력 0.8에 해당되는 문자의 크기는?

① $2A$ ② $\frac{3}{2}A$ ③ $\frac{4}{3}A$ ④ $\frac{5}{4}A$ ⑤ $\frac{6}{5}A$

71. 2005 교육청(4점)

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음과 같이 정의되어 있다. $a_n = 2n+1$, $b_n = 3n+3$ ($n = 1, 2, 3, \cdots$) 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에서 공통인 항을 작은 것부터 순서대로 나열한 수열을 $\{c_n\}$이라 한다. 이때, c_{30}의 값을 구하시오.

72. 2007 교육청(4점)

삼차방정식 $x^3+3x^2-6x-k=0$의 세 근이 등차수열을 이룰 때, 상수 k의 값을 구하시오.

73. 2010 교육청(4점)

서로 다른 세 자연수 a, b, c가 다음 세 조건을 모두 만족시킬 때, $a+b+c$의 값은?

(가) a, b, c는 이 순서대로 등비수열을 이룬다.
(나) $b-a=n^2$ (단, n은 자연수이다.)
(다) $\log_6 a+\log_6 b+\log_6 c=3$

① 26 ② 28 ③ 30 ④ 32 ⑤ 34

74. 2010 교육청(4점)

각 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 다음과 같이 정의한다.

$$b_n = \log_3 a_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

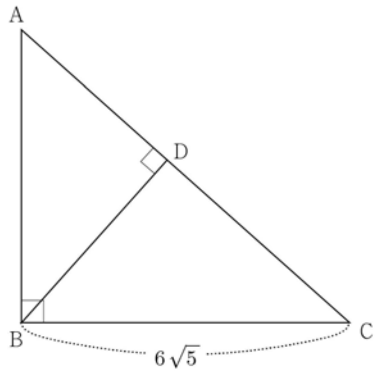
수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{11}의 값은?

(가) $b_1+b_3+b_5+\cdots+b_{15}+b_{17}=36$
(나) $b_2+b_4+b_6+\cdots+b_{16}+b_{18}=45$

① 3^5 ② 3^6 ③ 3^7 ④ 3^8 ⑤ 3^9

75. 2010 교육청(4점)

그림과 같이 $\angle B = 90^\circ$ 이고 선분 BC의 길이가 $6\sqrt{5}$ 인 직각삼각형 ABC의 꼭짓점 B에서 빗변 AC에 내린 수선의 발을 D라 하자. 세 선분 AD, CD, AB의 길이가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 선분 AC의 길이를 구하시오.



76. 2010 평가원(4점)

첫째항이 16이고 공비가 $2^{\frac{1}{10}}$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\log a_n$의 가수를 b_n이라 하자.

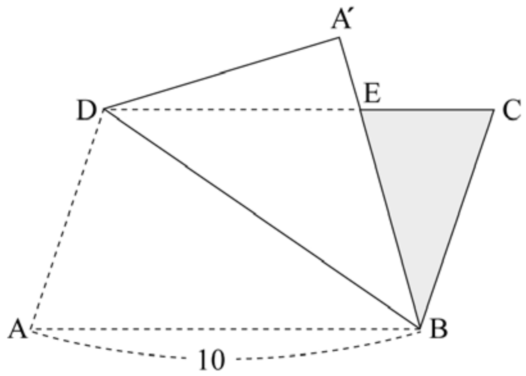
$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots\ ,\ b_{k-1},\ b_k,\ b_{k+1}+1$$

이 주어진 순서로 등차수열을 이룰 때, k의 값을 구하시오. (단, $\log 2 = 0.301$로 계산한다.)

77. 2010 교육청(4점)

그림과 같이 $\overline{AB} = 10$ 인 평행사변형 ABCD 가 있다. 이 도형을 대각선 BD 를 따라 접어서 생기는 삼각형 EBC 의 넓이가 평행사변형 ABCD 의 넓이의 $\frac{1}{5}$이고, $\overline{CE}$, $\overline{EB}$, $\overline{BD}$ 의 길이가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, 선분 AD 의 길이는?

4



① $2\sqrt{11}$ ② $3\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{46}$
④ $\sqrt{47}$ ⑤ $4\sqrt{3}$

78. 2010 교육청(4점)

모든 항이 양수인 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 a_n, b_n, a_{n+1}은 이 순서대로 등차수열을 이루고, b_n, a_{n+1}, b_{n+1}은 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, 일반항 a_n과 b_n을 구하는 과정이다.(단, $a_1=1$, $a_2=3$, $b_1=2$)

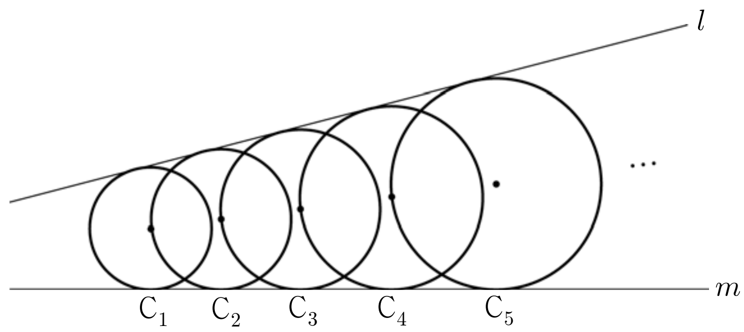
> a_n, b_n, a_{n+1}은 이 순서대로 등차수열을 이루므로
> $2b_n = a_n + a_{n+1}$ ……㉠이다.
> b_n, a_{n+1}, b_{n+1}은 이 순서대로 등비수열을 이루므로
> $(a_{n+1})^2 = b_n b_{n+1}$
> 이고, $a_{n+1}>0$, $a_{n+2}>0$이므로
> $a_{n+1} = \sqrt{b_n b_{n+1}}$, $a_{n+2} = \sqrt{b_{n+1} b_{n+2}}$ ……㉡이다.
> 또한, ㉠, ㉡에서 얻어진 $2b_{n+1} = \sqrt{b_n b_{n+1}} + \sqrt{b_n b_{n+2}}$ 의
> 양변을 $\sqrt{b_{n+1}}$로 나누면 $2\sqrt{b_{n+1}} = \sqrt{b_n} + \sqrt{b_{n+2}}$이므로
> $\{\sqrt{b_n}\}$은 $\boxed{(가)}$ 수열이다.
> 그러므로 $a_2=3$, $b_1=2$, $(a_2)^2 = b_1 b_2$에서
> $b_2 = \dfrac{9}{2}$이므로 $b_n = \boxed{(나)}$이다.
> 따라서, $a_n = \boxed{(다)}$이다.

위 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	등차	$\frac{1}{2}(n+1)^2$	$\frac{n(n+1)}{4}$
②	등비	$\frac{1}{2}(n+1)^2$	$\frac{n(n+1)}{2}$
③	등차	$\frac{1}{4}(n+1)^2$	$\frac{n(n+1)}{4}$
④	등비	$\frac{1}{4}(n+1)^2$	$\frac{n(n+1)}{4}$
⑤	등차	$\frac{1}{2}(n+1)^2$	$\frac{n(n+1)}{2}$

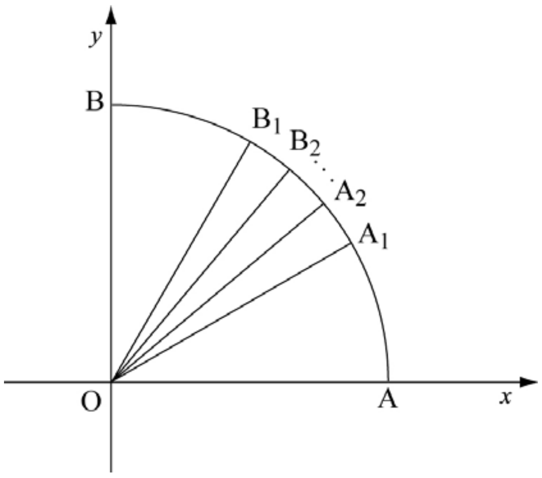
79. 2008 교육청(4점)

그림과 같이 두 직선 l, m에 동시에 접하는 원 C_1이 있다.
원 C_1의 중심을 지나고 직선 l, m에 동시에 접하면서 C_1보다 큰 원을 C_2라 하자.
원 C_2의 중심을 지나고 직선 l, m에 동시에 접하면서 C_2보다 큰 원을 C_3라 하자.
이와 같은 방법으로 원 C_k의 중심을 지나고 직선 l, m에 동시에 접하면서 C_k보다 큰 원을 C_{k+1}이라 하자.($k=1, 2, 3, \cdots$)
원 C_1의 넓이가 1, 원 C_5의 넓이가 4일 때, 원 C_{19}의 넓이를 구하시오.



80. 2008 교육청(4점)

그림과 같이 사분원 AOB에 대하여 $\angle \mathrm{AOB}$를 삼등분하는 직선이 사분원과 만나는 교점을 각각 A_1, B_1이라 하고, $\angle \mathrm{A}_1\mathrm{OB}_1$을 삼등분하는 직선이 사분원과 만나는 교점을 각각 A_2 , B_2라고 하자. 이와 같은 방법으로 계속할 때, $\angle \mathrm{A}_{10}\mathrm{OB}$의 크기는?



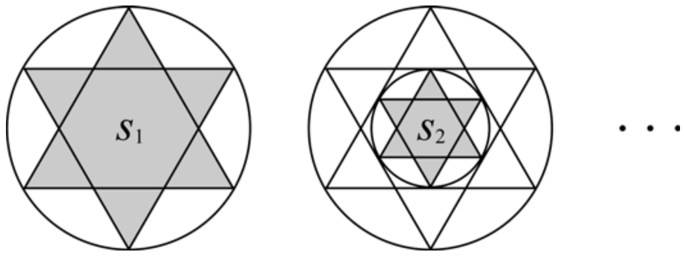
① $\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{3^9}\right)$ ② $\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1}{3^9}\right)$

③ $\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{3^{10}}\right)$ ④ $\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1}{3^{10}}\right)$

⑤ $\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1}{3^{11}}\right)$

81. 2008 교육청(4점)

반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$인 원이 있다. 그림과 같이 이 원에 내접하는 두 정삼각형이 겹쳐지는 부분이 정육각형이 되도록 ✡ 모양의 도형 S_1(어두운 부분)을 그린다. 또, S_1의 정육각형에 내접하는 원을 그리고, 이 원에 내접하는 두 정삼각형이 겹쳐지는 부분이 정육각형이 되도록 ✡ 모양의 도형 S_2(어두운 부분)를 그린다.
이와 같은 방법으로 ✡ 모양의 도형 S_3, S_4, $\cdots$, S_{10}을 그릴 때, 도형 S_{10}의 넓이는?



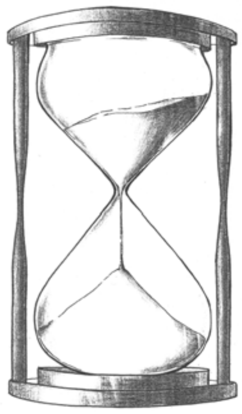
① $\frac{\sqrt{3}}{2^{15}}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2^{16}}$

③ $\frac{3\sqrt{3}}{2^{15}}$ ④ $\frac{3\sqrt{3}}{2^{16}}$

⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{2^{16}}$

82. 2008 교육청(4점)

모래시계 A, B, C에 들어 있는 모래의 양은 각각 3^a, 9^b, 27^c이고 매 초당 모래가 위에서 아래로 일정하게 떨어지는 양은 각각 a, b, c이다. a, b, c는 이 순서대로 등비수열을 이루고, 3^a, 9^b, 27^c도 이 순서대로 등비수열을 이루며, 두 수열의 공비는 같다. 모래시계 A, B, C로 잴 수 있는 시간(초)을 각각 t_A, t_B, t_C라 할 때, $t_A+t_B+t_C$의 값을 구하시오. (단, 모래가 다 떨어진 후 뒤집지 않는다.)



83. 2008 교육청 (4점)

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하면 $S_n = pa_n + 1$이 성립한다. <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, p는 1이 아닌 상수이다.)

< 보 기 >

ㄱ. $a_1 = \dfrac{1}{1-p}$

ㄴ. 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

ㄷ. $p = \dfrac{2}{3}$이면 수열 $\{a_n\}$은 수렴한다.

① ㄱ　② ㄴ
③ ㄱ, ㄴ　④ ㄱ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

84. 2007 교육청(4점)

첫째항이 2이고 공차가 $d(d>0)$인 등차수열이 있다. 다음은 첫째항부터 제n항까지의 합과 제$n+1$항부터 $3n$항까지의 합의 비가 n에 관계없이 항상 일정할 때, 공차 d를 구하는 과정이다.

< 과 정 >

첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n = \frac{n}{2}\{4+(n-1)d\},\ S_{3n} = \frac{3n}{2}\{4+(3n-1)d\}$$

이므로 $S_{3n} - S_n = \dfrac{n}{2}\{\ (\quad 가 \quad)\ \}$ 이다.

$\dfrac{S_n}{S_{3n}-S_n} = \dfrac{4+nd-d}{\{(\quad 가 \quad)\}} = k$(일정)라 하자.

$\{\ (\quad 나 \quad)\ \}n + (4-d-8k+2dk) = 0$

이 자연수 n에 관계없이 항상 성립하므로

$(\quad 나 \quad) = 0$이고,

$4-d-8k+2dk=0$이다.

$d>0$이므로 $k=\dfrac{1}{8}$이고 $d=(\qquad 다 \qquad)$이다.

이 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	$8+(8n-2)d$	$(1-8k)d$	4
②	$8+(8n-2)d$	$(1+8k)d$	$\frac{1}{4}$
③	$8+(8n-2)d$	$(1-8k)d$	$\frac{1}{4}$
④	$8+(8n+4)d$	$(1+8k)d$	$\frac{1}{4}$
⑤	$8+(8n+4)d$	$(1-8k)d$	4

85. 2007 평가원(4점)

n개의 항으로 이루어진 등차수열 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n이 다음 조건을 만족한다.

< 다 음 >

(가) 처음 4개 항의 합은 26이다.
(나) 마지막 4개 항의 합은 134이다.
(다) $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=260$

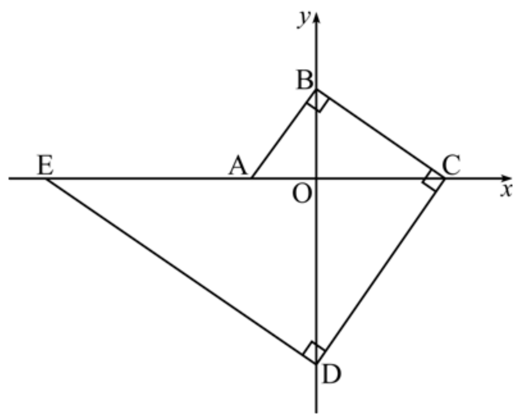
이 때 n의 값을 구하시오.

86. 2006 교육청(4점)

선미는 문제 수가 x인 수학책을 첫째 날에는 15문제를 풀고 둘째 날부터 매일 문제 수를 d만큼씩 증가시키면서 풀어 아홉째 날까지 문제를 풀고 나면 24문제가 남게 된다. 또, 첫째 날에는 30문제를 풀고 둘째 날부터 매일 문제 수를 d만큼씩 증가시키면서 풀어 일곱째 날까지 문제를 풀고 나면 39문제가 남게 된다. 선미가 풀고자 하는 이 수학책의 문제 수 x의 값을 구하시오.

87. 2006 교육청(4점)

그림과 같이 좌표축 위의 다섯 개의 점 A, B, C, D, E에 대하여 $\overline{AB}\perp\overline{BC}$, $\overline{BC}\perp\overline{CD}$, $\overline{CD}\perp\overline{DE}$가 성립한다. 세 선분 AO, OC, EA의 길이가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 직선 AB의 기울기는? (단, O는 원점이고 $\overline{OA}<\overline{OB}$이다.)



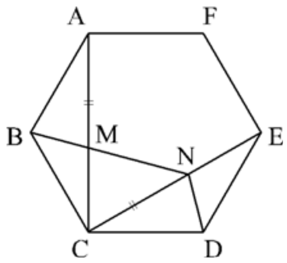
① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$
③ 2 ④ $\sqrt{5}$
⑤ $\sqrt{6}$

88. 2004 평가원(4점)

1부터 99까지의 홀수 중 서로 다른 10개를 택하여 그들의 합을 S라 하자. 이러한 S의 값 중 서로 다른 것을 작은 수부터 차례로 a_1, a_2, a_3,$\cdots$ 이라 할 때, a_{100}의 값은?

① 268 ② 278
③ 288 ④ 298
⑤ 308

89. 2004 평가원(4점)



그림과 같이 정육각형ABCDEF의 두 대각선 AC, CE 위에 $\overline{\mathrm{AM}}=\overline{\mathrm{CN}}$ 이 되도록 각각 M, N을 잡는다. 다음은 세 점 B,M,N이 일직선 위에 있으면 세 각 $\angle\mathrm{BNC}$, $\angle\mathrm{CND}$, $\angle\mathrm{DNE}$의 크기는 이 순서로 등차수열을 이룸을 증명한 것이다.

< 증 명 >

$\overline{\mathrm{CM}}=$ (가) , $\angle\mathrm{BCM}=\angle\mathrm{DEN}=30^\circ$ 이므로

$\triangle\mathrm{BCM}\equiv\triangle\mathrm{DEN}$ $\therefore\ \angle\mathrm{CBM}=\angle\mathrm{EDN}$

$\angle\mathrm{BND}=\angle\mathrm{BNC}+\angle\mathrm{CND}$

$=(\angle\mathrm{BCN}-\angle\mathrm{CBM})+(\angle\mathrm{CED}+\angle\mathrm{EDN})$

$=$ (나)

따라서 점 N은 점 C를 중심으로 하고 $\overline{\mathrm{CB}}=\overline{\mathrm{CD}}$를 반지름으로 하는 원 위에 있다.

$\therefore\overline{\mathrm{CB}}=\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{CN}}$

$\therefore\angle\mathrm{BNC}=(\quad),\ \angle\mathrm{CND}=(\quad),\ \angle\mathrm{DNE}=(\quad)$

그러므로, 세 각$\angle\mathrm{BNC}$, $\angle\mathrm{CND}$, $\angle\mathrm{DNE}$의 크기는 이 순서로 공차가 (다) 인 등차수열을 이룬다.

위의 증명과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례로 나열하면?

① $\overline{\mathrm{EN}}$, 135°, 25°
② $\overline{\mathrm{MN}}$, 135°, 30°
③ $\overline{\mathrm{EN}}$, 120°, 25°
④ $\overline{\mathrm{EN}}$, 120°, 30°
⑤ $\overline{\mathrm{MN}}$, 120°, 35°

90. 2006 교육청(4점)

공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 <보기>에서 옳은 것을 모두 고르면?

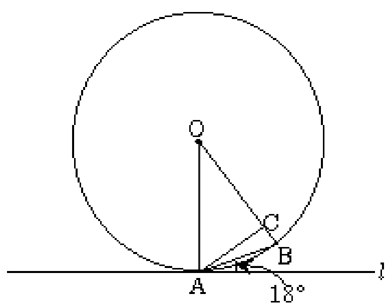
< 보 기 >

ㄱ. 수열 $\{3a_n\}$은 공차가 9인 등차수열이다.
ㄴ. 수열 $\{a_{2n-1}\}$은 공차가 6인 등차수열이다.
ㄷ. 수열 $\{2a_{2n}-a_{2n-1}\}$은 공차가 6인 등차수열이다.

① ㄱ
② ㄷ
③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

91. 2006 교육청(4점)

원 O 위에 두 점 A, B가 있다. 점 A에서 원 O에 접하는 접선 l과 선분 AB가 이루는 예각의 크기가 18°이다. 선분 OB 위의 한 점 C에 대하여 삼각형 OAC의 세 내각의 크기가 등차수열을 이룰 때, 가장 큰 내각의 크기는?



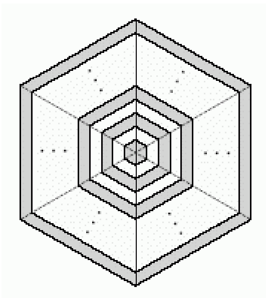
① 68°
② 72°
③ 76°
④ 80°
⑤ 84°

92. 2005 | 교육청 4점)

유전 연구에 필요한 두 가지 식물 A, B를 재배하기 위하여 정육각형 모양의 토지를 다음과 같이 나누어 놓았다.

○ 정육각형을 여섯 개의 정삼각형으로 나눈다.
○ 인접한 두 삼각형이 공유하고 있는 변(점선 부분)을 각각 21 등분한다.
○ 21 등분한 각 점을 직선 모양의 울타리로 서로 연결하여 모두 21 개의 부분으로 구분하여 놓는다.

그림과 같이 가장 안쪽에 있는 정육각형 모양의 토지부터 시작하여 검은 부분과 흰 부분으로 토지를 교대로 구분한 다음 검은 부분에는 A를 심고, 흰 부분에는 B를 심었다. A를 심은 부분의 넓이가 $231m^2$일 때, B를 심은 부분의 넓이는?



(단, 울타리가 차지하는 넓이는 고려하지 않는다.)

① $210m^2$ ② $212m^2$
③ $214m^2$ ④ $216m^2$
⑤ $218m^2$

93. 2006 | 평가원(4점)

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$b_n = \frac{a_1+2a_2+3a_3+\dots+na_n}{1+2+\dots+n}\ (n \geq 1)$$

이 성립한다. 다음은 $\{a_n\}$이 등차수열이기 위한 필요충분조건은 $\{b_n\}$이 등차수열임을 증명하는 과정이다.

<증명>

수열 $\{a_n\}$을 첫째항 a, 공차 d인 등차수열이라 하면,

$$b_n = \frac{a+2(a+d)+3(a+2d)+\dots+n\{a+(n-1)d\}}{1+2+\dots+n}$$

$$= \frac{a(1+2+\dots+n)+d\{2+3\cdot2+\dots+n\cdot(n-1)\}}{1+2+\dots+n}$$

$$= a + \frac{2d\left\{\boxed{(가)} - \frac{n(n+1)}{2}\right\}}{n(n+1)}$$

$$= a + \boxed{(나)}\cdot(n-1)$$

이므로 $\{b_n\}$은 공차가 $\boxed{(나)}$ 인 등차수열이다.

역으로 $\{b_n\}$을 등차수열이라 하면,

$$b_{n+1} = \frac{a_1+2a_2+3a_3+\dots+na_n}{1+2+\dots+(n+1)} + \frac{(n+1)a_{n+1}}{1+2+\dots+(n+1)}$$

$$= \boxed{(다)} \times b_n + \frac{2}{n+2}a_{n+1}$$

⋮

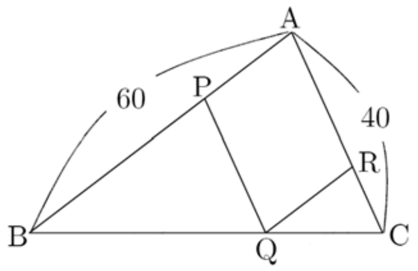
이므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

위의 증명 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [4점] [06년 06월 평가원]

	(가)	(나)	(다)
①	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	$\frac{2}{3}d$	$\frac{n}{n+2}$
②	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	$\frac{2}{3}d$	$\frac{n-1}{n+2}$
③	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$	$\frac{3}{2}d$	$\frac{n}{n+2}$
④	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$	$\frac{2}{3}d$	$\frac{n}{n+2}$
⑤	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$	$\frac{3}{2}d$	$\frac{n+1}{n+2}$

94. 2006 교육청(4점)

그림과 같이 $\overline{AB}=60$, $\overline{AC}=40$인 $\triangle ABC$ 의 세 변 AB , BC , CA 위에 각 점 P , Q , R 가 있다. 다음은 선분 RQ 가 AB 와 평생하고 선분 PQ 가 AC 와 평행하며 $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{RC}$ 가 이 순서대로 등차수열을 이룰때, 사각형 APQR 의 둘레의 길이를 구하는 과정이다.



> $\overline{PQ}=x$, $\overline{QR}=y$, $\overline{RC}=z$ 라 하면
> x,y,z가 이 순서대로 등차수열을 이루므로
> (가) ……-㉠
> $\overline{PQ}\,//\,\overline{AC}$ 이고 $\overline{AB}\,//\,\overline{RQ}$ 이므로
> $x+z=40$ ……㉡
> $\triangle ABC \backsim \triangle RQC$ 이므로
> (나) ……㉢
> ㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 x, y, z 를 구할수있다.
> 따라서 사각형 APQR 의 둘레의 길이는 (다) 이다.

이 과정에서 (가)~(다)를 바르게 짝지은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	$y=x+z$	$y=z$	$\frac{140}{3}$
②	$z=x+y$	$y=z$	$\frac{140}{3}$
③	$2y=x+z$	$2y=3z$	$\frac{140}{3}$
④	$2y=x+z$	$2y=3z$	$\frac{280}{3}$
⑤	$2y=x+z$	$3y=2z$	$\frac{280}{3}$

95. 2004 평가원 (4점)

다음은 어느 신문 기사 내용의 일부분이다.

> 최근 우리 나라에서는 1인당 쌀 소비량이 계속 감소해 하루 소비량이 두 공기에도 못 미치는 것으로 나타났다.
> 통계청이 발표한 '양곡소비량 조사결과'에 따르면 2003년 1인당 연간 쌀 소비량은 80 kg으로, 전년에 비해 4 % 감소한 것으로 나타났다. 이는 주요 쌀 소비국인 일본의 2003년 1인당 연간 쌀 소비량 64 kg 보다는 많은 양이지만, 일본의 최근 감소율 1 %보다 훨씬 높은 감소율을 보여 주고 있다.
> <이하 생략>

2003년 이후에도 한국과 일본의 1인당 연간 쌀 소비량의 감소율이 각각 4 %, 1 %로 일정하다고 가정할 때, 한국의 1인당 연간 쌀 소비량이 일본의 1인당 연간 쌀 소비량보다 처음으로 작아지게 되는 해는?
(단, $\log 2=0.3010$, $\log 9.6=0.9823$, $\log 9.9=0.9956$)

① 2009년 ② 2011년
③ 2013년 ④ 2015년
⑤ 2017년

96. 2005 교육청 (4점)

수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $b_n=a_{n+1}-a_n$ 이라 할때, 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? (단, $a_n \cdot b_n \neq 0$)

> < 보 기 >
> ㄱ. 수열 $\{a_n\}$ 이 등비수열이면 수열 $\{b_n\}$ 도 등비수열이다.
> ㄴ. 수열 $\{b_n\}$ 이 등비수열이면 수열 $\{a_n\}$ 도 등비수열이다.
> ㄷ. 수열 $\{a_n\}$ 이 등비수열이면 수열 $\{a_n \cdot b_n\}$ 도 등비수열이다

① ㄱ ② ㄴ
③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ
⑤ ㄴ, ㄷ

97. 2005 교육청(4점)

다음은 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하고 $S_n=p$, $S_{2n}=q$ 라 할 때, S_{3n} 을 p , q 로 나타내는 과정이다.(단, $p\neq0$, $q\neq0$)

> 자연수 n 에 대하여
> $A=a_1+a_2+a_3+...+a_n$
> $B=a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+...+a_{2n}$
> $C=a_{2n+1}+a_{2n+2}+a_{2n+3}+...+a_{3n}$ 이라 하자.
> 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면 A , B , C는 이 순서대로 공비가 $\boxed{(가)}$인 등비수열을 이룬다.
> 등비중항의 성질에 의하여 $B^2=AC$
> 또한,
> $$\begin{cases} A=S_n=p \\ B=S_{2n}-S_n=q-p \\ C=S_{3n}-S_{2n}=S_{3n}-q \end{cases}$$
> 따라서 $S_{3n}=\boxed{(나)}$ 이다.

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

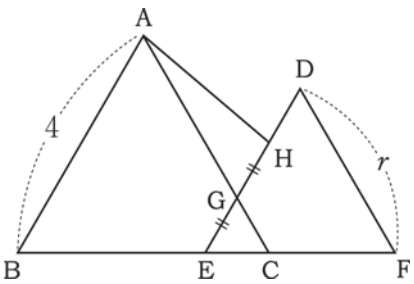
	(가)	(나)
①	r^{n-1}	$\frac{(p-q)^2}{p}$
②	r^n	$\frac{(p+q)^2}{p}$
③	r^n	$\frac{p^2-pq+q^2}{p}$
④	r^n	$\frac{p^2+pq+q^2}{p}$
⑤	r^{2n}	$\frac{p^2-pq+q^2}{p}$

98. 2004 평가원(4점)

수열 $\{a_n\}$에서 각각의 자연수 n에 대하여 세 항 a_{2n-1}, a_{2n}, a_{2n+1}은 등차수열을 이루고 세 항 a_{2n}, a_{2n+1}, a_{2n+2}는 등비수열을 이룬다. $a_1=1$, $a_2=2$일 때, a_{13}의 값을 구하시오.

99. 2005 교육청(4점)

그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC와 한 변의 길이가 r인 정삼각형 DEF를 겹쳐서 점 E가 $\overline{BC}$ 위에 오도록 정삼각형 GEC를 만들고, $\overline{EG}=\overline{GH}$가 되도록 점 H를 $\overline{DG}$ 위에 잡는다. △GEC, △AGH, △DEF의 각각의 넓이가 이 순서로 공비가 r인 등비수열을 이룰 때, r의 값은?



① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

100. 2006 교육청(4점)

다음 두 조건을 만족하는 서로 다른 세 자연수 A, B, C 에 대하여 $A+B+C$의 최댓값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수)

> (가) $[\log A]+[\log B]+[\log C]=0$
> (나) $\log A$, $\log B$, $\log C$가 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

101. 2005 평가원(4점)

음이 아닌 정수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 점의 좌표를 $P_n(a_n, b_n)$이라 하자.

> (ㄱ) $a_0 = 1$, $b_0 = 0$
> (ㄴ) 점 $P_{n+1}(a_{n+1}, b_{n+1})$은 점 $P_n(a_n, b_n)$에서 원 $x^2+y^2=1$의 호를 따라 시계 반대 방향으로 $\frac{\pi}{18}$만큼 이동한 점이다.

이때, $a_n = b_n$을 만족시키는 n은 (가).
그리고 $c_k = a_{18k}\ (k=1, 2, 3, \cdots)$라 하면, 수열 $\{c_k\}$는 공비가 (나)인 등비수열이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 것은?

① 존재하지 않는다, $-\frac{1}{2}$
② 존재하지 않는다, -1
③ 존재한다, $-\frac{1}{2}$
④ 존재한다, -1
⑤ 존재한다, $\frac{1}{2}$

102. 2007 평가원(4점)

자연수 n에 대하여 상용로그 $\log 2^n$의 지표를 a_n이라 할 때, 수열 $\{b_n\}$을

$$b_n = \begin{cases} 1 \ (a_{n+1} > a_n) \ (n=1,2,3,4,\cdots) \\ 0 \ (a_{n+1} < a_n) \ (n=1,2,3,4,\cdots) \end{cases}$$

으로 정의한다. $\sum_{k=1}^{200} b_k$의 값은?(단, $\log 2 = 0.3010$이다.)

① 68　② 66　③ 64
④ 62　⑤ 60

103. 2005 교육청(4점)

자연수 n을 이진법의 수로 나타내었을 때, 그 이진법의 수가 k자리의 수이면 $a_n = k$로 정의한다. 예를 들면 $7 = 111_{(2)}$이므로 $a_7 = 3$이고, $8 = 1000_{(2)}$이므로 $a_8 = 4$이다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 20항까지의 합을 구하시오.

104. 2007 평가원(4점)

a, b, c가 서로 다른 세 실수일 때, 이차함수 $f(x) = ax^2 + 2bx + c$에 대한 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. a, b, c가 이 순서로 등차수열을 이루면 $f(1) = 4b$이다.
ㄴ. a, b, c가 이 순서로 등차수열을 이루면 $y = f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.
ㄷ. a, b, c가 이 순서로 등비수열을 이루면 $y = f(x)$의 그래프는 x축과 만나지 않는다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

105. 2007 교육청 4점)

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2$일 때, $\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{n}{m}$을 만족시키는 자연수 m, n에 대하여 $m+n$의 값을 구하시오.(단, m, n은 서로소이다.)

106. 2007 평가원(4점)

다음 표는 어느 학교에서 한 달 전에 구입한 휴대용 저장 장치의 용량에 따른 1개당 가격과 개수의 현황을 나타낸 것이다.

용량	128MB	256MB	512MB	1GB	2GB
1개당 가격	a	$\frac{3}{2}a$	$\left(\frac{3}{2}\right)^2 a$	$\left(\frac{3}{2}\right)^3 a$	$\left(\frac{3}{2}\right)^4 a$
개수	$16b$	$8b$	$4b$	$2b$	b

현재 모든 휴대용 저장 장치의 가격이 한 달 전보다 모두40%씩 하락하였다. 이 학교에서 휴대용 저장 장치의 용량과 개수를 위 표와 동일하게 현재의 가격으로 구입한다면 지불해야 하는 금액은?(단, $a>0$이고 $b>0$이다.)

① $\frac{128}{5}ab\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^5\right\}$ ② $32ab\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^5\right\}$

③ $32ab\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^5\right\}$ ④ $\frac{192}{5}ab\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^5\right\}$

⑤ $\frac{192}{5}ab\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^5\right\}$

107. 2007 평가원(4점)

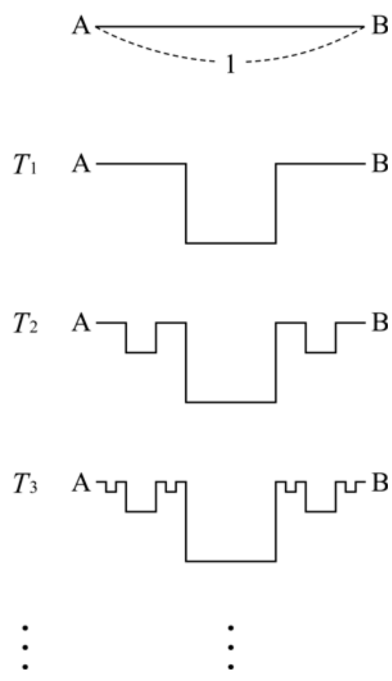
그림과 같이 각 단의 부피가 일정한 비율로 감소하는 8 단 케이크를 만들었다. 이 케이크의 제 2단의 부피를 p, 제 4단의 부피를 q라 할 때, 제 8단의 부피를 p와 q로 나타낸 것은?

① $\frac{q^3}{p^2}$ ② $\frac{q^2}{p^2}$ ③ $\frac{p^3}{q^2}$

④ $\frac{p^3}{q}$ ⑤ $\frac{p^2}{q}$

108. 2007 평가원(4점)

길이가 1인 선분 AB가 있다. 그림과 같이 선분 AB를 3등분한 다음, 가운데 선분을 한 변으로 하는 정사각형을 그리고, 가운데 선분을 지워 만든 도형을 T_1이라 하자. T_1의 선분 중 원래의 선분 AB에서 남아 있는 두 선분을 각각 3등분한 다음, 가운데 선분을 한 변으로 하는 정사각형을 그리고, 가운데 선분을 지워 만든 도형을 T_2라 하자. T_2의 선분 중 원래의 선분 AB에서 남아 있는 네 선분을 각각 3등분한 다음, 가운데 선분을 한 변으로 하는 정사각형을 그리고, 가운데 선분을 지워 만든 도형을 T_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속 반복하여 n번째 만든 도형을 T_n이라 하고, T_n에 있는 모든 선분의 길이의 총합을 a_n이라 하자. 이때 a_{20}의 값은?

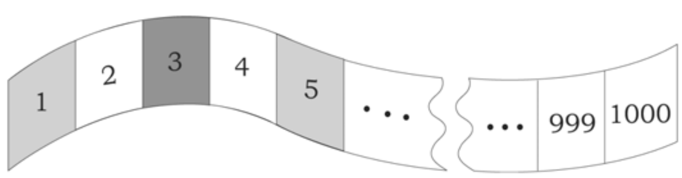


① $3\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{20}\right\}$ ② $3\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{21}\right\}$ ③ $3\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{19}\right\}$

④ $3\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{20}\right\}$ ⑤ $3\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{21}\right\}$

109. 2006 교육청(4점)

그림과 같이 1부터 1000까지의 자연수가 쓰여진 흰색 종이 띠에 1부터 시작하여 공차가 4인 등차수열의 수가 있는 부분에는 빨간색, 3부터 시작하여 공비가 3인 등비수열의 수가 있는 부분에는 파란색을 칠하였다. 빨간색과 파란색이 겹쳐 칠해진 부분에 쓰여진 수 중에서 가장 큰 수를 구하시오.



110. 2006 평가원(4점)

다음은 어느 회사의 연봉에 관한 규정이다.

(가) 입사 첫째 해 연봉은 a원이고, 입사 19년째 해까지의 연봉은 해마다 직전 연봉에서 8%씩 인상된다.
(나) 입사 20년째 해부터의 연봉은 입사 19년째 해 연봉의 $\frac{2}{3}$로 한다.

이 회사에 입사한 사람이 28년 동안 근무하여 받는 연봉의 총합은? (단, $1.08^{18}=4$로 계산한다.)

① $\frac{101}{2}a$ ② $\frac{111}{2}a$ ③ $\frac{121}{2}a$
④ $\frac{131}{2}a$ ⑤ $\frac{141}{2}a$

111. 2007 교육청 (4점)

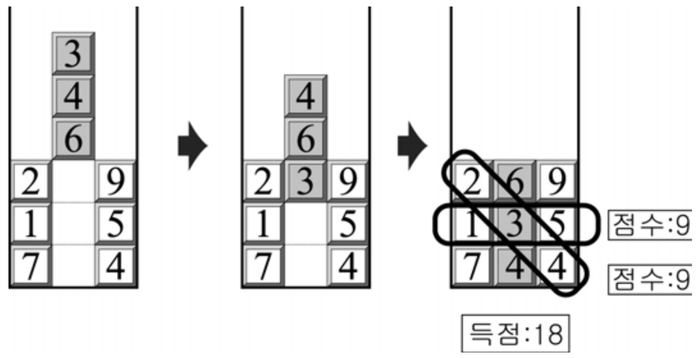
그림과 같이 모든 자연수를 1부터 차례대로 나열하였다. 3의 배수와 4의 배수를 제외하고 남아 있는 수를 크기순으로 나열하여 수열 $\{a_n\}$을 만들었다.
1, 2, 5, 7, 10, 11, 13, 14, …
그림에서 a_{2007}이 i행 j열의 수일 때, $i+j$의 값은?

	제1열	제2열	제3열	제4열	제5열	제6열	제7열	제8열	제9열	제10열
제1행	1	2	~~3~~	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	10
제2행	11	~~12~~	13	14	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
제3행	~~21~~	22	23	~~24~~	25	26	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
제4행	31	~~32~~	~~33~~	34	35	~~36~~	37	38	~~39~~	~~40~~
제5행	41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	46	47	~~48~~	49	50
제6행	~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	~~57~~	58	59	~~60~~
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

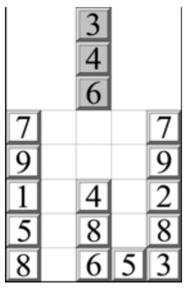
① 405 ② 407 ③ 409
④ 411 ⑤ 413

112. 2007 교육청(4점)

어느 게임은 [예시]와 같이 엔터키를 누르면 게임이 시작되면서 어두운 부분의 막대가 아래쪽으로 계속 내려가고 더 이상 내려가지 않으면 게임은 끝난다. 방향키로는 어두운 부분의 막대를 왼쪽, 오른쪽으로만 이동시킬 수 있고 마우스를 한 번 클릭할 때마다 어두운 부분의 막대 맨 위의 숫자가 맨 아래로, 나머지 숫자들은 한 칸씩 올라간다. 더 이상 내려가지 않는 어두운 부분의 막대와 이웃한 막대들 속의 세 숫자들이 상하, 좌우 또는 대각선 방향 순서대로 등차수열이 될 때, 그 숫자들을 더한 점수들의 합을 득점으로 하는 게임이 있다.

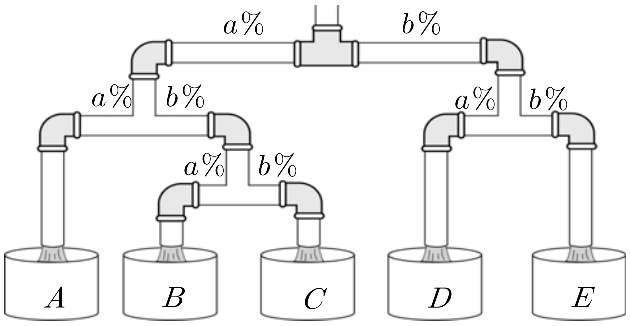


[예시]
다음 게임에서 얻을 수 있는 득점의 최댓값을 구하시오.
[4점][07년 07월 인천]



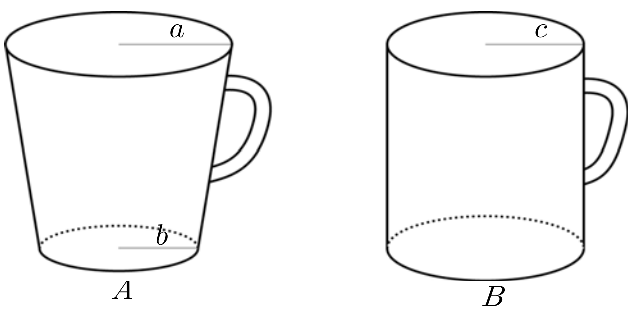
113. 2007 교육청(4점)

그림과 같은 수도관은 물을 흘려보내면 유실되는 물이 없이 왼쪽으로 $a\%$, 오른쪽으로 $b\%$가 흐른다. 일정한 양의 물을 흘려보낸 후 물통 A, B, C, D, E의 물의 양을 측정하면 물통 B, C, D순으로 등비수열을 이룬다. $b=p\sqrt{5}-q$(p, q는 유리수) 일 때, $p+q$의 값을 구하시오.(단, $ab\neq 0$)



114. 2007 교육청(4점)

직원뿔대 모양의 커피 잔 A와 직원기둥 모양의 커피 잔 B가 있다. 커피 잔 A의 윗면의 반지름의 길이를 a, 아랫면의 반지름의 길이를 b, 커피 잔 B의 반지름의 길이를 c라 할 때, a, c, b 순으로 등차수열을 이루고 $a:b=3:1$이며 각각의 높이는 윗면과 아랫면의 반지름의 길이의 합과 같다. A, B 두 커피 잔에 커피를 높이의 $\frac{1}{2}$까지 부었을 때, 커피의 양을 각각 V_A, V_B라 하자. $\frac{V_A}{V_B}$의 값을 $\frac{q}{p}$(p, q는 서로소)라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오.



115. 2009 교육청(4점)

(가) 2009년 1월부터 2010년 12월까지 매달 초에 입금한다.
(나) 첫째 달은 10만원을, 두 번째 달부터는 바로 전 달보다 0.8% 증가한 금액을 입금한다.
(다) 매번 입금한 금액에 대하여 입금한 날로부터 24개월까지는 월이율 1.1%의 복리로 매달 계산하고, 그 이후에는 월이율 0.8%의 복리로 매달 계산한다.

이와 같은 조건으로 저축하였을 때, 2012년 12월 말의 원리합계는? (단, $1.008^{24}=1.2$, $1.011^{24}=1.3$으로 계산한다.)

① 368만 4천 원 ② 370만 4천 원
③ 372만 4천 원 ④ 374만 4천 원
⑤ 376만 4천 원

116. 2006 수능 (2점)

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5 = 4a_3$, $a_2 + a_4 = 4$가 성립할 때, a_6의 값은?

① 5 ② 8 ③ 11
④ 13 ⑤ 16

117. 2008 수능 (3점)

등차수열 $\{a_n\}$이 $a_2 = 3$, $a_5 = 24$일 때, a_7의 값을 구하시오.

118. 2008 수능 (3점)

공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1 + a_5 + a_9 = 45$$

일 때, $a_1 + a_{10}$의 값을 구하시오.

119. 2011 수능 (3점)

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$$

를 만족시킨다. $a_2 = -1$, $a_3 = 2$일 때, 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 10항까지의 합은?[119.]

① 95 ② 90 ③ 85 ④ 80 ⑤ 75

120. 2007 수능 (3점)

수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 10$이고, 수열 $\{a_{n+1} - a_n\}$은 등비수열일 때, a_5의 값을 구하시오.

121. 2008 수능 (3점)

네 수 1, a, b, c는 이 순서대로 공비가 r인 등비수열을 이루고 $\log_8 c = \log_a b$를 만족시킨다. 공비 r의 값은? (단, $r > 1$)

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

122. 2005 수능 (2점)

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 + a_2 = 10$, $a_3 + a_4 + a_5 = 45$가 성립할 때, a_{10}의 값은?

① 39 ② 41 ③ 43
④ 45 ⑤ 47

123. 2005 수능 (3점)

공비가 r이고 $a_2 = 1$인 등비수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제 10항까지의 곱을 $\omega = a_1 a_2 a_3 \cdots a_{10}$이라 할 때, $\log_r \omega$의 값을 구하시오. (단, $r>0$이고 $r \neq 1$이다.)

124. 2007 수능 (3점)

세 수 a, 0, b가 이 순서로 등차수열을 이루고, 세 수 $2b$, a, -7이 이 순서로 등비수열을 이룰 때, a의 값은?

① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

125. 2006 수능 (3점)

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_3=2$, $a_6=16$일 때, a_9의 값을 구하시오.

126. 2010 수능 (3점)

등차수열 $\{a_n\}$이 $a_2+a_4=8$, $a_7=52$를 만족시킬 때, 공차를 구하시오.

127. 2010 수능 (4점)

등비수열 $\{a_n\}$이 $a_2=\frac{1}{2}$, $a_5=\frac{1}{6}$을 만족시킨다.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1} a_{n+2} = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

128. 2010 수능 (4점)

수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. 수열 $\{S_{2n-1}\}$은 공차가 -3인 등차수열이고, 수열 $\{S_{2n}\}$은 공차가 2인 등차수열이다. $a_2=1$일 때, a_8의 값을 구하시오.

129. 2011 수능 (4점)

공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$의 세 항 a_2, a_4, a_9가 이 순서대로 공비 r인 등비수열을 이룰 때, $6r$의 값을 구하시오.

1. 2004 평가원(2점)

$\sum_{k=1}^{10}(k+2)^2$ 의 값은?

① 645 ② 630 ③ 615
④ 600 ⑤ 585

2. 2004 평가원 2점)

$\sum_{k=1}^{10}(k+5)(k-2)-\sum_{k=1}^{10}(k-5)(k+2)$ 의 값을 구하시오.

3. 2006 교육청(2점)

$\sum_{k=1}^{10}(k+1)^2-2\sum_{k=1}^{10}(k+2)+\sum_{k=1}^{10}3$ 의 값은?

① 365 ② 370 ③ 375
④ 380 ⑤ 385

4. 2005 교육청(3점)

수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^{n}a_k=2n^2$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10}a_{2k}$ 의 값은?

① 240 ② 300 ③ 360
④ 420 ⑤ 480

5. 2004 평가원(3점)

$\sum_{k=1}^{30}\{(-1)^k k^2\}$ 의 값을 구하시오.

6. 2005 교육청(3점)

$\sum_{k=1}^{5}(2^k+5k+1)$의 값을 구하시오.

7. 2005 교육청(3점)

$\sum_{k=2}^{10}(k+1)^2-\sum_{k=1}^{10}(k-1)^2$ 의 값을 구하시오.

8. 2006 교육청(3점)

$\sum_{k=1}^{10} a_k = 8$, $\sum_{k=1}^{10} b_k = 10$일 때, $\sum_{k=1}^{10}(2a_k - b_k + 3)$의 값을 구하시오.

9. 2006 교육청(3점)

$\log_{10} 1.23 = \alpha$일 때, $\sum_{k=1}^{9}(-1)^{k-1}\log_{10}(123 \times 10^{k-1})$의 값은?

① $2+\alpha$ ② $3-\alpha$ ③ $4+\alpha$
④ $5-\alpha$ ⑤ $6+\alpha$

10. 2004 평가원(3점)

함수 $f(x) = x + \log_{10} x$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{100} [f(n)]$$

의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① 5055 ② 5060 ③ 5084
④ 5128 ⑤ 5142

11. 2010 평가원(3점)

n이 자연수일 때, x에 대한 이차방정식 $x^2 - 33x + n(n+1) = 0$의 두 근을 α_n, β_n이라 하자. 이때, $\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n}\right)$의 값을 구하시오.

12. 2005 교육청(3점)

자연수 n에 대하여 $[\sqrt[3]{x}] = n$을 만족하는 정수 x의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{5} a_k$의 값을 구하시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

13. 2009 교육청(3점)

자연수 n을 2진법으로 나타냈을 때, 일의 자리의 수를 a_n이라 하자. $\sum_{k=1}^{30} k a_k$의 값은?

① 225 ② 226 ③ 227
④ 228 ⑤ 229

14. 2007 교육청(3점)

<보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고르면?

< 보 기 >

ㄱ. $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$

ㄴ. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\frac{2}{n(n+1)}$

ㄷ. $\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{k}l\right)=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

① ㄱ ② ㄴ
③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. 2008 교육청 3점)

$\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2+2n$ 일 때, $\sum_{k=1}^{3}(a_k+1)^2-\sum_{k=1}^{3}(a_k-1)^2$의 값을 구하시오.

16. 2008 교육청 3점)

수열 $\{a_n\}$은 다음과 같이 3으로 나누어떨어지지 않는 자연수를 작은 수부터 차례로 나열한 것이다.

$1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ \cdots$ 이때 $\sum_{k=1}^{30}a_k$의 값은?

① 675 ② 685
③ 695 ④ 705
⑤ 715

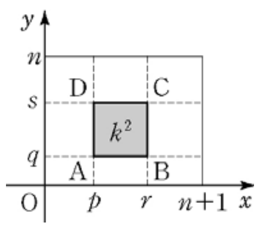
17. 2009 교육청(3점)

n이 2 이상의 자연수일 때, n의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 하자. $\sum_{n=2}^{m}f(n)=33$을 만족시키는 자연수 m의 값은?

① 20 ② 21 ③ 22
④ 23 ⑤ 24

18. 2007 평가원(3점)

자연수 n과 $0 \leq p < r \leq n+1$, $0 \leq q < s \leq n$을 만족시키는 네 정수 p, q, r, s에 대하여 좌표평면에서 네 점 A(p, q), B(r, q), C(r, s), D(p, s)를 꼭짓점으로 하고 넓이가 k^2인 정사각형의 개수를 a_k라고 하자. 다음은 $\sum_{k=1}^{n} a_k$의 값을 구하는 과정이다. (단, k는 n 이하의 자연수이다.)

> 그림과 같이 넓이가 k^2인 정사각형 ABCD를 만들 때, 두 점 A, B의 y좌표가 주어지면 x좌표의 차가 $r-p=k$인 변 AB를 택하는 경우의 수는 $\boxed{\text{(가)}}$이다. 또 두 점 A, D의 x좌표가 주어지면 y좌표의 차가 $s-q=k$인 변 AD를 택하는 경우의 수는 $\boxed{\text{(나)}}$이다. 따라서
>
> 
>
>
> $$a_k = (n+1)(n+2) - (2n+3)k + k^2$$
>
> 이다. 그러므로
>
> $$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \{(n+1)(n+2) - (2n+3)k + k^2\}$$
>
> $$= \boxed{\text{(다)}}$$

(가), (나), (다)에 들어갈 식으로 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	$n-k+1$	$n-k+2$	$\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$
②	$n-k+2$	$n-k+1$	$\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$
③	$n-k+1$	$n-k+2$	$\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$
④	$n-k+2$	$n-k+1$	$\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$
⑤	$n-k+1$	$n-k+2$	$\dfrac{n(n+1)(n+2)}{2}$

19. 2006 평가원(3점)

수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 0$, $a_n + a_{n+1} = n$을 만족시킨다. 다음은 두 자연수 m, n에 대하여 $\sum_{k=n-m+1}^{n+m} a_k$ 의 값을 구하는 과정이다. (단, $m < n$이다.)

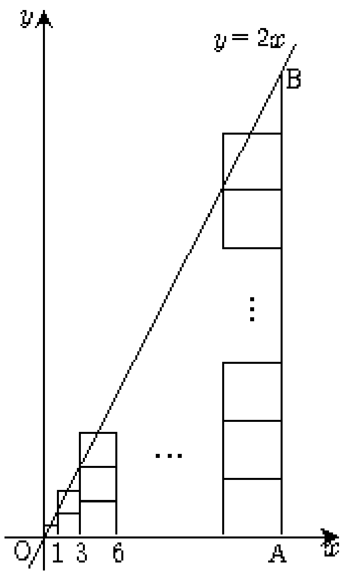
> $$\sum_{k=n-m+1}^{n+m} a_k$$
>
> $$= a_{n-m+1} + a_{n-m+2} + \cdots + a_{n+m-1} + a_{n+m}$$
>
> $$= (n-m+1) + (n-m+3) + \cdots + (n+m-3) + (\boxed{\text{(가)}})$$
>
> $$= \frac{(\boxed{\text{(나)}})\{(n-m+1) + (\boxed{\text{(가)}})\}}{2}$$
>
> $$= \boxed{\text{(다)}}$$

위 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	$n+m-1$	m	mn
②	$n+m-1$	m	n^2
③	$n+m-1$	n	n^2
④	$n+m$	$m-1$	mn
⑤	$n+m$	$n-1$	n^2

20. 2006 교육청(3점)

그림은 직선 $y=2x$와 한 변의 길이가 1인 정사각형 1개, 한 변의 길이가 2인 정사각형 2개, …, 한 변의 길이가 n인 정사각형 n개를 나타낸 것이다. 원점으로부터의 거리가 $1+2+3+\cdots+n$인 x축 위의 점 A를 지나고 y축에 평행인 직선이 $y=2x$와 만나는 점을 B라 하자.



다음은 이를 이용하여 어떤 수열의 합을 구하는 과정이다.

> 모든 정사각형들의 넓이의 합은 직각삼각형 OAB의 넓이와 같으므로,
>
> $\boxed{\text{(가)}} = \frac{1}{2}\times\overline{\text{OA}}\times\overline{\text{AB}}$이다.
>
> $\overline{\text{OA}}=1+2+3+\cdots+n$이고 $\overline{\text{AB}}=\boxed{\text{(나)}}$이다.
>
> 따라서, $\boxed{\text{(가)}}=\boxed{\text{(다)}}$이다.

이 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$	n^2	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
②	$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$	$n(n+1)$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
③	$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$	$n(n+1)$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
④	$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$	$n(n+1)$	$\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$
⑤	$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$	n^2	$\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

21. 2009 교육청(3점)

다음은 등식

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)(k+3)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}$$ 가

성립함을 증명한 것이다.

> [증명]
>
> $$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)(k+3)$$
>
> $$=\sum_{k=1}^{n}\boxed{\text{(가)}}$$
>
> $$=4!\left\{\frac{4!}{4!0!}+\frac{5!}{4!1!}+\cdots+\frac{(n+3)!}{4!(n-1)!}\right\}$$
>
> $$=4!\cdot\sum_{k=1}^{n}\boxed{\text{(나)}}$$
>
> $$=4!\cdot\boxed{\text{(다)}}$$
>
> $$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}$$

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

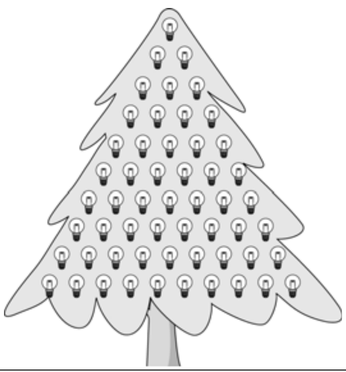
	(가)	(나)	(다)
①	$\frac{(k+2)!}{(k-1)!}$	${}_{k+2}\mathrm{C}_3$	${}_{n+3}\mathrm{C}_4$
②	$\frac{(k+2)!}{(k-1)!}$	${}_{k+2}\mathrm{C}_3$	${}_{n+4}\mathrm{C}_5$
③	$\frac{(k+3)!}{(k-1)!}$	${}_{k+2}\mathrm{C}_3$	${}_{n+3}\mathrm{C}_4$
④	$\frac{(k+3)!}{(k-1)!}$	${}_{k+3}\mathrm{C}_4$	${}_{n+3}\mathrm{C}_4$
⑤	$\frac{(k+3)!}{(k-1)!}$	${}_{k+3}\mathrm{C}_4$	${}_{n+4}\mathrm{C}_5$

22. 2007 평가원(3점)

수열 $\{a_n\}$이 $a_1=3$이고 $a_{n+1}-a_n=4n-3$일 때, a_{10}의 값을 구하시오.

23. 2008 평가원(3점)

그림과 같이 나무에 55개의 전구가 맨 위 첫 번째 줄에는 1개, 두 번째 줄에는 2개, 세 번째 줄에는 3개, …, 열 번째 줄에는 10개가 설치되어 있다. 전원을 넣으면 이 전구들은 다음 규칙에 따라 작동한다.



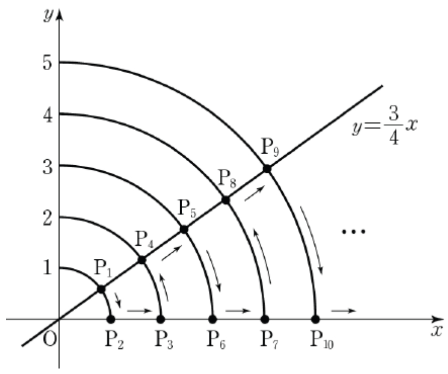
(가) n이 10 이하의 자연수일 때, n번째 줄에 있는 전구는 n초가 되는 순간 처음 켜진다. (나) 모든 전구는 처음 켜진 후 1초 간격으로 꺼짐과 켜짐을 반복한다.

전원을 넣고 n초가 되는 순간 켜지는 모든 전구의 개수를 a_n이라고 하자. 예를 들어 $a_1=1,\ a_2=2,\ a_4=6,\ a_{11}=25$ 이다. $\sum_{n=1}^{14} a_n$의 값은?

① 215 ② 220 ③ 225
④ 230 ⑤ 235

24. 2009 평가원(3점)

다음 그림은 좌표평면에서 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1부터 1씩 증가하는 원들이 두 직선 $y=\frac{3}{4}x$, $y=0$과 각각 만나는 점들의 일부를 P_1부터 시작하여 화살표 방향을 따라 $P_1, P_2, P_3, \cdots$으로 나타낸 것이다.



점 P_{25}의 x좌표는?

① $\frac{52}{5}$ ② 11 ③ $\frac{56}{5}$
④ 12 ⑤ $\frac{64}{5}$

25. 2008 교육청(3점)

수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 정의하자.

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}10^{k-1}\ \ (n=1, 2, 3, \cdots)$$

a_n을 3으로 나눈 나머지를 b_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{30} b_n$의 값은?

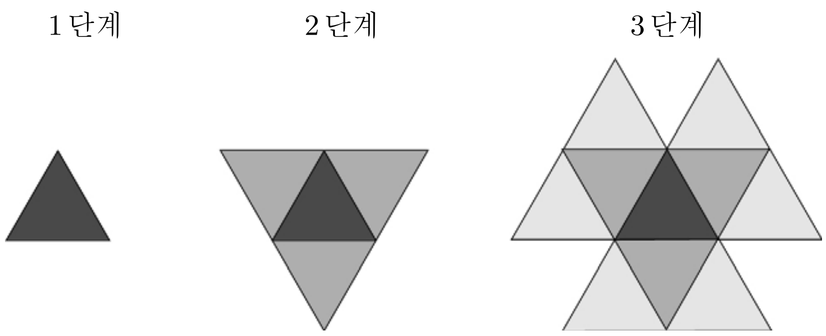
① 30 ② 31 ③ 32
④ 33 ⑤ 34

26. 2006 평가원(3점)

그림과 같이 넓이가 1인 정삼각형 모양의 타일을 다음과 같은 규칙으로 붙인다.

> [1단계] 정삼각형 모양의 타일을 한 개 붙인다.
> [n단계] $n-1$단계에서 붙여진 타일의 바깥쪽 테두리의 각 변에 정삼각형 모양의 타일을 붙인다.

이와 같이 10단계를 시행했을 때, 타일로 덮인 부분의 전체의 넓이를 구하시오.



27. 2010 교육청(3점)

그림과 같이 자연수를 다음 규칙에 따라 나열하였다.

> [규칙1] 1행에는 2, 3, 6의 3개의 수를 차례대로 나열한다.
> [규칙2] $n+1$행에 나열된 수는 1열에 2, 2열부터는 n행에 나열된 각 수에 2를 곱하여 차례대로 나열한다.

	[1열]	[2열]	[3열]	[4열]	[5열]	⋯
[1행]	2	3	6			
[2행]	2	4	6	12		
[3행]	2	4	8	12	24	
⋮			⋮			

10행에 나열된 모든 자연수의 합을 S라 할 때, $S=p\times2^9-2$이다. 이 때, p의 값을 구하시오.

28. 2007 평가원(3점)

$a_1=2$, $a_{n+1}=10a_n+81$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$로 정의된 수열 $\{a_n\}$이 있다. 이때 a_{10}의 각 자리의 수의 합은?

① 68 ② 70 ③ 72
④ 74 ⑤ 76

29. 2010 평가원 (3점)

수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1=2,\ a_{n+1}=3a_n-3\ (n=1,2,3,\cdots)$$

이 성립할 때, a_6-a_5의 값은?29.

① 27 ② 81 ③ 243
④ 729 ⑤ 2187

30. 2010 교육청(3점)

$a_1=5$, $a_{n+1}=a_n^{\ 5}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\log_5 a_{10}$은 m자리 정수이다. 이 때, m의 값을 구하시오.
(단, $\log 2=0.3010$으로 계산한다.)

31. 2005 교육청(3점)

다음과 같이 정의되는 수열 $\{a_n\}$이 있다.
$a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=4$ 이고

$a_{n-1}\cdot a_{n+1}=a_n\cdot a_{n+2}\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ 이때, $\sum_{n=1}^{20}a_n$의 값은?

① 45 ② 50
③ 55 ④ 60
⑤ 65

32. 2006 평가원(3점)

수열 $\{a_n\}$이
$a_1=1$

$$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{2}a_n & (a_n\geqq 2)\\ \sqrt[3]{2}\,a_n & (a_n<2)\end{cases}$$

를 만족시킬 때, a_{112}의 값은?

① 1 ② $\sqrt[3]{2}$
③ $\sqrt{2}$ ④ $\sqrt[3]{4}$
⑤ 2

33. 2006 교육청(3점)

다음 규칙을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

Ⅰ. $a_1 = 2$
Ⅱ. a_{n+1}은 $3a_n$을 5로 나눈 나머지이다.

이 수열에서 $a_{13} + a_{40}$의 값은?

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

34. 2009 교육청(3점)

자연수 n에 대하여 n^2을 6으로 나눈 나머지를 a_n이라 할 때, $a_n = 4$를 만족시키는 100 이하의 자연수 n의 개수를 구하시오.

35. 2006 평가원(3점)

자연수 n에 대하여 점 $\mathrm{P_n}$이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점일 때, 점 $\mathrm{P_{n+1}}$을 다음 규칙에 따라 정한다. (단, 점 $\mathrm{P_n}$은 좌표축 위의 점이 아니다.)

(가) 점 $\mathrm{P_n}$이 제1사분면 위의 점이면, 점 $\mathrm{P_{n+1}}$은 점 $\mathrm{P_n}$을 원 위의 호를 따라 시계 반대 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 이동시킨 점이다.
(나) 점 $\mathrm{P_n}$이 제2사분면 또는 제4사분면 위의 점이면, 점 $\mathrm{P_{n+1}}$은 점 $\mathrm{P_n}$을 x축에 대하여 대칭이동시킨 점이다.
(다) 점 $\mathrm{P_n}$이 제3사분면 위의 점이면, 점 $\mathrm{P_{n+1}}$은 점 $\mathrm{P_n}$을 y축에 대하여 대칭이동시킨 점이다.

점 $\mathrm{P_1}$의 좌표가 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$일 때, 점 $\mathrm{P_{2007}}$의 좌표는?

① $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$　② $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$　③ $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$　④ $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$　⑤ $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

36. 2005 평가원(3점)

수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. (단, $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < \ldots$ 이다.)

$$a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ (S_{n+1} - S_{n-1})^2 = 4a_n a_{n+1} + 4$$

$(n = 2, 3, 4, \ldots)$일 때, a_{20}의 값은?

① 39　② 43　③ 47　④ 51　⑤ 55

37. 2009 평가원(3점)

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n=n^2+2^n$일 때, a_1+a_5의 값은?

① 26 ② 28 ③ 30
④ 32 ⑤ 34

38. 2008 평가원(3점)

수열 $\{a_n\}$에서 $a_n=3+(-1)^n$일 때, 좌표평면 위의 점 P_n을

$$\mathrm{P}_n\left(a_n\cos\frac{2n\pi}{3},\ a_n\sin\frac{2n\pi}{3}\right)$$

라 하자. 점 P_{2009}와 같은 점은?

① P_1 ② P_2 ③ P_3
④ P_4 ⑤ P_5

39. 2007 교육청(3점)

다음은 $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$일 때, A^n을 구하는 과정이다.

< 다 음 >

모든 자연수 n에 대하여 $A^n=\begin{pmatrix}a_n&b_n\\c_n&d_n\end{pmatrix}$이라 하자.

행렬의 곱셈에 대한 결합법칙이 성립하여

$A^{n+1}=A\cdot A^n=A^n\cdot A$이므로

$$\begin{pmatrix}a_{n+1}&b_{n+1}\\c_{n+1}&d_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n&b_n\\c_n&d_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_n+c_n&b_n+d_n\\2c_n&2d_n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_n&b_n\\c_n&d_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_n&a_n+2b_n\\c_n&c_n+2d_n\end{pmatrix}\text{이다.}$$

따라서 $\begin{cases}a_{n+1}=a_n+c_n=a_n\\ b_{n+1}=b_n+d_n=a_n+2b_n\\ c_{n+1}=2c_n=c_n\\ d_{n+1}=2d_n=c_n+2d_n\end{cases}$ 이므로

$b_{n+1}=2b_n+$ (가) 이고, $d_{n+1}=$ (나) 이다.

$\therefore A^n=$ (다) 이다.

이 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	$\frac{1}{2}$	2^n	$\begin{pmatrix}1&2^n-1\\0&2^{n+1}\end{pmatrix}$
②	$\frac{1}{2}$	2^{n+1}	$\begin{pmatrix}1&2^{n+1}\\0&2^n-1\end{pmatrix}$
③	1	2^n	$\begin{pmatrix}1&2^n-1\\0&2^{n+1}\end{pmatrix}$
④	1	2^{n+1}	$\begin{pmatrix}1&2^n-1\\0&2^n\end{pmatrix}$
⑤	1	2^{n+1}	$\begin{pmatrix}1&2^n\\0&2^n-1\end{pmatrix}$

40. 2004 평가원(3점)

다음은 $n \geqq 2$ 인 자연수 n 에 대하여 부등식

$2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$ 이 성립함을 증명하는 과정이다.

< 증 명 >

(i) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + {}_nC_1\frac{1}{n} + {}_nC_2\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \dots + {}_nC_n\left(\frac{1}{n}\right)^n$

$\geqq 1 + 1 + {}_nC_2\left(\frac{1}{n}\right)^2$

$= 2 +$ (가) > 2 ($\because n \geqq 2$)

(ii) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + {}_nC_1\frac{1}{n} + {}_nC_2\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \dots + {}_nC_n\left(\frac{1}{n}\right)^n$

$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}(\qquad) + \frac{1}{3!}($ 나 $) + \dots + \frac{1}{n!}(\qquad)$

$< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$

그런데 $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k \geqq 2^{k-1}$ 이므로 $\frac{1}{k!} \leqq \frac{1}{2^{k-1}}$

$\therefore \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 + \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$

$= 3 -$ (다) < 3

(i), (ii)에 의하여 $n \geqq 2$ 인 자연수 n 에 대하여

부등식 $2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$ 이 성립한다.

위의 증명과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례로 나열하면?

① $\frac{n-1}{2n}$, $\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)$, $\left(\frac{1}{2}\right)^n$

② $\frac{n+1}{2n}$, $\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)$, $\left(\frac{1}{2}\right)^n$

③ $\frac{n-1}{2n}$, $\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)$, $\left(\frac{1}{2}\right)^n$

④ $\frac{n+1}{2n}$, $\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

⑤ $\frac{n-1}{2n}$, $\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

41. 2005 교육청(3점)

다음은 모든 자연수 n 에 대하여 부등식

$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \geqq 2\left\{\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}\right\}$ 이

성립함을 수학적 귀납법으로 증명하는 과정이다.

< 증 명 >

(i) $n=1$ 일 때, (좌변)$= 1 \geqq 2 \times \frac{1}{1 \cdot 2} =$ (우변)이므로

주어진 부등식은 성립한다.

(ii) $n = k\,(k \geqq 1)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k} \geqq 2\left\{\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)}\right\}$$

이 식의 양변에 $\frac{1}{k+1}$ 을 더하면

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}$$

$$\geqq 2\left\{\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)}\right\} + \frac{1}{k+1}$$

$$\geqq 2\left\{\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)}\right\} + \frac{1}{k+2}$$

$$= 2\left\{\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)}\right\} + \frac{1}{k+1} \cdot (\text{ 가 })$$

$$\geqq 2\left\{\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)}\right\} + \frac{(\text{ 나 })}{(k+1)(k+2)}$$

$$= 2\left\{\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$

$\therefore\ 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k+1}$

$$\geqq 2\left\{\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$

따라서 $n = k+1$ 일 때도 주어진 부등식은 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 내용을 바르게 짝지은 것은?

① $\frac{1}{k+1}$, 1

② $\frac{1}{k+1}$, 2

③ $\frac{1}{k+2}$, 1

④ $\frac{k+1}{k+2}$, 1

⑤ $\frac{k+1}{k+2}$, 2

42. 2009 교육청(3점)

다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>

i) $n=1$일 때,

(좌변)=(우변)= $\boxed{(가)}$ 이므로 주어진 등식은 성립한다.

ii) $n=k(k\geq 1)$일 때, 성립한다고 가정하면

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}$$
$$=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}\text{이다.}$$

$n=k+1$일 때,

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\boxed{(나)}$$
$$=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}+\boxed{(나)}$$
$$=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k+1}+\boxed{(다)}$$
$$=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}\text{이다.}$$

그러므로 $n=k+1$일 때도 성립한다.

따라서 i), ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식은 성립한다.

이 증명에서 (가)~(다)에 알맞은 것을 바르게 짝지은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	1	$\frac{1}{2k+2}$	$\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+2}$
②	1	$\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}$	$\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2k+2}$
③	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2k+2}$	$\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+2}$
④	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}$	$\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2k+2}$
⑤	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}$	$\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+2}$

43. 2005 교육청(3점)

2 이상의 자연수 n 에 대하여 부등식 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>2$ 가 성립함이 알려져 있다.

다음은 이 사실을 이용하여 n 이 6 이상의 자연수일 때, 부등식 $\left(\frac{n}{2}\right)^n>n!$ 이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다. (단, $n!=1\times 2\times 3\times\cdots\times n$)

< 증 명 >

(i) $n=6$ 일 때,

$3^6=729$, $6!=720$ 이므로 성립한다.

(ii) $n=k\,(k\geq 6\,)$일 때 성립한다고 가정하면

$$\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}=\frac{k+1}{2^{k+1}}\cdot\frac{(k+1)^k}{k^k}\cdot(\quad)$$
$$=\frac{k+1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\cdot(\text{ 가 })$$
$$>\frac{k+1}{2}\cdot(\text{ 나 })=(\quad)\text{ 이므로 } n=k+1 \text{ 일 때도}$$

성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 6 이상의 모든 자연수에
대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① k^k, $(k+1)!$ ② k^k, $2k!$

③ k^k, $k!$ ④ $\left(\frac{k}{2}\right)^k$, $(k+1)!$

⑤ $\left(\frac{k}{2}\right)^k$, $2k!$

44. 2009 교육청(3점)

수열 $\{a_n\}$을

$$\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \,(n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

라고 정의할 때, 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} & a_{n+1} \\ a_{n+1} & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1} \quad \cdots\cdots (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(단, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2$, $\cdots$

[증 명]

(ⅰ) $n=1$일 때,

(좌변)$= \begin{pmatrix} a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} = \boxed{(가)}$ (우변)$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \boxed{(가)}$

이므로 (*)은 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$\begin{pmatrix} a_{k+2} & a_{k+1} \\ a_{k+1} & a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{k+1}$ 이다.

$n=k+1$일 때,

$$\begin{pmatrix} a_{k+3} & a_{k+2} \\ a_{k+2} & a_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{(나)} & a_{k+1}+a_k \\ a_{k+2} & a_{k+1} \end{pmatrix} = \boxed{(다)}\begin{pmatrix} a_{k+2} & a_{k+1} \\ a_{k+1} & a_k \end{pmatrix}$$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{k+2}$ 이다.

그러므로 $n=k+1$일 때에도 (*)이 성립한다.

따라서 (ⅰ),(ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 (*)이 성립한다.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$ 이다.)

이 증명에서 (가)~(다)에 알맞은 것을 바르게 짝지은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$a_{k+1}+a_k$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
②	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$a_{k+2}+a_{k+1}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
③	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$a_{k+2}+a_{k+1}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
④	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$a_{k+2}+a_{k+1}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
⑤	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$a_{k+1}+a_k$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

45. 2006 평가원(3점)

다음은 모든 자연수 n에 대하여 $2^{n+1} > n(n+1)+1$이 성립함을 증명한 것이다.

< 증 명 >

(ⅰ) $n=1$일 때, $4 > 2+1$

$n=2$일 때, $8 > 6+1$이므로 성립한다.

(ⅱ) $n=k(k \geq 2)$일 때, $2^{k+1} > \boxed{(가)} + 1$ …㉠ 이 성립한다고 가정하자.

㉠의 양변에 2를 곱하면

$2^{k+2} > 2(k^2+k+1)$

이때, $2(k^2+k+1) - \boxed{(나)} = k^2-k-1$

$k \geq 2$일 때, $k^2-k-1 \boxed{(다)} 0$이므로

$2^{k+2} > 2(k^2+k+1) > \boxed{(나)}$

$\therefore\ 2^{k+2} > \boxed{(나)}$

따라서 $n=k+1$일 때도 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $2^{n+1} > n(n+1)+1$이 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	$k(k-1)$	$(k+1)(k+2)$	$<$
②	$k(k+1)$	$(k+1)(k+2)$	$>$
③	$k(k-1)$	$\{(k+1)(k+2)+1\}$	$>$
④	$k(k-1)$	$\{(k+1)(k+2)+1\}$	$<$
⑤	$k(k+1)$	$\{(k+1)(k+2)+1\}$	$>$

46. 2008 교육청(3점)

자연수 n에 대하여 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ 로 정의한다.

다음은 2 이상인 모든 자연수 n에 대하여 등식

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} = n(a_n - 1)$$

이 성립함을 증명한 것이다.

< 증 명 >

(1) $n=2$ 일 때, (좌변)$=$(우변)$=$ $\boxed{\text{(가)}}$ 이므로 주어진 등식은 성립한다.

(2) $n=k$ 일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{k-1} = k(a_k - 1)$$

양변에 a_k 를 더하면

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k = \boxed{\text{(나)}}$$

그런데 $a_k = a_{k+1} - \boxed{\text{(다)}}$ 이므로

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k = (k+1)(a_{k+1} - 1)$$

그러므로 $n=k+1$일 때도 성립한다.

따라서 2 이상인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식은 성립한다.

위 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	1	$ka_{k+1} - k$	$\frac{1}{k}$
②	1	$(k+1)a_k - k$	$\frac{1}{k+1}$
③	1	$(k+1)a_k - k$	$\frac{1}{k}$
④	$\frac{3}{2}$	$ka_{k+1} - k$	$\frac{1}{k+1}$
⑤	$\frac{3}{2}$	$(k+1)a_k - k$	$\frac{1}{k+1}$

47. 2009 교육청(3점)

다음은 모든 자연수 n에 대하여 등식

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \quad \cdots\cdots (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

< 증 명 >

$S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ 이라 하자.

(1) $n=1$일 때, $S_1 = \boxed{\text{(가)}} = T_1$ 이므로 $(*)$이 성립한다.

(2) $n=m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$S_{m+1} = S_m + \boxed{\text{(나)}}$$

$$T_{m+1} = \frac{1}{m+2} + \frac{1}{m+3} + \frac{1}{m+4} + \cdots + \frac{1}{2m+2}$$

$$= T_m - \boxed{\text{(다)}} + \frac{1}{2m+1} + \frac{1}{2m+2}$$

$$= T_m + \boxed{\text{(나)}}$$

이므로 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

위 증명에서 (가), (나), (다)에 들어갈 것으로 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	1	$\frac{1}{2m+1}$	$\frac{1}{m}$
②	1	$\frac{1}{2m+1}$	$\frac{1}{m+1}$
③	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2m+1} - \frac{1}{2m+2}$	$\frac{1}{m+1}$
④	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2m+1} - \frac{1}{2m+2}$	$\frac{1}{m}$
⑤	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2m+1}$	$\frac{1}{m+1}$

48. 2009 교육청(3점)

모든 항이 양수인 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

를 만족할 때, 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{a_k+b_k} \geq \boxed{\text{(다)}} \sum_{k=1}^{n} a_k$$ 이 성립함을 증명한 것이다.

< 증 명 >

절대부등식 $(x+y)^2 \geq 4xy$를 이용하면

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k b_k}{a_k+b_k} \leq \sum_{k=1}^{n} \boxed{\text{(가)}} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

이 성립한다.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{{a_k}^2}{a_k+b_k} = \sum_{k=1}^{n} \boxed{\text{(나)}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k b_k}{a_k+b_k}$$

$$\geq \boxed{\text{(다)}} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

따라서, 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{{a_k}^2}{a_k+b_k} \geq \boxed{\text{(다)}} \sum_{k=1}^{n} a_k$$ 이 성립한다.

(단, 등호는 $a_k = b_k$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$일 때 성립한다.)

위 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	$\frac{1}{4}(a_k+b_k)$	a_k	$\frac{1}{2}$
②	$\frac{1}{2}(a_k+b_k)$	a_k	$\frac{1}{2}$
③	$\frac{1}{4}(a_k+b_k)$	a_k	$\frac{1}{4}$
④	$\frac{1}{2}(a_k+b_k)$	a_k^2	$\frac{1}{4}$
⑤	$\frac{1}{4}(a_k+b_k)$	a_k^2	$\frac{1}{4}$

49. 2010 평가원(3점)

다음은 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$(n!)^2 \cdot 4^n > (2n)!$ ……㉠

이 성립함을 증명한 것이다.

< 증 명 >

(1) $n=1$일 때, (좌변)$=4$, (우변)$=$ $\boxed{\text{(가)}}$
 이므로 ㉠이 성립한다.

(2) $n=k$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$(k!)^2 \cdot 4^k > (2k)!$ ……㉡

이다. $n=k+1$일 때 ㉠이 성립함을 보이자.

㉡의 양변에 $\boxed{\text{(나)}}$ 를 곱하면

$$\{(k+1)!\}^2 \cdot 4^{k+1} > \left(\boxed{\text{(나)}}\right)(2k)!$$
$$> (2k+2)\left(\boxed{\text{(다)}}\right)(2k)!$$
$$= (2k+2)!$$

따라서 $n=k+1$일 때에도 ㉠은 성립한다.

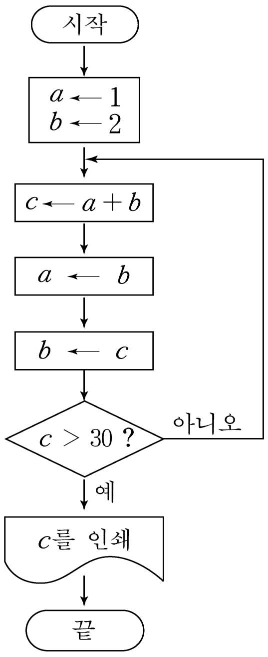
그러므로 (1), (2)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	1	$4(k+1)^2$	$2k$
②	1	$2(k+1)^2$	$2k$
③	2	$4(k+1)^2$	$2k+1$
④	2	$2(k+1)^2$	$2k+1$
⑤	2	$4(k+1)^2$	$2k$

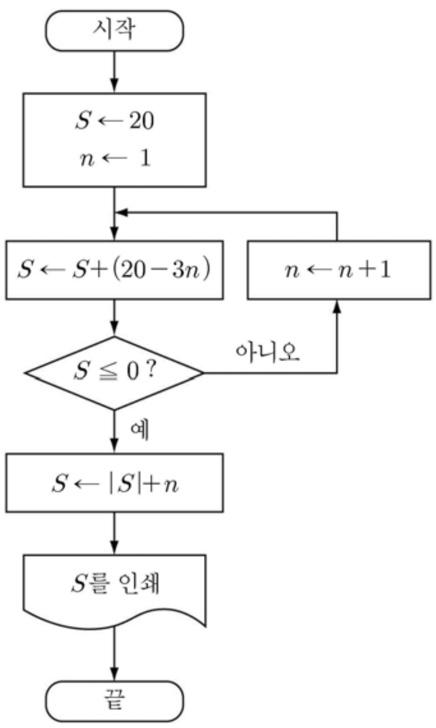
50. 2005 평가원(3점)

다음 순서도에서 인쇄되는 c의 값을 구하시오.



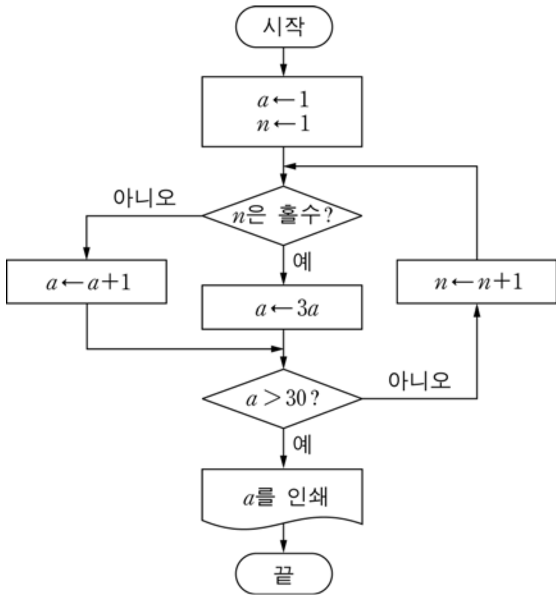
51. 2010 교육청(3점)

다음 순서도에서 인쇄되는 S의 값을 구하시오.



52. 2008 평가원(3점)

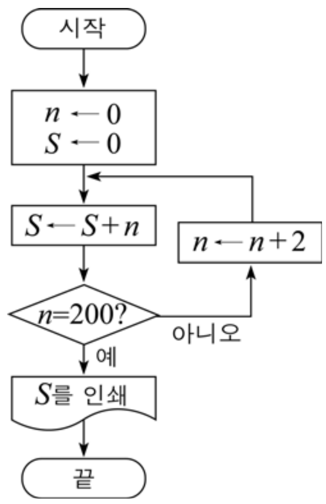
다음 순서도에서 인쇄되는 a의 값을 구하시오.



53. 2008 교육청(3점)

다음 순서도에서 인쇄되는 S의 값은?

① 5050
② 7540
③ 9900
④ 10100
⑤ 20200



54. 2008 교육청(4점)

1부터 n 까지 자연수의 합을 S_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{20}[\log_{10} S_n]$의 값을 구하시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

55. 2009 교육청(4점)

$\sum_{k=1}^{12}k^2+\sum_{k=2}^{12}k^2+\sum_{k=3}^{12}k^2+\cdots+\sum_{k=12}^{12}k^2$의 값은?

① 3376 ② 4356 ③ 5324
④ 5840 ⑤ 6084

56. 2009 교육청 4점)

두 함수 $f(x)=2^x$ 과 $g(x)=x-[x]$ 에 대하여 합성함수 $y=(f\circ g)(x)$ 의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{n}x+2$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$의 교점의 개수를 a_n 이라 하자. 이때, $\sum_{n=1}^{10}a_n$ 의 값을 구하시오. (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

57. 2009 평가원(4점)

수열 $\{a_n\}$에서 $a_n=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$일 때, $\sum_{n=1}^{2010}na_n$의 값은?

① -2011 ② -2010 ③ 0
④ 2010 ⑤ 2011

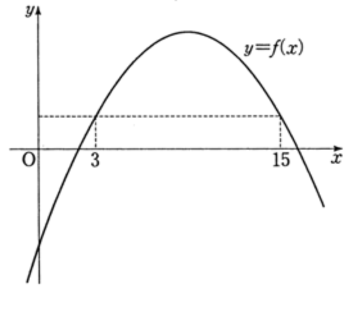
58. 2005 교육청 4점)

$n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times2\times1$ 일 때, $\sum_{n=1}^{100}(n!+n)$ 의 일의 자리 수는?

① 0 ② 3
③ 6 ④ 8
⑤ 9

59. 2009 평가원(4점)

함수 $y=f(x)$는 $f(3)=f(15)$를 만족하고, 그 그래프는 그림과 같다. 모든 자연수 n 에 대하여 $f(n)=\sum_{k=1}^{n}a_k$인 수열 $\{a_n\}$이 있다. m이 15 보다 작은 자연수일 때, $a_m+a_{m+1}+\cdots+a_{15}<0$을 만족시키는 m의 최솟값을 구하시오.



60. 2005 교육청(4점)

서로 다른 자연수 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 에 대하여 ${a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2 + \cdots + {a_n}^2 = 2340$ 을 만족시키는 n 의 최댓값을 찾는 과정이다.

< 증 명 >

$\sum_{k=1}^{m} k^2 > 2340$ 을 만족시키는 자연수의 m 의 최솟값은 (가)이다.

따라서, ${a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2 + \cdots + {a_n}^2 = 2340$ 을 만족시키는 n 의 최댓값은 (가)보다 작거나 같다.

한편, $\sum_{k=1}^{20} k^2 - (19^2 + (\text{ 나 })) = 2340$ 이므로 n 의 최댓값은 (다)이다.

위 과정에서 (가), (다)에 들어갈 내용을 바르게 짝지은 것은?

① 19 , 17 ② 19 , 18
③ 20 , 18 ④ 20 , 19
⑤ 20 , 20

61. 2010 평가원(4점)

수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 1$이고, $a_n = n^2 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)a_k \ (n \geq 2)$를 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정의 일부이다.

주어진 식으로부터 $a_2 = 7$이다.

자연수 $n\ (n \geq 3)$에 대하여

$a_n = n^2 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)a_k = n^2 + \sum_{k=1}^{n-2}(2k+1)a_k + (2n-1)a_{n-1}$

$= n^2 + a_{n-1} - \boxed{(가)} + (2n-1)a_{n-1}$이므로,

$a_n + 1 = 2n(a_{n-1}+1)$이 성립한다. 따라서

$a_n + 1 = n \times (n-1) \times \cdots \times 3 \times \boxed{(나)} \times (a_2 + 1)$

$= 4 \times n! \times \boxed{(나)}$이다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(n)$, (나)에 알맞은 식을 $g(n)$이라 할 때, $f(9) \times g(9)$의 값은?

① 2^{13} ② 2^{14} ③ 2^{15}
④ 2^{16} ⑤ 2^{17}

62. 2006 교육청(4점)

다음은 임의의 자연수 n 에 대하여 $a_n > 0$ 이고 $\sum_{k=1}^{n} a_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2$ 이면 $a_n = \boxed{(가)}$ 임을 증명하는 과정이다.

< 증 명 >

임의의 자연수 n에 대하여 $a_n > 0$ 이고

$\sum_{k=1}^{n} a_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2$ 이므로

$a_{k+1}^3 = \sum_{i=1}^{k+1} a_i^3 - \sum_{i=1}^{k} a_i^3$

$= \left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)^2$

$= \left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i - \sum_{i=1}^{k} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i + \sum_{i=1}^{k} a_i\right)$

$= \boxed{(나)}\left(\boxed{(나)} + 2\sum_{i=1}^{k} a_i\right)$

$\therefore a_{k+1}^2 = a_{k+1} + 2\sum_{i=1}^{k} a_i$ .... ①

즉, $a_k^2 = a_k + 2\sum_{i=1}^{k-1} a_i$ .... ②

①과 ②에서 $a_{k+1}^2 - a_k^2 = \boxed{(다)}$

따라서 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

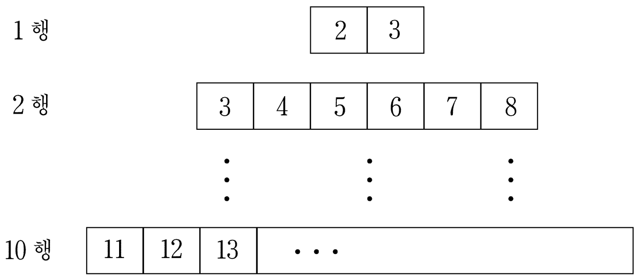
$\therefore a_n = \boxed{(가)}$

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	$a_n = 2n$	a_{k+1}	$a_{k+1} + a_k$
②	$a_n = 2n$	a_k	$a_{k+1} - a_k$
③	$a_n = n$	a_{k+1}	$a_{k+1} - a_k$
④	$a_n = n$	a_k	$a_{k+1} + a_k$
⑤	$a_n = n$	a_{k+1}	$a_{k+1} + a_k$

63. 2005 평가원(4점)

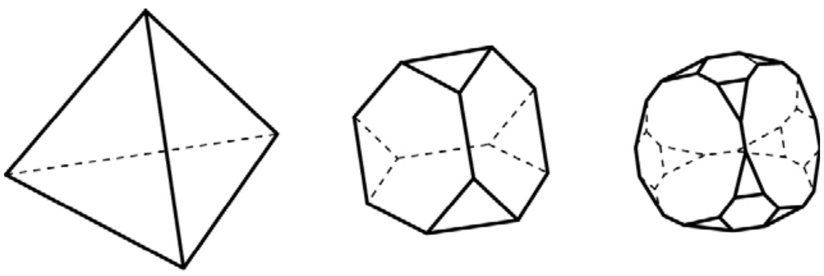
그림과 같이 자연수 k 에 대하여 $[\log_{k+1} x] = 1$ 을 만족시키는 자연수 x 를 k 행에 차례로 배열할 때, k 행에 배열된 자연수의 개수를 a_k 라 하자. $\sum_{k=1}^{10} a_k$ 의 값을 구하시오. (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)



64. 2010 평가원(4점)

정사면체 T_1 의 모든 모서리의 삼등분점을 잡는다. T_1 의 각 꼭짓점에서 가까운 삼등분점 3개와 그 꼭짓점을 모두 이어서 만든 사면체 4개를 잘라내어 팔면체 T_2 를 만든다.

다시 팔면체 T_2 의 모든 모서리의 삼등분점을 잡는다. T_2 의 각 꼭짓점에서 가까운 삼등분점 3개와 그 꼭짓점을 모두 이어서 만든 사면체 12개를 잘라내어 이십면체 T_3 을 만든다.



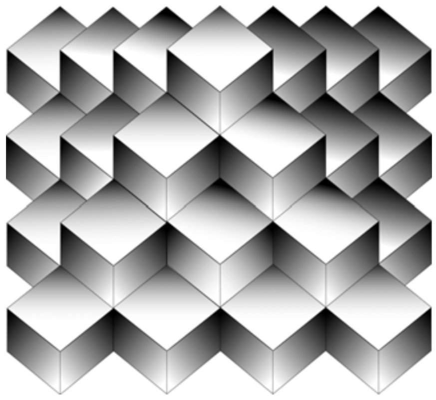
T_1 T_2 T_3

이와 같은 방법으로 다면체 T_4, T_5, T_6 을 만들 때, 다면체 T_6 의 면의 개수는?64.

① 480 ② 482 ③ 484
④ 486 ⑤ 488

65. 2004 평가원(4점)

그림과 같은 모양의 4층 탑을 쌓았을 때, 크기가 같은 44개의 정육면체가 필요하였다. 이와 같은 규칙으로 10층 탑을 쌓으려고 할 때, 필요한 정육면체의 총 개수를 구하면?



① 650 ② 670 ③ 690
④ 710 ⑤ 730

66. 2007 교육청(4점)

수열 $\{a_n\}$이

$$\begin{cases} a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_3 = 5,\ a_4 = 7 \\ a_{k+4} = 2a_k \ \ (k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

으로 정의될 때, $\sum_{k=1}^{20} a_k$의 값을 구하시오.

67. 2010 평가원(4점)

수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{6} a_k$의 값은?

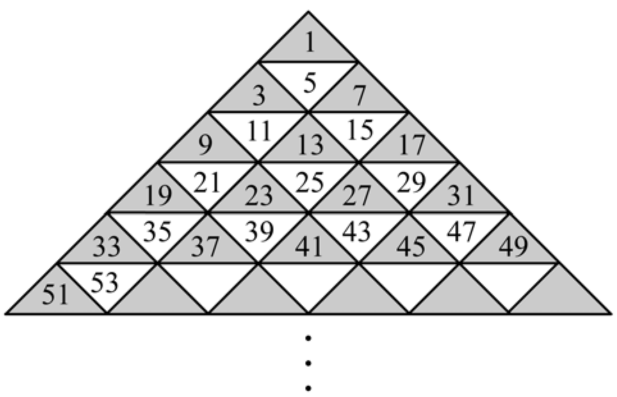
(가) $a_1 = 1$

(나) $\{a_n\}$의 계차수열 $\{b_n\}$에 대하여 $b_n = a_n$이다.

① 57 ② 60 ③ 63
④ 66 ⑤ 69

68. 2006 교육청(4점)

그림과 같이 홀수를 삼각형 모양으로 배열하고 어두운 부분에 있는 수를 크기순으로 나열하여 수열
1, 3, 7, 9, 13, 17, 19, ⋯ 을 만들었다. 이 수열의 제 66 항을 구하시오.



69. 2005 교육청(4점)

x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 4x - (2n-1)(2n+1) = 0$ 의 두 근 α_n, β_n 에 대하여 $\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n}\right)$ 의 값은?

① $\frac{11}{21}$ ② $\frac{20}{21}$
③ $\frac{31}{21}$ ④ $\frac{40}{21}$
⑤ $\frac{50}{21}$

70. 2005 교육청(4점)

다음 수열에서 $\frac{4}{27}$ 는 제 몇 번째 항인가?

$$\frac{1}{1},\ \frac{3}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{5}{5},\ \frac{4}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{1}{5},\ \frac{7}{7},\ \frac{6}{7},\ \cdots$$

① 169 ② 173
③ 186 ④ 193
⑤ 196

71. 2005 교육청(4점)

$a_1 = 20$, $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 10\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_{100} 에 가장 가까운 정수는?

① 7 ② 9
③ 11 ④ 15
⑤ 19

72. 2004 평가원(4점)

수열 $\{a_n\}$에서 $a_1=\frac{1}{2}$, $a_{n+1}=\frac{a_n}{3a_n+1}$일 때, a_{20}은?

① $\frac{1}{59}$ ② $\frac{1}{29}$
③ 1 ④ 29
⑤ 59

73. 2010 평가원(4점)

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=2$이고,

$$a_{n+1}=a_n+(-1)^n\frac{2n+1}{n(n+1)} \quad (n\geq 1)$$

을 만족시킨다. $a_{20}=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

74. 2005 교육청(4점)

$a_1=2$, $a_2=1$, $a_{n+1}a_n-2a_{n+2}a_n+a_{n+1}a_{n+2}=0$
$(n=1, 2, 3, \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여
$\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{a_k}$의 값을 구하시오.

75. 2008 교육청(4점)

실수 x에 대하여
$1,\ 1,\ 1+x,\ 1,\ 1+x,\ 1+x+x^2,\ 1,\ \cdots$
로 나열된 수열의 제 n항을 $f_n(x)$라 할 때, $f_{50}(1)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

76. 2008 교육청(4점)

그림은 직사각형 모양을 이루고 있는 (5×100)개의 칸에 다음 규칙에 따라 수를 나열한 것이다.

(가) 제 1행에는 1, 2, 3, ⋯, 100을 차례로 나열하고, 각 행의 첫 칸에는 모두 1을 나열한다.
(나) 그림에 있는 (2×2)개의 칸으로 이루어진 임의의 직사각형 $\begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline\end{array}$ 에서 등식 $d=|b-c|$가 성립하도록 한다.
예를 들면 $\begin{array}{|c|c|}\hline 4 & 5 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline\end{array}$ 에서 $3=|5-2|$가 성립한다.

제 1행	1	2	3	4	5	6	⋯	100
제 2행	1	1	2	2	3	3	⋯	50
제 3행	1	0	2	0	3	0	⋯	0
제 4행	1	1	1	1	2	2	⋯	25
제 5행	1	0	1	0	2	0	⋯	0

이때 제 5행(어두운 부분)에 나열된 100개의 수의 합을 구하시오.

77. 2006 평가원(4점)

수열 $\{a_n\}$을 $a_n=(n^n$의 일의 자리의 수)로 정의할 때, 옳은 내용을 <보기>에서 모두 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $a_3=7$ ㄴ. $\sum_{k=1}^{5} a_{2k}=22$ ㄷ. $a_{13}=a_{23}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

78. 2009 교육청(4점)

수열 $\{a_n\}$이

$a_1=1,\ pa_{n+1}=qa_n+1\ \ (n=1, 2, 3, \cdots)$

일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $p,\ q$는 0이 아닌 실수이다.)

<보 기>

ㄱ. $p=q$일 때, 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

ㄴ. $p\neq q$일 때, 수열 $\left\{a_n-\dfrac{1}{p-q}\right\}$은 등비수열이다.

ㄷ. $-1<\dfrac{q}{p}<1$일 때, 수열 $\{a_n\}$은 수렴한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

79. 2009 교육청(4점)

수열 $\{a_n\}$이 $a_1=2,\ a_2=3$,

$\log_2 a_n+\log_2 a_{n+1}+\log_2 a_{n+2}=1\ \ (n=1, 2, 3, \cdots)$을

만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $a_6=\dfrac{1}{3}$

ㄴ. $\sum_{k=1}^{10} a_k=18$

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{3n} a_k=\dfrac{16}{3}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

80. 2008 평가원(4점)

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 자연수 n에 대하여

$a_n=5n+1$

$b_1=1,\ b_{n+1}-b_n=n+1$

을 만족시킨다. 10 이하인 두 자연수 $k,\ l$에 대하여 a_k와 b_l의 곱이 홀수가 되는 순서쌍$(k,\ l)$의 개수를 구하시오.

81. 2008 평가원(4점)

자연수 n 의 모든 양의 약수를 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k$라 할 때,

$$x_n=(-1)^{a_1}+(-1)^{a_2}+\cdots+(-1)^{a_k}$$

이라 하자. <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $x_8=2$

ㄴ. $n=3^m$ 이면 $x_n=-m+1$ 이다.

ㄷ. $n=10^m$ 이면 $x_n=m^2-1$ 이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

82. 2008 평가원(4점)

수열 $\{a_n\}$의 제 n항 a_n을 자연수 k의 양의 제곱근 $\sqrt{k}$를 소수점 아래 첫째 자리에서 반올림하여 n이 되는 k의 개수라 하자. $\sum_{i=1}^{10} a_i$ 의 값을 구하시오.

83. 2008 교육청(4점)

수열 $\{a_n\}$에서

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

일 때, $30a_{30}-(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{29})$의 값을 구하시오.

84. 2010 교육청(4점)

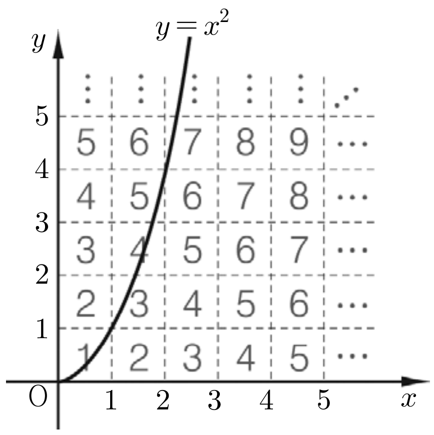
1부터 연속된 자연수를 아래와 같이 제n행에는 n개의 자연수가 오도록 나열하였다.

제1행	1
제2행	2 3
제3행	4 5 6
제4행	7 8 9 10
제5행	11 12 13 14 15
제6행	16 17 18 19 20 21
⋮	⋮

제19행에 나열된 모든 자연수의 평균을 구하시오.

85. 2008 교육청(4점)

그림과 같이 좌표평면의 제1사분면을 한 변의 길이가 1인 정사각형들로 나누어 자연수를 배열하였다.
$y=x^2(0\leq x\leq 10)$의 그래프가 지나는 한 변의 길이가 1인 정사각형에 배열된 수들의 합은? (단, 그래프가 정사각형의 내부를 지나지 않는 경우는 제외한다.)



① 5625 ② 5640 ③ 5665
④ 5680 ⑤ 5695

86. 2010 교육청(4점)

1부터 연속된 자연수를 나열하여 각 자릿수로 다음과 같은 수열을 만들었다.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 0, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 4, ⋯

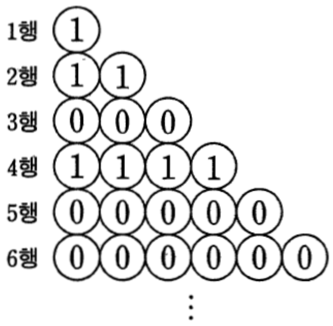
이 수열의 제n항부터 연속된 네 개의 항이 차례로 2, 0, 1, 0, 일 때, 자연수 n의 최솟값은?

① 2960 ② 2964 ③ 2968
④ 2972 ⑤ 2976

87. 2010 평가원(4점)

그림과 같이 1행에는 1개, 2행에는 2개, ⋯, n행에는 n개의 원을 나열하고 그 안에 다음 규칙에 따라 0 또는 1을 써 넣는다.

(가) 1행의 원 안에는 1을 써 넣는다.
(나) $n \geq 2$일 때, 1행부터 $(n-1)$행까지 나열된 모든 원안의 수의 합이 n이상이면 n행에 나열된 모든 원 안에 0을 써 넣고, n미만이면 n행에 나열된 모든 원 안에 1을 써 넣는다.



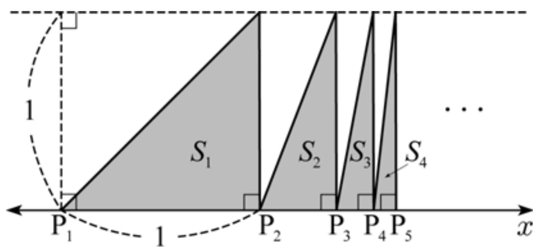
1행부터 32행까지 나열된 원 안에 써 넣은 모든 수의 합을 구하시오.

88. 2010 교육청(4점)

수직선 위에 점 P_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$을 다음 규칙에 따라 정한다.

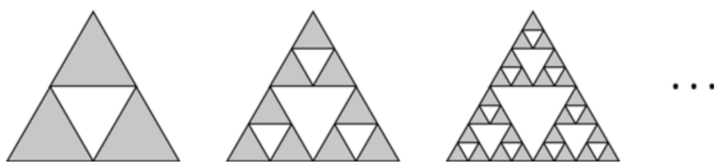
(가) 점 P_1의 좌표는 $P_1(0)$이다.
(나) $\overline{P_1P_2}=1$이다.
(다) $\overline{P_nP_{n+1}}=\dfrac{n-1}{n+1}\times\overline{P_{n-1}P_n}$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$

선분 P_nP_{n+1}을 밑변으로 하고 높이가 1인 직각삼각형의 넓이를 S_n이라 하자. $S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{50}=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)



89. 2010 교육청(4점)

한 개의 정삼각형에서 각 변의 중점을 선분으로 이으면 4개의 작은 정삼각형이 생긴다. 이때, 가운데 정삼각형 하나를 잘라내면 3개의 정삼각형이 남는다. 남은 3개의 각 정삼각형에서 같은 과정을 반복하면 모두 9개의 정삼각형이 남고, 다시 9개의 각 정삼각형에서 같은 과정을 계속하여 만들어지는 도형을 나타낸 것이다.



[첫 번째] [두 번째] [세 번째]

두 정삼각형이 공유하는 꼭짓점은 한 개의 꼭짓점으로 셀 때, n번째 도형에서 남은 정삼각형들의 꼭짓점의 개수를 a_n이라 하자. 예를 들어 $a_1=6$, $a_2=15$이다. a_5의 값은?

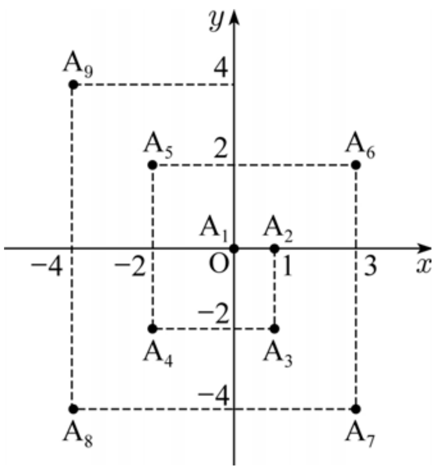
① 366 ② 376 ③ 386
④ 396 ⑤ 406

90. 2010 교육청(4점)

좌표평면에서 점 A_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 점 A_1의 좌표는 $(0,\ 0)$이다.
(나) 점 A_{4n-3}을 x축의 양의 방향으로 $(4n-3)$만큼 평행이동시킨 점은 A_{4n-2}이다.
(다) 점 A_{4n-2}를 y축의 음의 방향으로 $(4n-2)$만큼 평행이동시킨 점은 A_{4n-1}이다.
(라) 점 A_{4n-1}을 x축의 음의 방향으로 $(4n-1)$만큼 평행이동시킨 점은 A_{4n}이다.
(마) 점 A_{4n}을 y축의 양의 방향으로 $4n$만큼 평행이동시킨 점은 A_{4n+1}이다.

그림은 위의 규칙대로 정한 점 A_1, A_2, A_3, $\cdots$의 일부를 나타낸 것이다.



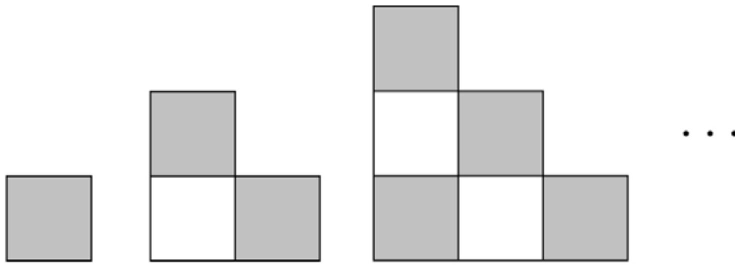
점 A_{50}의 좌표를 $(p,\ q)$라 할 때, $p+q$의 값은?

① 41　② 43　③ 45　④ 47　⑤ 49

91. 2010 교육청(4점)

한 면은 흰 색, 다른 면은 검은색인 같은 크기의 정사각형 모양의 카드를 다음 규칙에 의해 그림과 같이 놓는다.

[1단계] 검은색 면이 보이도록 카드를 한 개 놓는다.
[2단계] 1단계에서 놓여진 카드를 흰 색 면이 보이도록 뒤집고 그 카드 위쪽과 오른쪽에 검은색 면이 보이도록 두 개의 카드를 놓는다.
[3단계] 2단계에서 놓여진 모든 카드의 색이 바뀌도록 뒤집고 2단계에서 새로 놓은 카드의 위쪽과 오른쪽에 검은색 면이 보이도록 세 개의 카드를 놓는다.
…
[n단계] $n-1$단계에서 놓여진 모든 카드의 색이 바뀌도록 뒤집고 $n-1$단계에서 새로 놓은 카드의 위쪽과 오른쪽에 검은색 면이 보이도록 n개의 카드를 놓는다.



<1단계>　<2단계>　<3단계>

n단계에서 보이는 면의 색이 검은색인 카드의 개수를 a_n이라 할 때, $a_{n+1}-a_n=15$가 되는 모든 n의 값의 합은?

① 29　② 31　③ 49　④ 57　⑤ 65

92. 2009 교육청(4점)

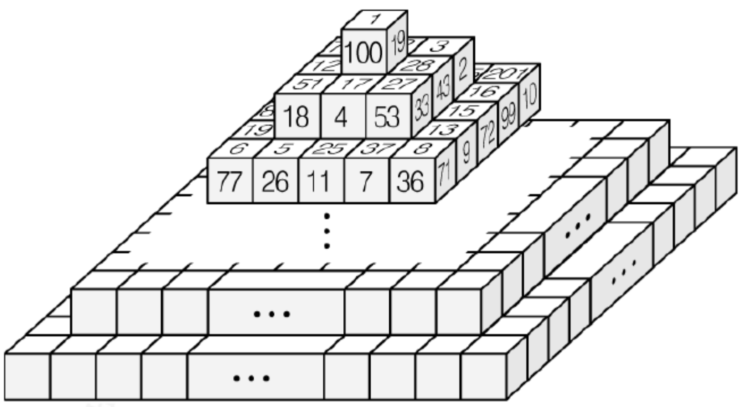
수열 $\{a_n\}$이

$$a_1=0,\ a_n=m^2\ (\text{단},\ 2^m \leq n < 2^{m+1},\ m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

으로 주어질 때, $a_n+a_{2n} \geq 100$이 성립하는 최소의 자연수 n의 값을 구하시오.

93. 2008 교육청(4점)

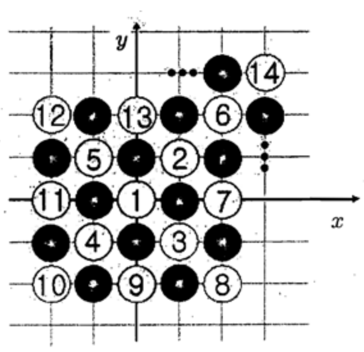
그림과 같이 크기가 같은 정육면체 모양의 블록을 쌓아 10층의 탑모형을 만들었다. 탑모형의 위, 앞, 뒤, 오른쪽, 왼쪽에서 보이는 모든 정사각형 모양의 면에 자연수를 1부터 차례대로 한 개씩 빠짐없이 썼을 때, 가장 큰 수를 구하시오.



94. 2008 교육청(4점)

바둑돌을 다음 규칙에 따라 좌표평면 위에 그림과 같이 놓인다.

(가) ①, ②, ③, ④, …와 같이 숫자가 적힌 흰 바둑돌이 충분히 있다.
(나) 원점 위에 ①을 놓는다.
(다) ①을 중심으로 그림과 같이 x좌표, y좌표가 모두 정수인 점 위에 흰색과 검은 색의 바둑돌을 번갈아 놓는다.



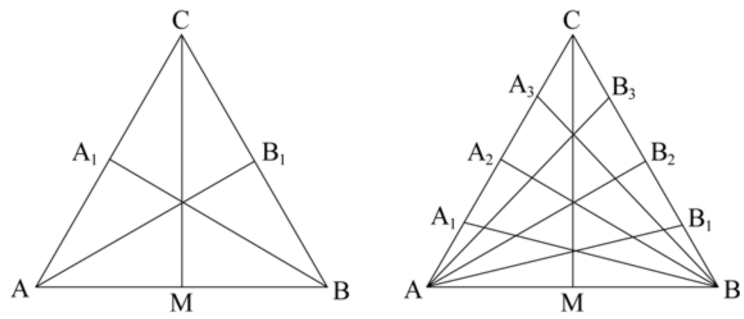
예를 들어 점 $(1,\ 1)$에는 ②를, 점 $(2,\ 0)$에는 ⑦을 놓는다. 이 때, 점 $(7,\ 3)$에 놓인 바둑돌에 쓰인 숫자를 구하시오.

95. 2008 교육청(4점)

정삼각형 ABC에서 변 AC를 $(n+1)$등분한 점을 각각 A_1, A_2, A_3, $\cdots$, A_n이라 하고, 변 BC를 $(n+1)$등분한 각각 B_1, B_2, B_3, $\cdots$, B_n이라 하자. 다음 [단계]와 같은 순서로 선분을 긋는다.

[단계 1] 꼭짓점 C와 선분 AB의 중점 M을 연결한 선분 CM을 긋는다.
[단계 2] 꼭짓점 A와 점 B_1, B_2, B_3, $\cdots$, B_n을 각각 연결한 선분 AB_1, AB_2, AB_3, $\cdots$, AB_n을 긋는다.
[단계 3] 꼭짓점 B와 점 A_1, A_2, A_3, $\cdots$, A_n을 각각 연결한 선분 BA_1, BA_2, BA_3, $\cdots$, BA_n을 긋는다.

이때, 나누어진 정삼각형 ABC의 내부 영역의 개수를 a_n이라 하자. 예를 들어 $a_1=6$, $a_3=20$이다. a_{10}의 값은?



$a_1=6$ $a_3=20$

① 132 ② 136 ③ 140
④ 144 ⑤ 148

96. 2006 평가원(4점)

자연수 n에 대하여 점 P_n을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 점 P_1의 좌표는 $(1,\ 1)$이다.
(나) 점 P_n의 좌표가 $(a,\ b)$일 때,
$b<2^a$이면 점 P_{n+1}의 좌표는 $(a,\ b+1)$이고
$b=2^a$이면 점 P_{n+1}의 좌표는 $(a+1,\ 1)$이다.

점 P_n의 좌표가 $(10,\ 2^{10})$일 때, n의 값은?

① $2^{10}-2$ ② $2^{10}+2$
③ $2^{11}-2$ ④ 2^{11}
⑤ $2^{11}+2$

97. 2004 평가원(4점)

흰 바둑돌과 검은 바둑돌이 있다. 이 바둑돌 n개를 일렬로 나열하되, 흰 바둑돌끼리는 이웃하지 않도록 나열하는 방법의 수를 a_n이라 하자. 예를 들면 $a_1 = 2$, $a_2 = 3$이다.

○, ●　　　　　○●, ●○, ●●

$a_1 = 2$　　　　　　　$a_2 = 3$

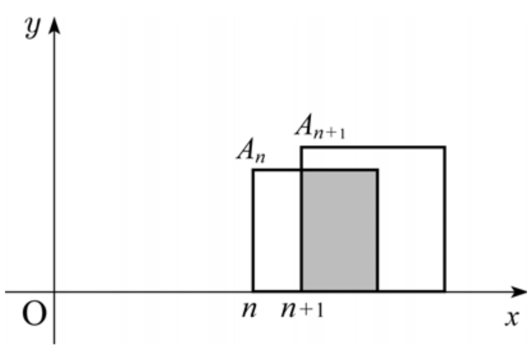
이때 a_{10}의 값을 구하시오.

98. 2006 교육청(4점)

양수 x에 대하여 $<x>$ 는 x보다 크거나 같은 최소의 정수를 나타내기로 한다. 예를 들면,
$<2> = 2$, $<2.5> = 3$이다. 수열 $\{a_n\}$을
$a_1 = 10$, $a_n = a_{<\frac{n}{2}>} + 1$ $(n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$로 정의할 때,
a_{50}의 값을 구하시오.

99. 2009 교육청(4점)

n이 3 이상의 자연수일 때, 네 점 $(n, 0)$, $\left(\frac{3n}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{3n}{2}, \frac{n}{2}\right)$, $\left(n, \frac{n}{2}\right)$을 꼭짓점으로 하는 정사각형을 A_n이라 하자. 두 정사각형 A_n, A_{n+1}이 겹치는 부분(어두운 부분)의 넓이를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=3}^{10} \frac{1}{a_n}$의 값은?

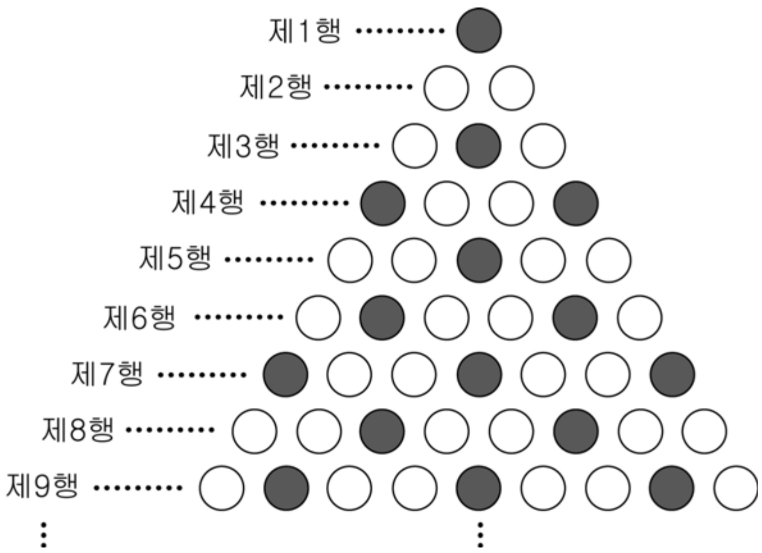


① $\frac{113}{45}$　② $\frac{116}{45}$　③ $\frac{118}{45}$
④ $\frac{121}{45}$　⑤ $\frac{124}{45}$

100. 2009 교육청(4점)

그림은 다음과 같은 규칙으로 제n행에 n개의 바둑돌을 놓은 것이다. $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

(가) 제1행에는 검은 돌, 제2행에는 흰 돌을 놓는다.
(나) 각 행에 놓은 바둑돌은 좌우대칭이 되도록 한다.
(다) 각 행에서 두 검은 돌 사이에는 흰 돌을 두 개 놓는다.
(라) 각 행에서 흰 돌은 세 개 이상 연속되지 않게 놓는다.



제n행에 놓인 검은 돌의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{30} a_n$의 값은?

① 135　② 140　③ 145
④ 150　⑤ 155

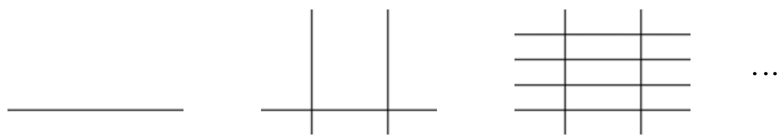
101. 2004 평가원 (4점)

수열$\{a_n\}$이 $a_1 = 2$, $a_n + a_{n+1} = 3n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$으로 정의된다. 이때, 두 수 $P = a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \cdots + a_{19}$
$Q = a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + \cdots + a_{20}$에 대하여 $P - Q$의 값을 구하시오.

102. 2009 교육청(4점)

한 평면 위에 다음과 같은 규칙으로 직선들을 차례로 그려 나간다.

> [1단계] 직선을 1개 그린다.
> [2단계] [1단계]에서 그린 직선과 수직인 직선을 2개 그린다.
> [3단계] [2단계]에서 그린 직선과 수직인 직선을 3개 그린다.
> ⋮
> [n단계] [$(n-1)$단계]에서 그린 직선과 수직인 직선을 n개 그린다. ($n=2, 3, 4, \cdots$)



[1단계] [2단계] [3단계]

[1단계]부터 [n단계]까지 그린 직선들의 모든 교점의 개수를 a_n ($n=2, 3, 4, \cdots$)이라 하자. 예를 들어, $a_2=2$, $a_3=8$이다. $a_{15}-a_{14}$의 값을 구하시오. (단, 모든 직선은 서로 겹치지 않도록 그린다.)

103. 2009 교육청(4점)

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=5\times6^5+5\times6^4+5\times6^3+5\times6^2+5\times6+5$,

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{1}{6}a_n & (a_n\text{이 6의 배수일 때})\\ a_n-1 & (a_n\text{이 6의 배수가 아닐 때})\end{cases}$$

이다. $a_k=1$일 때, k의 값은?

① 34 ② 35 ③ 36
④ 37 ⑤ 38

104. 2004 평가원(4점)

오른쪽 표는 어느 달 국내 원유 수입량의 70%를 차지하는 두바이(Dubai)유의 1배럴당 국제 가격을 일주일 간격으로 나타낸 것이다. 이 표에 있는 두바이유의 가격 a_n은 다음 관계식을 만족한다.

$a_n=34.4+0.3\times b_n$ (단, n은 자연수)

(가격단위 달러)

n째주	두바이유 가격 a_n
1	34.7
2	35.0
3	35.6
4	36.8
5	39.2
⋮	⋮

이러한 추세로 가격이 결정될 때, $\sum_{k=1}^{8} b_k$의 값을 구하시오.

105. 2009 평가원(4점)

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 k에 대하여

$$b_{2k-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{a_1+a_3+\dots+a_{2k-1}}$$
$$b_{2k}=2^{a_2+a_4+\dots+a_{2k}}$$

을 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이고,

$$b_1\times b_2\times b_3\times\cdots\times b_{10}=8$$

일 때, 수열 $\{a_n\}$의 공차는?

① $\frac{1}{15}$ ② $\frac{2}{15}$ ③ $\frac{1}{5}$
④ $\frac{4}{15}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

106. 2009 평가원(4점)

수열 $\{a_n\}$의 제 n항 a_n을 $\dfrac{n}{3^k}$이 자연수가 되게 하는 음이 아닌 정수 k의 최댓값이라 하자. 예를 들어 $a_1=0$이고 $a_6=1$이다. $a_m=3$일 때, $a_m+a_{2m}+a_{3m}+\cdots+a_{9m}$의 값을 구하시오.

107. 2006 교육청(4점)

3이상의 자연수 n을 3개의 자연수의 합으로 나타내는 방법의 가지수를 a_n이라 하자.

예를 들어 $3=1+1+1$이므로 $a_3=1$,

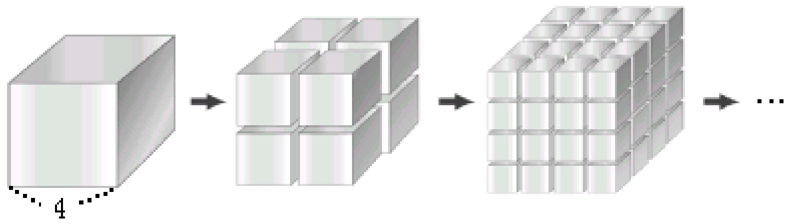
$4=1+1+2=1+2+1=2+1+1$이므로

$a_4=3$이다. 이 때, a_{20}의 값을 구하시오.

108. 2006 교육청(4점)

한 변의 길이가 4인 정육면체가 있다. [그림 1]은 이 정육면체의 각 모서리를 수직이등분하여 분리된 정육면체들을 나타낸 것이다. [그림 2]는 [그림 1]의 정육면체들의 각 모서리를 수직이등분하여 분리된 정육면체들을 나타낸 것이다.

(1회 시행 후) (2회 시행 후)



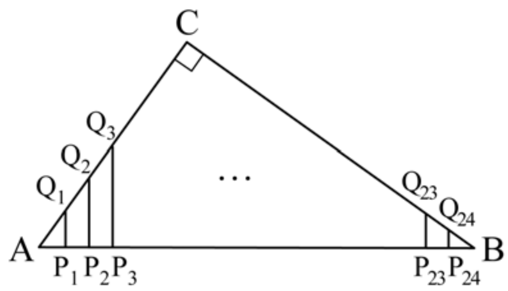
[그림 1] [그림 2]

이와 같은 시행을 계속해 나갈 때, 5회 시행 후 분리된 모든 정육면체들의 겉넓이의 합은?

① 3×2^{10} ② 3×2^{12}
③ 3×2^{15} ④ 3×2^{17}
⑤ 3×2^{20}

109. 2006 교육청(4점)

그림과 같이 $\overline{AC}=15$, $\overline{BC}=20$이고, $\angle C=90^\circ$인 직각삼각형 ABC가 있다. 변 AB를 25등분하는 점 $P_1, P_2, \cdots, P_{24}$를 지나 변 AB에 수직인 직선을 그어 변 AC 또는 변 CB와 만나는 점을 각각 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_{24}$라 하자. $\overline{P_1Q_1}+\overline{P_2Q_2}+\overline{P_3Q_3}+\cdots+\overline{P_{24}Q_{24}}$의 값을 구하시오.



110. 2005 교육청 4점)

다음과 같이 1, 3, 5, 7, 9를 규칙적으로 나열했을 때, 제 20행에 나열된 수들의 합을 구하시오.

제1행				1			
제2행			3	5	7		
제3행		9	1	3	5	7	
제4행	9	1	3	5	7	9	1
⋮				⋮			

111. 2006 교육청(4점)

그림은 자연수를 일정한 규칙에 따라 배열한 것이다.

1	3	6	10	15	21	⋯
2	5	9	14	20	⋯	
4	8	13	19	⋯		
7	12	18	⋯			
11	17	⋯				
16	⋯					
⋯						

색칠한 부분의 수 2, 8, 18, ⋯을 수열 $\{a_n\}$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값을 구하시오.

112. 2006 교육청(4점)

어떤 학생이 계발활동 시간에 목걸이를 만들고자 한다. 그림과 같이 세 종류의 인조 보석 , , 을 사용하여 처음에는 1개, 1개, 2개를 꿰고 난 뒤, 다음 규칙을 순서대로 반복한다.

Ⅰ. 는 바로 전 단계에 꿴 의 개수보다 1개 더 많이 꿴다.
Ⅱ. 는 바로 전 단계에 꿴 의 개수보다 2개 더 많이 꿴다.
Ⅲ. 는 Ⅰ과 Ⅱ에서 꿴 과 의 개수를 더한 만큼 꿴다.

인조 보석 200개를 사용하여 목걸이를 만들었을 때, 목걸이에 있는 의 개수를 구하시오.

113. 2006 평가원(4점)

아래에서 제n행은 n의 양의 약수를 나열한 것이다. 제1행부터 제20행까지 나열된 수의 개수를 구하시오.

제1행	1							
제2행	1	2						
제3행	1		3					
제4행	1	2		4				
제5행	1				5			
제6행	1	2	3			6		
제7행	1						7	
제8행	1	2		4				8
⋮				⋮				

114. 2009 교육청(4점)

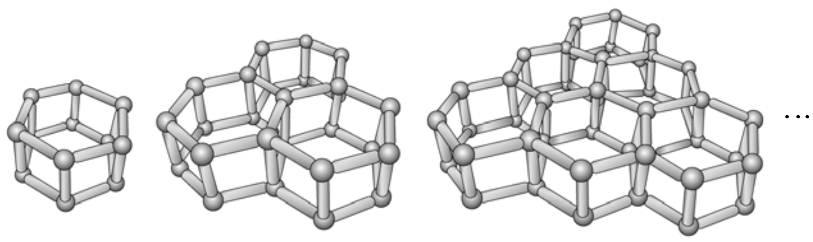
수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 = 1$, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = n^2 a_n$일 때, a_{2009}의 값은?

① $\dfrac{1}{2009 \cdot 2010}$ ② $\dfrac{1}{2008 \cdot 2010}$ ③ $\dfrac{1}{2008 \cdot 2009}$

④ $\dfrac{1}{1005 \cdot 2009}$ ⑤ $\dfrac{1}{1004 \cdot 2008}$

115. 2007 교육청(4점)

그림과 같이 쇠구슬과 막대자석을 이용하여 육각기둥 모양을 1개 만드는 데 필요한 막대자석의 개수를 a_1, 육각기둥 모양을 3개 만드는 데 필요한 막대자석의 개수를 a_2, 육각기둥 모양을 6개 만드는 데 필요한 막대자석의 개수를 a_3, ⋯ 이와 같은 과정을 계속하였을 때, a_{10}의 값은?



① 530 ② 531 ③ 532 ④ 533 ⑤ 534

116. 2007 평가원(4점)

다음은 19 세기 초 조선의 유학자 홍길주가 소개한 제곱근을 구하는 계산법의 일부를 재구성한 것이다.

< 다 음 >

1 보다 큰 자연수 p에서 1 을 뺀 수를 p_1 이라 한다.
p_1 이 2보다 크면 p_1에서 2를 뺀 수를 p_2라 한다.
p_2가 3보다 크면 p_2에서 3을 뺀 수를 p_3이라 한다.
⋮
p_{k-1}이 k보다 크면 p_{k-1} 에서 k를 뺀 수를 p_k 라 한다.
이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 수 p_n 이 $(n+1)$ 보다 작으면 이 과정을 멈춘다.
이 때, $2p_n$ 이 $(n+1)$ 과 같으면 p 는 (가) 이다.

(가)에 들어갈 식으로 알맞은 것은?

① $n+1$ ② $\dfrac{(n+1)^2}{2}$
③ $\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ ④ 2^{n+1}
⑤ $(n+1)!$

117. 2005 교육청(4점)

3 으로도 5 로도 나누어떨어지지 않는 자연수를 작은 것부터 순서대로 나열한 수열을 $\{a_n\}$ 이라 한다. 예를 들면, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$ 이다. 이때, a_{100} 의 값은?

① 172 ② 187
③ 195 ④ 202
⑤ 210

118. 2004 평가원(4점)

그림과 같이 1부터 100까지의 자연수가 배열되어 있는 숫자판에 9개의 수(1, 2, 3, 11, 12, 13, 21, 22, 23)를 포함하는 어두운 정사각형이 놓여있다. 이 어두운 정사각형을 오른쪽으로 m칸, 아래쪽으로 n칸 이동하였을 때, 이동된 정사각형 내부의 자연수의 합을 $S(m, n)$이라 하자. 예를 들면 $S(2, 1)$은 9개의 수(13, 14, 15, 23, 24, 25, 33, 34, 35)의 합이다.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

이때 $S(m, n) = 513$을 만족하는 m, n에 대하여 $m+n$의 값은? (단, m, n은 7이하의 자연수)

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

119. 2009 교육청(4점)

함수 $y=x^2$ 의 그래프 위에 다음 조건을 만족시키도록 점 P_1, P_2, P_3, $\cdots$ 을 차례로 정한다.

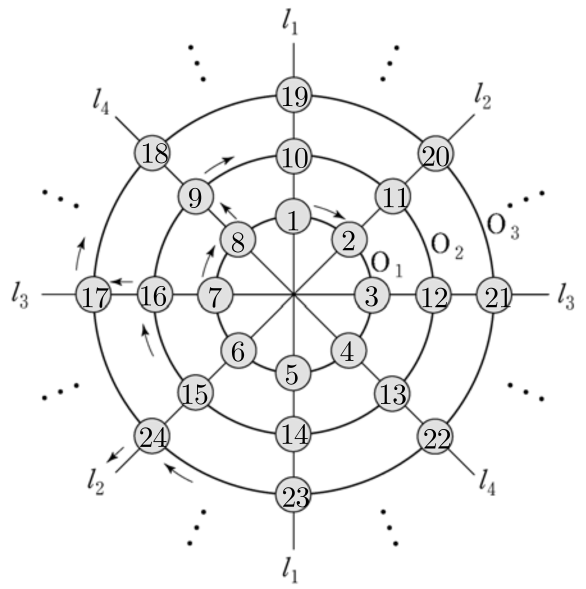
(가) 점 P_1 의 좌표는 $(1,1)$ 이다.
(나) 직선 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ 의 기울기는 n 이다.
$(n=1,2,3,\cdots)$

점 P_{2009} 의 x 좌표는?

① 1001 　 ② 1002 　 ③ 1003
④ 1004 　 ⑤ 1005

120. 2007 평가원(4점)

다음 그림은 동심원 $\mathrm{O}_1, \mathrm{O}_2, \mathrm{O}_3, \cdots$ 과 직선 l_1, l_2, l_3, l_4 의 교점 위에 자연수를 1부터 차례로 적은 것이다.

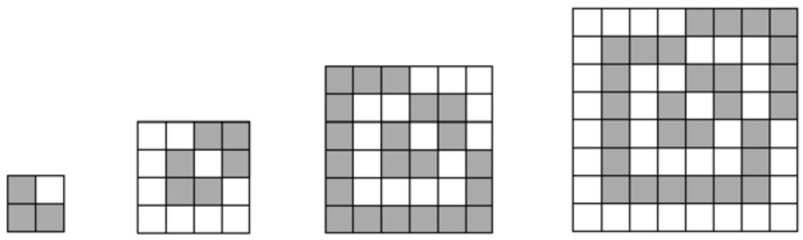


이미 채워진 수들의 규칙에 따라 계속하여 적어 나가면 475는 원 $\mathrm{O_m}$ 과 직선 l_n 의 교점 위에 있다. $m+n$ 의 값을 구하시오.

121. 2005 평가원(4점)

한 변의 길이가 1 인 정사각형 모양의 검은 타일과 흰 타일이 있다.
(가) [그림 1]과 같이 검은 타일 3 개와 흰 타일 1 개를 붙여 한 변의 길이가 2 인 정사각형이 되도록 한다.
(나) [그림2]와 같이 [그림1]의 정사각형의 바깥쪽에 타일을 붙여 한 변의 길이가 4 인 정사각형이 되도록 한다. 이때 [그림1]에 있는 흰 타일의 둘레에는 검은 타일을, 검은 타일의 둘레에는 흰 타일을 붙인다.
(다) [그림3]과 같이 [그림2]의 정사각형의 바깥쪽에 타일을 붙여 한 변의 길이가 6 인 정사각형이 되도록 한다. 이때 [그림2]에 있는 흰 타일의 둘레에는 검은 타일을, 검은 타일의 둘레에는 흰 타일을 붙인다.

이와 같은 과정을 계속하여 전체 타일의 개수가 400 개가 되었을 때, 검은 타일의 개수와 흰 타일의 개수 사이의 관계를 옳게 나타낸 것은?

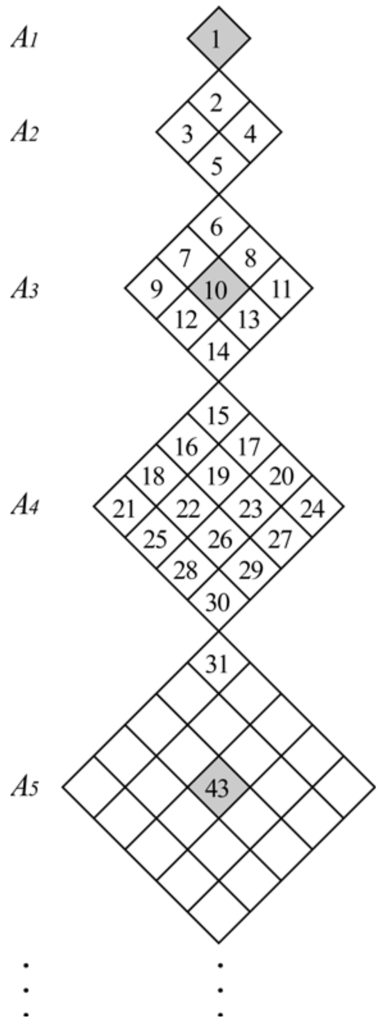


[그림1] 　 [그림2] 　 [그림3]

① 검은 타일과 흰 타일의 개수가 같다.
② 검은 타일의 개수가 흰 타일의 개수보다 18 개 많다.
③ 검은 타일의 개수가 흰 타일의 개수보다 20 개 많다.
④ 흰 타일의 개수가 검은 타일의 개수보다 18 개 많다.
⑤ 흰 타일의 개수가 검은 타일의 개수보다 20 개 많다.

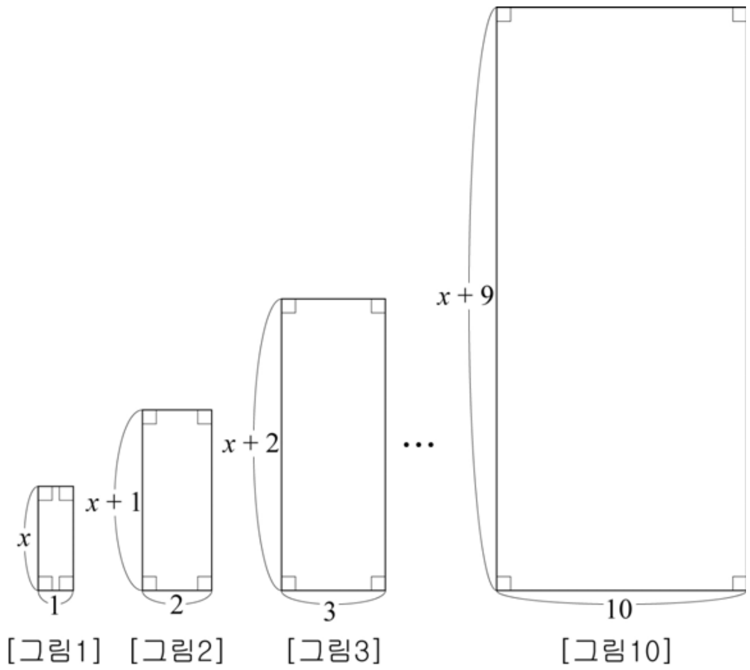
122. 2007 평가원 4점)

그림과 같이 크기가 같은 정사각형 1개, 4개, 9개, … 로 만들어진 도형 A_1, A_2, A_3, … 이 이어져 있다. 각 정사각형에 자연수를 규칙적으로 적어 나갈 때, A_1, A_3, A_5, … 에는 정중앙(어두운 부분)에 적힌 수가 있다. 예를 들면, A_3 의 정중앙에 적힌 수는 10 이고, A_5 의 정중앙에 적힌 수는 43 이다. 이때 A_9 의 정중앙에 적힌 수를 구하시오.



123. 2007 교육청 4점)

그림과 같이 [그림 1], [그림 2], [그림 3],…, [그림 10]의 직사각형의 넓이를 각각 a_1, a_2, a_3, … , a_{10}이라 하자. $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{10}=880$일 때, x의 값을 구하시오.



124. 2010 교육청 4점)

수열 $\{a_n\}$이

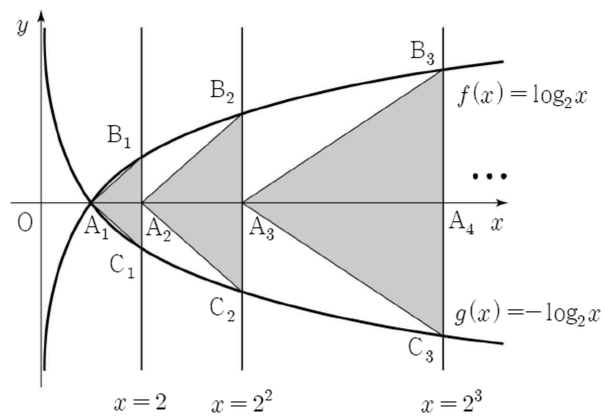
$$\begin{cases} a_1=a_2=1 \\ a_{n+2}=(-1)^n a_n a_{n+1} \end{cases} \quad (\text{단, } n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{2011} a_k$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

125. 2009 교육청(4점)

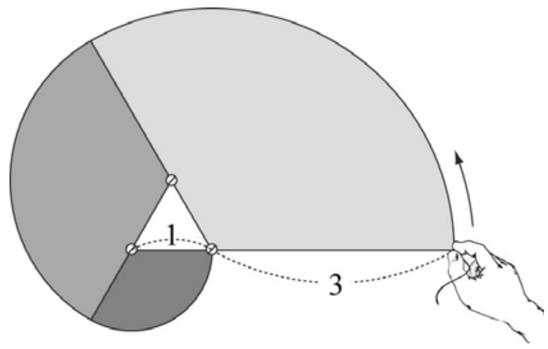
두 함수 $f(x)=\log_2 x$와 $g(x)=-\log_2 x$의 그래프의 교점을 A_1, 직선 $x=2$가 세 함수 $y=f(x)$, $y=0$, $y=g(x)$의 그래프와 만나는 점을 각각 B_1, A_2, C_1이라 하고 삼각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$의 넓이를 S_1이라 하자. 직선 $x=2^2$이 세 함수 $y=f(x)$, $y=0$, $y=g(x)$의 그래프와 만나는 점을 각각 B_2, A_3, C_2라 하고 삼각형 $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2$의 넓이를 S_2라 하자. 직선 $x=2^3$이 세 함수 $y=f(x)$, $y=0$, $y=g(x)$의 그래프와 만나는 점을 각각 B_3, A_4, C_3라 하고 삼각형 $\mathrm{A}_3\mathrm{B}_3\mathrm{C}_3$의 넓이를 S_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻어진 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{10} S_k$의 값은?



① $9\cdot 2^{10}+1$ ② $9\cdot 2^{11}+1$ ③ $10\cdot 2^{10}+1$
④ $10\cdot 2^{11}+1$ ⑤ $11\cdot 2^{11}+1$

126. 2009 교육청(4점)

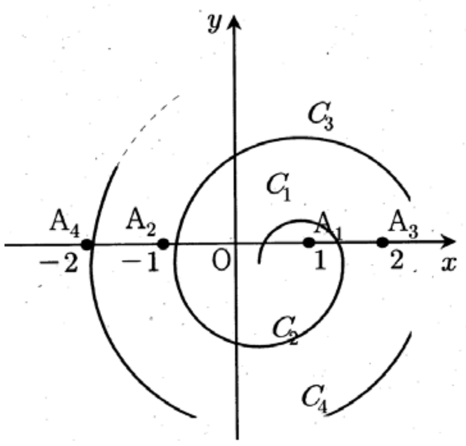
한 변의 길이가 1인 정n각형의 꼭짓점에 못을 박아 놓는다. 실을 한 꼭짓점에 고정시켜 길이가 n이 되도록 잡고 한 변의 연장선 방향으로 팽팽하게 당긴 후 실의 끝의 이동거리가 최소가 되도록 정n각형의 둘레로 한 바퀴 돌릴 때, 실이 움직인 영역의 넓이를 S_n이라 하자. 예를 들어 S_3은 그림과 같이 정삼각형의 한 꼭짓점에 고정시킨 길이가 3이 되도록 실을 잡고 정삼각형 둘레로 한 바퀴 돌릴 때 실이 움직인 영역의 넓이를 나타낸다. 이 때, S_{20}의 값은? (단, 실과 못의 굵기는 고려하지 않는다.)



① $\frac{287}{2}\pi$ ② $\frac{289}{2}\pi$ ③ $\frac{291}{2}\pi$
④ $\frac{293}{2}\pi$ ⑤ $\frac{295}{2}\pi$

127. 2010 교육청(4점)

그림과 같이 $A_1(1, 0)$, $A_2(-1, 0)$, $A_3(2, 0)$, $A_4(-2, 0)$, $\cdots$ 에 대하여 $\overline{OA_1}$ 을 지름으로 하는 반원을 C_1, $\overline{A_1A_2}$ 를 지름으로 하는 반원을 C_2, $\overline{A_2A_3}$ 를 지름으로 하는 반원을 C_3 라 하자.



이와 같은 방법으로 만든 반원 C_k $(k=1, 2, 3, \cdots)$의 호의 길이를 l_k라 하자. $\sum_{k=1}^{n} l_k = 189\pi$ 를 만족시키는 n에 대하여, A_n의 좌표가 $(a, 0)$일 때, $a+50$의 값은?127.

① 27 ② 33 ③ 39
④ 64 ⑤ 69

128. 2009 교육청(4점)

그림과 같이 제 1 행에는 1 개, 제 2 행에는 2 개, $\cdots$, 제 n 행에는 n개의 직사각형을 나열하고 그 안에 다음과 같은 규칙으로 수를 적었다.

(가) 제 1 행의 직사각형에는 1을 적는다.
(나) 제 $n+1$ 행의 왼쪽 끝 직사각형에는 제 n 행의 왼쪽 끝 직사각형에 적힌 수보다 1 이 큰 수를 적는다.
(다) 제 $n+1$ 행의 오른쪽 끝 직사각형에는 제 n 행의 오른쪽 끝 직사각형에 적힌 수보다 1이 작은 수를 적는다.
(라) 제 $n+1$ 행의 안쪽 직사각형에는 그 직사각형에 인접한 제 n 행의 두 직사각형에 적힌 수의 합을 적는다.

제 1행	1				
제 2행	2	0			
제 3행	3	2	-1		
제 4행	4	5	1	-2	
제 5행	5	9	6	-1	-3
⋮	⋮				

제 n 행의 맨 왼쪽으로부터 k 번째 직사각형에 적힌 수를 $<n, k>$ 로 나타내자. 예를 들어 $<4, 2>=5$ 이다.
이때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $<10, 1> + <10, 10> = 2$
ㄴ. $<11, 2> + <11, 10> = 20$
ㄷ. $<12, 3> + <12, 4> + \cdots + <12, 10> = 2024$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

129. 2008 교육청(4점)

수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_1 = 2,\quad 2n \cdot a_n a_{n+1} = a_n - a_{n+1}\ (n = 1, 2, 3, \dots)$$

으로 정의될 때, 일반항 a_n 은 $a_n = \dfrac{2}{2n^2 + pn + q}$ 이다.

$5p^2q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 상수이다.)

130. 2008 교육청(4점)

수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 정의한다.

$$a_1 = 1,\quad a_{2n} = a_n + 1,\quad a_{2n+1} = a_n - 1\quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $a_6 = 1$

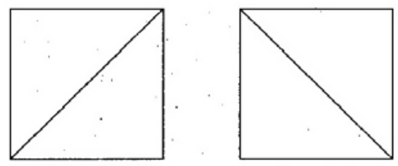
ㄴ. $n = 2^k$ (k 는 자연수)이면 $a_n = k+1$이다.

ㄷ. $n = 2^k + 1$ (k 는 자연수)이면 $a_n = k-1$이다.

① ㄱ 　 ② ㄴ 　 ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ 　 ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

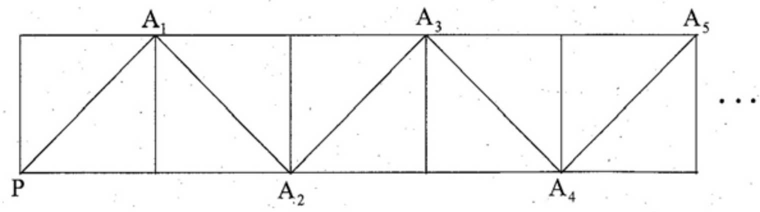
131. 2008 교육청(4점)

다음과 같이 정사각형에 대각선을 각각 하나씩 그어 [도형 1]과 [도형 2]를 만든다.



[도형1] 　 [도형2]

[도형 1]과 [도형 2]를 번갈아 가며 계속 붙여 아래 그림과 같은 도형을 만든다. 그림과 같이 처음으로 붙여지는 [도형 1]의 왼쪽아래 꼭짓점을 P 라 하고, [도형 1]의 개수와 [도형 2]의 개수를 합하여 n 개 붙여 만든 도형에서 가장 오른쪽 대각선의 끝점을 A_n 이라고 하자.



지나온 선분으로 되돌아 갈 수 없고, 오른쪽 또는 위 아래, 대각선으로만 움직인다. 꼭짓점 P 에서 $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \cdots, \mathrm{A}_{n-1}$ 을 대각선으로만 모두 거쳐서 A_n 까지 도착하는 경로의 수를 a_n 이라고 할 때, a_5 의 값은?

① 124 　 ② 134 　 ③ 144
④ 154 　 ⑤ 164

132. 2010 교육청(4점)

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$1\cdot 2a_1+3\cdot 4a_2+5\cdot 6a_3+\cdots+(2n-1)\cdot 2na_n \ge n$$

을 만족시킬 때, 다음은 부등식

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n \ge \boxed{\text{(가)}}$$

이 성립함을 증명한 것이다.

[증 명]

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)(1\cdot 2a_1)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)(3\cdot 4a_2)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)(5\cdot 6a_3)$

$\quad +\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)\{(2n-1)\cdot 2na_n\}$

$=\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)(1\cdot 2a_1)$

$\quad +\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)(1\cdot 2a_1+3\cdot 4a_2)$

$\quad +\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)(1\cdot 2a_1+3\cdot 4a_2+5\cdot 6a_3)+\cdots$

$+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)\{1\cdot 2a_1+3\cdot 4a_2+\cdots+(2n-1)\cdot 2na_n\}$

$\ge\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)+3\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)$

$\quad +\cdots+\boxed{\text{(나)}}$

$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$

$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-\boxed{\text{(다)}}$

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$	$\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$	$2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$
②	$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$	$n\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$	$2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$
③	$\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n+k}$	$n\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$	$2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$
④	$\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n+k}$	$n\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$	$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$
⑤	$\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n+k}$	$\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$	$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$

133. 2010 교육청(4점)

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 다음은 등식 $nS_n-\sum_{k=1}^{n-1}S_k=\sum_{k=1}^{n}k\,a_k\ (n\ge 2)$ …… (★)

이 성립함을 증명한 것이다.

[증 명]

(1) $n=2$일 때,

(좌변)=(우변)= $\boxed{\text{(가)}}$ 이므로 (★)이 성립한다.

(2) $n=i\,(i\ge 2)$일 때, (★)이 성립한다고 가정하면,

$(i+1)S_{i+1}-\sum_{k=1}^{i}S_k=(i+1)S_{i+1}-\left(\sum_{k=1}^{i-1}S_k+S_i\right)$

$=(i+1)S_{i+1}-\left(\boxed{\text{(나)}}\right)$

$=\sum_{k=1}^{i}k\,a_k+\boxed{\text{(다)}}$

$=\sum_{k=1}^{i+1}k a_k$

따라서, $n=i+1$일 때, $(i+1)S_{i+1}-\sum_{k=1}^{i}S_k=\sum_{k=1}^{i+1}k\,a_k$가 성립한다.

(1)과 (2)에 의하여 등식 (★)은 2이상의 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

4

	(가)	(나)	(다)
①	a_1+a_2	$(i-1)S_i-\sum_{k=1}^{i}k\,a_k$	$i(S_i-S_{i-1})$
②	a_1+a_2	$(i+1)S_i-\sum_{k=1}^{i}k\,a_k$	$i(S_{i+1}-S_i)$
③	a_1+2a_2	$(i+1)S_i-\sum_{k=1}^{i}k\,a_k$	$i(S_{i+1}-S_i)$
④	a_1+2a_2	$(i+1)S_i-\sum_{k=1}^{i}k\,a_k$	$(i+1)(S_{i+1}-S_i)$
⑤	a_1+2a_2	$(i-1)S_i-\sum_{k=1}^{i}k\,a_k$	$(i+1)(S_{i+1}-S_i)$

134. 2004 평가원(4점)

다음은 수열 $\{a_n\}$에서 일반항 a_n 이 $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ 일 때,
$n \geq 2$ 인 모든 자연수에 n 에 대하여
$n + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} = na_n$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하는 과정이다.

[증 명]

i) $n=2$ 일 때,

(좌변)$=2+\frac{1}{1}=3$, (우변)$=2\left(1+\frac{1}{2}\right)=3$ 이므로,

주어진 식이 성립한다.

ii) $n=k\,(k \geq 2)$일 때, 주어진 식이 성립한다고 가정하면

$k+a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}=ka_k \cdots\cdots$ ㉠

이 때, 식 ㉠의 좌변에 $1+a_k$ 를 더하면

$k+1+a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}+a_k$

$= \boxed{\text{(가)}} +1+a_k$

$=(k+1)\ a_k+1$

$=(k+1)(\boxed{\text{(나)}})+1$

$=(k+1)\ a_{k+1}$

따라서, $n=k+1$ 일 때도 주어진 식이 성립한다.

그러므로 i), ii)에 의하여

$n+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=na_n$

은 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 과정에서 (가), (나) 에 알맞은 것은?

	(가)	(나)
①	ka_k	$a_k+\frac{1}{k+1}$
②	ka_k	$a_{k+1}-\frac{1}{k+1}$
③	ka_k	$a_{k+1}+\frac{1}{k+1}$
④	$(k+1)a_k$	$a_k+\frac{1}{k+1}$
⑤	$(k+1)a_k$	$a_{k+1}-\frac{1}{k+1}$

135. 2009 교육청(4점)

자연수 n, x, y에 대하여 $\frac{1}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ $(x \leq y)$과 같이 $\frac{1}{n}$을 두 분수의 합으로 나타낼 수 있는 방법의 수를 a_n이라 하자. 예를 들어,

$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$이므로 $a_1=1$,

$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$이므로 $a_2=2$,

$\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$이므로 $a_3=2$이다.

다음은 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하는 과정이다.

자연수 n, x, y에 대하여 $\frac{1}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ $(x \leq y)$라 하면
$xy=n(x+y)$이다.

따라서 $(x-n)(y-n)=n^2 \cdots\cdots (*)$

이므로 $x-n$과 $y-n$은 n^2의 약수이다.

$d(n)$을 n의 양의 약수의 개수라 하고, 방정식 $(*)$의 해의
개수를 구하면

i) $x=y$인 경우,

$x=y=\boxed{\text{(가)}}$ 이므로 1개이다.

ii) $x<y$인 경우,

$x=y=\boxed{\text{(가)}}$ 이 제외되므로 $\frac{\boxed{\text{(나)}}}{2}$ 개이다.

그러므로 $\frac{1}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}(x \leq y)$로 표시할 수 있는 방법의 수는 $\boxed{\text{(다)}}$ 개이다.

따라서 구하는 수열의 일반항 $a_n=\boxed{\text{(다)}}$ 이다.

이 과정에서 (가)~(다)에 알맞은 것을 바르게 짝지은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	n	$d(n^2)$	$\frac{d(n^2)+1}{2}$
②	n	$d(n^2)-1$	$\frac{d(n^2)}{2}+1$
③	$2n$	$d(n^2)-1$	$\frac{d(n^2)+1}{2}$
④	$2n$	$d(n^2)-1$	$\frac{d(n^2)}{2}+1$
⑤	$2n$	$d(n^2)$	$\frac{d(n^2)}{2}+1$

136. 2005 교육청(4점)

다음은 2 이상의 자연수 n 에 대하여 부등식
$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$ 이 성립함을 증명하는 과정이다.

[증 명]

i) $n=2$ 일 때 $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ 에서

$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}>$ (가)

ii) $n=k\,(k\geq 2)$일 때, 주어진 부등식이 성립함을 가정하면

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{k}$$

$$\sqrt{k+1}-\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$$

$$=\sqrt{k+1}-\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)-\frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

$$=\sqrt{k+1}-(\text{ 나 })-\frac{1}{\sqrt{k+1}}=\frac{(\text{ 다 })}{\sqrt{k+1}}<0$$

∴

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$$

따라서 $n=k+1$ 일때도 주어진 부등식은 성립한다.
i), ii)에서 2 이상의 자연수 n 에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

① $\sqrt{2}$, $\sqrt{k+1}$, $\sqrt{k}-\sqrt{k+1}$
② $\sqrt{2}$, $\sqrt{k}$, $\sqrt{k+1}-\sqrt{k+2}$
③ $\sqrt{2}$, $\sqrt{k}$, $k-\sqrt{k(k+1)}$
④ 2, $\sqrt{k}$, $k-\sqrt{k(k+1)}$
⑤ 2, $\sqrt{k+1}$, $\sqrt{k+1}-\sqrt{k+2}$

137. 2005 교육청(4점)

$n\geq 5$ 인 자연수 n 에 대하여 부등식 $\frac{n}{2}>\log_2 n$ 이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 증명하는 과정이다.

$\frac{n}{2}>\log_2 n$ …①

[증 명]

(1) $n=5$ 일 때,
(좌변) − (우변) $=\frac{5}{2}-\log_2 5=$ (가) $-\log_2 5>0$
따라서 (좌변) > (우변) 이 되어 부등식 ①은 $n=5$ 일 때
성립한다.
(2) $n=k(k\geq 5)$ 일 때, 부등식 ①이 성립한다고 가정하면
$\frac{k}{2}>\log_2 k$ …②
부등식 ②의 양변에 (나)을(를) 더하면
(다) $>\log_2 k+$ (나),
(다) $>\log_2 \sqrt{2}\,k>\log_2(k+1)$
따라서, 부등식 ①은 $n=k+1$ 일 때도 성립한다.
(1), (2)에 의하여 부등식 ①은 $n\geq 5$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 들어갈 내용을 바르게 짝지은 것은?

① $\log_2 2\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{k+1}{2}$
② $\log_2 2\sqrt{2}$, 1 , $k+1$
③ $\log_2 4\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{k+1}{2}$
④ $\log_2 4\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}$, $k+1$
⑤ $\log_2 4\sqrt{2}$, 2 , $k+1$

138. 2010 교육청(4점)

다음은 3이상의 자연수 n에 대하여 부등식 $\sum_{i=1}^{n-1}\frac{n}{(n-i)2^{i-1}}<4$가 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

[증 명]

자연수 $n(n\geq 3)$에 대하여 $S_n=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{n}{(n-i)2^{i-1}}$이라 하자.

(1) $n=3$일 때, $S_3=3<4$이므로 성립한다.

(2) $n=k(k\geq 3)$일 때, $S_k<4$가 성립한다고 가정하자.

$n=k+1$일 때,

$$S_{k+1}=\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{k+1}{k+1-i}\times\frac{1}{2^{i-1}}\right)$$
$$=\frac{k+1}{k}+\frac{1}{2}\left(\frac{k}{k-1}+\frac{k}{k-2}\times\frac{1}{2}+\cdots+\frac{k}{2^{k-2}}\right)$$
$$+\boxed{(가)}\times\left(\frac{k}{k-1}+\frac{k}{k-2}\times\frac{1}{2}+\cdots+\frac{k}{2^{k-2}}\right)$$
$$=1+\frac{1}{k}+\boxed{(나)}\times S_k$$

그런데, $k\geq 3$, $S_k<4$이므로

$S_{k+1}=1+\frac{1}{k}+\boxed{(나)}\times S_k<4$이다.

그러므로 (1), (2)에 의하여 3이상의 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 식의 합을 $f(k)$라 할 때, $f(3)$의 값은?[138.]

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{4}{5}$

④ $\frac{5}{6}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

139. 2006 교육청(4점)

자연수 i 에 대하여 $H_i=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{i}$ 이라 할 때, 다음은 부등식 $H_{2^n}\geq 1+\frac{n}{2}\ (n=0,1,2,\cdots)$ ...... ㉠ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

[증 명]

(i) $n=0$ 일 때,

(좌변) $=H_{2^0}=H_1=\boxed{(가)}$

(우변) $=1+\frac{0}{2}=1$

그러므로 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때,

$H_{2^k}\geq 1+\frac{k}{2}$ 가 성립한다고 가정하면

$$H_{2^{k+1}}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k}+\boxed{(나)}$$
$$=H_{2^k}+\boxed{(나)}$$
$$\geq\left(1+\frac{k}{2}\right)+\boxed{(나)}$$
$$\geq\left(1+\frac{k}{2}\right)+\boxed{(다)}\cdot\frac{1}{2^{k+1}}$$
$$=1+\frac{k+1}{2}$$

그러므로 $n=k+1$ 일 때도 ㉠이 성립한다.

따라서 0 과 모든 자연수 n 에 대하여 ㉠이 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	1	$\sum_{l=1}^{2^k}\frac{1}{2^k+l}$	2^{k-1}
②	1	$\sum_{l=1}^{2^k}\frac{1}{2^k+l}$	2^k
③	1	$\frac{1}{2^{k+1}}$	2^k
④	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2^{k+1}}$	2^{k-1}
⑤	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2^{k+1}}$	2^k

140. 2006 교육청(4점)

음의 자연수 n에 대하여

$1=1^3$

$3+5=2^3$

$7+9+11=3^3$

$13+15+17+19=4^3$

$\vdots$

$$\sum_{i=1}^{n}(2i+n^2-n-1)=n^3$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

[증 명]

ⅰ) $n=1$일 때, $2\cdot1+1^2-1-1=1^3$ 이므로 성립한다.

ⅱ) $n=k$일 때 성립한다고 가정하면

$\sum_{i=1}^{k}(2i+k^2-k-1)=k^3$ 이다.

$n=k+1$일 때 성립함을 보이자.

$$\sum_{i=1}^{k+1}\boxed{\quad(\text{가})\quad}$$

$$=\sum_{i=1}^{k}(2i+k^2-k-1)+\sum_{i=1}^{k}2k+\boxed{\quad(\text{나})\quad}$$

$$=k^3+3k^2+3k+1$$

$$=(k+1)^3$$

그러므로 $n=k+1$일 때도 성립한다.

ⅰ), ⅱ)에 의해서 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

이 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)
①	$2i+k^2+k-1$	k^2+3k+1
②	$2i+k^2+k-1$	k^2-3k+1
③	$2i+k^2+k+1$	k^2+3k+1
④	$2i+k^2-k+1$	k^2-3k+1
⑤	$2i+k^2-k+1$	k^2+3k+1

141. 2006 교육청(4점)

다음은 n 부터 $2n-1$ 개의 연속한 자연수의 합에 대하여

$$n+(n+1)+(n+2)+\cdots+(3n-2)=(2n-1)^2$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

[증 명]

ⅰ) $n=1$ 일때, (좌변)$=1$, 우변$=1^2$ 이므로 성립한다.

ⅱ) $n=k$일때, 성립한다고 가정하면

$k+(k+1)(+(k+2)+\cdots+(3k-2)=(2k-1)^2$

$n=k+1$ 일때 성립함을 보이자.

$(k+1)(k+2)+\cdots+\boxed{(\quad\text{가}\quad)}$

$=k+(k+1)+(k+2)+\cdots+(3k-2)+\boxed{(\quad\text{나}\quad)}$

$=(2k-1)^2+\boxed{(\quad\text{나}\quad)}$

$=\boxed{(\quad\text{다}\quad)}$

그러므로 $n=k+1$일 때도 성립한다.

ⅰ), ⅱ)에 의해서 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

이 증명에서 (가) ~ (다)를 바르게 짝지은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	$3k+1$	$8k$	$(2k+1)^2$
②	$3k+1$	$8k$	$4k^2$
③	$3k+2$	$8k$	$(2k+1)^2$
④	$3k+2$	$4k-1$	$(2k+1)^2$
⑤	$3k+2$	$4k-1$	$4k^2$

142. 2006 교육청(4점)

다음은 4이상의 자연수 n에 대하여

부등식 $\dfrac{1!+2!+3!+\cdots+n!}{n!}<1+\dfrac{2n-3}{n(n-1)}$이 성립함을

증명하는 과정이다. (단, $n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times 2\times 1$)

[증 명]

$a_n=\dfrac{1!+2!+3!+\cdots+n!}{n!}$이라 하자.

(i) $n=4$일 때,

(좌변) $=\dfrac{1!+2!+3!+4!}{4!}=\dfrac{33}{24}$,

(우변) $=1+\dfrac{5}{12}=\dfrac{17}{12}$이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k\,(k\geq 4)$일 때, 성립한다고 가정하면

$a_k<1+\dfrac{2k-3}{k(k-1)}$이다.

$n=k+1$일 때,

$a_{k+1}=\dfrac{1!+2!+3!+\cdots+(k+1)!}{(k+1)!}=1+\boxed{(가)}\,a_k$

한편, $(k-1)^2\ \boxed{(나)}\ 2k-3$ 이므로

$\dfrac{2k-3}{k(k-1)}<\dfrac{k-1}{k}$ 이다.

그런데, $1+\dfrac{2k-3}{k(k-1)}<\dfrac{\boxed{(다)}}{k}$이므로

$a_{k+1}<1+\boxed{(가)}\left\{1+\dfrac{2k-3}{k(k-1)}\right\}$

$<1+\boxed{(가)}\,\dfrac{\boxed{(다)}}{k}$

$=1+\dfrac{2(k+1)-3}{(k+1)\{(k+1)-1\}}$이다.

그러므로 $n=k+1$일 때도 성립한다.

따라서 (i), (ii)에 의하여 4이상의 자연수 n에 대하여 주어진 부등식은 성립한다.

이 과정에서 (가)~(다)에 알맞은 것을 바르게 짝지은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	$\dfrac{1}{k}$	$>$	$2k-1$
②	$\dfrac{1}{k}$	$<$	$2k+1$
③	$\dfrac{1}{k+1}$	$>$	$2k-1$
④	$\dfrac{1}{k+1}$	$>$	$2k+1$
⑤	$\dfrac{1}{k+1}$	$<$	$2k+1$

143. 2008 교육청(4점)

모든 실수 x에 대하여 행렬 $A(x)$를

$A(x)=\begin{pmatrix} x-1 & 1 \\ -1 & x+1 \end{pmatrix}$이라 하자. 다음은 $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 $\{A(x)\}^n=A(x^n)+(nx^{n-1}-1)A(0)$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>

임의의 실수 x, y에 대하여

$A(x)A(y)=A(\text{(가)})+\text{(나)}A(0)$ ……………㉠

(i) $n=2$일 때, ㉠에 의하여

$\{A(x)\}^2=A(x^2)+(2x-1)A(0)$이 성립한다

(ii) $n=k$일 때, 성립한다고 가정하면

$\{A(x)\}^k=A(x^k)+(kx^{k-1}-1)A(0)$이다.

$n=k$일 때, 성립함을 보이자.

$\{A(x)\}^{k+1}=A(x)\{A(x)\}^k$

$=A(x)A(x^k)+(kx^{k-1}-1)A(x)A(0)$

$=A(x^{k+1})+(x^k+x-1)A(x)A(0)+(kx^{k-1}-1)(\text{(다)})$

$=A(x^{k+1})+\{(k+1)x^k-1\}A(0)$

그러므로 $n=k+1$일 때도 성립한다.

따라서 $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식은 성립한다.

은 이 증명에서 (가)~(다)에 알맞은 것을 바르게 짝지은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	xy	$x+y-1$	$A(0)$
②	xy	$x+y-1$	$xA(0)$
③	xy	$x-y+1$	$A(0)$
④	$x+y$	$x+y-1$	$xA(0)$
⑤	$x+y$	$x-y+1$	$A(0)$

144. 2008 교육청(4점)

$n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여

$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{8}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^n}\right) > 1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\cdots\frac{1}{2^n}\right)$이

성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

< 증 명 >

(1) $n=2$일 때, $\frac{3}{8} > \boxed{(가)}$이므로 주어진 부등식은 성립한다.

(2) $n=k(k \geq 2)$ 일 때,

$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^k}\right) > 1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\frac{1}{2^k}\right)$이라 가정

하면 $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^k}\right)\times\boxed{(나)}$

$> 1-\boxed{(다)}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\frac{1}{2^k}\right)+\frac{1}{2^{k+1}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\frac{1}{2^k}\right)$

$> 1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\frac{1}{2^{k+1}}\right)$

따라서 $n=k+1$일 때에도 주어진 부등식은 성립한다. 그러므로 (1),(2)에 의하여 $n \geq 2$이상인 자연수 n에 대하여 주어진 부등식은 성립한다.

위에서 (가),(나),(다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	$\frac{1}{4}$	$1-\frac{1}{2^{k+1}}$	$\frac{1}{2^{k+1}}$
②	$\frac{1}{4}$	$1-\frac{1}{2^{k+1}}$	$\frac{1}{2^k}$
③	$\frac{1}{4}$	$1-\frac{1}{2^k}$	$\frac{1}{2^k}$
④	$\frac{1}{8}$	$1-\frac{1}{2^{k+1}}$	$\frac{1}{2^{k+1}}$
⑤	$\frac{1}{8}$	$1-\frac{1}{2^k}$	$\frac{1}{2^k}$

145. 2008 평가원(4점)

다음은 모든 자연수 n에 대하여

${}_nC_1+2\cdot{}_nC_2+3\cdot{}_nC_3+\cdots+n\cdot{}_nC_n=n\cdot2^{n-1}$이 성립함을

수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

< 증 명 >

(i) $n=1$일 때,

(좌변)$={}_1C_1=1$, (우변)$=2^0=1$

이므로 주어진 등식은 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 주어진 식이 성립한다고 가정하면

${}_kC_1+2\cdot{}_kC_2+3\cdot{}_kC_3+\cdots+k\cdot{}_kC_k=k\cdot2^{k-1}$

이제 $n=k+1$일 때, 성립함을 보이자.

${}_{k+1}C_1+2\cdot{}_{k+1}C_2+3\cdot{}_{k+1}C_3+\cdots$

$+k\cdot{}_{k+1}C_k+(k+1)\cdot{}_{k+1}C_{k+1}$

$=\sum_{i-1}^{k+1}(i\cdot{}_{k+1}C_i)$

$=\sum_{i=1}^{k}\{i\cdot(\boxed{(가)})\}+(k+1)\cdot{}_{k+1}C_{k+1}$

$=\sum_{i=1}^{k}\{(1+i-1)\cdot{}_kC_{i-1}\}+\sum_{i=1}^{k}(i\cdot{}_kC_i)+(k+1)\cdot{}_kC_k$

$=\sum_{i=1}^{k}{}_kC_{i-1}+\sum_{i=1}^{k}\{(i-1)\cdot{}_kC_{i-1}\}$

$+\sum_{i=1}^{k}(i\cdot{}_kC_i)+k\cdot{}_kC_k+{}_kC_k$

$=\left(\sum_{i=1}^{k}{}_kC_{i-1}+{}_kC_k\right)+\left[\sum_{i=1}^{k}\{(i-1)\cdot{}_kC_{i-1}\}+k\cdot{}_kC_k\right]$

$+\sum_{i=1}^{k}(i\cdot{}_kC_i)$

$=\boxed{(나)}+\sum_{i=1}^{k}(i\cdot{}_kC_i)+\sum_{i=1}^{k}(i\cdot{}_kC_i)$

$=\boxed{(다)}$

그러므로 $n=k+1$일 때에도 성립한다.

따라서, 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식은

성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	${}_kC_{i-1}+{}_kC_i$	$\sum_{i=0}^{k}{}_kC_i$	$(k+1)\cdot 2^k$
②	${}_kC_{i-1}+{}_kC_i$	$\sum_{i=0}^{k}{}_kC_i$	$(2k+1)\cdot 2^{k-1}$
③	${}_kC_{i-1}+{}_kC_i$	$\sum_{i=1}^{k}{}_kC_i$	$(k+1)\cdot 2^k$
④	${}_kC_i+{}_kC_{i+1}$	$\sum_{i=0}^{k}{}_kC_i$	$(k+1)\cdot 2^k$
⑤	${}_kC_i+{}_kC_{i+1}$	$\sum_{i=1}^{k}{}_kC_i$	$(2k+1)\cdot 2^{k-1}$

146. 2008 교육청(4점)

다음은 $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여

$$\left(1+\frac{1}{1^3}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)\left(1+\frac{1}{3^3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n^3}\right)<3-\frac{1}{n}\quad\cdots ㉠$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하는 과정이다.

< 증 명 >

(i) $n=2$일 때

$(\text{좌변})=\left(1+\frac{1}{1^3}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)=\frac{9}{4}$, $(\text{우변})=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

이므로 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k(k\geq 2)$일 때 ㉠이 성립한다고 가정하면

$$\left(1+\frac{1}{1^3}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)\left(1+\frac{1}{3^3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k^3}\right)<3-\frac{1}{k}\quad\cdots ㉡$$

㉡의 양변에 $\boxed{\text{(가)}}$ 를 곱하면

$$\left(1+\frac{1}{1^3}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)\left(1+\frac{1}{3^3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k^3}\right)\left(\boxed{\text{(가)}}\right)$$
$$<\left(3-\frac{1}{k}\right)\left(\boxed{\text{(가)}}\right)\cdots ㉢$$

㉢의 우변을 정리하면

$$(\text{우변})=3-\frac{\boxed{\text{(나)}}}{k(k+1)^3}$$

이 때, $\frac{\boxed{\text{(나)}}}{k(k+1)^3}-\frac{1}{k+1}\ \boxed{\text{(다)}}\ 0$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

그러므로 (i), (ii)에 의하여 $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식은 성립한다.

위의 증명 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	$1+\frac{1}{(k+1)^3}$	k^3+3k^2+2	$<$
②	$1+\frac{1}{(k+1)^3}$	k^3+3k^2+2	$>$
③	$1+\frac{1}{(k+1)^3}$	k^3-3k^2+2	$<$
④	$\frac{1}{(k+1)^3}$	k^3-3k^2+2	$>$
⑤	$\frac{1}{(k+1)^3}$	k^3-3k^2+2	$<$

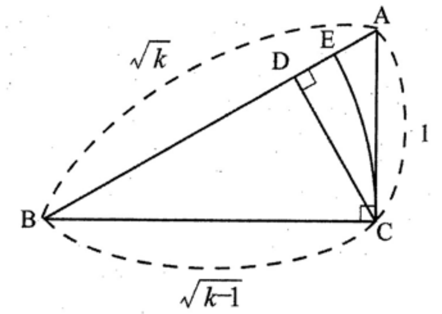
147. 2008 교육청(4점)

다음은 2 이상의 자연수 n 에 대하여

$1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>$ $\boxed{(다)}$ 이 성립함을 증명하는

과정이다.

< 증 명 >



위의 그림과 같이 $\overline{AB}=\sqrt{k}$, $\overline{BC}=\sqrt{k-1}$, $\overline{AC}=1$, $\angle C=90°$ 인 직각삼각형 ABC 에서 점 C 로부터 선분 AB 에 내린 수선의 발을 D 라 하고 $\overline{BC}=\overline{BE}$ 가 되도록 선분 AB 위에 점 E 를 정하자.

이 때, $\overline{AD}=$ $\boxed{(가)}$, $\overline{AE}=$ $\boxed{(나)}$ 이고

2 이상의 자연수 k 에 대하여 $\boxed{(가)}$ $>$ $\boxed{(나)}$ 이므로

$\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\boxed{(가)} > \sum_{k=2}^{n}\boxed{(나)}$ 이다. 따라서,

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>1+\sum_{k=2}^{n}\boxed{(나)}=\boxed{(다)}$$

이므로 $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>$ $\boxed{(다)}$ 가 성립한다.

위 증명에서 (가), (나), (다)에 들어갈 식으로 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	$\dfrac{\sqrt{k-1}}{\sqrt{k}}$	$\sqrt{k}-1$	$\sqrt{n+1}$
②	$\dfrac{\sqrt{k-1}}{\sqrt{k}}$	$\sqrt{k}-\sqrt{k-1}$	$\sqrt{n+1}$
③	$\dfrac{1}{\sqrt{k}}$	$\sqrt{k}-1$	$\sqrt{n}$
④	$\dfrac{1}{\sqrt{k}}$	$\sqrt{k}-\sqrt{k-1}$	$\sqrt{n}$
⑤	$\dfrac{1}{\sqrt{k}}$	$\sqrt{k}-\sqrt{k-1}$	$\sqrt{n+1}$

148. 2009 교육청(4점)

자연수 N에 대하여

수열 $\{a_n\}$을 $a_n=n(n+1)(n+2)\cdots(n+N-1)$이라 하자.

모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{N+n}{N+1}a_n \cdots\cdots\cdots (\bigstar)$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

< 증 명 >

(1) $n=1$일 때,

(좌변)$=\displaystyle\sum_{k=1}^{1}a_k=a_1=$ $\boxed{(가)}$

(우변)$=\dfrac{N+1}{N+1}a_1=a_1=$ $\boxed{(가)}$

이므로 ($\bigstar$)이 성립한다.

(2) $n=m$일 때, ($\bigstar$)이 성립한다고 가정하면

$\displaystyle\sum_{k=1}^{m}a_k=\frac{N+m}{N+1}a_m$이다.

$n=m+1$일 때, ($\bigstar$)이 성립함을 보이자.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1}a_k&=\frac{N+m}{N+1}a_m+\boxed{(나)}\\&=\frac{1}{N+1}\times\frac{(m+N)!}{(m-1)!}+\boxed{(나)}\\&=\frac{1}{N+1}\{\boxed{(다)}\}\\&=\frac{N+m+1}{N+1}a_{m+1}\end{aligned}$$

그러므로 $n=m+1$일 때도 ($\bigstar$)이 성립한다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 ($\bigstar$)이 성립한다.

위 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	$N!$	$\dfrac{(m+N)!}{m!}$	$\dfrac{(m+N-1)!}{m!}$
②	$(N+1)!$	$\dfrac{(m+N-1)!}{m!}$	$\dfrac{(m+N)!}{m!}$
③	$N!$	$\dfrac{(m+N)!}{m!}$	$\dfrac{(m+N+1)!}{m!}$
④	$(N+1)!$	$\dfrac{(m+N)!}{m!}$	$\dfrac{(m+N+1)!}{m!}$
⑤	$N!$	$\dfrac{(m+N-1)!}{m!}$	$\dfrac{(m+N)!}{m!}$

149. 2010 평가원(4점)

수열 $\{a_n\}$이 $a_1=\alpha(\alpha\neq0)$이고, 모든 $n(n\geq2)$에 대하여

$(n-1)a_n+\sum_{m=1}^{n-1} ma_m=0$을 만족시킨다. 다음은

$$a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\alpha\ (n\geq1)$$

임을 수학적귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

[증 명]

(1) $n=1$일 때, $a_1=\alpha=\frac{(-1)^{1-1}}{(1-1)!}\alpha$이다.

(2) ⅰ) $n=2$일 때, $a_2+a_1=0$이므로

$a_2=-a_1=\frac{(-1)^{2-1}}{(2-1)!}\alpha$이다.

따라서 주어진 식이 성립한다.

ⅱ) $n=k\ (k\geq2)$일 때 성립한다고 가정하고, $n=k+1$일 때 성립함을 보이자.

$$0=ka_{k+1}+\sum_{m=1}^{k} ma_m$$

$$=ka_{k+1}+\sum_{m=1}^{k-1} ma_m+ka_k$$

$$=ka_{k+1}+(\boxed{(가)})\times a_k+ka_k$$ 이므로

$$a_{k+1}=\boxed{(나)}\times a_k=\frac{(-1)^k}{k!}\alpha$$ 이다.

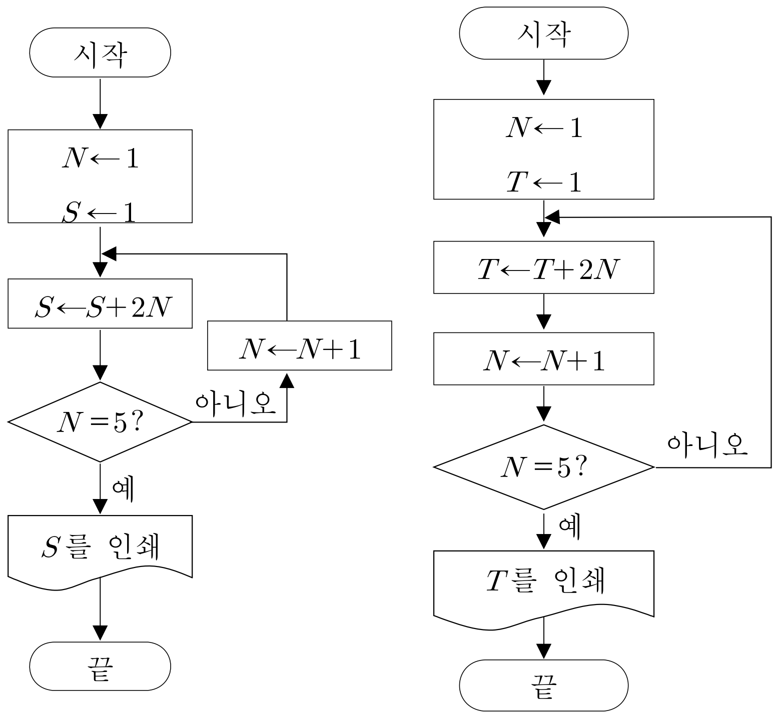
따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\alpha$이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식의 곱을 $f(k)$라 할 때, $f(10)$의 값은?

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{3}{10}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{7}{10}$ ⑤ $\frac{9}{10}$

150. 2006 교육청(4점)

두 순서도에서 인쇄되는 S와 T에 대하여 $S-T$의 값은?

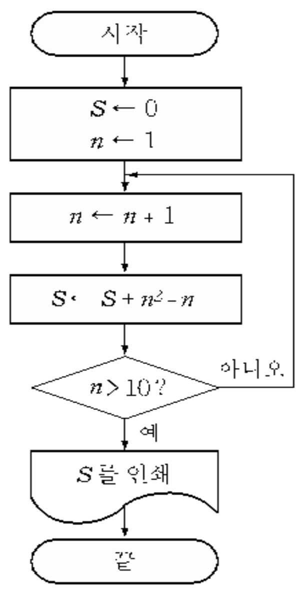


① −12 ② −10 ③ 0
④ 10 ⑤ 12

151. 2005 교육청(4점)

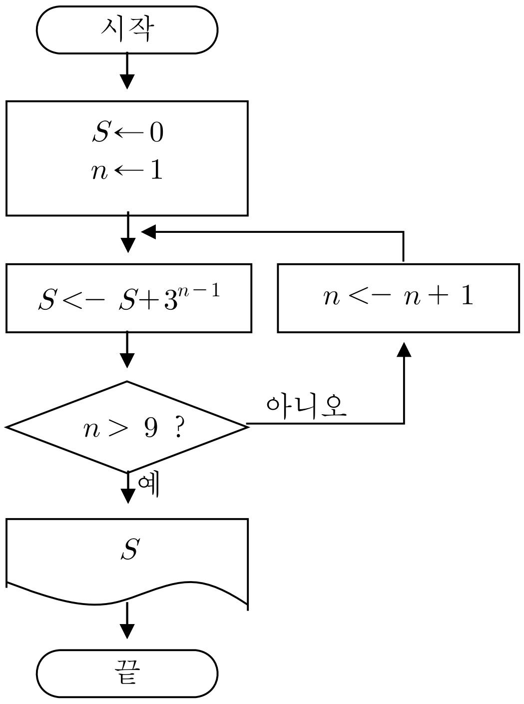
순서도에서 인쇄되는 S의 값은?

① 300
② 330
③ 350
④ 440
⑤ 550



152. 2004 평가원(4점)

다음 순서도에서 인쇄되는 S의 값은?



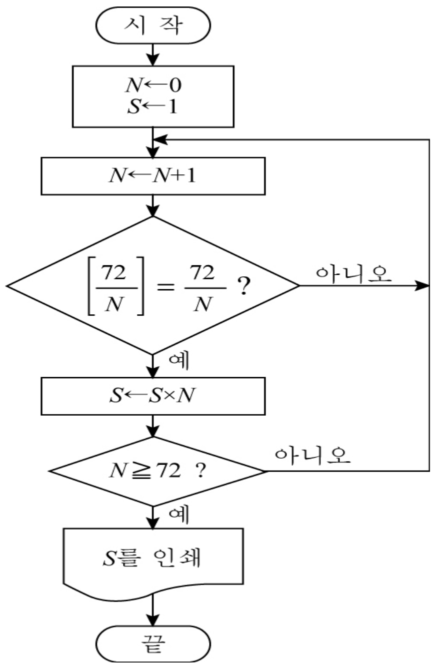
① $\frac{1}{2}(3^9-1)$　② $\frac{1}{2}(3^9-2)$

③ $\frac{1}{2}(3^{10}-1)$　④ $\frac{1}{2}(3^{10}-2)$

⑤ $\frac{1}{2}(3^{11}-1)$

153. 2010 교육청(4점)

다음 순서도에서 인쇄되는 S의 값은?
(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수)

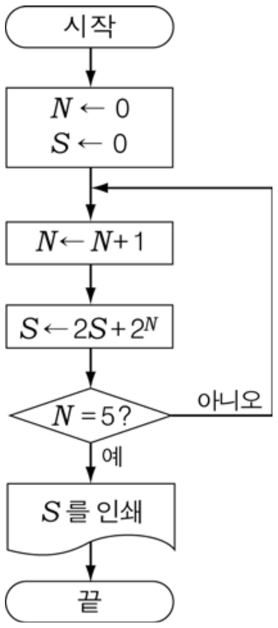


① $2^{18}\times3^{12}$　② $2^{12}\times3^{18}$　③ $2^{14}\times3^{11}$

④ $2^{17}\times3^{12}$　⑤ $2^{12}\times3^{17}$

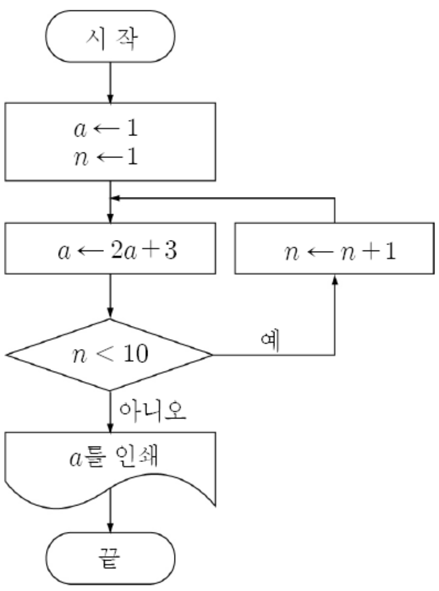
154. 2008 교육청(4점)

다음 순서도에서 인쇄되는 S의 값을 구하시오.



155. 2009 교육청(4점)

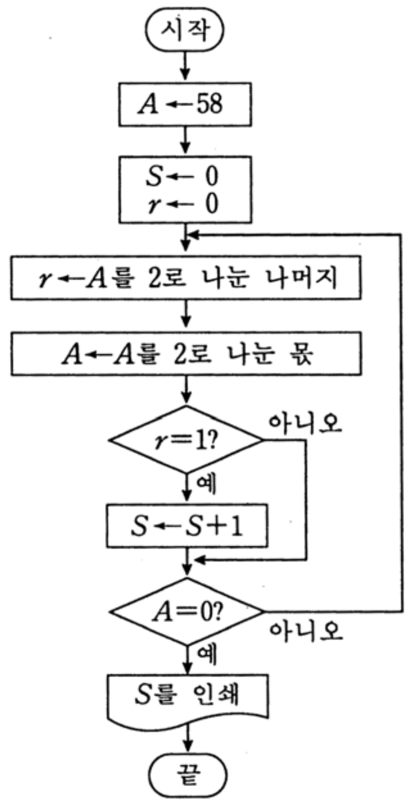
다음 순서도에서 인쇄되는 a의 값은?



① 1021　② 2045　③ 4093
④ 6057　⑤ 8189

156. 2009 평가원(4점)

다음 순서도에서 인쇄되는 S의 값을 구하시오.



157. 2006 수능 (3점)

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=2$이고 $a_{n+1}=2a_n+2$일 때, a_{10}의 값은?

① 1022 ② 1024 ③ 2021
④ 2046 ⑤ 2082

158. 2007 수능 (3점)

다음은 모든 자연수 n에 대하여
$(1^2+1)\cdot 1!+(2^2+1)\cdot 2!+\cdots+(n^2+1)\cdot n!=n\cdot(n+1)!$
이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

< 증 명 >

(1) $n=1$일 때, (좌변)$=2$, (우변)$=2$이므로
주어진 등식은 성립한다.
(2) $n=k$일 때 성립한다고 가정하면
$$(1^2+1)\cdot 1!+(2^2+1)\cdot 2!+\cdots+(k^2+1)\cdot k!=k\cdot(k+1)!$$
이다. $n=k+1$일 때 성립함을 보이자.
$$(1^2+1)\cdot 1!+(2^2+1)\cdot 2!+\cdots+(k^2+1)\cdot k!+\{(k+1)^2+1\}\cdot(k+1)!$$
$$=\boxed{\text{(가)}}+\{(k+1)^2+1\}\cdot(k+1)!$$
$$=(\boxed{\text{(나)}})\cdot(k+1)!$$
$$=(k+1)\cdot\boxed{\text{(다)}}$$
그러므로 $n=k+1$일 때도 성립한다.
따라서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식은 성립한다.

위 증명에서 (가), (나), (다)에 들어갈 식으로 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	$k\cdot(k+1)!$	k^2+2k+1	$(k+1)!$
②	$k\cdot(k+1)!$	k^2+3k+2	$(k+2)!$
③	$k\cdot(k+1)!$	k^2+3k+2	$(k+1)!$
④	$(k+1)\cdot(k+1)!$	k^2+3k+2	$(k+2)!$
⑤	$(k+1)\cdot(k+1)!$	k^2+2k+1	$(k+1)!$

159. 2007 수능 (3점)

수열 $\{a_n\}$이

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{2} \\ (n+1)(n+2)a_{n+1} = n^2 a_n \ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \dots) \end{cases}$$

일 때, 다음은

모든 자연수 n에 대하여 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \frac{n}{n+1}$ ...... $(*)$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

< 증 명 >

(1) $n=1$일 때, (좌변)$=\dfrac{1}{2}$, (우변)$=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$이므로

$(*)$이 성립한다.

(2) $n=m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$\displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_k = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} - \frac{m}{m+1}$이다.

$n=m+1$일 때, $(*)$이 성립함을 보이자.

$$\sum_{k=1}^{m+1} a_k = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} - \frac{m}{m+1} + a_{m+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} - \frac{m}{m+1} + \boxed{(가)}\, a_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} - \frac{m}{m+1}$$

$$+ \frac{m^2}{(m+1)(m+2)} \cdot \frac{(m-1)^2}{m(m+1)} \cdot \cdots \cdot \frac{1^2}{2 \cdot 3} a_1$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} - \frac{m}{m+1} + \boxed{(나)}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} - \frac{m}{m+1} + \frac{1}{(m+1)^2} - \boxed{(다)}$$

$$= \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k^2} - \frac{m+1}{m+2}$$

그러므로 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

위 증명에서 (가), (나), (다)에 들어갈 식으로 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	$\dfrac{m}{(m+1)(m+2)}$	$\dfrac{1}{(m+1)^2(m+2)}$	$\dfrac{1}{(m+1)(m+2)^2}$
②	$\dfrac{m}{(m+1)(m+2)}$	$\dfrac{m}{(m+1)^2(m+2)}$	$\dfrac{1}{(m+1)(m+2)}$
③	$\dfrac{m^2}{(m+1)(m+2)}$	$\dfrac{1}{(m+1)^2(m+2)}$	$\dfrac{1}{(m+1)(m+2)^2}$
④	$\dfrac{m^2}{(m+1)(m+2)}$	$\dfrac{1}{(m+1)^2(m+2)}$	$\dfrac{1}{(m+1)(m+2)}$
⑤	$\dfrac{m^2}{(m+1)(m+2)}$	$\dfrac{m}{(m+1)^2(m+2)}$	$\dfrac{1}{(m+1)(m+2)^2}$

160. 2007 수능 (4점)

좌표평면 위에 다음 [단계]와 같은 순서로 점을 찍는다.

[단계 1] $(0,\ 1)$에 점을 찍는다.

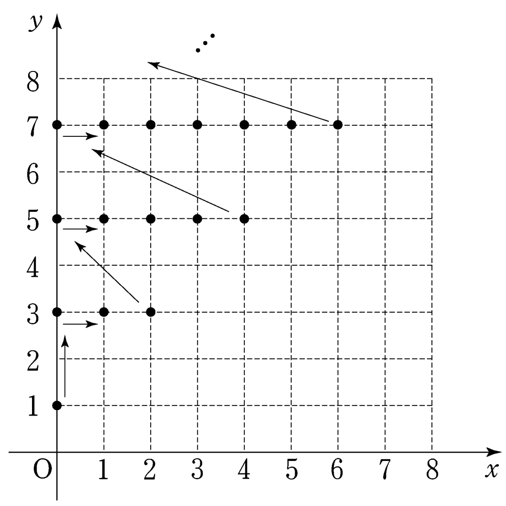
[단계 2] $(0,\ 3)$, $(1,\ 3)$, $(2,\ 3)$에 이 순서대로 3개의 점을 찍는다.

⋮

[단계 k] $(0,\ 2k-1)$, $(1,\ 2k-1)$, $(2,\ 2k-1)$, $\cdots$, $(2k-2,\ 2k-1)$에 이 순서대로 $(2k-1)$개의 점을 찍는다. (단, k는 자연수이다.)

⋮

이와 같은 과정으로 [단계 1]부터 시작하여 점을 찍어 나갈 때, 100번째 찍히는 점의 좌표는 $(p,\ q)$이다. $p+q$의 값은?



① 46 ② 43 ③ 40
④ 37 ⑤ 34

161. 2005 수능 (4점)

$p \geqq 2$인 자연수 p에 대하여 수열 $\{a_n\}$이 다음 세 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1 = 0$

(나) $a_{k+1} = a_k + 1 \ (1 \leqq k \leqq p-1)$

(다) $a_{k+p} = a_k \ (k = 1, 2, 3, \cdots)$

<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $a_{2k} = 2a_k$

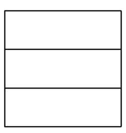
ㄴ. $a_1 + a_2 + \cdots + a_p = \dfrac{p(p-1)}{2}$

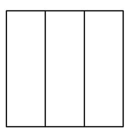
ㄷ. $a_p + a_{2p} + \cdots + a_{kp} = k(p-1)$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

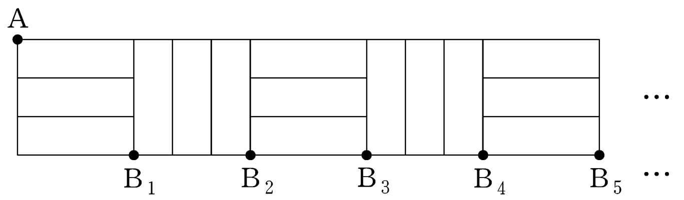
162. 2007 수능 (4점)

다음과 같이 정사각형을 가로 방향으로 3등분하여 [도형 1]을 만들고, 세로 방향으로 3등분하여 [도형 2]를 만든다.


[도형 1]


[도형 2]

[도형 1]과 [도형 2]를 번갈아 가며 계속 붙여 아래와 같은 도형을 만든다. 그림과 같이 첫 번째 붙여진 [도형 1]의 왼쪽 맨 위 꼭짓점을 A라 하고, [도형 1]의 개수와 [도형 2]의 개수를 합하여 n개 붙여 만든 도형의 오른쪽 맨 아래 꼭짓점을 $\mathrm{B_n}$이라 하자.



꼭짓점 A에서 꼭짓점 $\mathrm{B_n}$까지 선을 따라 최단거리로 가는 경로의 수를 a_n이라 할 때, $a_3 + a_7$의 값은?

① 26　② 28　③ 30
④ 32　⑤ 34

163. 2005 수능 (4점)

다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\dots+\frac{1}{n}\right)=\frac{n(5n+3)}{4}$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

< 증 명 >

(1) $n=1$일 때, (좌변)$=2$, (우변)$=2$이므로
주어진 등식은 성립한다.

(2) $n=m$일 때 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\dots+\frac{1}{m}\right)$$
$$=\frac{m(5m+3)}{4}$$

이다. $n=m+1$일 때 성립함을 보이자.

$$\sum_{k=1}^{m+1}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\dots+\frac{1}{m+1}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{m}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\dots+\frac{1}{m+1}\right)+\frac{(\text{가})}{m+1}$$
$$=\sum_{k=1}^{m}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\dots+\frac{1}{(\text{가})}\right)$$
$$+\frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{m}(5k-3)+\frac{(\text{나})}{m+1}$$
$$=\frac{m(5m+3)}{4}+\frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{m+1}\left(\quad(\text{다})\quad\right)$$
$$=\frac{(m+1)(5m+8)}{4}$$

그러므로 $n=m+1$일 때도 성립한다.
따라서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식은 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	$5m-3$	m	$5k+2$
②	$5m-3$	$m+1$	$5k+2$
③	$5m+2$	m	$5k-3$
④	$5m+2$	m	$5k+2$
⑤	$5m+2$	$m+1$	$5k-3$

164. 2004 수능 (3점)

다음은 모든 자연수 n에 대하여

부등식 $\sum_{i=1}^{2n+1} \frac{1}{n+i} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1} > 1$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

< 증 명 >

자연수 n에 대하여 $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1}$이라 할 때,

$a_n > 1$임을 보이면 된다.

(1) $n=1$일 때 $a_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1$이다.

(2) $n=k$일 때 $a_k > 1$이라고 가정하면

$n=k+1$일 때

$a_{k+1} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{3k+4}$

$= a_k + \left(\frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} \right) - \boxed{(가)}$

한편, $(3k+2)(3k+4) \boxed{(나)} (3k+3)^2$이므로

$\frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+4} > \boxed{(다)}$, 그런데 $a_k > 1$이므로

$a_{k+1} > a_k + \left(\frac{1}{3k+3} + \boxed{(다)} \right) - \boxed{(가)} > 1$

그러므로 (1), (2)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $a_n > 1$이다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	$\frac{1}{k+1}$	$>$	$\frac{2}{3k+3}$
②	$\frac{1}{k+1}$	$<$	$\frac{2}{3k+3}$
③	$\frac{1}{k+1}$	$<$	$\frac{4}{3k+3}$
④	$\frac{2}{k+1}$	$>$	$\frac{4}{3k+3}$
⑤	$\frac{2}{k+1}$	$<$	$\frac{1}{k+1}$

165. 2011 수능 (4점)

수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 1$이고,

$$a_{n+1} = n+1 + \frac{(n-1)!}{a_1 a_2 \cdots a_n} \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정의 일부이다.

모든 자연수 n에 대하여

$a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1} = a_1 a_2 \cdots a_n \times (n+1) + (n-1)!$

이다. $b_n = \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{n!}$ 이라 하면, $b_1 = 1$이고

$b_{n+1} = b_n + \boxed{(가)}$

이다. 수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구하면

$b_n = \boxed{(나)}$ 이므로 $\frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{n!} = \boxed{(나)}$ 이다.

⋮

따라서 $a_1 = 1$이고, $a_n = \frac{(n-1)(2n-1)}{2n-3} \, (n \geq 2)$ 이다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(n)$, (나)에 알맞은 식을 $g(n)$이라 할 때, $f(13) \times g(7)$의 값은?

① $\frac{1}{70}$ ② $\frac{1}{77}$ ③ $\frac{1}{84}$ ④ $\frac{1}{91}$ ⑤ $\frac{1}{98}$

166. 2006 수능 (4점)

첫째항이 0이고 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$이 $a_{n+1}b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$를 만족시킬 때, b_{27}의 값을 구하시오.

167. 2004 수능 (4점)

그림과 같이 자연수 n에 대하여 n개의 항

$$\left[\frac{n}{1}\right],\ \left[\frac{n}{2}\right],\ \left[\frac{n}{3}\right],\ \cdots,\ \left[\frac{n}{n}\right]$$

이 n행에 1열부터 n열까지 차례로 나열되어 있다.
(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

	1열	2열	3열	4열	5열	$\cdots$	n열	$\cdots$
1행	1							
2행	2	1						
3행	3	1	1					
4행	4	2	1	1				
5행	5	2	1	1	1			
⋮			⋮					
n행	$\left[\frac{n}{1}\right]$	$\left[\frac{n}{2}\right]$	$\left[\frac{n}{3}\right]$		$\cdots$		$\left[\frac{n}{n}\right]$	
⋮			⋮					

다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. n행에서 그 값이 1인 항은 $\left[\frac{n+1}{2}\right]$개이다.

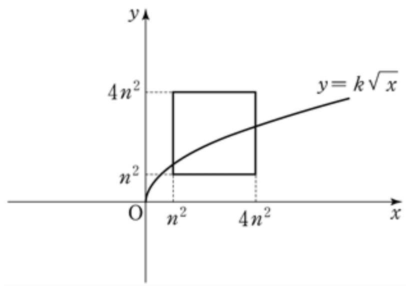
ㄴ. 100행에서 그 값이 3인 항은 8개이다.

ㄷ. 3열에서 그 값이 5인 항은 5개이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

168. 2006 수능 (4점)

좌표평면에서 자연수 n에 대하여 A_n을 4개의 점 (n^2, n^2), $(4n^2, n^2)$, $(4n^2, 4n^2)$, $(n^2, 4n^2)$ 을 꼭지점으로 하는 정사각형이라 하자. 정사각형 A_n과 함수 $y=k\sqrt{x}$ 의 그래프가 만나도록 하는 자연수 k의 개수를 a_n이라 할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?



< 보 기 >

ㄱ. $a_5 = 15$

ㄴ. $a_{n+2} - a_n = 7$

ㄷ. $\sum_{k=1}^{10} a_k = 200$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

169. 2011 수능 (4점)

2이상의 자연수 n에 대하여 집합 $\{3^{2k-1} \mid k\text{는 자연수}, 1 \le k \le n\}$의 서로 다른 두 원소를 곱하여 나올 수 있는 모든 값만을 원소로 하는 집합을 S라 하고, S의 원소의 개수를 $f(n)$이라 하자. 예를 들어, $f(4)=5$이다. 이때, $\sum_{n=2}^{11} f(n)$의 값을 구하시오.

170. 2011 | 수능 (4점)

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \log\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

를 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{20} a_{2k} = p$라 할 때, 10^p의 값을 구하시오.[170.]

171. 2011 | 수능 (4점)

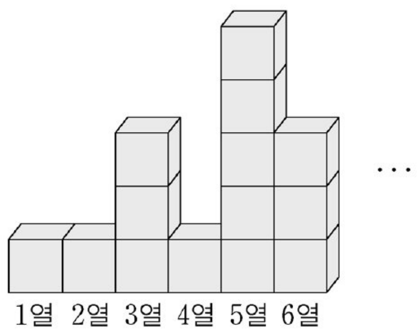
자연수 m 에 대하여 크기가 같은 정육면체 모양의 블록이 1 에 1 개, 2 열에 2 개, 3 열에 3 개, $\cdots$, m 열에 m 개 쌓여 있다. 블록의 개수가 짝수인 열이 남아 있지 않을 때까지 다음 시행을 반복한다.

블록의 개수가 짝수인 각 열에 대하여 그 열에 있는 블록의 개수의 $\frac{1}{2}$ 만큼의 블록을 그 열에서 들어낸다.

블록을 들어내는 시행을 모두 마쳤을 때, 1 열부터 m 열까지 남아 있는 블록의 개수의 합을 $f(m)$ 이라 하자.
예를들어, $f(2)=2$, $f(3)=5$, $f(4)=6$ 이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(2^{n+1})-f(2^n)}{f(2^{n+2})}=\frac{q}{p}$$

일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. [171.](단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)



1. 2008 평가원(2점)

$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}-x}$ 의 값은?

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

2. 2008 평가원(2점)

$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-7n}{n^2+5}$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

3. 2006 교육청(2점)

$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)(n+4)-n^2}{(n+1)(n+2)-n^2}$ 의 값은?

① 4 ② 3
③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{7}{3}$
⑤ 2

4. 2008 교육청(2점)

$\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{4n^2+1}-n}$ 의 값은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

5. 2005 교육청(2점)

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n-1}+\sqrt{4n+1}}{\sqrt{n}}$ 의 값은?

① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

6. 2005 평가원(2점)

$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}}$ 의 값은?

① 1 ② $\sqrt{2}$
③ $\frac{3}{2}$ ④ 2
⑤ $2\sqrt{2}$

7. 2008 교육청(2점)

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$의 값은?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

8. 2006 교육청(2점)

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}}{\sqrt{n}}$ 의 값은?

① $-\sqrt{2}$ ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ $\sqrt{2}$

9. 2010 교육청(2점)

$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n^2+1}+n}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

10. 2006 교육청(2점)

$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n+5}-n\right)$의 값은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

11. 2007 교육청(2점)

$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+2n}-2n\right)$의 값은?

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ 0

12. 2009 교육청(2점)

$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1}-n)$의 값은?

① 0 ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 2

13. 2007 교육청(2점)

$\lim_{n \to \infty} n\left(\sqrt{n^2-n+1}-\sqrt{n^2-n-1}\right)$의 값은?

① 1　② $\frac{3}{2}$　③ 2　④ $\frac{5}{2}$　⑤ 3

14. 2010 교육청(2점)

$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}}$ 의 값은?

① 1　② $\frac{3}{2}$　③ 2　④ $\frac{5}{2}$　⑤ 3

15. 2010 평가원(2점)

$\lim_{n \to \infty}\left(\sqrt{n^2+4n+11}-n\right)$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

16. 2010 교육청(2점)

$\lim_{n \to \infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$의 값은?

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{2}$　④ 1　⑤ 2

17. 2010 평가원(2점)

$\lim_{n \to \infty} \frac{3 \cdot 4^n - 3^n}{4^n+3^n+2}$ 의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

18. 2008 교육청(2점)

$\lim_{n \to \infty} \frac{2^{n+1}+3^{-n+1}}{2^{n-1}+3^{-n}}$ 의 값은?

① $\frac{2}{3}$　② $\frac{3}{2}$　③ 2　④ 4　⑤ 6

19. 2007 교육청(2점)

$\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 3^n-3\cdot 4^n}{2^{2n}+3^n}$ 의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 2

20. 2009 교육청(2점)

$\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 4^n+3}{4^{n+1}+2^n}$ 의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

21. 2007 교육청(2점)

$\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 3^{n+1}+5}{3^n-1}$ 의 값은?

① 2 ② 3 ③ 5 ④ 6 ⑤ 10

22. 2008 교육청(2점)

$\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 3^n+5}{3^{n-1}+2^n}$ 의 값은?

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ 2 ④ 4 ⑤ 6

23. 2006 평가원(2점)

$\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n-1}}{4^n+3^n}$ 의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

24. 2007 평가원(2점)

$\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+n+1}{n^2+1}$ 의 값은?

① 0 ② 2 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

25. 2008 평가원(2점)

$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-2^n}{5^{n+1}+3^{n+1}}$ 의 값은?

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{3}{8}$ ⑤ 1

26. 2007 교육청(2점)

$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+2}+2^{2n-1}}{4^n-3^{n+1}}$ 의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

27. 2006 평가원(2점)

$\lim_{n\to\infty}\left\{2+\left(-\frac{1}{5}\right)^n\right\}$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

28. 2006 교육청(2점)

무한수열 $\frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \cdots, \frac{n}{2n-1}, \cdots$ 의 극한값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

29. 2006 평가원(2점)

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$2n-1< na_n< 2n+4$를 만족할 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

30. 2005 교육청(2점)

수렴하는 무한수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}(n^2-1)a_n=2006$ 일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}n^2+1\right)a_n$ 의 값은?

① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ 1003 ④ 2006 ⑤ 4012

31. 2006 교육청(3점)

수렴하는 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 에 대하여

$$\frac{9n^2+1}{n^2+3} \leq \frac{na_n}{2n+4} \leq \frac{9n^2+10}{n^3+3}$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하시오.

32. 2010 평가원 (3점)

두 등식 $\lim_{n\to\infty}\frac{an+b}{n}=2$, $\sum_{n=1}^{5}(an+b)=60$을 만족시키는 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?32.

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

33. 2007 교육청(3점)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n}{\left\{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}^2}$$ 의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

34. 2004 평가원(3점)

$\lim_{n\to\infty}\frac{(3n)^3}{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}$ 의 값을 구하시오.

35. 2009 교육청(3점)

수렴하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{6+2a_n}{3a_n-1}=\frac{3}{2}$일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

36. 2007 교육청(3점)

다음과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$이 있다.

$$\begin{cases} a_1=2 \\ a_{n+1}=\frac{3}{4}a_n+4 \ (n=1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

$\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하시오.

37. 2008 교육청(3점)

자연수 n에 대하여 $\sqrt{n^2+1}$의 정수부분을 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} a_n(\sqrt{n^2+1}-a_n)$의 값은?

① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ④ 1 ⑤ $\sqrt{2}$

38. 2010 교육청(3점)

수열 $\{a_n\}$이 $3n-1 < na_n < 3n+2$를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 2 ④ 3 ⑤ 5

39. 2010 교육청(3점)

이차함수 $f(x)=2x^2-2nx+\frac{1}{2}n^2+6n+1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 $\mathrm{P}(x_n,\ y_n)$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}$의 값을 구하시오.

40. 2010 교육청(3점)

두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$에 대하여

$$A^{-1}B^nA=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n+c_n}{a_n+d_n}$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

41. 2010 교육청(3점)

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2n+3}=2$, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{3n+1}=3$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{n^2+4}$의 값을 구하시오.

42. 2010 교육청(3점)

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 $\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $a_2+b_2=17$

ㄴ. $b_n=3^n-1$

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=3$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

43. 2010 교육청(3점)

무한수열 $\{(x+2)(x^2-4x+3)^{n-1}\}$이 수렴하도록 하는 모든 정수 x의 합을 구하시오.

44. 2010 교육청(3점)

자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=-x+n$이 만나서 생기는 두 교점 사이의 거리를 l_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{l_n^2}{n}$의 값은?

3

① 5 ② 6 ③ 7

④ 8 ⑤ 9

45. 2007 평가원(3점)

$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+\frac{n}{2}}-n\right)$의 값은?

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{4}$

④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

46. 2004 평가원(3점)

극한 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-2005}-n}{n-\sqrt{n^2-2004}}$의 값은?

① $-\frac{2005}{2004}$ ② $-\frac{2004}{2005}$ ③ $-\frac{1002}{2005}$

④ $\frac{2005}{2004}$ ⑤ $\frac{2004}{2005}$

47. 2005 교육청(3점)

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_n=2n-1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}-\sqrt{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}\right)$의 값은?

① $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$

③ 1 ④ $\sqrt{2}$

⑤ 2

48. 2005 평가원(3점)

$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+15n+13}-\sqrt{n^2-13n}\right)$의 값을 구하시오.

49. 2009 교육청(3점)

n이 자연수일 때, 점 $\mathrm{A}_n(n, \sqrt{3}n)$과 원 $x^2+y^2=4n^2+3n$ 위의 점 P에 대하여 선분 PA_n의 길이의 최솟값을 a_n이라 하자. 이때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은?

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{4}{5}$
④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{4}{3}$

50. 2008 교육청(3점)

$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+an+3}-\sqrt{n^2+bn+2}\right)=5$를 만족하는 두 실수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은?

① 2 ② 5 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

51. 2008 교육청(3점)

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{a_n}$의 값이 존재하는 것을 <보기>에서 모두 고른 것은?

〈보 기〉

ㄱ. $a_n=2^n$
ㄴ. $a_n=(-1)^n$
ㄷ. $S_n=3^n-1$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

52. 2008 교육청(3점)

$\lim_{n\to\infty}\frac{pn^2+qn-1}{n+2}=3$이 성립하도록 하는 상수 p, q가 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근일 때, $a+b$의 값을 구하면?

① -3 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 3

53. 2008 교육청(3점)

$\lim_{n\to\infty}\frac{2+5+8+\ldots+(3n-1)}{2n^2+3}$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

54. 2008 교육청(3점)

$\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{\sqrt{4n^2+1}}$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

55. 2005 교육청(3점)

$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2005}{n^2+2005}$ 의 극한값은?

① 1 ② $\sqrt{2}$
③ $\sqrt{3}$ ④ 2
⑤ 3

56. 2005 교육청(3점)

자연수 n 에 대하여 다항식 $f(x)=2^n x^2+3^n x+1$ 을 $x-1$, $x-2$ 로 나눈 나머지를 각각 a_n, b_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ 의 값은?

① 0 ② $\frac{1}{4}$
③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$
⑤ 1

57. 2006 교육청(3점)

다음 무한수열 중에서 수렴하지 않는 것은?

① $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}\right\}$ ② $\left\{\frac{n}{2n+1}\right\}$
③ $\left\{\frac{(-1)^n}{n+1}\right\}$ ④ $\left\{\frac{1-3^n}{1+3^n}\right\}$
⑤ $\left\{\frac{1}{\log_2(n+4)-\log_2 n}\right\}$

58. 2004 평가원(3점)

다음 무한수열 중 수렴하는 것은?

① $\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\}$ ② $\{(-2)^n\}$
③ $\left\{\frac{n^2-1}{n}\right\}$ ④ $\{100n-n^2\}$
⑤ $\{1+(-1)^n\}$

59. 2004 평가원(3점)

무한등비수열 $\{(2x+1)^{n-1}\}$이 수렴하기 위한 실수 x 의 값의 범위는?

① $-2<x<-1$ ② $-1<x\leqq 0$
③ $0<x\leqq 1$ ④ $1<x\leqq 2$
⑤ $2<x\leqq 3$

60. 2008 교육청(3점)

무한등비수열 $\left\{\left(-\sin\frac{k\pi}{4}\right)^n\right\}$이 수렴하도록 하는 10 이하의 자연수 k 의 개수는?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

61. 2008 교육청(3점)

함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+2}-6x+2}{x^n+1}$ 에 대하여 $f\left(-\frac{1}{2}\right)+f(4)$ 의 값을 구하시오.

62. 2008 평가원(3점)

자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P_n}(\mathrm{n},\ 2^{\mathrm{n}})$에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{Q_n}$, $\mathrm{R_n}$이라 하자. 원점 O와 점 A(0, 1)에 대하여 사각형 $\mathrm{AOQ_nP_n}$의 넓이를 S_n, 삼각형 $\mathrm{AP_nR_n}$의 넓이를 T_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{S_n}$의 값은?

① 1 ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ 0

63. 2006 평가원(3점)

행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$에 대하여 $A^n=\begin{pmatrix}a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{pmatrix}$일 때, $\lim_{n\to\infty}c_n$의 값은?

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ 2 ④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

64. 2005 교육청(3점)

수열 $\{a_n\}$ 이 $\lim_{n\to\infty}na_n=3$ 을 만족할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n}{n^3a_n}$ 의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 3

65. 2006 교육청(3점)

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}\left\{\left(n+\frac{1}{n}\right)^{10}-\frac{1}{n^{10}}\right\}$이 수렴하기 위한 k의 최소값을 구하시오.

66. 2004 평가원(3점)

수열 $\{a_n\}$이 $\lim_{n\to\infty} n a_n = \frac{1}{9}$ 을 만족할 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{6n+1}{n^2 a_n}$ 의 값을 구하시오.

67. 2007 평가원(3점)

수렴하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} \frac{2a_n-3}{a_n+1} = \frac{3}{4}$ 일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

68. 2006 교육청(3점)

행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$에 대하여 $A^n = \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ 0 & b_n \end{pmatrix}$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{3a_n - 2b_n}{2a_n + 3b_n}$ 의 값은?

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{2}{3}$
③ 0 ④ $\frac{2}{3}$
⑤ $\frac{3}{2}$

69. 2006 교육청(3점)

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\frac{a_n-4}{a_n+3} = \frac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^4+1}$ 이 성립할 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$ 의 값은?

① $\frac{16}{3}$ ② $\frac{17}{3}$
③ 6 ④ $\frac{19}{3}$
⑤ $\frac{20}{3}$

70. 2005 평가원(3점)

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = 2n^2 - n$ 일 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{n a_n}{S_n}$ 의 값은?

① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

71. 2007 평가원(3점)

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = 2^n + 3^n$일 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{S_n}$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

72. 2006 교육청(3점)

세 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$에 대한 옳은 설명을 <보기>에서 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{a_n b_n\}$이 모두 수렴하면, 수열 $\{b_n\}$은 수렴한다.

ㄴ. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - 2b_n) = 0$ 이고 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$ 이면, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$ 이다.

ㄷ. $a_n < b_n < c_n$ 이고 $\lim\limits_{n\to\infty}(c_n - a_n) = 0$ 이면, 수열 $\{b_n\}$ 은 수렴한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

73. 2005 교육청(3점)

무한수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, α 는 상수)

<보 기>

ㄱ. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ 이면 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$ 이다.

ㄴ. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$ 이면 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha$ 이다.

ㄷ. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \alpha$ 이면 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n} = 1$ 이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

74. 2010 교육청(3점)

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $\lim\limits_{n\to\infty}|b_n| = 0$이면 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$이다.

ㄴ. $\lim\limits_{n\to\infty}(3n+1)a_n = 6$이면 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 2$이다.

ㄷ. 수열 $\{a_n b_n\}$이 수렴하면 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 각각 수렴한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

75. 2010 교육청(3점)

두 무한수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n} = \alpha$일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, α는 0이 아닌 실수이다.)

[보 기]

ㄱ. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$이면 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$이다.

ㄴ. $\alpha = 1$이면 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$이다.

ㄷ. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{1}{\alpha}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

76. 2004 평가원(4점)

n이 양의 정수일 때, 6^n의 양의 약수의 총합은 $T(n)$이다. 이때, $\lim_{n\to\infty}\frac{6^n}{T(n)}$의 값을 구하면?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$
③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{1}{12}$
⑤ $\frac{1}{18}$

77. 2004 평가원(4점)

$a_1=1$, $a_2=9$, $3a_{n+2}-2a_{n+1}-a_n=0\,(n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은?

① 6 ② 7
③ 8 ④ 9
⑤ 10

78. 2005 교육청(3점)

수렴하는 두 무한수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여
$\begin{pmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.9&0.2\\0.1&0.8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의할 때,
$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$의 값은? (단 $a_1=4$, $b_1=6$)

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$
③ 1 ④ $\frac{2}{3}$
⑤ 2

79. 2006 평가원(4점)

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{kn+1}}{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})}=5$일 때, 상수 k의 값을 구하시오.

80. 2007 평가원(4점)

등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_1=4$, $a_1-a_2+a_3-a_4+a_5=28$ 일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값을 구하시오.

81. 2005 교육청(3점)

수렴하는 무한수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=2$,
$a_{n+1}=\frac{3n(2n+3)}{(2n-1)(2n+1)}-2a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이 성립할 때, $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$이다. 30α의 값을 구하시오.

82. 2008 교육청(3점)

$n\geq 2$인 자연수 n에 대하여 다항식 $(x+1)^n$을 x^2-3x+2로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{R(0)}{3^n+2^n}$의 값은?

① 2 ② 1 ③ 0
④ -1 ⑤ -2

83. 2008 교육청(3점)

자연수 n에 대하여 집합 $\{k \mid 1 \leq k \leq 2n,\ k$는 자연수 $\}$의 세 원소 $a,\ b,\ c\ (a<b<c)$가 등차수열을 이루는 집합 $\{a,\ b,\ c\}$의 개수를 T_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{n^2}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

84. 2008 평가원(4점)

자연수 n에 대하여 이차함수 $f(x)=\sum_{k=1}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2$의 최솟값을 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값은?

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

85. 2007 평가원(4점)

$0<x<16$ 일 때, 수열 $\left\{\left(\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}x\right)^n\right\}$이 수렴하도록 하는 자연수 x 의 개수는?

① 5 ② 7 ③ 9
④ 11 ⑤ 13

86. 2007 교육청(3점)

수열의 극한 $\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n-1}-r+2}{r^n+1}\ (r\neq-1)$에 대한 설명으로 옳은 것을 <보기>에서 모두 고르면?

< 보 기 >

ㄱ. $|r|>1$일 때, 발산한다.
ㄴ. $r=1$일 때, 극한값은 1이다.
ㄷ. $|r|<1$일 때, 극한값은 $2-r$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ,ㄷ
④ ㄴ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

87. 2005 교육청(3점)

무한수열 $2+\frac{1}{2},\ 2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}},\ 2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}},\ \cdots$ 은 수렴하는 것으로 알려져 있다. 다음은 그 극한값을 구하는 과정이다.

> 주어진 수열을 $\{a_n\}$ 이라 하면 $a_1=2+\frac{1}{2}$ 이고
> $a_{n+1}=(\ 가\ )+\frac{1}{a_n}$ 이다.
> 이 수열의 극한값을 x 라고 하면
> $\lim_{n\to\infty}a_n=x,\ \lim_{n\to\infty}a_{n+1}=x$ 이므로
> $x=(\ 가\ )+\frac{1}{x}$ 이다. 따라서, 구하는 극한값은
> (나)이다.

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① 2, $1+\sqrt{2}$ ② 2, $2+\sqrt{2}$
③ 2, $3+\sqrt{2}$ ④ 1, $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$
⑤ 1, $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

88. 2008 교육청(3점)

두 무한수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$\lim_{n\to\infty}(2n-1)a_n = 3$, $\lim_{n\to\infty}(n^2+3n+2)b_n = 2$일 때,

$\lim_{n\to\infty}(2n+1)^3 a_n b_n$의 값을 구하시오.

89. 2008 교육청(3점)

원 $x^2+y^2=4^n+1(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 위의 점 $\mathrm{P}_n(2^n,\ 1)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q_n이라 하자. 삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}}{S_n}$의 값은? (단, O는 원점이다.)

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$

④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

90. 2008 교육청(3점)

수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$의 항들 사이에 $a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$, $b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$ 이 성립한다. 다음 <보기>의 설명 중에서 옳은 것을 있는 대로 고른 것은? (단, $0<a_1<b_1$)

< 보 기 >

ㄱ. $a_{n+1}>b_{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

ㄴ. $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a_n}{b_n}}+\sqrt{\frac{b_n}{a_n}}\right)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n$

① ㄷ ② ㄱ,ㄴ ③ ㄱ,ㄷ

④ ㄴ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

91. 2008 교육청(3점)

수열 $\{a_n\}$이 $a_1=1$, $a_n+a_{n+1}=3$ $(n=1,2,3,\cdots)$을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $a_{11}=1$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}a_{2n}=2$

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{3}{2}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

92. 2008 교육청(3점)

두 무한수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 일반항이

$a_n=\cos n\pi$, $b_n=\sin\frac{2n-1}{2}\pi$ 일 때, 옳은 것을 <보기>에서 모두 고르면?

< 보 기 >

ㄱ. 수열 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$은 수렴한다.

ㄴ. 수열 $\{a_n+b_n\}$ 은 수렴한다.

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

93. 2005 교육청(3점)

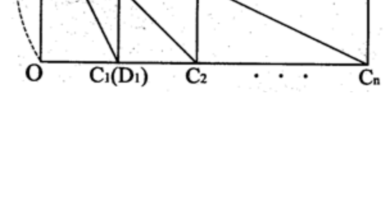
어느 강 상류와 하류에 각각 위치한 1 호 댐과 2 호 댐이 있다. 강 상류의 1 호 댐으로부터 2 호 댐으로 매일 100 만톤의 물이 유입되고, 정오에 2 호 댐의 저수량을 측정한다. 정오부터는 측정된 저수량의 2% 를 농업용수와 생활용수 등을 위하여 강 하류로 방류한다고 한다. 매일 이와 같은 과정이 한없이 반복된다고 할 때, 정오에 측정되는 2 호 댐의 저수량은 어떤 값에 한없이 가까워지는가? (단, 방류는 그날 중으로 이루어지고 자연 증발 및 기타 유실량은 무시한다.)

① 4400 톤 ② 4600 톤
③ 4800 톤 ④ 5000 톤
⑤ 5200 톤

94. 2005 교육청(3점)

그림과 같이 자연수 n 에 대하여 가로의 길이가 n , 세로의 길이가 48 인 직사각형 OAB_nC_n 이 있다. 대각선 AC_n 과 선분 B_1C_1 의 교점을 D_n 이라한다. 이때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{AC_n}-\overline{OC_n}}{\overline{B_1D_1}}$ 의 값을 구하시오.

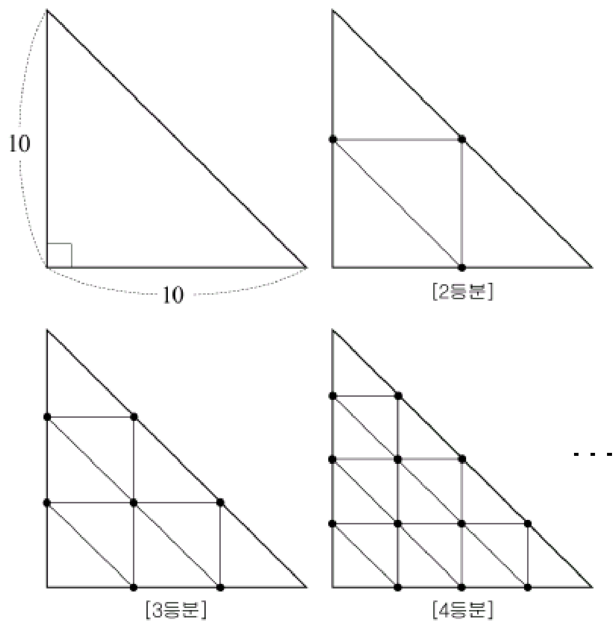


95. 2007 교육청(3점)

2500 L 의 물을 저장할 수 있는 물탱크에 현재 1200 L 의 물이 담겨 있다. 이 물탱크에 있는 물의 양의 12% 를 사용한 다음 x L 의 물을 넣는 시행을 한다. 이와 같은 시행을 n 번 반복한 후 물탱크에 남아 있는 물의 양을 a_n L 라 하자. 부등식 $\lim_{n\to\infty}a_n \leq 2000$ 이 성립하도록 하는 x 의 최댓값을 구하시오.

96. 2006 교육청(3점)

그림은 두 변의 길이가 10 인 직각이등변삼각형이다. 세 변을 n 등분하는 점에서 각 변에 평행한 선분을 그어 만들어지는 가장 작은 직각이등변삼각형 한 개의 넓이를 a_n, 선분들의 교점의 총 개수를 b_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}a_nb_n$ 의 값을 구하시오.



97. 2007 교육청(3점)

1000mL의 물이 가득 들어있는 용기가 있다. 이 용기에서 담긴 양의 $\frac{1}{2}$을 덜어내고 물 300mL와 알콜 100mL를 다시 넣는 것을 첫 번째 시행이라 하고, 이 시행 후 용기에 남아 있는 양의 $\frac{1}{2}$을 덜어내고 물 300mL와 알콜 100mL를 다시 넣는 것을 두 번째 시행이라 하자. 이와 같은 과정을 한 없이 반복한다고 할 때, 용기 안에 알콜의 농도(%)는?(단, 자연증발 및 기타 유실량은 무시한다.)

① 10% ② 15% ③ 20% ④ 25% ⑤ 30%

98. 2006 교육청(3점)

수렴하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 무한급수

$$\left(a_1-\frac{2}{1^2}\right)+\left(a_2-\frac{2+4}{3^2}\right)+\cdots+\left\{a_n-\frac{2+4+6+\cdots+2n}{(2n-1)^2}\right\}+\cdots$$

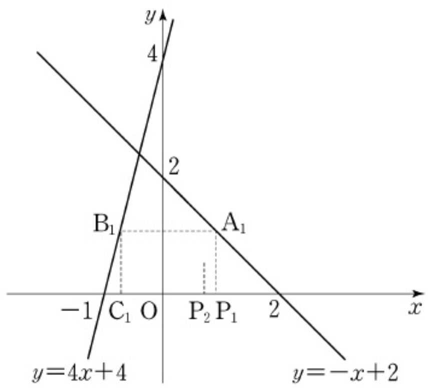
이 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은?

① 0 ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

99. 2010 평가원(4점)

자연수 n에 대하여 점 P_n이 x축 위의 점일 때, 점 P_{n+1}을 다음 규칙에 따라 정한다.

> (가) 점 P_1의 좌표는 $(a_1, 0)$ $(0<a_1<2)$이다.
> (나) (1) 점 P_n을 지나고 y축에 평행한 직선이 직선 $y=-x+2$와 만나는 점을 A_n이라 한다.
> (2) 점 A_n을 지나고 x축에 평행한 직선이 직선 $y=4x+4$와 만나는 점을 B_n이라 한다.
> (3) 점 B_n을 지나고 y축에 평행한 직선이 x축과 만나는 점을 C_n이라 한다.
> (4) 점 C_n을 y축에 대하여 대칭이동한 점을 P_{n+1}이라 한다.



점 P_n의 x좌표를 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은?

① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{4}{9}$ ④ $\frac{5}{9}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

100. 2010 교육청(4점)

수렴하는 무한수열만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

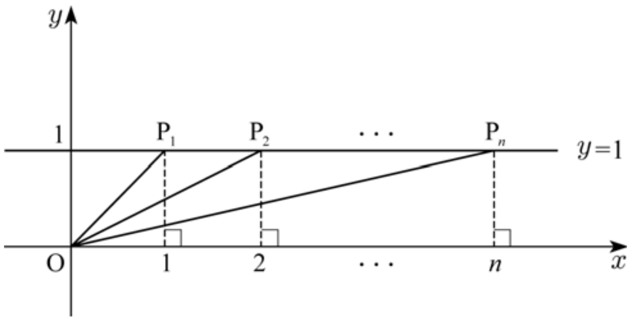
ㄱ. $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ ㄴ. $\left\{\frac{5^{n+1}-3^n}{5^n+4^n}\right\}$ ㄷ. $\left\{\frac{\sqrt{n^2+n}-n}{n}\right\}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

101. 2010 교육청(4점)

좌표평면에서 직선 $y=1$ 위의 점 $\mathrm{P}_n(n,\ 1)$에 대하여 수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 정의한다.

$a_n=$(선분 OP_n의 길이) $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$



$\lim_{n\to\infty}\frac{[a_1]+[a_2]+[a_3]+\cdots+[a_n]}{n^2}$의 값은?

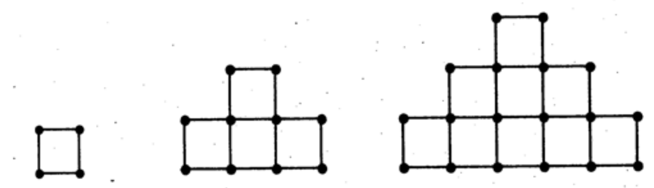
(단, O는 원점이고, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

102. 2010 교육청(4점)

[그림 1]은 길이가 1m인 철근 4개를 가지고 철근의 끝점과 끝점을 용접하여 만든 조형물이다.

[그림 2]는 길이가 1m인 철근 13개를 가지고 철근의 끝점과 끝점을 용접하여 만든 조형물이다.



[그림 1] [그림 2] [그림 3]

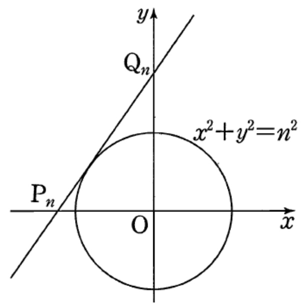
이와 같이 길이가 1m인 철근의 끝점과 끝점을 용접하여 만든 n번째 조형물에 사용된 1m인 모든 철근의 수를 a_n, 용접한 모든 지점의 수를 b_n이라 하자. 예를 들어, $a_2=13,\ b_2=10$이다.

이때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}+b_{2n}}{a_n}$의 값을 구하시오.

103. 2010 평가원(4점)

좌표평면에서 자연수 n에 대하여 기울기가 n이고 y절편이 양수인 직선이 원 $x^2+y^2=n^2$에 접할 때, 이 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 P_n, Q_n이라 하자. $l_n=\overline{P_nQ_n}$이라 할 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{2n^2}$의 값은?



① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

104. 2010 교육청(4점)

연립부등식 $\begin{cases}|x|+2|y|\le 4\\ 2^n(y-x)+y\ge 1\end{cases}$ 의 해 $(x,\ y)$가 나타내는 영역의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은? (단, n은 자연수이다.)

① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

105. 2010 평가원(4점)

자연수 n 에 대하여,

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}k(k+1),\ T_n=\sum_{k=1}^{n}(n+k)(n+k+1)$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{S_n}$ 의 값을 구하시오.105.

106. 2004 평가원(4점)

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 극한에 대한 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

〈 보 기 〉

ㄱ. $a_n < b_n$ 이고 $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ 이면 $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ 이다.

ㄴ. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 수렴할 때 $a_n < b_n$ 이면 $\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$ 이다.

ㄷ. $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$ 이면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 또는 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ 이다.

① ㄱ ② ㄴ
③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ
⑤ ㄱ, ㄷ

107. 2006 평가원(4점)

자연수 n에 대하여 원점 O와 점$(n, 0)$을 이은 선분을 밑변으로 하고, 높이가 h_n인 삼각형의 넓이를 a_n이라 하자. 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{1}{2}$인 등비수열일 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=\frac{1}{2}$이면 $h_n=\frac{1}{n}$이다.

ㄴ. $h_2=\frac{1}{4}$이면 $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$이다.

ㄷ. $h_2<\frac{1}{2}$이면 $\lim_{n\to\infty} nh_n=0$이다.

① ㄱ ②ㄴ
③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

108. 2010 평가원(4점)

자연수 n 에 대하여 행렬 $\begin{pmatrix} 2^n & 3^n \\ 3^n & 2^n \end{pmatrix}$의 역행렬의 모든 성분의 합을 a_n이라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?108. [2010년 11월 전국연합] [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2}{3}$

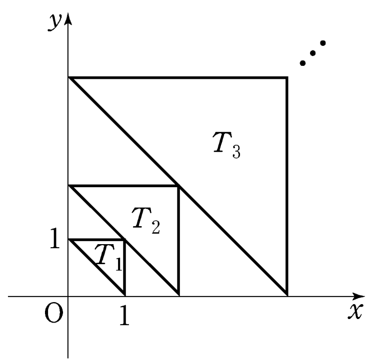
ㄷ. $\frac{1}{3^n}<a_n<\frac{1}{2^n}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

109. 2008 평가원(4점)

자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{A_n}(x_n, 0)$, $\mathrm{B_n}(0, x_n)$, $\mathrm{C_n}(x_n, x_n)$을 꼭짓점으로 하는 직각이등변삼각형 T_n을 다음 조건에 따라 그린다.

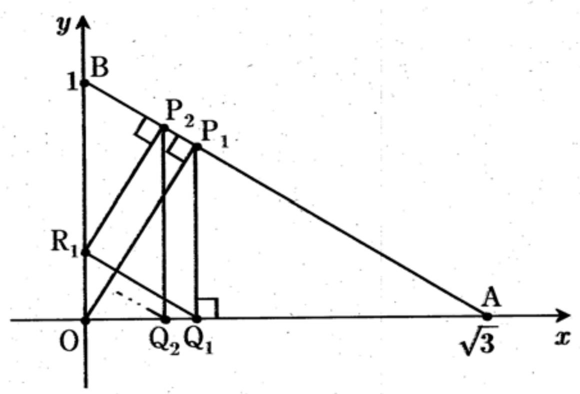
(가) $x_1 = 1$이다.
(나) 변 $\mathrm{A_{n+1}B_{n+1}}$의 중점이 $\mathrm{C_n}$이다. $(n=1, 2, 3, \cdots)$



삼각형 T_n의 넓이를 a_n, 삼각형 T_n의 세 변 위에 있는 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수를 b_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n b_n}{a_n+2^n}$의 값을 구하시오.

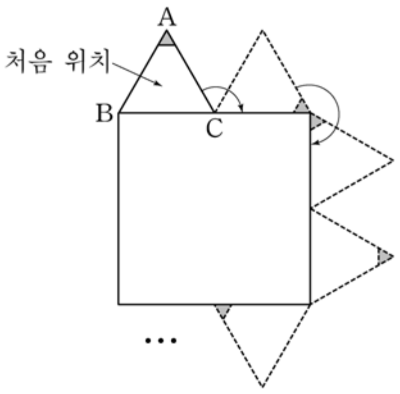
110. 2010 교육청(4점)

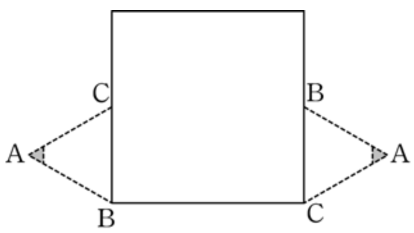
그림과 같이 원점 O에서 두 점 $A(\sqrt{3}, 0), B(0, 1)$을 이은 선분 AB 에 내린 수선의 발을 P_1 이라 하자. 점 P_1 에서 x축에 내린 수선의 발을 Q_1, 점 Q_1 을 지나고 선분 AB 와 평행한 직선의 y절편을 R_1 , 점 R_1 에서 선분 AB 에 내린 수선의 발을 P_2 라 하자. 점 P_2 에서 x축에 내린 수선의 발을 Q_2 , 점 Q_2 를 지나고 선분 AB 와 평행한 직선의 y절편을 R_2, 점 R_2에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 P_3 이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 점 Q_n, R_n, P_{n+1} 을 정하여 나갈 때, 점 Q_n 의 x좌표 x_n 에 대하여 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$이다. $100a^2$ 의 값을 구하시오.



111. 2007 평가원(4점)

한 변의 길이가 2인 정사각형과 한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC가 있다. [그림 1]과 같이 정사각형 둘레를 따라 시계 방향으로 정삼각형 ABC를 회전시킨다. 정삼각형 ABC가 처음 위치에서 출발한 후 정사각형 둘레를 n바퀴 도는 동안, 변 BC가 정사각형의 변 위에 놓이는 횟수를 a_n이라 하자. 예를 들어 $n=1$일 때, [그림 2]와 같이 변 BC가 2회 놓이므로 $a_1=2$이다. 이때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{3n-2}}{n}$의 값은?





[그림 1] [그림 2]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

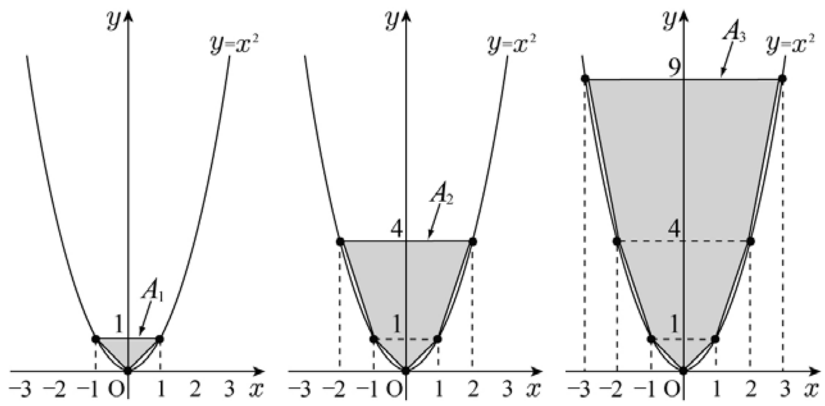
112. 2010 평가원(4점)

그림과 같이 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $(-1,1)$, $(0,0)$, $(1,1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형을 A_1이라 하자.

곡선 $y=x^2$ 위의 점 $(-2,4)$, $(-1,1)$, $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,4)$를 꼭짓점으로 하는 오각형을 A_2라 하자.

곡선 $y=x^2$ 위의 점 $(-3,9)$, $(-2,4)$, $(-1,1)$, $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,4)$, $(3,9)$를 꼭짓점으로 하는 칠각형을 A_3이라 하자.

이와 같은 방법으로 n번째 얻은 다각형 A_n은 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $(-n, n^2)$, $(-n+1, (n-1)^2)$, $\cdots$, $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$, $\cdots$, $(n-1, (n-1)^2)$, (n, n^2)을 꼭짓점으로 하는 다각형이다. 다각형 A_n의 넓이를 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^3}$의 값은?112.



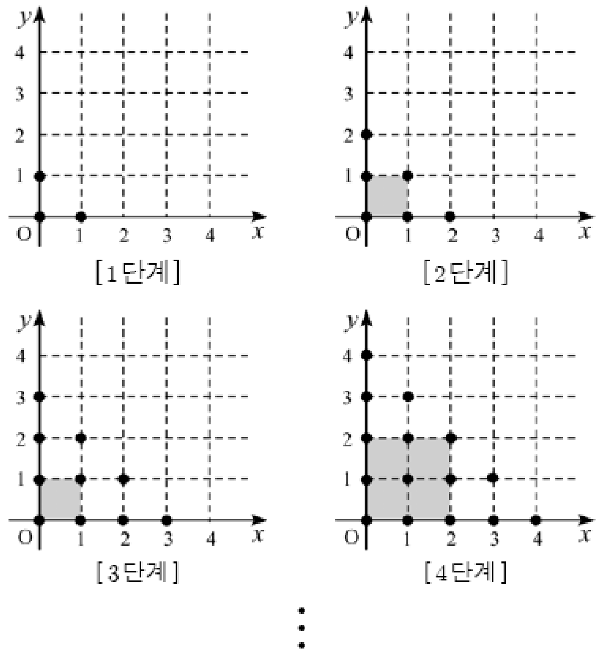
① 2 ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{6}{5}$

113. 2008 교육청(3점)

좌표평면에서 직선 $y=2x$ 위의 점들 중 제 1 사분면에 있는 격자점을 원점 O 에 가까운 쪽부터 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ 라 하고 $y=\frac{1}{2}x$ 위의 점들 중 제 1사분면에 있는 격자점을 O 에 가까운 쪽부터 $B_1, B_2, B_3, \cdots$ 이라 하자. 삼각형 OA_kB_k 의 넓이를 $S_k\ (k=1, 2, 3, \cdots)$라 하고, $\alpha=\lim_{n\to\infty}\frac{S_1+S_2+S_3+\cdots S_n}{n^3}$ 일 때, 60α 의 값을 구하시오. (단, 격자점이란 x 좌표 y 좌표가 모두 정수인 점을 뜻한다.)

114. 2007 평가원(4점)

다음과 같이 좌표평면 위에 단계별로 x 좌표와 y 좌표가 음이 아닌 정수인 점을 표시한다.



[1단계]에서는 원점과 x 좌표와 y 좌표의 합이 1인 점들을 표시하고, [2단계]에서는 [1단계]의 점에 x 좌표와 y 좌표의 합이 2인 점들을 추가로 표시한다.
이와 같은 방법으로 [n단계]에서는 [$n-1$단계]의 점에 x 좌표와 y 좌표의 합이 n $(n=2, 3, 4, \cdots)$인 점들을 추가로 표시한다. 이때, [n단계]에 있는 모든 점의 개수를 a_n, [n단계]에 있는 점들을 꼭지점으로 하는 정사각형 중에서 원점을 한 꼭지점으로 하고 넓이가 최대인 정사각형의 내부 및 둘레에 있는 모든 점의 개수를 b_n이라 하자. 예를 들어 $a_4=15$, $b_4=9$ 이다. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{b_{2n}}$ 의 값은?

① $\frac{5}{2}$ ② 2 ③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ 1

115. 2008 수능 (2점)

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{4n^2+1}+\sqrt{n^2+2}}$ 의 값은?

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

116. 2010 수능 (2점)

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(3n-1)}{2n^2+1}$ 의 값은 ?

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$

④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

117. 2005 수능 (3점)

$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+6n+4}-n\right)$의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1

④ 2 ⑤ 3

118. 2007 수능 (2점)

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{3+\left(\frac{1}{3}\right)^n}{2+\left(\frac{1}{2}\right)^n}$ 의 값은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2

④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

119. 2006 수능 (3점)

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{5\cdot 3^{n+1}-2^{n+1}}{3^n+2^n}$ 의 값을 구하시오.

120. 2011 수능 (3점)

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a\times 6^{n+1}-5^n}{6^n+5^n}=4$ 일 때, 상수 a의 값은?

3

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$

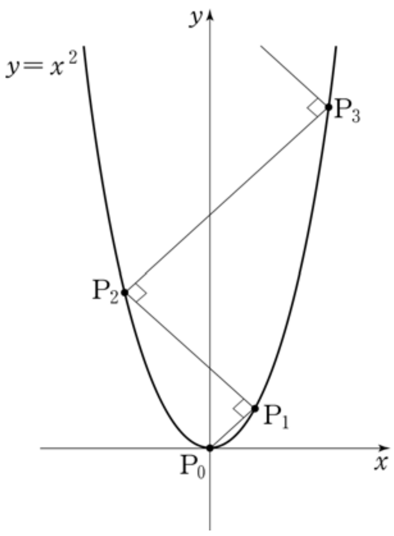
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

121. 2008 수능 (3점)

자연수 n에 대하여 두 점 P_{n-1}, P_n이 함수 $y=x^2$의 그래프 위의 점일 때, 점 P_{n+1}을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 두 점 P_0, P_1의 좌표는 각각 $(0, 0)$, $(1, 1)$이다.
(나) 점 P_{n+1}은 점 P_n을 지나고 직선 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$에 수직인 직선과 함수 $y=x^2$의 그래프의 교점이다.
(단, P_n과 P_{n+1}은 서로 다른 점이다.)

$l_n=\overline{\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n}$이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{l_n}{n}$의 값은?



① $2\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ 2
④ $\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{2}$

122. 2005 수능 (3점)

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n=2n+\dfrac{1}{2^n}$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$의 값은?

① 0 ② $\dfrac{1}{4}$ ③ $\dfrac{1}{2}$
④ 1 ⑤ 2

123. 2006 수능 (3점)

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $n<a_n<n+1$을 만족시킬 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

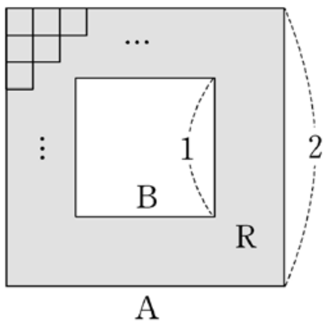
124. 2005 수능 (4점)

이차함수 $f(x)=3x^2$의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{P}(n,\ f(n))$과 $\mathrm{Q}(n+1,\ f(n+1))$사이의 거리를 a_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}$의 값은? (단, n은 자연수이다.)

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

125. 2010 수능 (4점)

그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 A와 한 변의 길이가 1인 정사각형 B는 변이 서로 평행하고, A의 두 대각선의 교점과 B의 두 대각선의 교점이 일치하도록 놓여있다. A와 A의 내부에서 B의 내부를 제외한 영역을 R라 하자.



2 이상인 자연수 n에 대하여 한 변의 길이가 $\frac{1}{n}$인 작은 정사각형을 다음 규칙에 따라 R에 그린다.

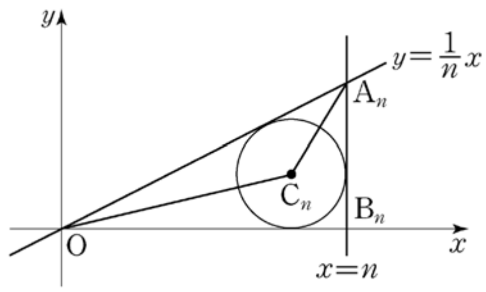
(가) 작은 정사각형의 한 변은 A의 한 변에 평행하다. (나) 작은 정사각형들의 내부는 서로 겹치지 않도록 한다.

이와 같은 규칙에 따라 R에 그릴 수 있는 한 변의 길이가 $\frac{1}{n}$인 작은 정사각형의 최대 개수를 a_n이라 하자. 예를 들어, $a_2=12, a_3=20$이다. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n+1}-a_{2n}}{a_{2n}-a_{2n-1}}=c$라 할 때, $100c$의 값을 구하시오.

126. 2011 수능 (4점)

좌표평면에서 자연수 n에 대하여 두 직선 $y=\frac{1}{n}x$와 $x=n$이 만나는 점을 A_n, 직선 $x=n$과 x축이 만나는 점을 B_n이라 하자. 삼각형 A_nOB_n에 내접하는 원의 중심을 C_n이라 하고, 삼각형 A_nOC_n의 넓이를 S_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}$의 값은? 126.

4



① $\frac{1}{12}$　② $\frac{1}{6}$　③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{5}{12}$

1. 2005 교육청(2점)

무한급수 $\log_2 2 + \log_2 \sqrt{2} + \log_2 \sqrt[4]{2} + \log_2 \sqrt[8]{2} + \cdots$의 합은?

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

2. 2004 평가원(2점)

무한급수 $\frac{2004}{1\cdot3}+\frac{2004}{3\cdot5}+\frac{2004}{5\cdot7}+\cdots$의 값은?

① 1002 ② 1004 ③ 2000 ④ 2002 ⑤ 2004

3. 2009 교육청(2점)

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2^n}{3^n}$의 값은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

4. 2004 평가원(3점)

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=-3$ 일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-2b_n)$ 의 값을 구하시오.

5. 2010 평가원 (2점)

무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}5\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ 의 값은?5.

① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20 ⑤ 25

6. 2007 평가원(3점)

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}=\frac{1}{2}$ 일 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}(2+a_k)}{\sum_{k=1}^{n}(2k+a_k)}$ 의 값은?

① 2 ② 1 ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

7. 2009 교육청(3점)

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+3)=4$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=-3$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{24a_n+2b_n^2}{2a_n-b_n^2}$의 값을 구하시오.

8. 2006 교육청(3점)

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$의 합은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

9. 2006 교육청(3점)

정수 a, b에 대하여 $2^a \times 3^b = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$가 성립할 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.

10. 2010 교육청(3점)

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \frac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{n^4}\right)$이 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

11. 2005 교육청(3점)

무한급수 $\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{3}\right)+\left(\frac{4}{3}-\frac{5}{4}\right)+\left(\frac{5}{4}-\frac{6}{5}\right)+\cdots$의 합은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$
③ $\frac{1}{2}$ ④ 1
⑤ $\frac{3}{2}$

12. 2008 교육청(3점)

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$a_1 = \frac{5}{4},\ S_n = a_n + \frac{n+3}{n+2}\ (n=2, 3, 4, \cdots)$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 값은?

① 1 ② $\frac{5}{4}$
③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{7}{4}$
⑤ 2

13. 2008 교육청(3점)

무한급수 $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 7}+\frac{3}{7\cdot 13}+\frac{4}{13\cdot 21}+\cdots$의 합은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1
④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

14. 2008 평가원(3점)

자연수 n에 대하여 x에 관한 이차방정식
$(4n^2-1)x^2-4nx+1=0$의 두 근이 α_n, β_n $(\alpha_n > \beta_n)$일 때,
$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n - \beta_n)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

15. 2005 교육청(3점)

무한급수 $a_1+\left(a_2-\frac{1}{2}\right)+\left(a_3-\frac{2}{3}\right)+\left(a_4-\frac{3}{4}\right)+\cdots$가 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$ 의 값을 구하시오.

16. 2010 교육청(3점)

동심원 $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n,\ \cdots$ 의 반지름의 길이를 각각 $r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_n,\ \cdots$ 이라 하고, 그 넓이를 각각 $S_1,\ S_2,\ \cdots,\ S_n,\ \cdots$ 이라 할 때, $S_{n+1}=2S_n\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$이 성립한다. $r_1=1$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r_n}$ 의 값은?

3

① $1+\sqrt{2}$ ② $2+\sqrt{2}$ ③ $1+2\sqrt{2}$
④ $2+2\sqrt{2}$ ⑤ $1+3\sqrt{2}$

17. 2010 교육청(3점)

임의의 자연수 $p,\ q,\ r$에 대하여,
수열 $\{a_n\}$은 $a_1=10,\ a_p+a_q+a_r=a_{p+q+r}$를 만족하고,
수열 $\{b_n\}$은 $b_1=\frac{3}{5},\ b_pb_q=b_{p+q}$를 만족한다. 이 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_nb_n}{n}$ 의 값을 구하시오.

18. 2010 평가원(3점)

두 수열 $\{a_n\},\ \{b_n\}$에 대하여 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{3n}{n+1}\right)$과 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$이 모두 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{3-b_n}{a_n}$의 값은? (단, $a_n\neq 0$)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

26. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n 항까지의 합 S_n이 $S_n=n^2+2n$일 때, 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{a_na_{n+1}}$의 값은? [2010년 11월 전국연합] [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{7}$

19. 2005 교육청(3점)

무한수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{2n^2}{2n^2+1}\right)=\frac{1}{3}$ 일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$ 의 값은?

① $-\frac{2}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$
③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{2}{3}$
⑤ 1

20. 2005 교육청(3점)

무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ 의 합이 -1 일 때, 다음 중 상수 a 의 값이 될 수 있는 것은?

① $-\frac{7}{2}$ ② $-\frac{5}{2}$

③ $-\frac{3}{2}$ ④ $\frac{1}{2}$

⑤ $\frac{3}{2}$

21. 2010 교육청(3점)

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_n = \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r 3^r 2^{n-r}$이다.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{a_n} = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.[21.]

(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

22. 2006 평가원(3점)

수열 $\{a_n\}$은 첫째항 1, 공비 $\frac{1}{3}$인 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$은 첫째항 1, 공비 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다. 수렴하지 않는 무한급수는?

① $\sum_{n=1}^{\infty} 2a_n$ ② $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$

③ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ ④ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$

⑤ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{a_n}$

23. 2005 평가원(3점)

좌표평면에서 직선 $x - 3y + 3 = 0$ 위에 있는 점 중에서 x 좌표와 y 좌표가 자연수인 모든 점의 좌표를 각각 (a_1, b_1), (a_2, b_2), $\cdots$, (a_n, b_n), $\cdots$ 이라 할 때, 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n b_n}$의 값은? (단, $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots$ 이다.)

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

24. 2006 교육청(3점)

무한수열 $\{a_n\}$이 <보기>와 같을 때, 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하는 것을 모두 고르면?

<보 기>

ㄱ. $3,\ 3,\ 3, \cdots 3, \cdots$

ㄴ. $\left(\frac{1}{3}\right),\ \left(\frac{1}{3}\right)^2,\ \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdots \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdots$

ㄷ. $\frac{1}{\sqrt{2}+1},\ \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}, \cdots$

① ㄱ ② ㄴ
③ ㄱ , ㄷ ④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

25. 2009 교육청(3점)

수렴하는 무한급수만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{2^n}$ ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

26. 2008 교육청(3점)

다음 <보기> 의 무한급수 중 수렴하는 것만을 있는 대로 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2n+1}$

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

27. 2010 교육청(3점)

두 무한수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 옳은 것만을 [보기]에서 있는대로 고른 것은?

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1$ 이면 $\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$이다.

ㄴ. 두 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$ 이 모두 수렴하면 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$도 모두 수렴한다.

ㄷ. 두 수열 $\{|a_n+b_n|\}$, $\{|a_n-b_n|\}$이 모두 수렴하면 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$도 모두 수렴한다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

28. 2008 교육청(3점)

무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(x+1)\left(1-\frac{x}{4}\right)^{n-1}$ 의 합이 존재하도록 하는 모든 정수 x의 합을 구하시오.

29. 2010 평가원(3점)

모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(3^n a_n-2\right)$가 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{6a_n+5\cdot 4^{-n}}{a_n+3^{-n}}$의 값을 구하시오.

30. 2008 교육청(3점)

무한급수 $\frac{x+3}{5}+\frac{(x+3)(x-5)}{5^2}+\frac{(x+3)(x-5)^2}{5^3}+\cdots$이 수렴하도록 하는 모든 정수 x 의 합을 구하시오.

31. 2009 교육청(3점)

무한등비수열 $\left\{\left(\frac{x+1}{2}\right)^n\right\}$과 무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(\log x)^n$이 동시에 수렴하는 x의 값의 범위로 옳은 것은?

① $\frac{1}{10}\leqq x\leqq 1$　② $\frac{1}{10}\leqq x<1$　③ $\frac{1}{10}<x\leqq 1$
④ $\frac{1}{10}<x\leqq 10$　⑤ $\frac{1}{10}\leqq x<10$

32. 2007 교육청(3점)

다음 <보기> 의 무한급수 중 수렴하는 것을 모두 고르면?

< 보 기 >

ㄱ. $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{4}{7}+\cdots$

ㄴ. $1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\cdots$

ㄷ. $\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{6}}+\cdots$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ,ㄷ
④ ㄴ,ㄷ　⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

33. 2007 교육청(3점)

무한수열 a_1 , $2a_2$, 2^2a_3 , $\cdots$, $2^{n-1}a_n$, $\cdots$ 의 첫째항부터 제 n항까지의 합이 $5n$ 일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값을 구하시오.

34. 2007 평가원(3점)

이차방정식 $9x^2-6x-1=0$의 두 근을 α, β라 할 때,

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}(\beta^n-\alpha^n)=\frac{q}{p}$$

이다. 이때, $p+q$의 값을 구하시오.(단, p 와 q는 서로소인 자연수이다.)

35. 2009 평가원(3점)

등비수열 $\{a_n\}$이 $a_5=2^8$, $a_8=2^5$을 만족시킬 때, $\sum_{n=9}^{\infty} a_n$의 값을 구하시오.

36. 2007 평가원(3점)

첫째항이 12, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 값을 구하시오.

37. 2007 교육청(3점)

수열 $\{a_n\}$의 계차수열은 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 20$일 때, a_1의 값을 구하시오.

38. 2007 평가원(3점)

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+2}-4^{n+2}}{6^n}$의 합을 구하시오.

39. 2007 교육청(3점)

첫째항이 1인 두 무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 모두 수렴하고, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\frac{8}{3}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n=\frac{4}{5}$가 성립한다. 이 때, 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$의 합은?

① $\frac{64}{15}$ ② 5 ③ $\frac{32}{5}$
④ $\frac{15}{2}$ ⑤ 10

40. 2004 평가원(3점)

순환소수 $0.3\dot{2}$ 를 분수로 나타내면?

① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{7}{10}$
③ $\frac{8}{25}$ ④ $\frac{17}{50}$
⑤ $\frac{29}{90}$

41. 2004 평가원(3점)

$\frac{12}{99}$를 순환소수로 나타낼 때, 소수점 아래 n째 자리의 수를 a_n이라 하자. 예를 들면 $a_3=1$이다. 이때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}$의 값은?

① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{3}{2}$
③ $\frac{5}{3}$ ④ 2
⑤ $\frac{5}{2}$

42. 2008 평가원(3점)

공비가 $\frac{1}{5}$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 15$일 때, 첫째항 a_1의 값을 구하시오.

43. 2008 교육청(3점)

수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, α, β는 상수이다.)

< 보 기 >

ㄱ. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$이면 $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$이다.

ㄴ. $a_n < b_n$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$이면 $\alpha < \beta$이다.

ㄷ. 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

44. 2007 평가원(3점)

두 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - 1)$, $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n + 1)$이 모두 수렴할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 은 발산한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ 은 수렴한다.

① ㄱ ② ㄱ,ㄴ ③ ㄱ,ㄷ
④ ㄴ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

45. 2007 교육청(3점)

무한수열의 극한값과 무한급수의 성질이다. <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$이다.
(단, α, β는 상수)

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n + b_n)$과 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - 2b_n)$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴한다.

ㄷ. $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 또는 $\lim_{n\to\infty} b_n$이 수렴한다.
(단, α는 상수)

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ,ㄴ ⑤ ㄴ,ㄷ

46. 2006 교육청(3점)

두 무한수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하고 $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$

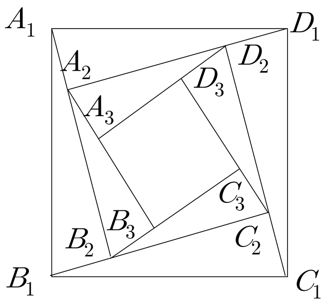
ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta$이고 $\alpha > \beta$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n > \lim_{n\to\infty} b_n$

ㄷ. 수열 $\{a_n\}$, $\{a_n b_n\}$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} b_n$은 수렴한다.

① ㄱ ② ㄴ
③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

47. 2005 교육청(3점)

그림과 같이 한 변의 길이가 1 인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 내부에 합동인 4 개의 직각삼각형의 넓이의 합과 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 의 넓이가 같도록 만들고, 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 내부에 같은 방법으로 정사각형 $A_3B_3C_3D_3$ 을 만든다. 이와 같은 과정을 한없이 반복하여 만들어진 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$ 의 넓이를 S_n 이라 할 때, 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 합은?



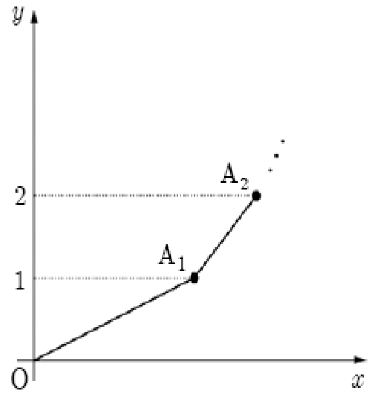
① 2 ② $\frac{9}{4}$

③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{11}{4}$

⑤ 3

48. 2007 교육청(3점)

자연수 n에 대하여 점 A_n은 직선 $y=n$위에 있다. 선분 $\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1$의 기울기가 $\frac{3}{4}$이고, 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$의 기울기는 선분 $\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n$의 기울기의 $\frac{4}{3}$배이다. 점 A_n의 x좌표를 x_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} x_n$의 값은?(단, 원점 $\mathrm{O}=\mathrm{A}_0$)

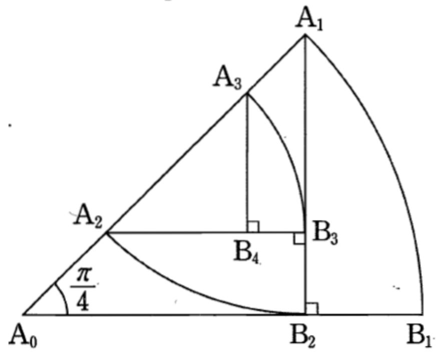


① $\frac{16}{3}$ ② 5 ③ $\frac{14}{3}$

④ $\frac{13}{3}$ ⑤ 4

49. 2010 평가원(3점)

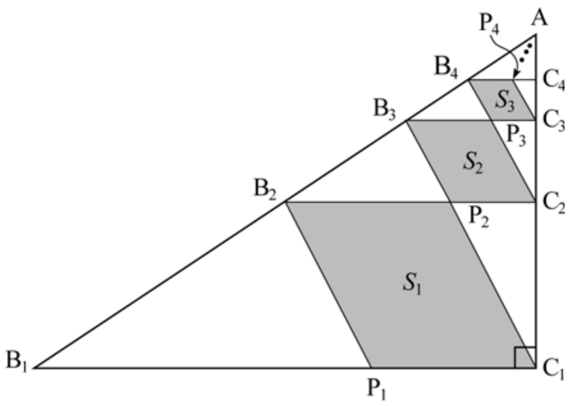
그림과 같이 반지름의 길이가 4이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$인 부채꼴 $A_0A_1B_1$이 있다. 점 A_1에서 선분 A_0B_1에 내린 수선의 발을 B_2라 하고, 선분 A_0A_1위의 $\overline{A_1B_2}=\overline{A_1A_2}$인 점 A_2에 대하여 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$인 부채꼴 $A_1A_2B_2$를 그린다. 점 A_2에서 선분 A_1B_2에 내린 수선의 발을 B_3이라 하고, 선분 A_1A_2위의 $\overline{A_2B_3}=\overline{A_2A_3}$인 점 A_3에 대하여 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$인 부채꼴 $A_2A_3B_3$을 그린다. 이와 같은 과정을 계속하여 점 A_n에서 선분 $A_{n-1}B_n$에 내린 수선의 발을 B_{n+1}이라 하고, 선분 $A_{n-1}A_n$위의 $\overline{A_nB_{n+1}}=\overline{A_nA_{n+1}}$인 점 A_{n+1}에 대하여 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$인 부채꼴 $A_nA_{n+1}B_{n+1}$을 그린다. 부채꼴 $A_{n-1}A_nB_n$의 호 A_nB_n의 길이를 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은?



① $(4-\sqrt{2})\pi$ ② $(2+\sqrt{2})\pi$ ③ $(2+2\sqrt{2})\pi$
④ $(4+\sqrt{2})\pi$ ⑤ $(4+2\sqrt{2})\pi$

50. 2009 교육청(3점)

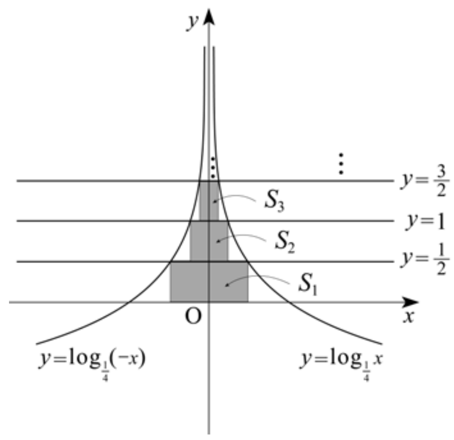
$\angle \mathrm{A}=60^\circ$, $\angle \mathrm{B}_1=30^\circ$, $\overline{\mathrm{AC}_1}=6$인 직각삼각형 $\mathrm{AB}_1\mathrm{C}_1$이 있다. 선분 $\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$을 $2:1$로 내분하는 점을 P_1이라 하자.두 선분 AB_1, AC_1의 중점을 각각 B_2, C_2라 하고, 선분 $\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2$戮펧$2:1$로 내분하는 점을 P_2라 할 때, 네 점 B_2, P_1, C_1, P_2戮펧꼭짓점으로 하는 사각형 $\mathrm{B}_2\mathrm{P}_1\mathrm{C}_1\mathrm{P}_2$戮펧만든다.두 선분 AB_2, AC_2의 중점을 각각 B_3, C_3이라 하고, 선분 $\mathrm{B}_3\mathrm{C}_3$을 $2:1$로 내분하는 점을 P_3이라 할 때, 네 점 B_3, P_2, C_2, P_3을 꼭짓점으로 하는 사각형 $\mathrm{B}_3\mathrm{P}_2\mathrm{C}_2\mathrm{P}_3$을 만든다.두 선분 AB_3, AC_3의 중점을 각각 B_4, C_4라 하고, 선분 $\mathrm{B}_4\mathrm{C}_4$戮펧$2:1$로 내분하는 점을 P_4라 할 때, 네 점 B_4, P_3, C_3, P_4戮펧꼭짓점으로 하는 사각형 $\mathrm{B}_4\mathrm{P}_3\mathrm{C}_3\mathrm{P}_4$戮펧만든다.이와 같은 과정을 계속할 때, 사각형 $\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{P}_n\mathrm{C}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 넓이를 S_n $(n=1, 2, 3, \cdots)$ 이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?



① $8\sqrt{3}$ ② $7\sqrt{3}$ ③ $6\sqrt{3}$
④ $5\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{3}$

51. 2007 평가원(3점)

두 곡선 $y=\log_{\frac{1}{4}}(-x)$, $y=\log_{\frac{1}{4}}x$가 직선 $y=\frac{1}{2}$과 만나는 두 점을 꼭지점으로 하고, 한 변이 x축 위에 있는 직사각형의 넓이를 S_1이라 하자. 두 곡선이 직선 $y=1$과 만나는 두 점을 꼭짓점으로 하고, 한 변이 직선 $y=\frac{1}{2}$ 위에 있는 직사각형의 넓이를 S_2라 하자. 두 곡선이 직선 $y=\frac{3}{2}$과 만나는 두 점을 꼭짓점으로 하고, 한 변이 직선 $y=1$ 위에 있는 직사각형의 넓이를 S_3이라 하자. 위와 같은 과정을 계속하여 얻은 n번째 직사각형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값은?



① $\frac{5}{8}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{7}{8}$
④ 1 ⑤ $\frac{9}{8}$

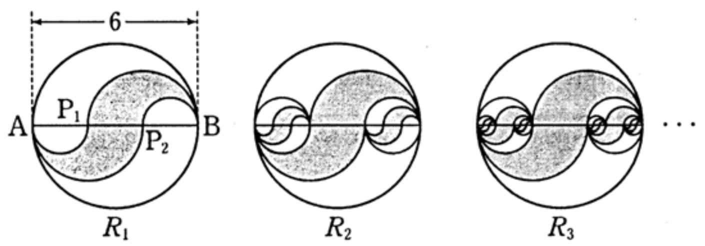
52. 2009 평가원(3점)

그림과 같이 길이가 6인 선분 AB를 지름으로 하는 원을 그리고, 선분 AB의 3등분점을 각각 P_1, P_2라 하고 선분 AP_1을 지름으로 하는 원의 아래쪽 반원, 선분 AP_2를 지름으로 한는 원의 아래쪽 반원, 선분 P_2B를 지름으로 하는 원의 위쪽 반원, 선분 P_1B를 지름으로 하는 원의 위쪽 반원을 경계로 하여 만든 ∽ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 P_1이라 하자.

그림 R_1에서 선분 AB 위의 색칠되지 않은 두 선분 AP_1, P_2B를 각각 지름으로 하는 두 원을 그리고, 이 두 원 안에 각각 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 두 ∽ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

그림 R_2에서 두 선분 AP_1, P_2B 위의 색칠되지 않은 네 선분을 각각 지름으로 하는 네 원을 그리고, 이 네 원 안에 각각 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 네 ∽ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 모든 ∽ 모양의 도형의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



① $\frac{25}{7}\pi$　② $\frac{27}{7}\pi$　③ $\frac{29}{7}\pi$
④ $\frac{31}{7}\pi$　⑤ $\frac{33}{7}\pi$

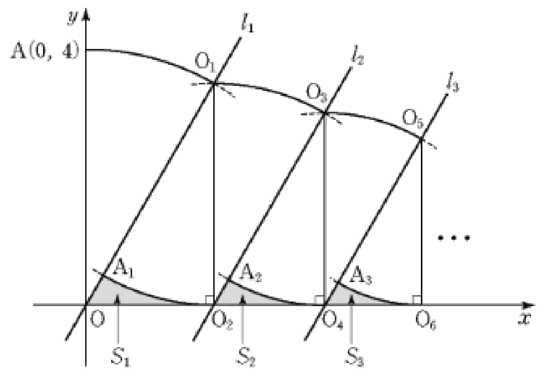
53. 2009 평가원(3점)

그림과 같이 원점 O를 지나고 기울기가 $\sqrt{3}$인 직선 l_1과 점 $A(0, 4)$가 있다.

점 O를 중심으로 하고 선분 OA를 반지름으로 하는 원이 직선 l_1과 제1사분면에서 만나는 점을 O_1이라 하자. 점 O_1에서 x축에 내린 수선의 발을 O_2라 하자. 점 O_2을 중심으로 하고 선분 O_1O_2를 반지름으로 하는 원이 선분 OO_1과 만나는 점을 A_1이라 하자. 선분 A_1O, 선분 OO_2, 호 O_2A_1로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하자.

점 O_2를 중심으로 하고 선분 O_1O_2를 반지름으로 하는 원이 점 O_2를 지나고 직선 l_1에 평행한 직선 l_2와 제1사분면에서 만나는 점을 O_3이라 하자. 점 O_3에서 x축에 내린 수선의 발을 O_4라 하자. 점 O_3을 중심으로 하고 선분 O_3O_4를 반지름으로 하는 원이 선분 O_2O_3과 만나는 점을 A_2이라 하자. 선분 A_2O_2, 선분 O_2O_4, 호 O_4A_2로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2이라 하자.

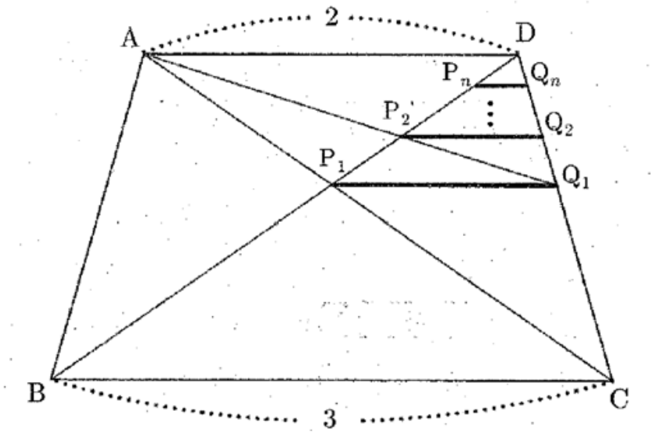
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 도형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?



① $4\sqrt{3}-2\pi$　② $8\sqrt{3}-4\pi$　③ $4\sqrt{3}-\pi$
④ $8\sqrt{3}-2\pi$　⑤ $16\sqrt{3}-4\pi$

54. 2009 교육청(3점)

등변사다리꼴 ABCD에서 두 대각선 $\overline{AC}$와 $\overline{BD}$의 교점을 P_1이라 하고, P_1에서 $\overline{BC}$에 평행인 선을 그어 $\overline{CD}$와 만나는 점을 Q_1이라 하자. 마찬가지 방법으로 $\overline{AQ_1}$과 $\overline{BD}$의 교점을 P_2라 하고, P_2에서 $\overline{BC}$에 평행인 선을 그어 $\overline{CD}$와 만나는 점을 Q_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 점
P_1, Q_1, P_2, Q_2, $\cdots$, P_n, Q_n, $\cdots$을 얻는다. $\overline{P_nQ_n}=x_n$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot x_{n+1}$의 값은?



① $\frac{12}{5}$ ② $\frac{18}{5}$ ③ 4
④ $\frac{25}{6}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

55. 2008 교육청(4점)

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(x-1)(\log_2 x)^n$이 수렴할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 수렴하기 위한 x값의 범위는 $\frac{1}{2}<x<2$이다.

ㄴ. 무한급수의 합이 1이 되도록 하는 x의 값은 한 개 존재한다.

ㄷ. 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\log_2 x-1}{2}\right)^n$은 수렴한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

56. 2005 교육청(4점)

무한수열 $\{a_n\}$을 $a_n=\begin{cases}0 & (n=3k-2)\\ 1 & (n=3k-1)\\ 2 & (n=3k)\end{cases}$ (단, k는 자연수)로 정의할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{4^n}$의 값은?

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{2}{21}$
③ $\frac{13}{32}$ ④ $\frac{17}{54}$
⑤ $\frac{29}{63}$

57. 2010 평가원(4점)

수열 $\{a_n\}$이

$$7a_1+7^2a_2+\cdots+7^na_n=3^n-1$$

을 만족시킬 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^{n-1}}$의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{4}{9}$ ③ $\frac{5}{9}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{7}{9}$

58. 2010 교육청(4점)

첫째항이 1이고 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 대각선의 길이가 a_n인 정사각형의 넓이를 S_n이라 하자. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값은?
(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

① 22 ② 23 ③ 24
④ 25 ⑤ 26

59. 2010 교육청(4점)

수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 정의한다.

(가) $a_1=2$
(나) $a_{n+1}=$($a_n^2+a_n$을 5로 나눈 나머지) ($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

60. 2009 평가원(4점)

수열 $\{a_n\}$에서 a_1 이고, 자연수 n에 대하여

$$a_na_{n+1}=\left(\frac{1}{5}\right)^n$$ 이다. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

61. 2005 평가원(4점)

순환소수로 이루어진 수열 $\{a_n\}$의 각 항이 $a_1=0.\dot{1}$, $a_2=0.\dot{1}\dot{0}$, $a_3=0.\dot{1}0\dot{0}$, ⋯,

$$a_n=0.\dot{1}\underbrace{00\cdots0\dot{0}}_{0\text{은 }(n-1)\text{개}}\ \cdots$$

일 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right)$의 값은?

① $\frac{2}{3}$ ② 1
③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{5}{3}$
⑤ 2

62. 2006 교육청(4점)

무한등비급수 $\cos^2\theta+\cos^2\theta\sin\theta+\cos^2\theta\sin^2\theta+\cdots$ 의 합이 $\frac{18}{13}$일 때, $\frac{10}{\tan\theta}$의 값을 구하시오. (단 , $0<\theta<\frac{\pi}{2}$)

63. 2006 교육청(4점)

다음과 같이 무한히 나열된 수를 모두 더하면?

9

0.9　　0.9

0.09　　0.09　　0.09

0.009　　0.009　　0.009　　0.009

0.0009　　0.0009　　0.0009　　0.0009　　0.0009

⋮　　⋮　　⋮

① $\frac{98}{9}$　　② 11

③ $\frac{100}{9}$　　④ $\frac{101}{9}$

⑤ $\frac{34}{3}$

64. 2006 평가원(4점)

공비가 1이 아닌 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 행렬 $\begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} \\ b_{n+1} & b_n \end{pmatrix}$이 역행렬을 갖지 않는다고 하자. 수열 $\{a_n\}$이 발산할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$의 값과 같은 것은? (단, 모든 자연수 n에 대하여 a_n, b_n은 양수이다.)

① $\frac{a_1 b_1}{a_2 - a_1}$　　② $\frac{a_2 b_1}{a_2 - a_1}$

③ $\frac{a_1 b_2}{a_2 - a_1}$　　④ $\frac{a_1 b_1}{a_1 - a_2}$

⑤ $\frac{a_1 b_2}{a_1 - a_2}$

65. 2009 교육청(4점)

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 + 3a_2 = 0$, $a_1 + a_2 + a_3 = 28$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 값을 구하시오.

66. 2004 평가원(4점)

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대한 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

〈 보 기 〉

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$도 수렴한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$이다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$이 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$이면 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$이다.

① ㄱ　　② ㄱ, ㄴ

③ ㄱ, ㄷ　　④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

67. 2005 교육청(4점)

두 무한수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 옳은 내용을 <보기>에서 모두 고른 것은? (단, α, β는 실수이고, n은 자연수이다.)

〈보 기〉

ㄱ. $a_n > b_n$ 이고 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ 이면 $\alpha > \beta$ 이다.

ㄴ. $a_n > b_n$ 이고 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta$ 이면 $\alpha > \beta$ 이다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta$ 이고 $\alpha > \beta$ 이면 $\lim_{n\to\infty} a_n > \lim_{n\to\infty} b_n$ 이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

68. 2006 평가원(4점)

두 무한등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 두 무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$은 수렴한다.

ㄴ. 두 무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 발산하면 $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) \neq 0$이다.

ㄷ. 두 무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^3$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$은 수렴한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

69. 2008 교육청(4점)

무한수열 $\{a_n\}$에 대하여 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

〈보 기〉

ㄱ. $\lim_{n\to\infty} a_{2n}$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n$도 수렴한다.

ㄴ. $\lim_{n\to\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{2n-1}$이다.

ㄷ. 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 도 수렴한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

70. 2009 교육청(4점)

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$a_n + b_n = 2 + \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 2$

ㄴ. 수열 $\{a_n\}$이 수렴하면 수열 $\{b_n\}$도 수렴한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$도 수렴한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

71. 2009 교육청(4점)

수열 $\{a_n\}$이 $a_1=2$, $a_2=3$,

$\log_2 a_n+\log_2 a_{n+1}+\log_2 a_{n+2}=1\quad(n=1, 2, 3, \cdots)$

을 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $a_6=\dfrac{1}{3}$

ㄴ. $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}a_k=18$

ㄷ. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{3n}a_k=\frac{16}{3}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

72. 2006 교육청(4점)

$a_1=1$, $2a_{n+1}+a_n=2$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)를 만족시키는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 <보기>에서 옳은 것을 모두 고르면?

<보 기>

ㄱ. 수열 $\left\{a_n-\dfrac{2}{3}\right\}$는 공비가 $-\dfrac{1}{2}$인 등비수열이다.

ㄴ. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$은 수렴한다.

ㄷ. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 수렴한다.

① ㄱ ② ㄷ
③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

73. 2008 평가원(4점)

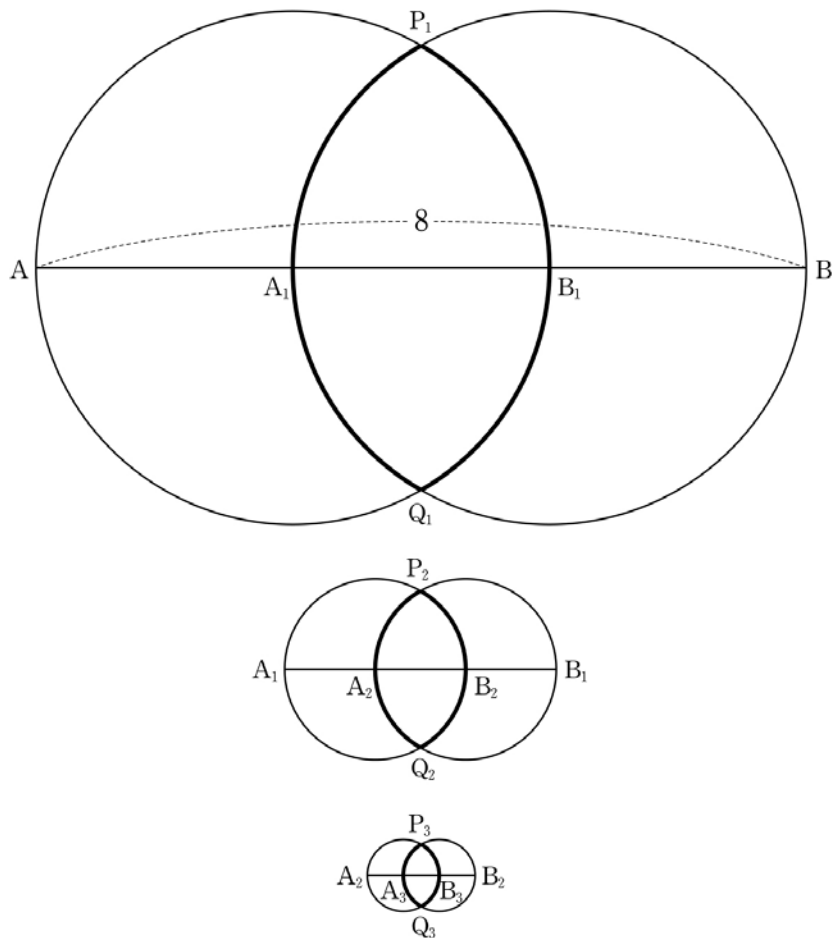
그림과 같이 길이가 8인 선분 AB가 있다.

선분 AB의 삼등분점 A_1, B_1을 중심으로 하고 선분 A_1B_1을 반지름으로 하는 두 원이 서로 만나는 두 점을 각각 P_1, Q_1이라고 하자.

선분 A_1B_1의 삼등분점 A_2, B_2를 중심으로 하고 선분 A_2B_2를 반지름으로 하는 두 원이 서로 만나는 두 점을 각각 P_2, Q_2 라고 하자.

선분 A_2B_2의 삼등분점 A_3, B_3을 중심으로 하고 선분 A_3B_3을 반지름으로 하는 두 원이 서로 만나는 두 점을 각각 P_3, Q_3 이라고 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 두 호 $P_nA_nQ_n$, $P_nB_nQ_n$의 길이의 합을 l_n이라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}l_n$의 값은?



① $\dfrac{10}{3}\pi$ ② 4π ③ $\dfrac{14}{3}\pi$
④ $\dfrac{16}{3}\pi$ ⑤ 6π

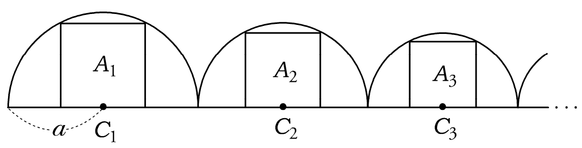
74. 2004 평가원(4점)

어느 장학재단은 14억 원의 기금을 조성하였다. 매년 초에 기금을 운용하여 연말까지 20%의 이익을 내고, 기금과 이익을 합한 금액의 40%를 매년 말에 장학금으로 지급하려 한다. 장학금으로 지급하고 남은 금액을 기금으로 하여 기금의 운용과 장학금의 지급을 매년 이와 같은 방법으로 실시 할 계획이다. 이 계획대로 해마다 지급한 장학금의 총액의 극한값은? (단, 단위는 억 원이다.)

① 24 ② 26
③ 28 ④ 30
⑤ 32

75. 2005 교육청(4점)

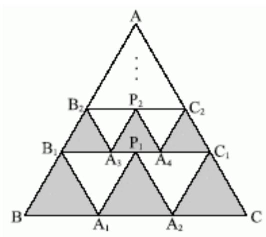
그림과 같이 반지름의 길이가 a인 반원 C_1에 내접하는 정사각형을 A_1이라 하자. A_1의 한 변의 길이를 반지름으로 하는 반원 C_2에 내접하는 정사각형을 A_2라 하자. A_2의 한 변의 길이를 반지름으로 하는 반원 C_3에 내접하는 정사각형을 A_3라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 정사각형을 만들어 나갈 때, 이들 정사각형의 넓이의 합은?



① a^2 ② $2a^2$
③ $3a^2$ ④ $4a^2$
⑤ $5a^2$

76. 2005 교육청(4점)

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC가 있다. 선분 BC의 삼등분 점을 A_1, A_2라 하고 선분 BA_1, A_1A_2, A_2C를 각각 한 변으로 하는 정삼각형 B_1BA_1, $P_1A_1A_2$, C_1A_2C를 만든다. 다시 삼각형 AB_1C_1에서 선분 B_1C_1의 삼등분 점을 A_3, A_4라 하고 같은 방법으로 세 정삼각형 $B_2B_1A_3$, $P_2A_3A_4$, $C_2A_4C_1$을 만든다. 이와 같은 방법으로 계속하여 삼각형을 만들어 나갈 때, 어두운 부분의 넓이의 합은?



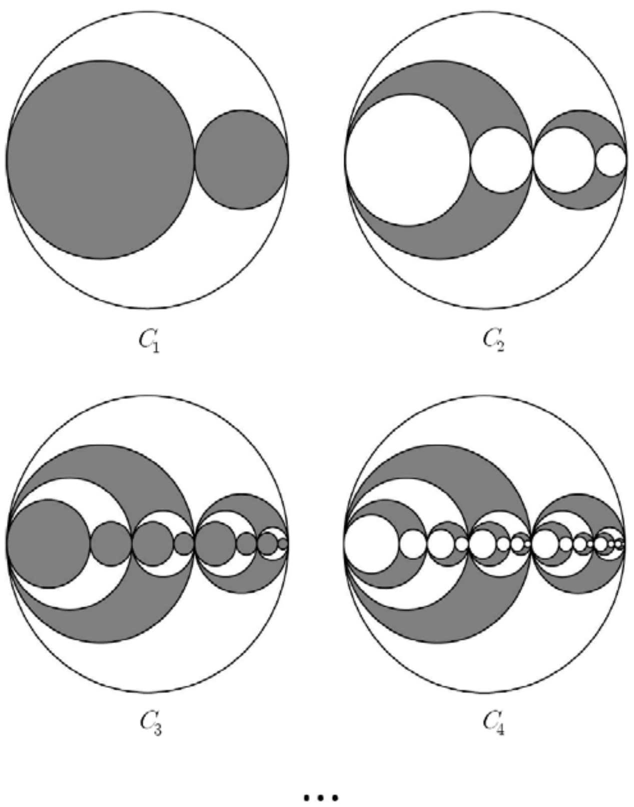
① $\frac{\sqrt{3}}{10}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{8}$
③ $\frac{3\sqrt{3}}{20}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{6}$
⑤ $\frac{3\sqrt{3}}{16}$

77. 2009 교육청(4점)

원에 다음 과정을 실행한다.

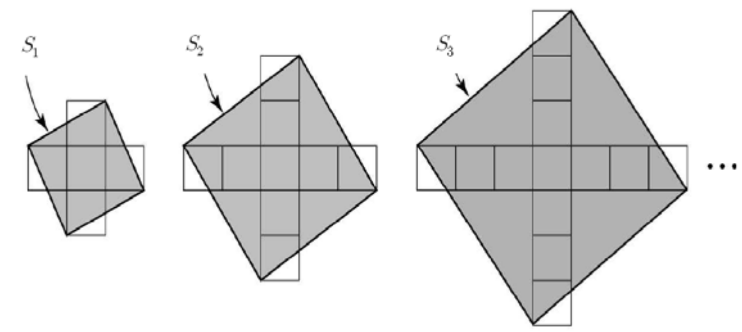
> [과정]
> Ⅰ. 원의 지름을 2:1로 내분하는 점을 잡는다.
> Ⅱ. 이 원에 내접하면서 Ⅰ의 내분점에서 서로 외접하는 두 개의 원을 그린다.

지름의 길이가 6인 원이 있다. 이 원에 [과정]을 실행하여 그린 2개의 원의 내부를 색칠하여 얻어진 그림을 C_1이라 하자. 그림 C_1에서 새로 그려진 2개의 원에 각각 [과정]을 실행하여 그린 4개의 원의 내부를 제외하여 얻어진 그림을 C_2라 하자. 그림 C_2에서 새로 그려진 4개의 원에 각각 [과정]을 실행하여 그린 8개의 원의 내부를 색칠하여 얻어진 그림을 C_3이라 하자. 그림 C_3에서 새로 그려진 8개의 원에 각각 [과정]을 실행하여 그린 16개의 원의 내부를 제외하여 얻어진 그림을 C_4라 하자. 이와 같은 방법으로 n번째 얻어진 그림 C_n에서 색칠된 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{q}{p}\pi$ (p와 q는 서로소인 자연수)이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 모든 원의 중심은 처음 원의 한 지름 위에 있다.)



78. 2009 교육청(4점)

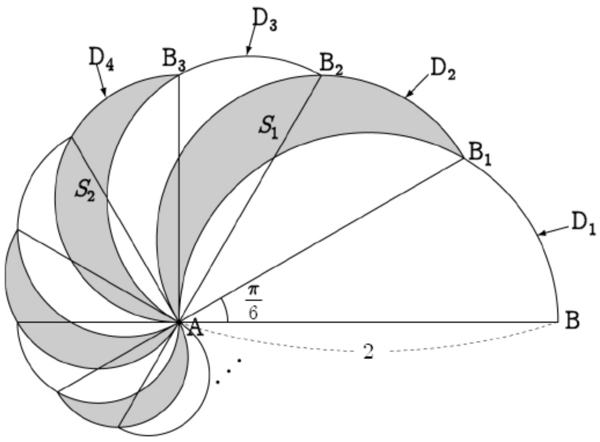
[그림 1]과 같이 한 개의 넓이가 1인 정사각형 5개로 이루어진 ✤ 모양의 도형에서 네 꼭짓점을 연결하여 만든 정사각형의 넓이를 S_1이라 하자. [그림 2]와 같이 [그림 1]의 ✤ 모양의 도형에 한 개의 넓이가 1인 정사각형 4개를 붙여 만든 ✤ 모양의 도형에서 네 꼭짓점을 연결하여 만든 정사각형의 넓이를 S_2라 하자. [그림 3]과 같이 [그림 2]의 ✤ 모양의 도형에 한 개의 넓이가 1인 정사각형 4개를 붙여 만든 ✤ 모양의 도형에서 네 꼭짓점을 연결하여 만든 정사각형의 넓이를 S_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻어진 ✤ 모양의 도형에서 네 꼭짓점을 연결하여 만든 정사각형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{10S_n}{n^2}$의 값을 구하시오.



[그림 1] [그림 2] [그림 3]

79. 2009 교육청(4점)

그림과 같이 $\overline{AB}=2$를 지름으로 하는 반원 D_1을 그리고, $\angle BAB_1=\dfrac{\pi}{6}$가 되도록 반원 D_1위의 점B_1을 잡는다.$\overline{AB_1}$을 지름으로 하는 반원 D_2를 그렸을 때, 반원 D_2에서 반원D_1과의 공통부분을 뺀 나머지 도형의 넓이를 S_1이라 하자. $\angle B_1AB_2=\dfrac{\pi}{6}$가 되도록 반원 D_2위의 점 B_2를 잡아 $\overline{AB_2}$를 지름으로 하는 반원 D_3를 그리고, $\angle B_2AB_3=\dfrac{\pi}{6}$가 되도록 반원 D_3위의 점 B_3를 잡는다. $\overline{AB_3}$를 지름으로 하는 반원 D_4를 그렸을 때, 반원 D_4에서 반원 D_3와의 공통부분을 뺀 나머지 도형의 넓이를 S_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속해서 n번째 얻은 도형의 넓이를 S_n이라 하면, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{b}{a}\left(\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right)$이다. 이때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 서로소인 자연수이다.)



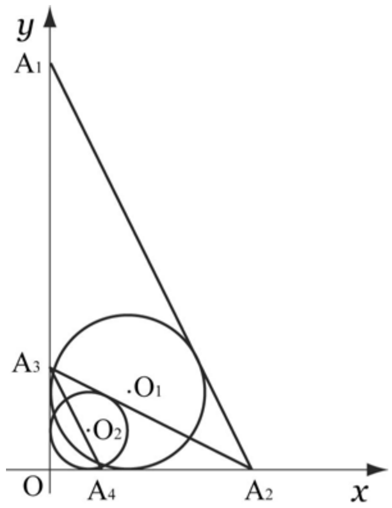
① 7　② 8　③ 9　④ 10　⑤ 11

80. 2009 교육청(4점)

그림과 같이 세 점 O(0, 0), $A_1(0,\ 4)$, $A_2(2,\ 0)$으로 이루어진 $\triangle OA_1A_2$에 내접하는 원을 O_1이라 하자. y축 위의 점 A_3이 선분 A_1A_2의 기울기와 선분 A_2A_3의 기울기의 곱이 1이 되도록 하는 점일 때, $\triangle OA_2A_3$에 내접하는 원을 O_2라 하자.

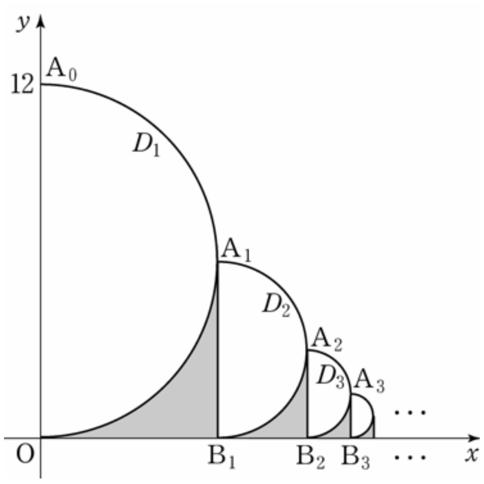
x축 위의 점 A_4가 선분 A_2A_3의 기울기와 선분 A_3A_4의 기울기의 곱이 1이 되도록 하는 점일 때, $\triangle OA_3A_4$에 내접하는 원을 O_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 생기는 $\triangle OA_nA_{n+1}$에 내접하는 원을 O_n이라 하고, O_n의 반지름의 길이를 r_n이라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}r_n=a-2\sqrt{b}$ (a, b는 자연수)이다. $a+b$의 값을 구하시오.



81. 2005 교육청(4점)

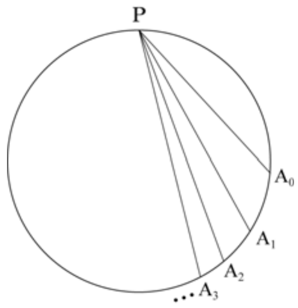
그림과 같이 원점과 점 $A_0(0, 12)$를 지름의 양 끝점으로 하는 원의 오른쪽 반원을 D_1이라 하자. 원점을 지나고 기울기가 1인 직선이 D_1과 제 1사분면에서 만나는 점을 A_1, 점 A_1에서 x축에 내린 수선의 발을 B_1이라 하고, 반원 D_1, x축, 선분 A_1B_1으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하자. 선분 A_1B_1을 지름으로 하는 원의 오른쪽 반원을 D_2라 하자. 점 B_1을 지나고 기울기가 1인 직선이 D_2와 제 1사분면에서 만나는 점을 A_2, 점 A_2에서 x축에 내린 수선의 발을 B_2라 하고, 반원 D_2, x축, 선분 A_2B_2로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 도형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?



① $9(4-\pi)$　② $12(4-\pi)$
③ $15(4-\pi)$　④ $4(8-\pi)$
⑤ $6(8-\pi)$

82. 2006 교육청(4점)

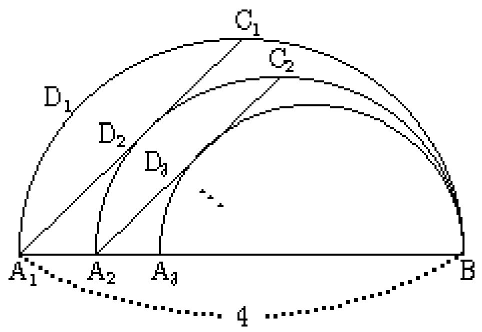
반지름의 길이가 2인 원 위의 점 P에 대하여 $\angle A_0PA_1 = \frac{\pi}{6}$, $\angle A_1PA_2 = \frac{\pi}{18}$, $\angle A_2PA_3 = \frac{\pi}{54}$, ⋯ 이 되도록 점 A_0, A_1, A_2, ⋯을 잡을 때, $\overset{\frown}{A_0A_1}$, $\overset{\frown}{A_1A_2}$, $\overset{\frown}{A_2A_3}$, ⋯의 길이를 각각 l_1, l_2, l_3, ⋯ 라 하자. 이 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은?



① $\frac{\pi}{2}$　② π
③ $\frac{3}{2}\pi$　④ 2π
⑤ $\frac{5}{2}\pi$

83. 2006 교육청(4점)

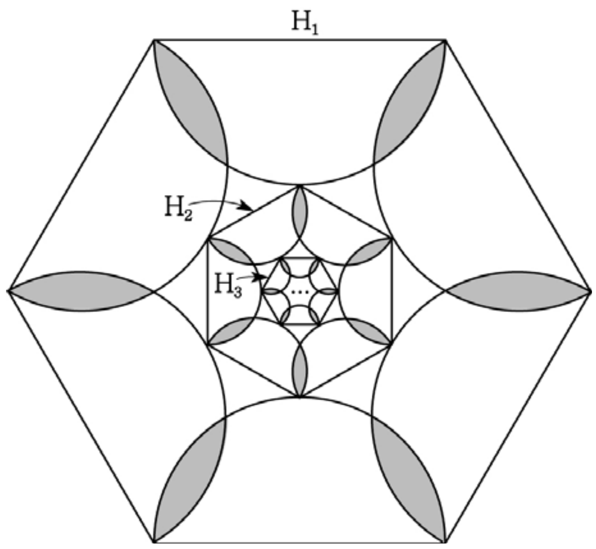
그림과 같이 길이가 4인 선분 A_1B를 지름으로 하는 반원 D_1이 있다. 호A_1B를 이등분하는 점을 C_1, 점 B를 지나면서 선분 A_1C_1과 접하고 중심이 선분 A_1B 위에 있는 반원을 D_2, 반원 D_2가 선분 A_1B와 만나는 점을 A_2라 하자. 호 A_2B를 이등분하는 점을 C_2, 점 B를 지나면서 선분 A_2C_2와 접하고 중심이 선분 A_1B 위에 있는 반원을 D_3, 반원 D_3이 선분 A_1B와 만나는 점을 A_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 얻은 반원 D_n의 호의 길이를 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은?



① $2(1+\sqrt{2})\pi$　② $2(2+\sqrt{2})\pi$
③ $2(3+\sqrt{2})\pi$　④ $2(2+2\sqrt{2})\pi$
⑤ $2(3+2\sqrt{2})\pi$

84. 2009 교육청(4점)

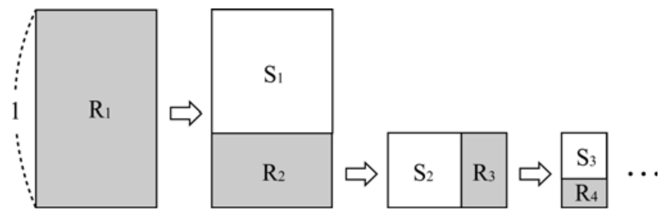
그림과 같이 정육각형 H_1의 각 변을 지름으로 하는 반원을 정육각형 H_1의 내부에 그리고, 반원이 겹쳐지는 어두운 부분의 넓이의 합을 S_1, 각 반원의 호의 길이를 이등분하는 점을 꼭짓점으로 하는 정육각형을 H_2라 하자. 정육각형 H_2의 각 변을 지름으로 하는 반원을 정육각형 H_2의 내부에 그리고, 반원이 겹쳐지는 어두운 부분의 넓이의 합을 S_2, 각 반원의 호의 길이를 이등분하는 점을 꼭짓점으로 하는 정육각형을 H_3이라 하자. 이와 같은 방법으로 정육각형 H_n의 각 변을 지름으로 하는 반원을 정육각형 H_n의 내부에 그리고, 반원이 겹쳐지는 어두운 부분의 넓이의 합을 S_n, 각 반원의 호의 길이를 이등분하는 점을 꼭짓점으로 하는 정육각형을 H_{n+1}이라 하자.이때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값을 S_1을 이용하여 나타낸 것은?



① $\frac{2\sqrt{3}}{3}S_1$　② $\frac{3-\sqrt{3}}{3}S_1$　③ $\frac{4\sqrt{3}}{3}S_1$
④ $\frac{3+\sqrt{3}}{3}S_1$　⑤ $2\sqrt{3}\,S_1$

85. 2006 평가원(4점)

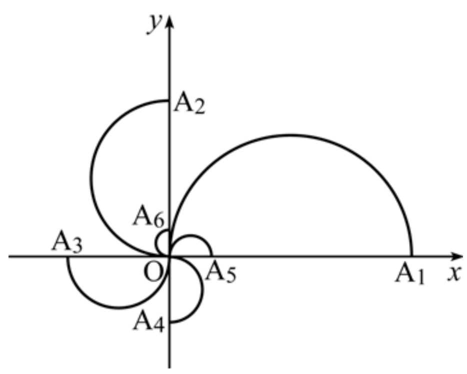
직사각형 중에서 짧은 변을 한 변으로 하는 정사각형을 잘라내고 남은 직사각형이 처음의 직사각형과 서로 닮음이 되는 것을 황금직사각형이라고 한다.그림과 같이 긴 변의 길이가 1인 황금직사각형 R_1에서 짧은 변을 한 변으로 하는 정사각형 S_1을 잘라내고 남은 직사각형을 R_2, 직사각형 R_2에서 정사각형 S_2를 잘라내고 남은 직사각형을 R_3이라고 하자. 이와 같은 방법으로 직사각형 R_4, R_5, R_6, $\cdots$ 을 한없이 만들어 간다. 직사각형 R_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$의 둘레의 길이 l_n에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} l_n = k\,l_1$일 때, 상수 k의 값은?



① $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$　② $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$　③ $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$　④ $3-\sqrt{5}$　⑤ $3+\sqrt{5}$

86. 2006 교육청(4점)

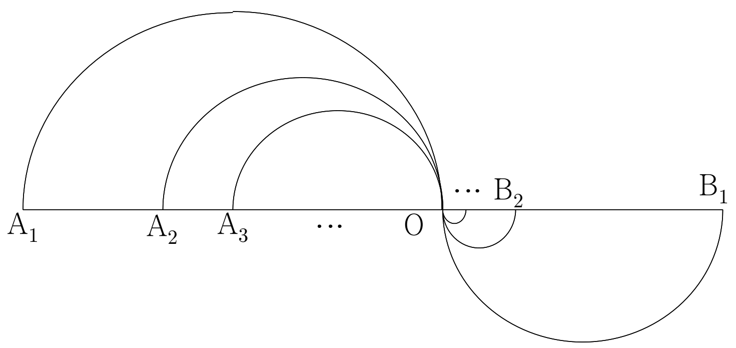
그림과 같이 x축 위의 점 $A_1(6\pi-12,\ 0)$에 대하여 $\overline{OA_1}$을 지름으로 하는 반원을 제 1 사분면에 그리고, $\overline{OA_1} = \overset{\frown}{OA_2}$인 점 A_2를 y축 위에 잡아 $\overline{OA_2}$를 지름으로 하는 반원을 제 2 사분면에 그린다. 또, $\overline{OA_2} = \overset{\frown}{OA_3}$ 인 점 A_3를 x축 위에 잡아 $\overline{OA_3}$를 지름으로 하는 반원을 제 3 사분면에 그리고, $\overline{OA_3} = \overset{\frown}{OA_4}$인 점 A_4를 y축 위에 잡아 $\overline{OA_4}$를 지름으로 하는 반원을 제 4 사분면에 그린다. 같은 방법으로 제 1 사분면, 제 2 사분면, $\cdots$ 에 반원을 계속하여 그려나갈 때, 반원들의 호의 길이의 합 $\sum_{n=1}^{\infty} \overset{\frown}{OA_n}$ 의 값은? (단, $\overset{\frown}{OA_n}$은 $\overline{OA_n}$을 지름으로 하는 반원의 호이고 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$이다.)



① 9π　② $8\pi+1$　③ π^2+10　④ $2\pi^2+3$　⑤ $3\pi^2$

87. 2006 교육청(4점)

그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=1$이고 점 O 는 선분 A_1B_1 을 $2:1$ 로 내분하는 점이다. 점 A_2 는 선분 OA_1 을 $2:1$ 로 내분하는 점, 점 A_3 은 선분 OA_2 를 $2:1$ 로 내분하는 점, ……, 점 A_{n+1} 은 선분 OA_n 을 $2:1$ 로 내분하는 점이다. 점 B_2 는 선분 $\overline{OB_1}$ 을 $1:2$ 로 내분하는 점, 점 B_3 는 선분 $\overline{OB_2}$ 를 $1:2$ 로 내분하는 점, …… , 점 B_{n+1} 은 OB_n 을 $1:2$ 로 내분하는 점이다. 선분 OA_n 을 지름으로 하는 반원의 호의 길이를 s_n , 선분 OB_n 을 지름으로 하는 반원의 호의 길이를 t_n 이라 할 때, 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(s_n-t_n)$ 의 합은?



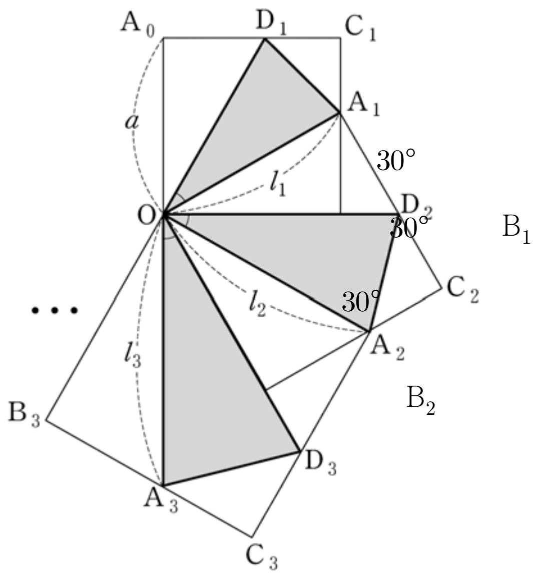
① $\frac{1}{4}\pi$　② $\frac{1}{3}\pi$

③ $\frac{1}{2}\pi$　④ $\frac{2}{3}\pi$

⑤ $\frac{3}{4}\pi$

88. 2006 평가원(4점)

그림과 같이 한 변의 길이가 a인 정사각형 $OB_1C_1A_0$이 있다. 삼각형 OA_1D_1이 $\angle D_1OA_1=30°$인 이등변삼각형이 되도록 변 B_1C_1, A_0C_1 위에 각각 점 A_1, D_1을 잡고 변 OA_1의 길이를 l_1이라 하자. 선분 OA_1을 한 변으로 하는 정사각형 $OB_2C_2A_1$에서 삼각형 OA_2D_2가 $\angle D_2OA_2=30°$인 이등변삼각형이 되도록 변 B_2C_2, A_1C_2 위에 각각 점 A_2, D_2를 잡고 변 OA_2의 길이를 l_2라 하자. 선분 OA_2를 한 변으로 하는 정사각형 $OB_3C_3A_2$에서 삼각형 OA_3D_3이 $\angle D_3OA_3=30°$인 이등변삼각형이 되도록 변 B_3C_3, A_2C_3 위에 각각 점 A_3, D_3을 잡고 변 OA_3의 길이를 l_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 얻은 이등변삼각형 OA_nD_n에서 변 OA_n의 길이를 l_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l_n}=\sqrt{3}$일 때, a의 값은?

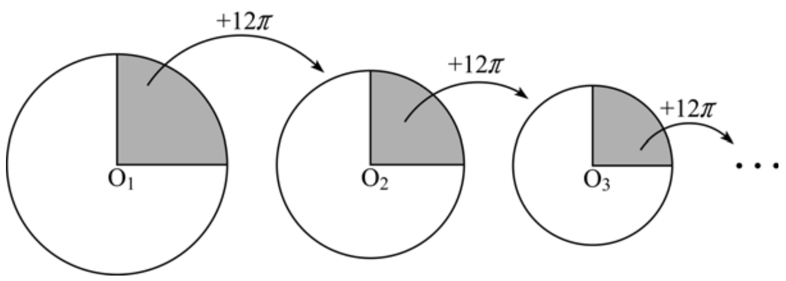


① $\sqrt{3}$　② $1+\sqrt{3}$　③ $2+\sqrt{3}$

④ $3+\sqrt{3}$　⑤ $6+\sqrt{3}$

89. 2006 교육청(4점)

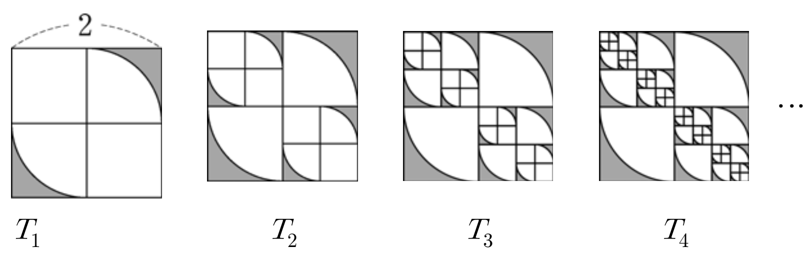
넓이가 20π 인 원 O_1 을 그리고, 원 O_1 의 사분원의 넓이보다 12π 더 넓은 원 O_2 를 그린다. 또 원 O_2 의 사분원의 넓이보다 12π 더 넓은 원 O_3 를 그린다. 이와 같이 원 O_n 의 사분원의 넓이보다 12π 더 넓은 원 O_{n+1} 을 계속하여 그려 간다. 원 O_n 의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$ 의 값은?



① 14π　② 15π　③ 16π　④ 17π　⑤ 18π

90. 2006 평가원(4점)

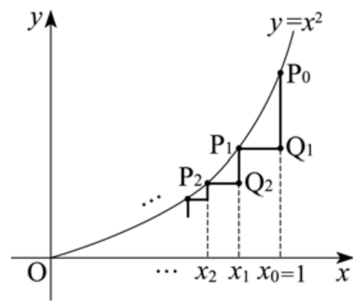
그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형을 넓이가 같은 4개의 정사각형으로 나누고 반지름의 길이가 1인 사분원 2개의 외부(어두운 부분)를 잘라낸 후 남은 도형을 T_1 이라 하자. T_1 에서 한 변의 길이가 1인 정사각형 2개를 각각 넓이가 같은 4개의 정사각형으로 나누고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}$ 인 사분원 4개의 외부(어두운 부분)를 잘라낸 후 남은 도형을 T_2 라 하자. T_2 에서 한 변의 길이가 $\frac{1}{2}$ 인 정사각형 4개를 각각 넓이가 같은 4개의 정사각형으로 나누고 반지름의 길이가 $\frac{1}{4}$ 인 사분원 8개의 외부(어두운 부분)를 잘라낸 후 남은 도형을 T_3 이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 도형을 T_n 이라 하고 그 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$ 의 값은?



① $\frac{\pi}{2}$　② $\frac{2}{3}\pi$　③ $\frac{3}{4}\pi$　④ π　⑤ $\frac{5}{4}\pi$

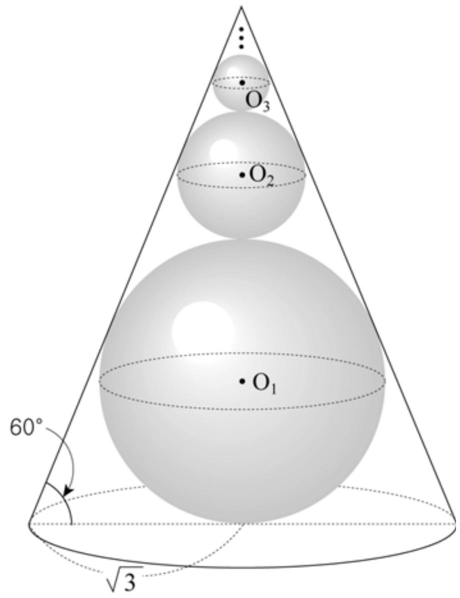
91. 2005 교육청(4점)

$x_0 = 1$, $x_1 = \frac{3}{4}$, $x_2 = \frac{5}{8}$, …, $x_n = \frac{2^n+1}{2^{n+1}}$ … 에 대하여 좌표평면 위에 점 $P_0(1, 1)$과 $P_n(x_n, x^2{}_{)n}$, $Q_n(x_{n-1}, x^2{}_{)n}(n = 1, 2, 3, \cdots)$을 그림과 같이 나타낸다. 무한급수 $\overline{P_0Q_1} + \overline{Q_1P_1} + \overline{P_1Q_2} + \overline{Q_2P_2} + \overline{P_2Q_3} + \cdots$ 의 합을 S라 할 때 $100S$의 값을 구하시오.



92. 2006 교육청(4점)

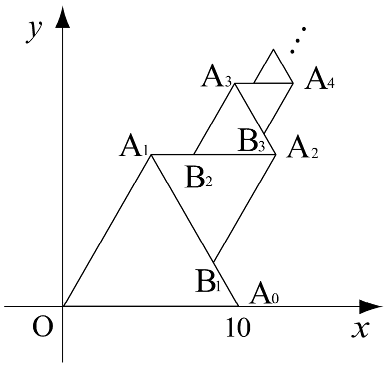
그림은 밑면의 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$이고 밑면과 모선 사이의 각도가 60°인 직원뿔이다. 구 O_1이 직원뿔에 내접하고, 구 O_2는 구 O_1에 외접하고 직원뿔의 옆면과 접한다. 이와 같은 방법으로 O_3, O_4, O_5, …를 한없이 만들어 나갈 때, 구들의 부피의 합은?



① $\frac{16}{13}\pi$
② $\frac{18}{13}\pi$
③ $\frac{20}{13}\pi$
④ $\frac{22}{13}\pi$
⑤ $\frac{24}{13}\pi$

93. 2004 평가원(4점)

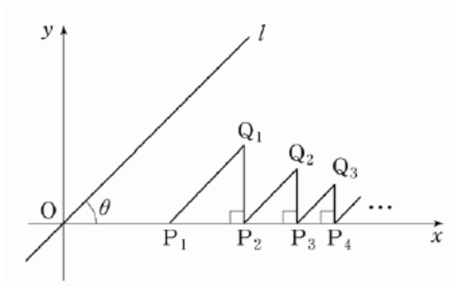
오른쪽 그림과 같이 원점 O와 점 $A_0(10, 0)$에 대하여 제1사분면 위에 $\overline{OA_0}$를 한 변으로 하는 정삼각형 OA_0A_1을 만들고 $\overline{A_0A_1}$을 $1:2$로 내분하는 점을 B_1이라 한다. 또 $\triangle OA_0A_1$ 밖에 $\overline{A_1B_1}$을 한 변으로 하는 정삼각형 $A_1B_1A_2$를 만들고 $\overline{A_1A_2}$를 $1:2$로 내분하는 점을 B_2라 한다.



이와 같은 과정을 한없이 반복하면 점 A_n은 점 (a, b)에 한없이 가까워진다. 이때 a의 값을 구하시오.

94. 2005 평가원(4점)

그림과 같이 원점을 지나고 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ인 직선 l이 있다. 점 $P_1(1, 0)$을 지나고 직선 l과 평행한 직선 위에 선분의 길이가 $\overline{OP_1} = \overline{P_1Q_1}$이 되는 점 Q_1을 선택하자. 점 Q_1에서 x축에 내린 수선의 발을 P_2라 하고, 점 P_2를 지나고 직선 l에 평행한 직선 위에 선분의 길이가 $\overline{P_1P_{2}} = \overline{P_2Q_2}$가 되는 점 Q_2를 선택하자. 점 Q_2에서 x축에 내린 수선의 발을 P_3이라 하고, 점 P_3을 지나고 직선 l에 평행한 직선 위에 선분의 길이가 $\overline{P_2P_{3}} = \overline{P_3Q_3}$이 되는 점 Q_3을 선택하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 두 점 P_n, Q_n에 대하여 선분 P_nQ_n의 길이를 a_n이라 하자. $\left(\text{단}, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4$일 때, $\cos\theta$의 값은?

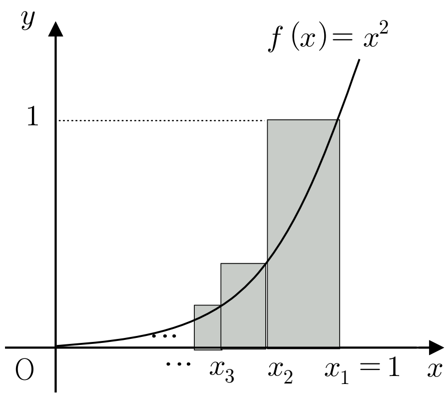


① $\frac{1}{4}$
② $\frac{1}{2}$
③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
④ $\frac{3}{4}$
⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

95. 2004 평가원(4점)

이차함수 $f(x)=x^2$ 에서

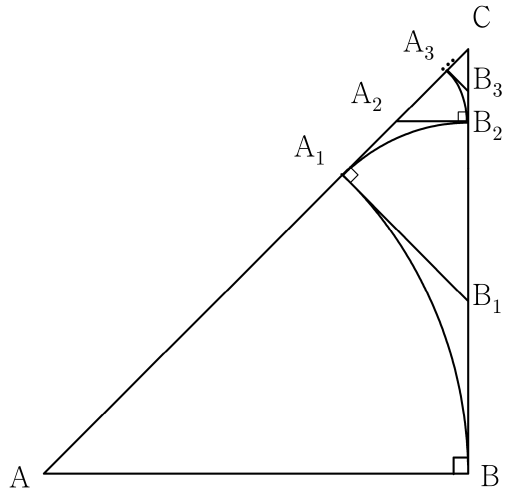
$x_1=1,\ x_2=\dfrac{2}{3},\ x_3=\dfrac{4}{9},\cdots,x_n=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1},\cdots$ 을 그림과 같이 정할 때, x_n-x_{n+1} 을 밑변의 길이, $f(x_n)$ 을 높이로 하는 직사각형의 넓이를 A_n 이라 하자. 이 때, $\sum_{n=1}^{\infty}A_n$ 은?



① $\dfrac{5}{19}$　② $\dfrac{6}{19}$　③ $\dfrac{7}{19}$　④ $\dfrac{8}{19}$　⑤ $\dfrac{9}{19}$

96. 2004 평가원(4점)

그림과 같이 직각이등변삼각형 ABC에서 꼭지점 A를 중심, $\overline{\mathrm{AB}}$를 반지름으로 하는 원을 그렸을 때, $\overline{\mathrm{AC}}$와 만나는 점을 $\mathrm{A_1}$, $\overline{\mathrm{AC}}\perp\overline{\mathrm{A_1B_1}}$이면서 $\overline{\mathrm{BC}}$위에 있는 점을 $\mathrm{B_1}$, 다시 꼭지점 $\mathrm{B_1}$을 중심, $\overline{\mathrm{A_1B_1}}$을 반지름으로 하는 원을 그렸을 때, $\overline{\mathrm{CB_1}}$과 만나는 점을 $\mathrm{B_2}$, $\overline{\mathrm{CB_1}}\perp\overline{\mathrm{A_2B_2}}$이면서 $\overline{\mathrm{A_1C}}$ 위에 있는 점을 $\mathrm{A_2}$라고 정하기로 한다.

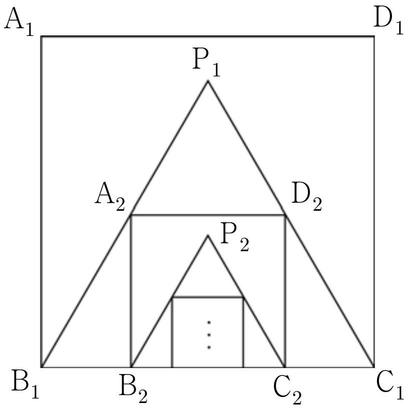


위와 같은 과정을 계속 반복해 나갈 때, $\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{A_1B_1}}+\overline{\mathrm{A_2B_2}}+\cdots$ 의 값은 ? (단, $\overline{\mathrm{AB}}=2$)

① $2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　② $4-\sqrt{2}$　③ $2\sqrt{2}$　④ $2+\sqrt{2}$　⑤ $2+2\sqrt{2}$

97. 2007 교육청(4점)

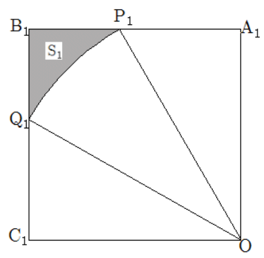
그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 내부에 선분 B_1C_1을 한 변으로 하는 정삼각형 $P_1B_1C_1$을 만든다. 다시 선분 B_1C_1 위에 정삼각형 $P_1B_1C_1$에 내접하는 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 만든다. 이와 같은 방법으로 만들어지는 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?



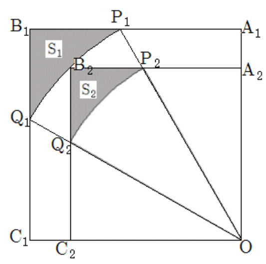
① $4\sqrt{3}+15$　② $5\sqrt{3}+10$　③ $5\sqrt{3}+25$
④ $6\sqrt{3}+5$　⑤ $6\sqrt{3}+10$

98. 2007 교육청(4점)

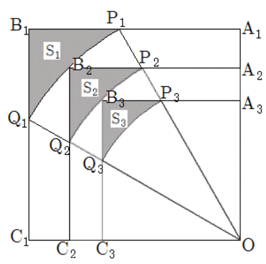
그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 $OA_1B_1C_1$에서 $\angle O$의 3등분선이 $\overline{A_1B_1}$, $\overline{B_1C_1}$과 만나는 점을 각각 P_1, Q_1이라 하자. 점 O가 중심이고 $\overline{OP_1}$을 반지름으로 하는 부채꼴 OP_1Q_1을 그린다. [그림1]에서 도형 $B_1Q_1P_1$의 넓이를 S_1이라 하자. 호 P_1Q_1의 중점 B_2, $\overline{OA_1} /\!/ \overline{C_2B_2}$인 $\overline{OC_1}$ 위의 점 C_2, $\overline{OC_1} /\!/ \overline{A_2B_2}$인 $\overline{OA_1}$ 위의 점 A_2, 점 O를 꼭지점으로 하는 정사각형 $OA_2B_2C_2$를 그린다. $\overline{OP_1}$과 $\overline{A_2B_2}$가 만나는 점을 P_2, $\overline{OQ_1}$과 $\overline{B_2C_2}$가 만나는 점을 Q_2라 하자. 점 O가 중심이고 $\overline{OP_2}$를 반지름으로 하는 부채꼴 OP_2Q_2를 그린다. [그림2]에서 도형 $B_2Q_2P_2$의 넓이를 S_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 합은?



[그림1]



[그림2]



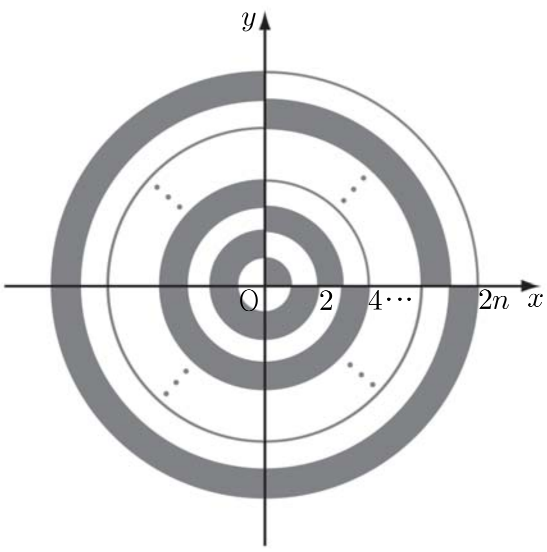
[그림3]

…

① $-3+\pi$　② $4-\pi$　③ $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$
④ $3-\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$　⑤ $4-\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$

99. 2007 교육청(4점)

중심이 원점이고 반지름의 길이가 1, 2, 3, ⋯, $2n$인 동심원이 있다.



< 다 음 >

<1단계> 반지름의 길이가 1인 원 내부의 1사분면에 검은색을 칠하고, 반지름의 길이가 1인 원과 반지름의 길이가 2인 원 사이의 2, 3, 4사분면에도 검은색을 칠한다.
<2단계> 반지름의 길이가 2인 원과 반지름의 길이가 3인의 원사이의 1사분면에 검은색을 칠하고, 반지름의 길이가 3인 원과 반지름의 길이가 4인 원 사이의 2, 3, 4사분면에도 검은색을 칠한다.

⋮

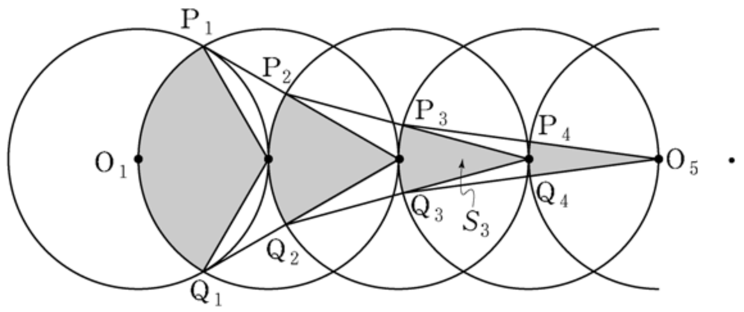
<n단계> 반지름의 길이가 $2n-2$인 원과 반지름의 길이가 $2n-1$인원 사이의 1사분면에 검은색을 칠하고, 반지름의 길이가 $2n-1$인 원과 반지름의 길이가 $2n$인 원 사이의 2, 3, 4사분면에도 검은색을 칠한다.

이와 같이 n단계까지 검은색으로 칠한 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}$의 값은?

① $\frac{3}{4}\pi$ ② π ③ $\frac{4}{3}\pi$
④ $\frac{3}{2}\pi$ ⑤ 2π

100. 2007 평가원(4점)

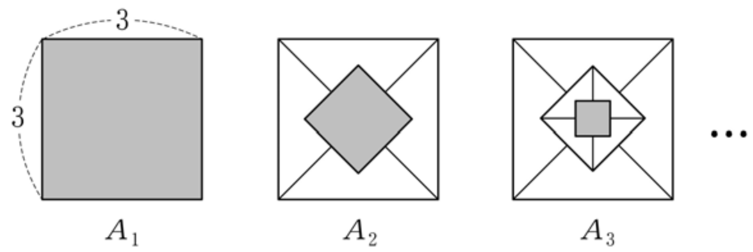
그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심이 $O_1, O_2, O_3, \cdots$인 원들이 있다. 모든 원들의 중심은 한 직선 위에 있고, $\overline{O_nO_{n+1}}=1(n=1, 2, 3, \cdots)$이다. 두 원 O_1, O_2가 만나는 두 점을 각각 P_1, Q_1이라 하고, 부채꼴 $O_2P_1Q_1$의 넓이를 S_1이라 하자. 두 점 P_1, Q_1에서 원 O_3의 중심과 연결한 선분이 원 O_3과 만나는 두 점을 각각 P_2, Q_2라 하고, 부채꼴 $O_3P_2Q_2$의 넓이를 S_2라 하자. 두 점 P_2, Q_2에서 원 O_4의 중심과 연결한 선분이 원 O_4와 만나는 두 점을 각각 P_3, Q_3이라 하고, 부채꼴 $O_4P_3Q_3$의 넓이를 S_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 부채꼴 $O_{n+1}P_nQ_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}S_n$의 값은?



① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{2}{3}\pi$ ③ $\frac{5}{6}\pi$
④ π ⑤ $\frac{7}{6}\pi$

101. 2007 평가원(4점)

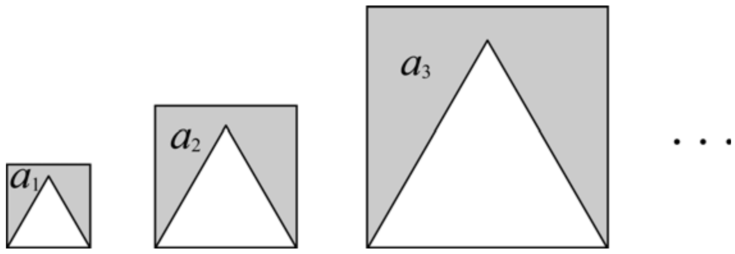
그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정사각형을 A_1, 그 넓이를 S_1이라 하자. 정사각형 A_1에 대각선을 그어 만들어진 4개의 삼각형의 무게중심을 연결한 정사각형을 A_2, 그 넓이를 S_2라 하자. 같은 방법으로 정사각형 A_2에 대각선을 그어 만들어진 4개의 삼각형의 무게중심을 연결한 정사각형을 A_3, 그 넓이를 S_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 $(n-1)$ 번째 얻은 정사각형을 A_n, 그 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?



① $\frac{64}{7}$ ② $\frac{21}{2}$ ③ $\frac{72}{7}$
④ $\frac{27}{2}$ ⑤ $\frac{81}{7}$

102. 2008 교육청(4점)

넓이가 1, 3, 9, 27, ⋯ 인 등비수열을 이루는 정사각형들을 그림과 같이 왼쪽부터 차례로 배열하고, 각 정사각형의 내부에 정사각형과 한 변을 공유하는 정삼각형을 그린다.



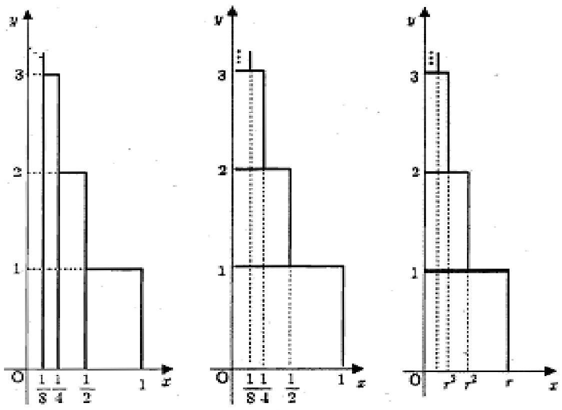
정삼각형의 외부와 정사각형의 내부의 공통부분(어두운 부분)의 넓이를 왼쪽부터 차례로 a_1, a_2, a_3, ⋯ 이라 할 때,

$\lim_{n\to\infty} \frac{8(a_1+a_2+\cdots+a_n)}{3^n}$의 값은?

① $2-\sqrt{3}$ ② $3-\sqrt{3}$
③ $4-\sqrt{3}$ ④ $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$
⑤ $\frac{4-\sqrt{3}}{2}$

103. 2008 교육청(4점)

다음은 무한급수 $\sum_{k=1}^{\infty} kr^k (0<r<1)$의 값을 구하는 과정이다.



<그림1> <그림2> <그림3>

<그림1>과 <그림2>는 각각 일정한 규칙으로 직사각형을 한없이 붙여나간 것이다. <그림1>과 <그림2>의 도형의 넓이를 구하여 비교해 보면 아래 등식이 성립함을 알수 있다.

$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}\cdots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$

그러므로 $\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^k = \boxed{(가)}$ 이다. 위와 마찬가지로 $0<r<1$일 때, <그림3>에서

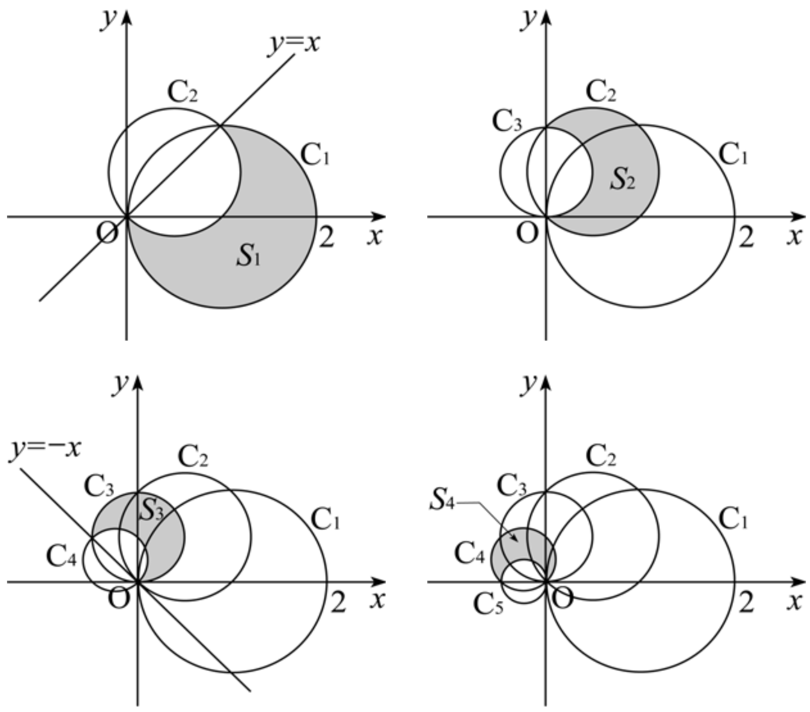
$\boxed{(나)}(r+2r^2+3r^3+\cdots)=r+r^2+r^3+\cdots$이 성립함을 알 수 있다. 따라서 $\sum_{k=1}^{\infty} kr^k = \boxed{(다)}$

위에서 (가),(나),(다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	2	$1-r$	$\frac{r}{(1-r)^2}$
②	2	$2-r$	$\frac{r}{(2-r)(1-r)}$
③	2	$3-r$	$\frac{r}{(3-r)(1-r)}$
④	3	$1-r$	$\frac{r}{(1-r)^2}$
⑤	3	$2-r$	$\frac{r}{(2-r)(1-r)}$

104. 2008 교육청(4점)

그림과 같이 원점 O와 점 (2, 0)을 지름의 양 끝으로 하는 원을 C_1이라 하자. 또, 원 C_1과 직선 $y=x$가 만나는 두 점을 지름의 양 끝으로 하는 원을 C_2, 원 C_2와 y축이 만나는 두 점을 지름의 양 끝으로 하는 원을 C_3이라 하자. 또, 원 C_3과 직선 $y=-x$가 만나는 두 점을 지름의 양 끝으로 하는 원을 C_4, 원 C_4와 x축이 만나는 두 점을 지름의 양 끝으로 하는 원을 C_5라 하자.



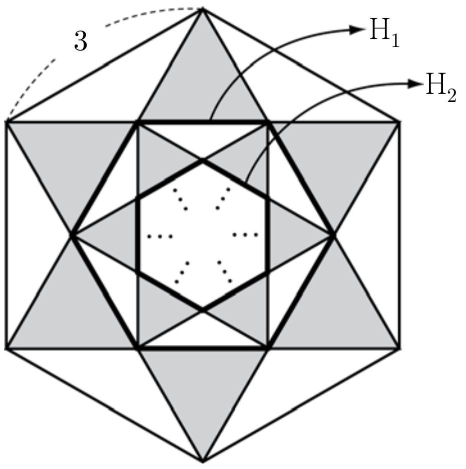
이와 같은 방법으로 중심이 차례로 직선 $y=x$, y축, 직선 $y=-x$, x축, … 위에 있는 원 C_6, C_7, C_8, C_9, … 를 한없이 만들어 갈 때, 원 C_n의 내부와 원 C_{n+1}의 외부의 공통부분(어두운 부분)의 넓이를 S_n ($n=1, 2, 3, \cdots$)이라 하자.

이때 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?

① $\pi+1$ ② $\frac{3}{2}\pi$ ③ $\frac{5}{4}(\pi+1)$ ④ $\frac{3}{2}(\pi+1)$ ⑤ 2π

105. 2008 교육청(4점)

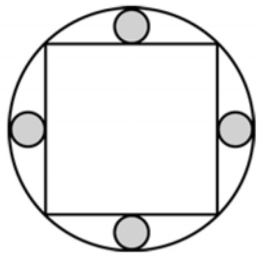
그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정육각형의 각 꼭짓점에서 짧은 대각선을 그려서 만들어진 정육각형을 H_1이라 하고, H_1의 외부에 새로 만들어진 정삼각형을 어둡게 칠한다. H_1의 각 꼭짓점에서 짧은 대각선을 그려서 만들어진 정육각형을 H_2라 하고, H_2의 외부에 새로 만들어진 정삼각형을 어둡게 칠한다. 이와 같은 과정을 한없이 계속할 때, 어둡게 칠해진 모든 정삼각형의 넓이의 합은?



① $\frac{19}{4}\sqrt{3}$ ② $\frac{21}{4}\sqrt{3}$ ③ $\frac{23}{4}\sqrt{3}$
④ $\frac{25}{4}\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{27}{4}\sqrt{3}$

106. 2008 교육청(4점)

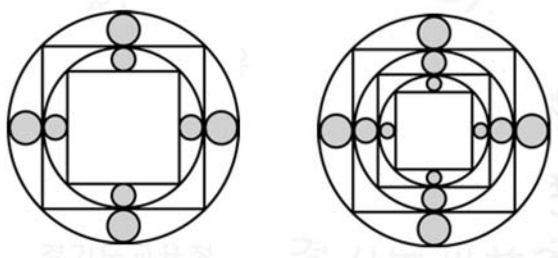
그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 정사각형을 그린다. 원의 내부와 정사각형의 외부에 모두 접하는 가장 큰 원 4개를 그려 어둡게 칠한다.



여기에 아래의 과정을 반복한다.

<과정>

Ⅰ. 안에 있는 정사각형에 내접하는 원을 그리고 그 원에 내접하는 정사각형을 그린다.
Ⅱ. 새로 그려진 원의 내부와 정사각형 외부에 모두 접하는 가장 큰 원 4개를 어둡게 칠한다.



[$n=2$일 때] [$n=3$일 때]

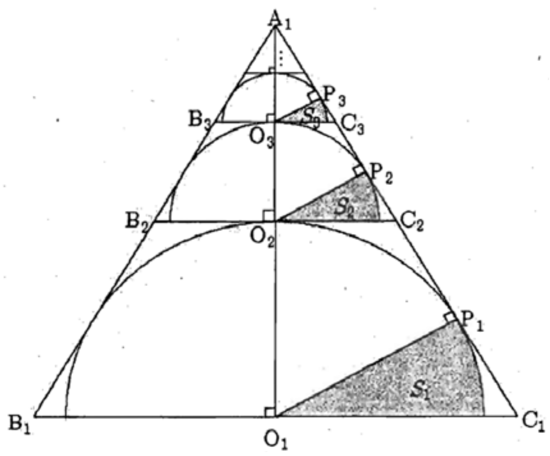
정사각형의 개수가 모두 n일 때, 어두운 부분의 넓이를 S_n이라 하자. 이 때 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$의 값은?

① $(\sqrt{13}-2\sqrt{3})\pi$ ② $(2\sqrt{3}-\sqrt{11})\pi$
③ $(\sqrt{11}-\sqrt{10})\pi$ ④ $(\sqrt{10}-3)\pi$
⑤ $(3-2\sqrt{2})\pi$

107. 2008 교육청(4점)

그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정삼각형 $A_1B_1C_1$이 있다. 선분 B_1C_1의 중점 O_1을 중심으로 삼각형 $A_1B_1C_1$에 접하는 반원과 선분 A_1C_1의 교점이 P_1일 때, 선분 O_1P_1은 반원의 내부를 부채꼴 두 개로 나눈다. 그 중 작은 부채꼴(어두운 부분)의 넓이를 S_1이라 한다.

선분 A_1O_1과 반원의 교점을 O_2라 두고 점 O_2를 접점으로 하는 접선과 선분 A_1B_1, 선분 A_1C_1과 만나는 점은 각각 B_2, C_2이다. 정삼각형 $A_1B_2C_2$에서 점 O_2를 중심으로 삼각형 $A_1B_2C_2$에 접하는 새로운 반원과 선분 A_1C_2의 교점이 P_2일 때, 선분 O_2P_2는 반원의 내부를 부채꼴 두 개로 나눈다. 그 중 작은 부채꼴(어두운 부분)의 넓이를 S_2라 한다.



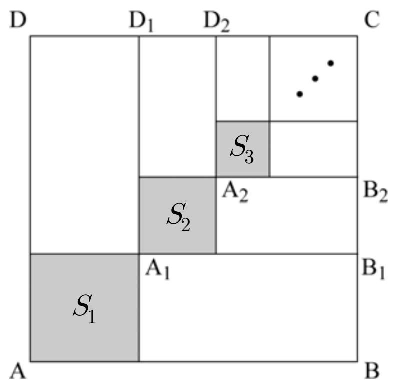
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻어진 부채꼴의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?

① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{\pi}{3}$ ③ $\frac{\pi}{4}$
④ $\frac{\pi}{6}$ ⑤ $\frac{\pi}{12}$

108. 2008 교육청(4점)

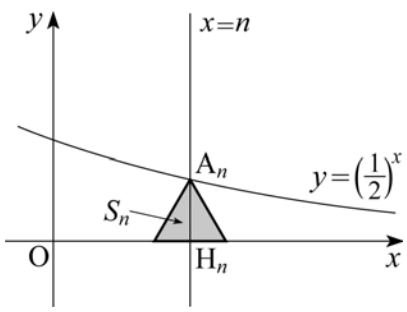
그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD에서 선분 AB와 선분 AD를 각각 $m:n$으로 내분하는 점을 지나는 두 직선을 그어 만들어지는 4개의 사각형 중 아랫부분 정사각형의 넓이를 S_1, 윗부분의 정사각형을 $A_1B_1CD_1$이라 하자.
다시 정사각형 $A_1B_1CD_1$에서 선분 A_1B_1과 선분 A_1D_1을 각각 $m:n$으로 내분하는 점을 지나는 두 직선을 그어 만들어지는 4개의 사각형 중 아랫부분 정사각형의 넓이를 S_2, 윗부분의 정사각형을 $A_2B_2CD_2$라 하자.

이와 같은 시행을 무한히 반복할 때, $\sum_{k=1}^{\infty} S_k = \frac{1}{7}$이다.
m^2+n^2의 값을 구하시오. (단, m, n 은 서로소인 자연수)



109. 2008 교육청(4점)

그림과 같이 직선 $x=n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$이 지수함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프 및 x축과 만나는 점을 각각 A_n, H_n이라 하자. 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{H}_n$을 높이로 하는 정삼각형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = a$이다. $\frac{1}{a^2}$의 값을 구하시오.

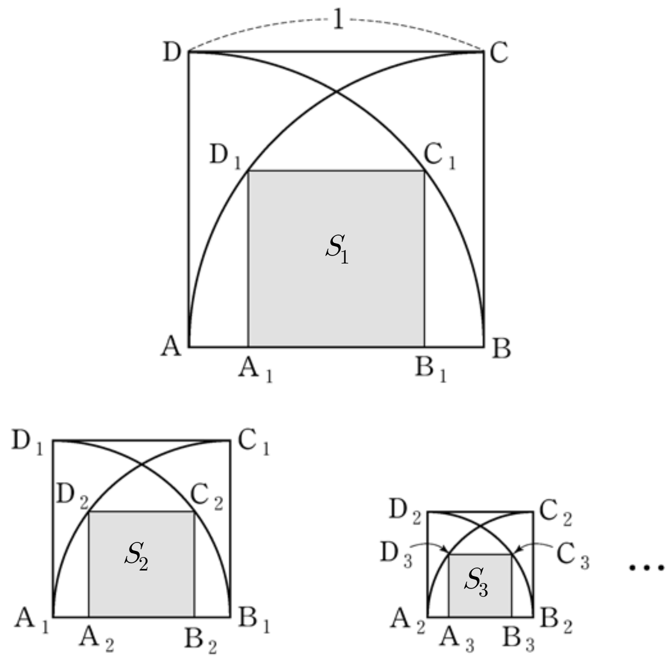


110. 2008 평가원(4점)

한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD가 있다. 그림과 같이 정사각형 ABCD 안에 두 점 A, B를 각각 중심으로 하고 변 AB를 반지름으로 하는 2개의 사분원을 그린다. 이 두 사분원의 공통부분에 내접하는 정사각형을 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$이라 하자.

정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$ 안에 두 점 $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{B_1}$을 각각 중심으로 하고 변 $\mathrm{A_1B_1}$을 반지름으로 하는 2개의 사분원을 그린다. 이 두 사분원의 공통부분에 내접하는 정사각형을 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 정사각형 $\mathrm{A_nB_nC_nD_n}$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?



① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{9}{16}$ ③ $\frac{4}{5}$
④ $\frac{9}{8}$ ⑤ $\frac{23}{16}$

111. 2008 교육청(4점)

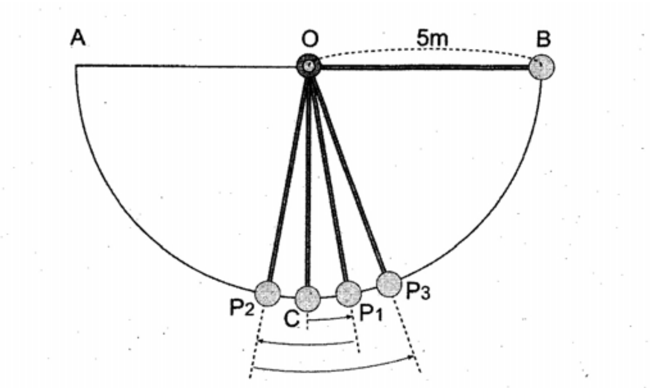
어떤 놀이 기구는 길이가 $10\,m$ 인 $\overline{AB}$ 를 지름으로 하는 반원 모양의 호를 따라 다음 <규칙>에 의해 움직이도록 만들어졌다.

< 규 칙 >

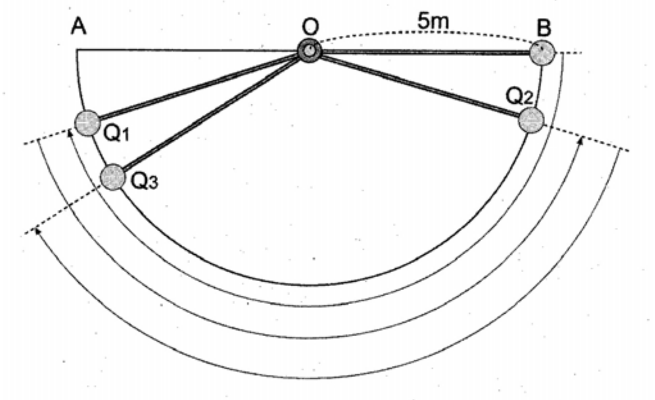
먼저, [그림 1]에서와 같이 반원에서 중심 O 로부터 지면과 수직인 방향에 위치한 C 지점에서 B 방향으로 10° 만큼 움직여 P_1 지점에 도달한 후, 방향을 바꾸어 A 방향으로 20° 만큼 움직여 P_2 지점에 도달한다.

다음으로, [그림 2]에서와 같이 동작 규칙이 바뀌어 B 지점으로부터 A 방향으로 호 $\overset{\frown}{AB}$ 길이의 $\frac{9}{10}$ 만큼 움직여 Q_1 에 도달한 후, 방향을 바꾸어 호 $\overset{\frown}{Q_1B}$ 길이의 $\frac{9}{10}$ 만큼 움직여 Q_2 에 도달한다. 이와 같이 방향을 바꾸면서 직전 운동거리의 $\frac{9}{10}$ 만큼 움직임을 계속하여 반복한다.

이와 같이 C 지점을 출발한 놀이 기구가 호를 따라 한없이 계속하여 움직일 때, 움직인 거리의 총합은?



[그림1] : 놀이기구의 중심



[그림2] : 놀이기구의 중심

① $87.5\pi\,(m)$ ② $90\pi\,(m)$ ③ $92.5\pi\,(m)$
④ $95\pi\,(m)$ ⑤ $97.5\pi\,(m)$

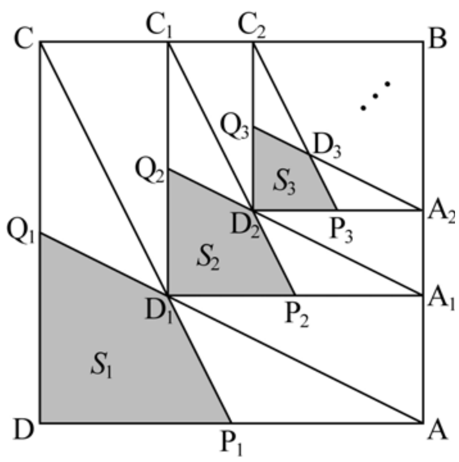
112. 2008 교육청(4점)

한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD가 있다. 그림과 같이 두 선분 AD, DC의 중점을 각각 P_1, Q_1이라 하고, 두 선분 AQ_1, CP_1의 교점을 D_1이라 하자. 이때, 사각형 $DP_1D_1Q_1$의 넓이를 S_1이라 하자.

선분 BD_1을 대각선으로 하는 정사각형을 $BC_1D_1A_1$이라 하자. 두 선분 A_1D_1, D_1C_1의 중점을 각각 P_2, Q_2라 하고, 두 선분 A_1Q_2, C_1P_2의 교점을 D_2라 하자. 이때, 사각형 $D_1P_2D_2Q_2$의 넓이를 S_2라 하자.

선분 BD_2를 대각선으로 하는 정사각형을 $BC_2D_2A_2$라 하자. 두 선분 A_2D_2, D_2C_2의 중점을 각각 P_3, Q_3이라 하고, 두 선분 A_2Q_3, C_2P_3의 교점을 D_3이라 하자. 이때, 사각형 $D_2P_3D_3Q_3$의 넓이를 S_3이라 하자.

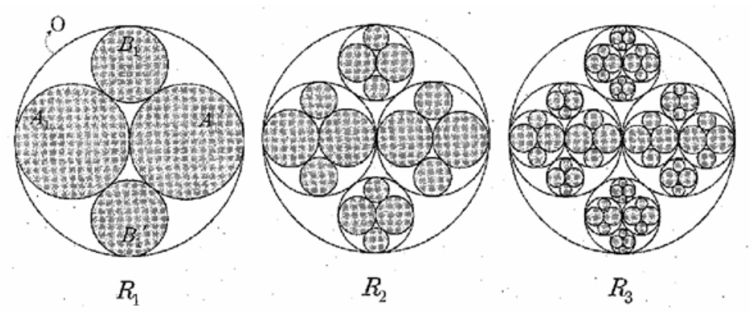
이와 같은 과정을 계속하여 얻은 n번째 사각형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?



① $\frac{24}{5}$ ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{27}{5}$
④ $\frac{20}{3}$ ⑤ $\frac{36}{5}$

113. 2009 교육청(4점)

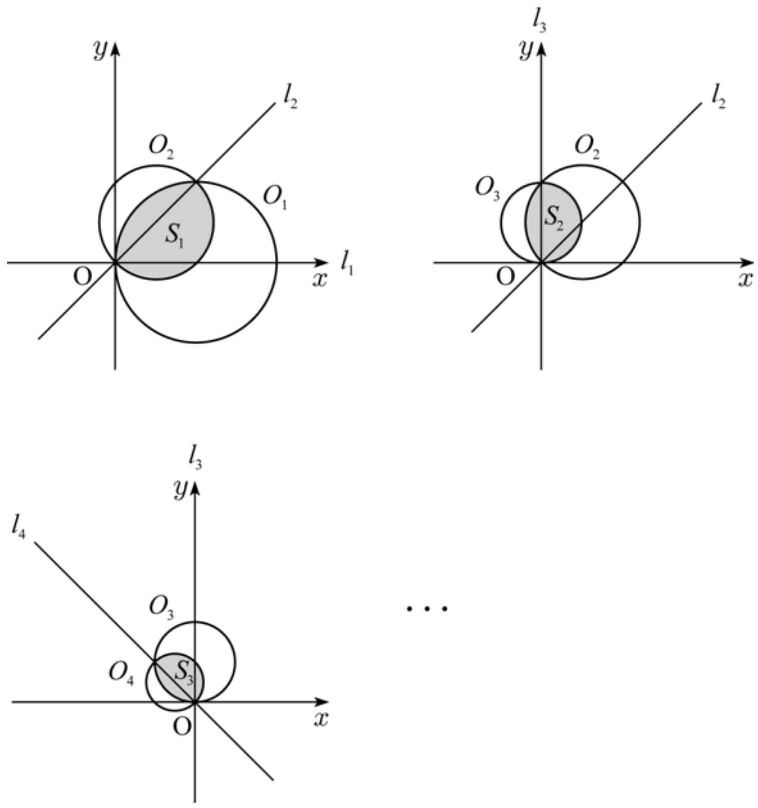
반지름의 길이가 1인 원 O가 있다.
원 O의 중심에서 서로 외접하고 원 O에 내접하는 두 원 A_1, A_1'을 그린 후 두 원 A_1과 A_1'에 외접하며 원 O에 내접하는 두 원 B_1, B_1'을 그려서 얻은 그림을 R_1이라 하자. 새로 그려진 네 원 A_1, A_1', B_1, B_1'의 내부에 그림 R_1의 제작과정을 반복하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻어진 그림을 R_n이라 하자.
또한, 그림 R_1, R_2, $\cdots$, R_n, $\cdots$각각에 아래와 같이 어둡게 색칠을 하자. 그림 R_n의 어두운 부분의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?



① π ② $\frac{9}{5}\pi$ ③ $\frac{13}{5}\pi$
④ $\frac{17}{5}\pi$ ⑤ $\frac{21}{5}\pi$

114. 2010 교육청(4점)

좌표평면에서 점 (3, 0)을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원을 O_1이라 하고, x축을 직선 l_1이라 하자. 직선 l_1을 원점을 중심으로 45° 만큼 회전시킨 직선을 l_2라 하고, 직선 l_2와 원 O_1의 두 교점을 지름의 양 끝점으로 하는 원을 O_2라 할 때, 두 원 O_1, O_2의 공통부분의 넓이를 S_1이라 하자. 직선 l_2를 원점을 중심으로 하여 45° 만큼 회전시킨 직선을 l_3이라 하고, 직선 l_3과 원 O_2의 두 교점을 지름의 양 끝점으로 하는 원을 O_3이라 할 때, 두 원 O_2, O_3의 공통부분의 넓이를 S_2라 하자. 직선 l_3을 원점을 중심으로 하여 45° 만큼 회전시킨 직선을 l_4라 하고, 직선 l_4와 원 O_3의 두 교점을 지름의 양 끝점으로 하는 원을 O_4라 할 때, 두 원 O_3, O_4의 공통부분의 넓이를 S_3이라 하자.



이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?

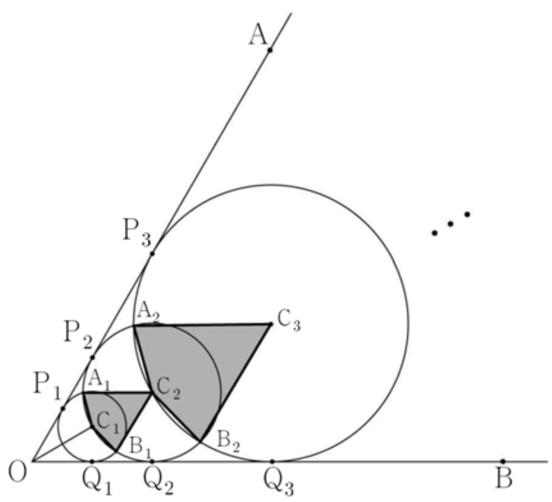
① $6(\pi-1)$ ② $7(\pi-1)$ ③ $8(\pi-1)$
④ $9(\pi-1)$ ⑤ $10(\pi-1)$

115. 2010 교육청(4점)

그림과 같이 크기가 60° 인 ∠AOB의 이등분선 위에 $\overline{OC_1}=2$인 점 C_1을 잡아 점 C_1을 중심으로 하고 반직선 OA와 OB에 접하는 원 C_1을 그릴 때, 원 C_1과 반직선 OA, OB와의 접점을 각각 P_1, Q_1이라 하자. 점 C_1을 지나고 반직선 OA와 OB에 접하는 두 원 중에서 큰 원의 중심을 C_2, 원 C_2와 반직선 OA, OB와의 접점을 각각 P_2, Q_2라 하고, 원 C_1과 원 C_2가 만나는 점을 각각 A_1, B_1이라 할 때, 사각형 $A_1C_1B_1C_2$의 넓이를 S_1이라 하자. 점 C_2를 지나고 반직선 OA와 OB에 접하는 두 원 중에서 큰 원의 중심을 C_3, 원 C_3과 반직선 OA, OB와의 접점을 각각 P_3, Q_3이라 하고, 원 C_2와 원 C_3이 만나는 점을 각각 A_2, B_2라 할 때, 사각형 $A_2C_2B_2C_3$의 넓이를 S_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 도형의 넓이를 S_n이라 할 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{4^n+3^n}$의 값은?

[4점][2010년 4월 교육청]

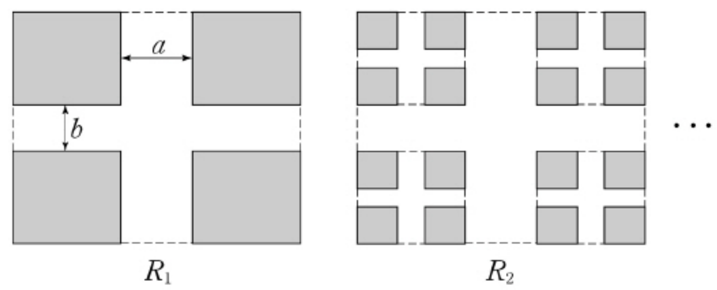


① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{3}{8}$
④ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{15}}{8}$

116. 2010 평가원(4점)

가로의 길이가 5이고 세로의 길이가 4인 직사각형에서 그림과 같이 가로의 폭 a가 직사각형의 가로의 길이의 $\frac{1}{4}$, 세로의 폭 b가 직사각형의 세로의 길이의 $\frac{1}{5}$인 ✙ 모양의 도형을 잘라내어 얻은 4개의 직사각형을 R_1이라 하고, 그 4개의 직사각형의 넓이의 합을 S_1이라 하자. R_1의 각 직사각형에서 가로의 폭이 각 직사각형의 가로의 길이의 $\frac{1}{4}$, 세로의 폭이 각 직사각형의 세로의 길이의 $\frac{1}{5}$인 ✙ 모양의 도형을 잘라내어 얻은 16개의 직사각형을 R_2라 하고, 그 16개의 직사각형의 넓이의 합을 S_2라 하자. 직사각형의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}S_n$의 값은?

[4점][2010년6월 평가원]

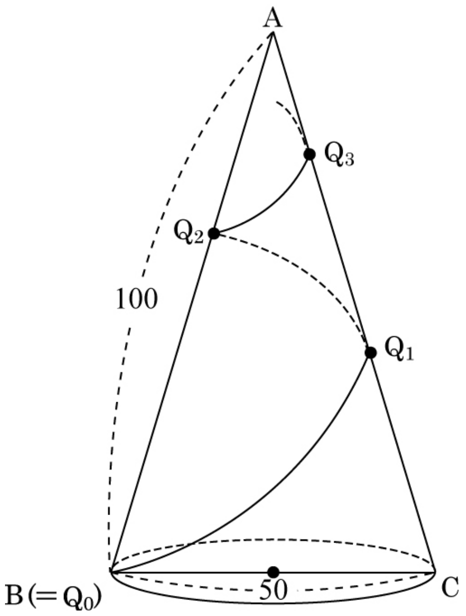


① 26 ② 30 ③ 34
④ 38 ⑤ 42

117. 2010 교육청(4점)

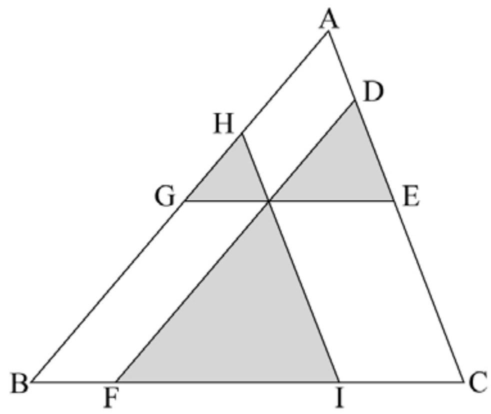
그림과 같이 점 A를 꼭짓점으로 하고 선분 BC를 밑면의 지름으로 하며 $\overline{AB}=100$, $\overline{BC}=50$인 직원뿔이 있다. 모선 AC 위의 점 Q_1은 점 B에서 원뿔의 옆면을 돌아 모선 AC에 최단 거리로 이르는 점이고, 모선 AB 위의 점 Q_2는 점 Q_1에서 원뿔의 옆면을 돌아 모선 AB에 최단 거리로 이르는 점이다. 이와 같은 방법으로 점 Q_n은 모선 AB 또는 AC 위의 점 Q_{n-1}에서 원뿔의 옆면을 돌아 다른 모선에 최단 거리로 이르는 점이라고 하자. 점 Q_{n-1}에서 점 Q_n에 이르는 최단 거리를 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은 $a+b\sqrt{2}$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, $B=Q_0$, a와 b는 유리수이다.)

[4점][2010년 7월 교육청]



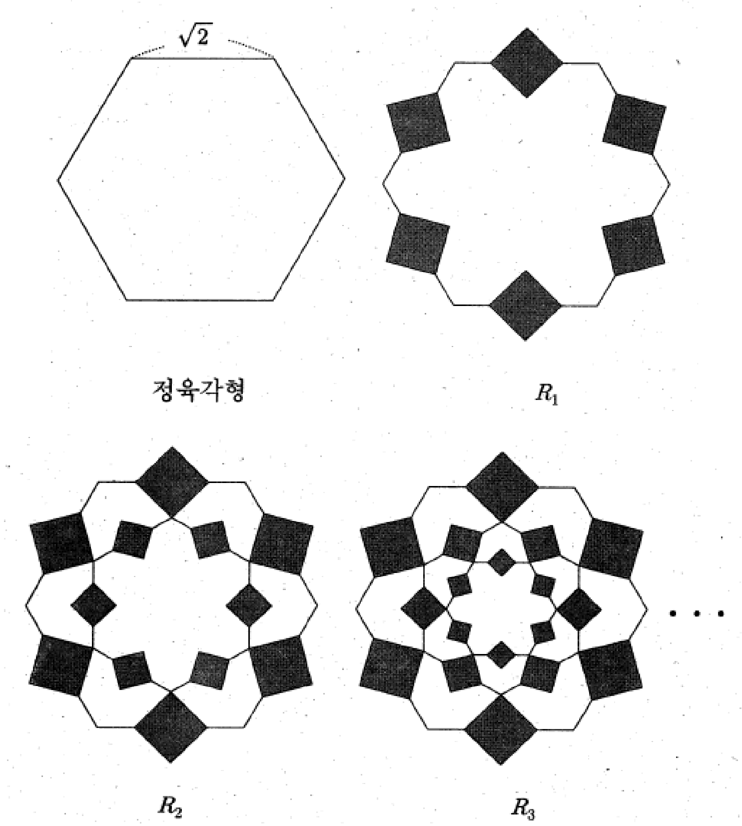
118. 2010 교육청(4점)

그림과 같이 넓이가 M인 삼각형 ABC가 있다. 자연수 n과 선분 AC 위의 두 점 D, E에 대하여 $\overline{AD}:\overline{DE}:\overline{EC}=n:(2n+1):(3n+2)$이고 $\overline{DF}//\overline{AB}$, $\overline{GE}//\overline{BC}$이다. 선분 DF와 선분 GE의 교점을 지나는 선분 HI는 선분 AC와 평행하다. 어두운 부분의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{q}{p}M$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



119. 2010 교육청(4점)

그림과 같이 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인 정육각형이 있다. 이 정육각형의 한 변을 1 : 3과 3 : 1로 내분하는 두 점을 대각선의 양 끝점으로 하는 정사각형을 각 변에 만들어 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1의 정사각형들의 꼭짓점 중에서 정육각형의 내부에 있는 꼭짓점들을 연결하여 정육각형을 만들고, 이 정육각형의 한 변을 1 : 3과 3 : 1로 내분하는 두 점을 대각선의 양 끝점으로 하는 정사각형을 각 변에 만들어 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번 째 얻은 그림 R_n의 모든 정사각형의 둘레의 길이의 합을 l_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} l_n$의 값은?



① $\dfrac{48(5+2\sqrt{3})}{13}$　② $\dfrac{28(2+3\sqrt{3})}{15}$　③ $\dfrac{18(1+2\sqrt{3})}{11}$

④ $\dfrac{6(3+2\sqrt{3})}{11}$　⑤ $\dfrac{4(1+3\sqrt{3})}{13}$

120. 2007 수능 (3점)

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{4^n} = 2$일 때,

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n + 4^{n+1} - 3^{n-1}}{4^{n-1} + 3^{n+1}}$의 값을 구하시오.

121. 2006 수능 (3점)

공비가 같은 두 무한등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$a_1 - b_1 = 1\text{이고 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 8,\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 6\text{일 때,}$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$의 값을 구하시오.

122. 2006 수능 (3점)

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $n < a_n < n+1$을 만족시킬 때, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$의 값은?

① 1　② 2　③ 3

④ 4　⑤ 5

123. 2005 수능 (3점)

무한등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. 무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 도 수렴한다.

ㄴ. 무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 발산하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 도 발산한다.

ㄷ. 무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n + \frac{1}{2}\right)$ 도 수렴한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

124. 2006 수능 (4점)

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 각각

$$a_n = \frac{1}{2^{n-1}} \cos \frac{(n-1)\pi}{2}, \quad b_n = \frac{1+(-1)^{n-1}}{2^n}$$

일 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. 모든 자연수 k에 대하여 $a_{3k} < 0$이다.

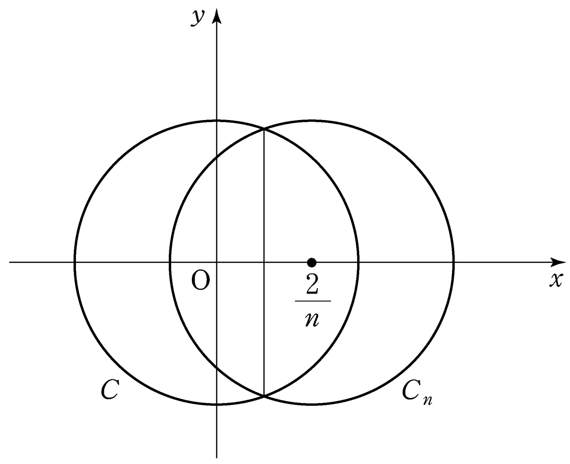
ㄴ. 모든 자연수 k에 대하여 $a_{4k-1} + b_{4k-1} = 0$이다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{3}{5} \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

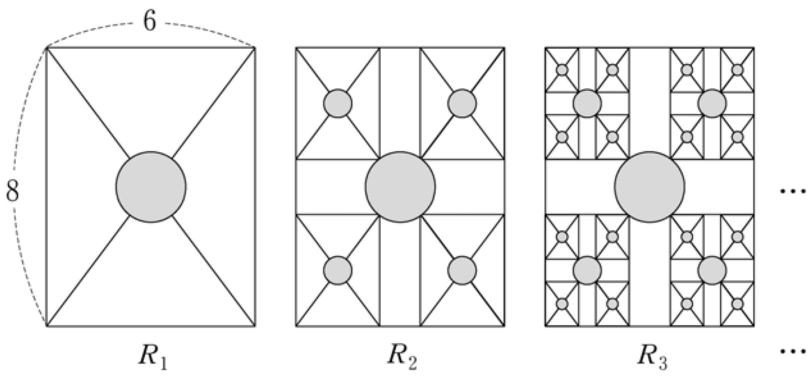
125. 2008 수능 (4점)

$n \geq 2$인 자연수 n에 대하여 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원 C를 x축 방향으로 $\frac{2}{n}$만큼 평행이동시킨 원을 C_n이라 하자. 원 C와 원 C_n의 공통현의 길이를 l_n이라 할 때, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(nl_n)^2} = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)



126. 2007 수능 (4점)

아래와 같이 가로의 길이가 6이고 세로의 길이가 8인 직사각형 내부에 두 대각선의 교점을 중심으로 하고, 직사각형 가로 길이의 $\frac{1}{3}$을 지름으로 하는 원을 그려서 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 직사각형의 각 꼭지점으로부터 대각선과 원의 교점까지의 선분을 각각 대각선으로 하는 4개의 직사각형을 그린 후, 새로 그려진 직사각형 내부에 두 대각선의 교점을 중심으로 하고, 새로 그려진 직사각형 가로 길이의 $\frac{1}{3}$을 지름으로 하는 원을 그려서 얻은 그림을 R_2라 하자. 그림 R_2에 있는 합동인 4개의 직사각형 각각에서 각 꼭지점으로부터 대각선과 원의 교점까지의 선분을 각각 대각선으로 하는 4개의 직사각형을 그린 후, 새로 그려진 직사각형 내부에 두 대각선의 교점을 중심으로 하고, 새로 그려진 직사각형 가로 길이의 $\frac{1}{3}$을 지름으로 하는 원을 그려서 얻은 그림을 R_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 있는 모든 원의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?(단, 모든 직사각형의 가로와 세로는 각각 서로 평행하다.)



① $\frac{37}{9}\pi$ ② $\frac{34}{9}\pi$ ③ $\frac{31}{9}\pi$
④ $\frac{28}{9}\pi$ ⑤ $\frac{25}{9}\pi$

127. 2008 수능 (4점)

좌표평면에 원 $C_1 : (x-4)^2+y^2=1$이 있다. 그림과 같이 원점에서 원 C_1에 기울기가 양수인 접선 l을 그었을 때 생기는 접점을 P_1이라 하자.

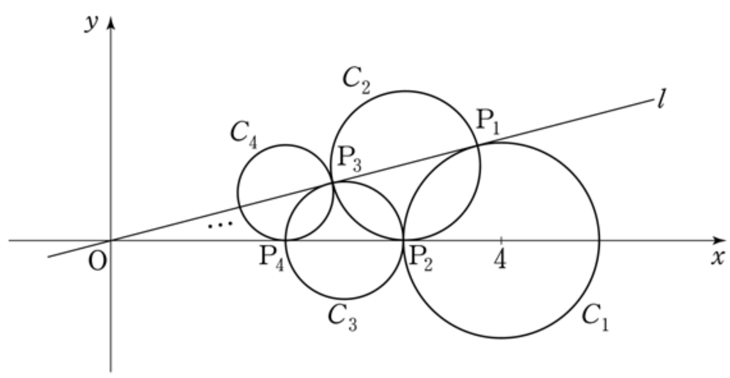
중심이 직선 l 위에 있고 점 P_1을 지나며 x축에 접하는 원을 C_2라 하고 이 원과 x축의 접점을 P_2라 하자.

중심이 x축 위에 있고 점 P_2를 지나며 직선 l에 접하는 원을 C_3이라 하고 이 원과 직선 l의 접점을 P_3이라 하자.

중심이 직선 l 위에 있고 점 P_3을 지나며 x축에 접하는 원을 C_4라 하고 이 원과 x축의 접점을 P_4라 하자.

이와 같은 과정을 계속할 때, 원 C_n의 넓이를 S_n이라 하자.

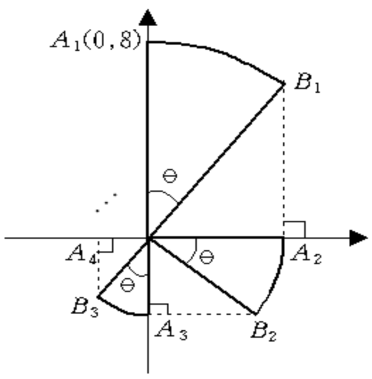
$\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? (단, 원 C_{n+1}의 반지름의 길이는 원 C_n의 반지름의 길이보다 작다.)



① $\frac{3}{2}\pi$ ② 2π ③ $\frac{5}{2}\pi$
④ 3π ⑤ $\frac{7}{2}\pi$

128. 2006 수능 (4점)

오른쪽 그림과 같이 원점 O와 점 $A_1(0,\ 8)$을 이은 선분OA_1을 반지름으로 하고, 중심각의 크기가 θ인 부채꼴OA_1B_1을 그린다. 점 B_1에서 x축에 내린 수선의 발을 A_2라 하고, 반지름이 선분 OA_2이고 중심각의 크기가 θ인 부채꼴 OA_2B_2를 그린다. 점 B_2에서 y축에 내린 수선의 발을 A_3이라 하고, 반지름이 선분 OA_3이고 중심각의 크기가 θ인 부채꼴 OA_3B_3을 그린다. 이와 같이 시계 방향으로 x축과 y축에 번갈아 수선의 발을 내리는 과정을 계속하여 얻은 부채꼴 OA_nB_n의 호 A_nB_n의 길이를 l_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} l_n = 12\theta$일 때, $\sin\theta$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이다.)

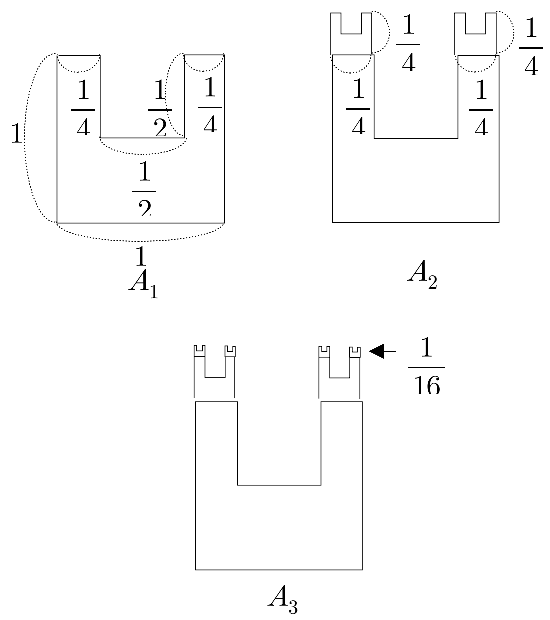


① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{5}$

④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

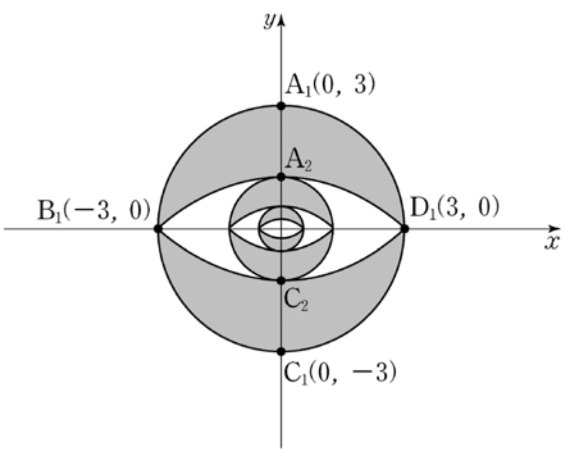
129. 2005 수능 (4점)

아래 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형에서 한 변의 길이가 $\frac{1}{2}$인 정사각형을 잘라낸 후 남은 凹 모양의 도형을 A_1이라 하자. 한 변의 길이가 $\frac{1}{4}$인 정사각형에서 한 변의 길이가 $\frac{1}{8}$인 정사각형을 잘라낸 후 남은 凹 모양의 도형 2개를 A_1의 위쪽 두 변에 각각 붙인 도형을 A_2라 하자. 한 변의 길이가 $\frac{1}{16}$인 정사각형에서 한 변의 길이가 $\frac{1}{32}$인 정사각형을 잘라낸 후 남은 凹 모양의 도형 4개를 A_2의 위쪽 네 변에 각각 붙인 도형을 A_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 얻은 n번째 도형을 A_n이라 하고 그 넓이를 S_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



130. 2010 수능 (4점)

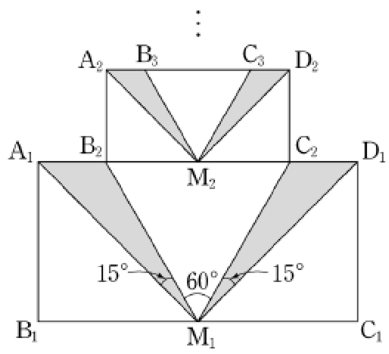
그림과 같이 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원 O_1을 그리고, 원 O_1이 좌표축과 만나는 네 점을 각각 $A_1(0,\ 3)$, $B_1(-3,\ 0)$, $C_1(0,\ -3)$, $D_1(3,\ 0)$이라 하자. 두 점 B_1, D_1을 모두 지나고 두 점 A_1, C_1을 각각 중심으로 하는 두 원이 원 O_1의 내부에서 y축과 만나는 점을 각각 C_2, A_2라 하자. 호 $B_1A_1D_1$과 호 $B_1A_2D_1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1, 호 $B_1C_1D_1$과 호 $B_1C_2D_1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 T_1이라 하자. 선분 A_2C_2를 지름으로 하는 원 O_2를 그리고, 원 O_2가 x축과 만나는 두 점을 각각 B_2, D_2라 하자. 두 점 B_2, D_2를 모두 지나고 두 점 A_2, C_2를 각각 중심으로 하는 두 원이 원 O_2의 내부에서 y축과 만나는 점을 각각 C_3, A_3이라하자. 호 $B_2A_2D_2$와 호 $B_2A_3D_2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2, 호 $B_2C_2D_2$와 호 $B_2C_3D_2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 T_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 호 $B_nA_nD_n$과 호 $B_nA_{n+1}D_n$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n, 호 $B_nC_nD_n$과 호 $B_nC_{n+1}D_n$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 T_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(S_n+T_n)$의 값은?



① $6(\sqrt{2}+1)$ ② $6(\sqrt{3}+1)$ ③ $6(\sqrt{5}+1)$
④ $9(\sqrt{2}+1)$ ⑤ $9(\sqrt{3}+1)$

131. 2011 수능 (4점)

$\overline{A_1B_1}=1$, $\overline{B_1C_1}=2$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 그림과 같이 선분 B_1C_1의 중점을ㄹ M_1이라 하고, 선분 A_1D_1위에 $\angle A_1M_1B_2=\angle C_2M_1D_1=15^\circ$, $\angle B_2M_1C_2=60^\circ$가 되도록 두 점 B_2, C_2를 정한다. 삼각형 $A_1M_1B_2$의 넓이와 삼각형 $C_2M_1D_1$의 넓이의 합을 S_1이라 하자. 사각형 $A_2B_2C_2D_2$가 $\overline{B_2C_2}=2\overline{A_2B_2}$인 직사각형이 되도록 그림과 같이 두 점 A_2, D_2를 정한다. 선분 B_2C_2의 중점을 M_2라 하고, 선분 A_2D_2 위에 $\angle A_2M_2B_3=\angle C_3M_2D_2=15^\circ$, $\angle B_3M_2C_3=60^\circ$가 되도록 두 점 B_3, C_3을 정한다. 삼각형 $A_2M_2B_3$의 넓이와 삼각형 $C_3M_2D_2$의 넓이의 합을ㄹ S_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 얻은 S_n에 대하여 $\sum_{n=1}^{n}S_n$의 값은?131.



① $\frac{2+\sqrt{3}}{6}$ ② $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{4+\sqrt{3}}{9}$
④ $\frac{5-\sqrt{3}}{5}$ ⑤ $\frac{7-\sqrt{3}}{8}$

1. 정답 ①

[출제의도] 유리수인 지수의 계산을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$9^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{9}}=\frac{1}{3}$$

2.정답 ②

$$3^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{4}{3}}\div 3^{-\frac{4}{3}}=3^{\frac{1}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4}{3}}=27$$

3. 정답 ②

[출제의도] 지수법칙을 이용하여 식을 간단히 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\sqrt{3}\times 27^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{2}}\times 3^{\frac{3}{2}}=9$$

4. 정답 ③

$$6^{\frac{4}{3}}\times 2^{\frac{5}{3}}\times 3^{-\frac{1}{3}}=3^{\frac{4}{3}}\times 2^{\frac{4}{3}}\times 2^{\frac{5}{3}}\times 3^{-\frac{1}{3}}$$
$$=3^{\frac{4}{3}}\times 3^{-\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{4}{3}}\times 2^{\frac{5}{3}}=3^{1}\times 2^{3}=24$$

5. 정답 ⑤

$$(\text{준식})=\frac{(2\times 3^{3})^{2}\times(3\times 7)^{3}}{2^{2}\times 7}=\frac{2^{2}\times 3^{9}\times 7^{3}}{2^{2}\times 7}=3^{9}\times 7^{2}$$

6. 정답 ③

[출제의도] 지수의 성질을 이용하여 계산하기

$$\left(\frac{3^{\sqrt{5}}}{9}\right)^{\sqrt{5}+2}=\left(3^{\sqrt{5}-2}\right)^{\sqrt{5}+2}=3$$

7. 정답 ②

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\times\sqrt{32}\times\sqrt[3]{27}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times 4\sqrt{2}\times 3=12$$

8. 정답 ④

$$\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\times\sqrt[6]{8}=\left(2\cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\times(2^{3})^{\frac{1}{6}}=\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{3}{6}}$$
$$=2^{\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{1}{2}}=2$$

9. [출제의도] 지수의 성질을 이용하여 식의 값을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\sqrt[3]{8}\div 2^{-2}=(2^{3})^{\frac{1}{3}}\div 2^{-2}=2^{1-(-2)}=2^{3}=8$$

10. 정답 ⑤

[출제의도] 지수의 법칙을 이해하고 이를 이용하여 식을 간단히 나타내기 밑이 음수이므로

$$\{(-2)^{2}\}^{\frac{1}{2}}=4^{\frac{1}{2}}=2$$
$$(\sqrt{2})^{2}=2,\quad 2\times 2=4$$

11.정답 ⑤

[출제의도] 유리수 지수를 계산할 수 있다.

$$a^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$$
$$\therefore\ \square=\frac{2}{3}$$

12. 정답 ③

$$(3\cdot 9^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{5}}$$
$$=(3\cdot 3^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{5}}$$
$$=(3^{\frac{5}{3}})^{\frac{3}{5}}$$
$$=3$$

13. 정답 ④

$(\text{주어진 식})=2^{-1}\times 2^{5}=2^{4}=16$

14. 정답 ③

[출제의도] 지수법칙을 이용하여 계산하기

$$8^{\frac{4}{3}}\times 4^{\frac{2}{3}}\div 2^{\frac{1}{3}}=2^{4}\times 2^{\frac{4}{3}}\div 2^{\frac{1}{3}}$$
$$=2^{4+\frac{4}{3}-\frac{1}{3}}=2^{5}$$

15. 정답 ④

[출제의도] 지수를 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$2^{\frac{2}{3}}\times 5^{-\frac{1}{3}}\times 10^{\frac{4}{3}}=2^{\frac{2}{3}}\times 5^{-\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{4}{3}}\times 5^{\frac{4}{3}}$$
$$=2^{\frac{2}{3}+\frac{4}{3}}\times 5^{-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}}$$
$$=2^{2}\times 5=20$$

16. 정답 ④

[출제의도] 지수법칙을 이용하여 계산하기

[해설] $2^{\frac{5}{2}}\cdot 2^{-\frac{1}{2}}\cdot 2^{-\frac{1}{2}}=2^{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}=2^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}$

17. 정답 ③

$8^{-\frac{1}{2}} \times \sqrt{2^5} = (2^3)^{-\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{5}{2}} = 2^{-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}} = 2$

18. 정답 36

[출제의도] 지수법칙을 활용하여 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\sqrt[3]{(8\times27)^2} = \sqrt[3]{6^6} = \sqrt[3]{36^3} = 36$

19. 정답 ③

[출제의도] 지수법칙을 이용하여 값 구하기

$2^{\frac{5}{3}} \times 2^{\frac{1}{2}} \div 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$

20. 정답 ①

[출제의도] 지수법칙을 이용하여 계산하기

(준식) $=3^{\frac{1}{2}} \div 3^{\frac{3}{2}} \times 3^2 = 3$

21. 정답 ⑤

$(\sqrt{2\sqrt{6}})^4 = (2\sqrt{6})^2 = 2^2 \times 6 = 24$

22. 정답 ③

[출제의도] 지수를 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$2^{-\frac{1}{3}} \times 4^{\frac{2}{3}} = 2^{-\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{4}{3}} = 2^{-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}} = 2$

23. 정답 ④

[출제의도] 지수를 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$2^{\frac{2}{3}} \times 5^{-\frac{1}{3}} \times 10^{\frac{4}{3}} = 2^{\frac{2}{3}} \times 5^{-\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{4}{3}} \times 5^{\frac{4}{3}}$

$= 2^{\frac{2}{3}+\frac{4}{3}} \times 5^{-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}} = 2^2 \times 5 = 20$

24. 정답 ②

[출제의도]거듭제곱근의 성질을 이해하여 계산하기

$3^{\frac{2}{5}} = (3^2)^{\frac{k}{2}} = 3^k$이므로 $k = \frac{2}{5}$이다.

25. 정답 ②

[출제의도]거듭제곱근의 성질을 이해하여 계산하기

$3^{\frac{2}{5}} = (3^2)^{\frac{k}{2}} = 3^k$이므로 $k = \frac{2}{5}$이다.

26. 정답 ③

[해설]

$4^x = 2^{2x}$에서 $2^{2x} = 2^y, y = 2x$이므로 $\frac{y}{x} + \frac{2}{y} = 3$

27. 정답⑤

[출제의도] 지수법칙을 활용하여 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$2^{2a-b} = 2^{2a} \cdot 2^{-b} = (2^a)^2 (2^b)^{-1}$

$= 3^2 \times \frac{1}{45} = \frac{1}{5}$

28. 정답 ③

[출제의도] 지수의 유리수까지의 확장을 이해하기

$\frac{a+b}{4} = \frac{b+c}{7} = \frac{c+a}{9} = k(\neq 0)$라 하면

$a+b=4k,\ b+c=7k,\ c+a=9k$이다.

$\therefore\ a=3k,\ b=k,\ c=6k$

따라서 (준식)$=2^{\frac{a+b}{c}} = 2^{\frac{4k}{6k}} = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4}$이다.

29. 정답 ④

[출제의도] 지수법칙을 이용하여 계산하기

[해설] $9^x = 2$이므로 $3^{2x} = 2$이다.

(준식)$=(3^{-3})^{-4x} = 3^{12x} = (3^{2x})^6 = 2^6 = 64$

30. 정답 ③

$7^{\frac{y}{2}} = (2^x)^{\frac{y}{2}} = 2^{\frac{xy}{2}} = 16 = 2^4$ 에서 $\frac{xy}{2} = 4$ 이므로

$\therefore\ xy = 8$

31. 정답 18

$2^{17} + 4^8 + 16^4 = 2^{17} + 2^{16} + 2^{16} = 2^{17} + 2 \cdot 2^{16}$

$= 2^{17} + 2^{17} = 2 \cdot 2^{17} = 2^{18}$ $\quad\therefore\ \square = 18$

32.정답 15

$(a^{\sqrt{3}})^{2\sqrt{3}} \div a^3 \times (\sqrt[3]{a})^{36} = a^k$

$a^6 \div a^3 \times a^{12} = a^k$

$a^{15} = a^k$

그러므로 $k = 15$

33. 정답 ④

임의의 자연수 n에 대하여

$\frac{1}{2^{-n}+1} + \frac{1}{2^n+1} = \frac{2^n}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+1} = 1$

$\therefore$ (주어진 식)$= 1 \times 100 + \frac{1}{2^0+1} = \frac{201}{2}$

34. 정답 11

[출제의도] 지수의 성질을 이용하여 계산하기

$\sqrt[4]{a^3\sqrt{a\sqrt{a}}}=a^{\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}}=a^{\frac{3}{8}}$

$\therefore m+n=11$

35. 정답 17

[출제의도] 거듭제곱근 계산하기

$a>0$, $a\neq 1$인 a에 대하여,

$$\left\{\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{\sqrt[3]{a^4}}}\times\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^{-4}}\right\}^6$$

$$=\left(a^{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}+2}\right)^6=\left(a^{\frac{17}{6}}\right)^6=a^{17} \qquad \therefore k=17$$

36. 정답①

[출제의도] 거듭제곱근의 뜻을 알고 있는가를 묻는 문제이다.

$x=\sqrt[4]{2}=2^{\frac{1}{4}}$이므로

$x^n=2^{\frac{n}{4}}$이 세 자리의 자연수이려면

$2^{\frac{n}{4}}=2^7$, $2^{\frac{n}{4}}=2^8$, $2^{\frac{n}{4}}=2^9$이어야 한다.

따라서 구하는 자연수 n의 값은 4×7, 4×8, 4×9이므로 구하는 모든 자연수 n의 값의 합은

$4(7+8+9)=96$이다

37. 정답 ①

$a=\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$, $b=\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}$ 이므로

$\sqrt[6]{6}=6^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{6}}\cdot3^{\frac{1}{6}}=(2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}\cdot(3^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}$

38. 정답 ①

[출제의도] 거듭제곱근의 뜻을 알고, 그 성질 이해하기

$\sqrt[8]{6}=\sqrt[8]{2}\ \sqrt[8]{3}=\sqrt{\sqrt{2}}\ \sqrt{\sqrt{3}}=\sqrt[4]{a}\ \sqrt{b}$

39. 정답 16

$2^a=3^2$, $3^b=5^3$ 에서 $2^{\frac{a}{2}}=3$, $3^{\frac{b}{3}}=5$ 이므로

$5^c=\left(3^{\frac{b}{3}}\right)^c=3^{\frac{bc}{3}}=\left(2^{\frac{a}{2}}\right)^{\frac{bc}{3}}=2^{\frac{abc}{6}}=2^{\frac{24}{6}}=2^4=16$

40. 정답 30

$a=3^{\frac{1}{6}}, b=7^{\frac{1}{5}}, c=11^{\frac{1}{2}}$

$(abc)^n=\left(3^{\frac{1}{6}}\times7^{\frac{1}{5}}\times11^{\frac{1}{2}}\right)^n$

$3^{\frac{n}{6}}\times7^{\frac{n}{5}}\times11^{\frac{n}{2}}$이 자연수이려면, $\frac{n}{6}$, $\frac{n}{5}$, $\frac{n}{2}$이 모두 자연수이어야 한다.

따라서, 최소의 자연수 n은 6, 5, 2의 최소공배수이므로 $n=30$이다.

41. 정답 27

$$\sqrt{\frac{3^{14}+3^{10}}{3^8+3^4}}=\sqrt{\frac{3^{10}(3^4+1)}{3^4(3^4+1)}}=3^3=27$$

42.정답 ④

$\left(\frac{1}{256}\right)^{\frac{1}{n}}=(2^{-8})^{\frac{1}{n}}=2^{-\frac{8}{n}}$에서 $2^{-\frac{8}{n}}$이 자연수이려면

$n=-1$, -2, -4, -8이어야 하고, 이 때 $2^{-\frac{8}{n}}$의 값은 각각 256, 16, 4, 2이다.

따라서 구하는 자연수의 개수는 4이다.

43. 정답 15

[출제의도] 지수의 성질을 이해하고 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$36=2^2\cdot3^2=a^mb^n=2^{\frac{2m}{3}}\cdot3^{\frac{n}{6}}$에서

$\frac{2m}{3}=2$, $\frac{n}{6}=2$ ($\because$ m, n은 자연수)

$\therefore$ $m+n=3+12=15$

44. 정답 ⑤

$x+x^{-1}=3$, $\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)^2=x+x^{-1}+2=5$이므로

$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$

$x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)^3-3\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)$

$=5\sqrt{5}-3\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

45. 정답 ①

[출제의도] 지수법칙을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$3^a=12^b=6$이므로 $3=6^{\frac{1}{a}}$, $12=6^{\frac{1}{b}}$이다.

이때, $6^{\frac{1}{a}}\times6^{\frac{1}{b}}=6^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=3\times12=36$이므로

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2$이다.

46. 정답 ③

[출제의도] 지수 방정식 계산하기

$a^{6xyz}=7^{6yz}$, $b^{6xyz}=7^{3xz}$, $c^{6xyz}=7^{2xy}$

$(abc)^{6xyz}=7^{12xyz}=7^{6yz+3xz+2xy}$

$\frac{6}{x}+\frac{3}{y}+\frac{2}{z}=12$

47. 정답 ②

$\dfrac{2^a+2^{-a}}{2^a-2^{-a}}=-2$ 에서 분모, 분자에 2^a를 곱하면

$\dfrac{2^{2a}+1}{2^{2a}-1}=-2$ 정리하면 $2^{2a}=\dfrac{1}{3}$

$4^a=\dfrac{1}{3}\quad 4^{-a}=3$

$\therefore\ 4^a+4^{-a}=\dfrac{10}{3}$

48.정답 ③

[출제의도] 지수가 유리수인 식 계산하기

$x^2-4=\left(2^{\frac{1}{4}}-2^{-\frac{1}{4}}\right)^2$이므로

$\sqrt{x^2-4}+x=\left(2^{\frac{1}{4}}-2^{-\frac{1}{4}}\right)+\left(2^{\frac{1}{4}}+2^{-\frac{1}{4}}\right)=2^{\frac{5}{4}}$

49. 정답 ⑤

[출제의도] 지수법칙을 이용하여 식의 값 구하기

$x^2+4=2^{\frac{1}{4}}+2+2^{-\frac{1}{4}}=\left(2^{\frac{1}{8}}+2^{-\frac{1}{8}}\right)^2$

$\therefore\ \sqrt{x^2+4}=2^{\frac{1}{8}}+2^{-\frac{1}{8}}=\sqrt[8]{2}+\dfrac{1}{\sqrt[8]{2}}$

50. 정답 ③

[출제의도] 지수법칙을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

두 점 $(2,0)$, $(0,4)$를 지나는 직선의 방정식은

$y=-2x+4$ 이므로 $b=-2a+4\quad \therefore\ 2a+b=4$

$\therefore\ (4^a+2^b)^2=(4^a-2^b)^2+4\cdot 4^a2^b$

$=6^2+4\cdot 2^{2a+b}=6^2+4\cdot 2^4=100$

그런데 $4^a+2^b>0$ 이므로 $4^a+2^b=\sqrt{100}=10$

51. 정답 17

$f(2a)f(b)=4,\ f(a-b)=2$에서

$2^{-2a}\cdot 2^{-b}=2^2,\ 2^{-(a-b)}=2^1$이므로

$\therefore\ 2a+b=-2\qquad a-b=-1$

$\therefore\ 3a=-3\quad \therefore\ a=-1\quad b=0$

$\therefore\ 2^{3a}+2^{3b}=\dfrac{1}{8}+1=\dfrac{9}{8}\qquad\qquad \therefore p+q=17$

52. 정답 ⑤

[출제의도] 지수법칙을 이용하여 식의 값 구하기

(준식)$=2^{3x}+2^{-3y}$

$=(2^x+2^{-y})^3-3\cdot 2^x2^{-y}(2^x+2^{-y})$

$=5^3-3\cdot 4\cdot 5=65$

53. 정답 ②

ㄱ. $a◎1=a^2,\ 1◎a=1$이므로

$a◎1\neq 1◎a$ (거짓)

ㄴ. $\dfrac{1}{a}◎b=a^{-2b},\ \dfrac{1}{a◎b}=a^{-2b}$이므로

$\dfrac{1}{a}◎b=\dfrac{1}{a◎b}$ (참)

ㄷ. $a◎\left(\dfrac{1}{2}b\right)=a^b,\ \dfrac{1}{2}(a◎b)=\dfrac{1}{2}a^{2b}$이므로

$a◎\left(\dfrac{1}{2}b\right)\neq\dfrac{1}{2}(a◎b)$ (거짓)

54. 정답 ③

$2*\sqrt{2}=\sqrt{2}^{\,2}=2$ ($\because\ 2>\sqrt{2}$) 이므로

준 식 $=2*2\sqrt{2}=2^{2\sqrt{2}}$ ($\because\ 2<2\sqrt{2}$)

55. 정답 ②

(주어진 식)$=2\bullet 2^{2x}+2\bullet 2^{2x}=2^{2x+2}$

56. 정답 ⑤

$(a*b)=a^b\times b^{-\frac{a}{2}}$에서

$(2*4)*x=2^4\times 4^{-\frac{2}{2}}=4*x=4^x\times x^{-\frac{4}{2}}=8x^{-2}$

$\therefore 4^x=8$이므로 $2^{2x}=2^3$이므로 $x=\dfrac{3}{2}$이다.

57. 정답 ②

[출제의도]지수법칙을 이용해 식을 간단히 하기

$3^{\frac{1}{n(n+1)}}=3^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}$ 이므로

$P_1\times P_2\times P_3\times\cdots\times P_{2010}$

$=3^{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2010}-\frac{1}{2011}\right)}$

$=3^{1-\frac{1}{2011}}=3^{\frac{2010}{2011}}$ 이다.

따라서, $k=\dfrac{2010}{2011}$ 이다.

58. 정답 ④

$\sqrt[3]{n^m}=n^{\frac{m}{3}}$ 에서 $n^{\frac{m}{3}}$ 이 자연수가 되는 경우는

$n=1$ 인 경우에 $m=1,2,3$

$2\leqq n\leqq 7$인 경우에 $m=3$

$n=8$인 경우에 $m=1,2,3$

따라서 순서쌍 (m,n)의 개수는

$3+6+3=12$

59. 정답 ④

$r=10^{2.7}$, $m=1.3$이므로

$$\left(\frac{10^{2.7}}{10}\right)^2=100^{\frac{1}{5}(1.3-M)},\quad 10^{3.4}=10^{\frac{2}{5}(1.3-M)}$$

$3.4=\frac{2}{5}(1.3-M)$ $\therefore\ 2M=-14.4$

그러므로 $M=-7.2$

60. 정답 ⑤

$S=NQ^{\frac{1}{2}}H^{-\frac{3}{4}}$에서

$Q=24,\ H=5$일 때,

$S_1=N\times 24^{\frac{1}{2}}\times 5^{-\frac{3}{4}}$

$Q=12,\ H=10$일 때,

$S_2=N\times 12^{\frac{1}{2}}\times 10^{-\frac{3}{4}}$

$$\therefore\ \frac{S_1}{S_2}=\frac{N\times 24^{\frac{1}{2}}\times 5^{-\frac{3}{4}}}{N\times 12^{\frac{1}{2}}\times 10^{-\frac{3}{4}}}$$

$$=\frac{N\times 2^{\frac{1}{2}}\times 12^{\frac{1}{2}}\times 10^{-\frac{3}{4}}}{N\times 12^{\frac{1}{2}}\times 2^{-\frac{3}{4}}\times 5^{-\frac{3}{4}}}$$

$$=\frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{-\frac{3}{4}}}=2^{\frac{1}{2}-\left(-\frac{3}{4}\right)}=2^{\frac{5}{4}}$$

61. 정답 ②

[출제의도] 지수법칙을 이용하여 실생활문제 해결하기

클릭 전 지도의 크기를 A라 하면 $A^3\,A=2A$ 이므로 $a=2^{\frac{1}{3}}$

이며, $b^3A=\frac{1}{2}A$ 이므로 $b=2^{-\frac{1}{3}}$ 이다.

확대버튼 4 번, 축소버튼 2 번을 클릭하면

$A^4b^2A=\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^4\left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^2=2^{\frac{2}{3}}A$ 이므로 $2^{\frac{2}{3}}$

62.정답 ③

[출제의도] 지수방정식을 이용하여 실생활에서의 문제 해결하기

$5120\times 4^n=10\times 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$

$2^{2n+9}=2^{\frac{n(n+1)}{2}}$

$2n+9=\frac{n(n+1)}{2}$에서

$n^2-3n-18=0,\ (n-6)(n+3)=0$

따라서 $n=6$(시간) ($\because\ n>0$)

$\therefore$ 오후 6시

63. 정답 ④

| 2 | √ | √ | X | 4 | = |

위와 같은 순서로 키를 누르면, 계산기는 $\sqrt{\sqrt{2}}\times 4$ 를 계산하게 된다. 즉,

$\sqrt{\sqrt{2}}\times 4=(2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\times 2^2=2^{\frac{1}{4}}\times 2^2=2^{\frac{1}{4}+2}=2^{\frac{9}{4}}$ 을 계산한 값이 화면에 나타나게 된다.

64.정답 207

[출제의도] 지수법칙을 이용하여 실생활문제 해결하기

[해설] $k=\dfrac{4^{\frac{1}{10}}-1}{2^{\frac{1}{10}}-1}=2^{\frac{1}{10}}+1$

그런데 $2^{\frac{11}{10}}=2\cdot 2^{\frac{1}{10}}=2.14$이므로 $2^{\frac{1}{10}}=1.07$이다.

$k=2^{\frac{1}{10}}+1=2.07$ $\therefore 100k=207$

65. 정답 ③

$R(a,\ b)=\sqrt[a]{b}$

ㄱ. $R(16,\ 4)=\sqrt[16]{4}=\sqrt[8]{2}=R(8,\ 2)$ $\therefore$ 참

ㄴ. $R(a,\ 5)\cdot R(b,\ 5)$

$=\sqrt[a]{5}\,\sqrt[b]{5}$

$=\sqrt[\frac{ab}{a+b}]{5}=R\left(\frac{ab}{a+b},\ 5\right)\neq R(a+b,\ 5)$

$\left(\because\ (5^{\frac{1}{a}})(5^{\frac{1}{b}})=5^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=5^{\frac{a+b}{ab}}\right)$ $\therefore$ 거짓

ㄷ. $R(a,\ b)=\sqrt[a]{b}=k$에서 $b=k^a$

$a=\log_k b$ $\therefore$ 참

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

66. 정답 25

$f(2\cdot 3)\times f(3\cdot 4)\times\cdots\times f(9\cdot 10)=a^{\frac{1}{2\cdot 3}}\cdot a^{\frac{1}{3\cdot 4}}\cdots a^{\frac{1}{9\cdot 10}}$

$=a^{\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{9\cdot 10}}=a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}}$

$=a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{10}}=a^{\frac{4}{10}}=a^{\frac{2}{5}}=f\left(\frac{5}{2}\right)$

$\therefore\ 10k=10\cdot\frac{5}{2}=25$

67.정답 ④

[출제의도] 지수법칙을 이용하여 식의 값 구하기

[해설] $3^x+3^{-x}=3$이므로

$3^{2x}+3^{-2x}=(3^x+3^{-x})^2-2=7$이고

$3^{4x}+3^{-4x}=(3^{2x}+3^{-2x})^2-2=47$이다.

$\therefore$ (준식) $= \dfrac{47+1}{7+1} = 6$

68.정답 ③

[출제의도] 지수법칙을 이용하여 수의 대소 비교하기

[해설] $8^A = 27$, $9^B = 25$, $7^C = 27$

ⅰ) $8^A > 9^B > 8^B$ $\therefore A > B$

ⅱ) $7^C > 9^B > 7^B$ $\therefore C > B$

ⅲ) $7^C = 8^A > 7^A$ $\therefore C > A$

ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의하여 $B < A < C$이다.

69. 정답 ④

[출제의도] 지수법칙을 이해하기

$x^a = xy$ 에서 $a = 1 + \log_x y$, $y^b = xy$ 에서

$b = 1 + \log_y x = 1 + \dfrac{1}{\log_x y}$

$a + b = 2 + \log_x y + \dfrac{1}{\log_x y}$

$ab = 1 + \log_x y + \dfrac{1}{\log_x y} + 1$

(별해)

$x = (xy)^{\frac{1}{a}}, y = (xy)^{\frac{1}{b}},$

$xy = (xy)^{\frac{1}{a}}(xy)^{\frac{1}{b}} = (xy)^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$

$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 1$이므로 $\dfrac{2(a+b)}{ab} = 2$

$2\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right) = \dfrac{2(a+b)}{ab}$이므로

70.정답 ③

[출제의도] 지수를 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있다.

피자 8조각을 굽는데 걸리는 시간이 2조각을 굽는데 걸리는 시간의 a배라 하면

$1.2 \times 8^{\frac{1}{2}} = a \times 1.2 \times 2^{\frac{1}{2}}$

$a \times 2^{\frac{1}{2}} = 8^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}}$

$\therefore$ $a = 2$

71. 정답 ③

2006년도의 인구수를 P라 하면

$P = 5 \cdot 2^{\frac{2006-2001}{15}} = 5 \cdot 2^{\frac{5}{15}} = 5 \cdot 2^{\frac{1}{3}}$이므로

$2P = 5 \cdot 2^{\frac{4}{3}} = 5 \cdot 2^{\frac{t-2001}{15}}$에서 $\dfrac{4}{3} = \dfrac{t-2001}{15}$

$\therefore t = 2021$

72. 정답 ③

[출제의도] 지수를 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$v_{\mathrm{A}} = c\left(\dfrac{\pi a^2}{2\pi a}\right)^{\frac{2}{3}}(0.01)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{c}{10}\left(\dfrac{a}{2}\right)^{\frac{2}{3}},$

$v_{\mathrm{B}} = c\left(\dfrac{\pi b^2}{2\pi b}\right)^{\frac{2}{3}}(0.04)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{2c}{10}\left(\dfrac{b}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$이므로

$$\frac{v_{\mathrm{A}}}{v_{\mathrm{B}}} = \frac{\frac{c}{10}\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2c}{10}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 2$$

이때, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 4$이므로 $\dfrac{a}{b} = 8$

73. 정답 ④

$9^{\frac{3}{2}} \times 27^{-\frac{2}{3}} = (3^2)^{\frac{3}{2}} \times (3^3)^{-\frac{2}{3}} = 3^3 \times 3^{-2} = 3^{3-2} = 3$

74. 정답 ①

$\sqrt[3]{2} \times \sqrt[6]{16} = 2^{\frac{1}{3}} \times (2^4)^{\frac{1}{6}}$

$= 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = 2$

75. 정답 ②

$5^{\frac{2}{3}} \times (5^2)^{-\frac{5}{6}} = 5^{\frac{2}{3}} \times 5^{-\frac{5}{3}} = 5^{\frac{2}{3}-\frac{5}{3}} = 5^{-1} = \dfrac{1}{5}$

76. 정답 ③

$3^{\frac{2}{3}} \times 9^{\frac{3}{2}} \div 27^{\frac{8}{9}} = 3^{\frac{2}{3}} \times 3^3 \div 3^{\frac{8}{3}} = 3^{\frac{2}{3}+3-\frac{8}{3}} = 3$

77. ①

$(ab)^2 = a^2b^2$

$= (\sqrt{2})^2\left(3^{\frac{1}{6}}\right)^2$

$= 2 \times 3^{\frac{1}{3}}$

78.정답 ②

$\dfrac{Q_A}{Q_B} = \dfrac{0.01t^{1.25}w^{0.25}}{0.05t^{0.75}w^{0.30}} = \dfrac{t^{0.5}}{5w^{0.05}}$

이므로 이 식에 $t = 20$, $w = 8$을 대입하면

$\dfrac{Q_A}{Q_B} = \dfrac{20^{0.5}}{5 \times 8^{0.05}} = \dfrac{(4 \times 5)^{0.5}}{5 \times 2^{0.15}} = 2^{0.85} \times 5^{-0.5}$

$\therefore$ $a = 0.85$, $b = -0.5$

따라서 $a + b = 0.35$이다.

1\. 정답 ④

$\log_8 2\sqrt{2} = \log_{2^3} 2^{\frac{3}{2}}$

$= \dfrac{\frac{3}{2}}{3} = \dfrac{1}{2}$

2\. 정답 ⑤

$4\log_2\sqrt{2}+\frac{1}{2}log_2 3-\log_2\sqrt{6} = \log_2 4+\log_2\sqrt{3}-\log_2\sqrt{6}$

$= \log_2\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$

3\. 정답 ③

[출제의도] 로그 계산을 할 수 있다.

(주어진 식)

$= \log_2 20-\log_2 5 = \log_2\frac{20}{5} = 2$

4\. 정답 ④

[출제의도] 로그 계산을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\log_4 2+\log_4 8 = \log_4 16 = 2$

5\. 정답 ⑤

$\log_2\sqrt{8}-\log_2\sqrt{2} = \log_2 2^{\frac{3}{2}}-\log_2 2^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}-\frac{1}{2} = 1$

6\. 정답 ③

$a = \log_2 3$ 에서 $2^a = 3$ ∴

$4^a = (2^a)^2 = 3^2 = 9$

7\. 정답 ①

$\log_3 6+\log_3 2-\log_3 4$

$= \log_3\frac{6\times2}{4} = \log_3 3 = 1$

8\. 정답 ②

$\frac{1}{\sqrt[3]{8}}\times\log_3 81 = \frac{1}{2}\times\log_3 3^4 = \frac{1}{2}\times4 = 2$

9\. [정답] ⑤

$\sqrt[3]{27}+\log_3\sqrt{81} = \sqrt[3]{3^3}+\log_3\sqrt{(3^2)^2} = 3+2$

10\. 정답 ③

[출제의도] 로그 계산하기

$\log_3\left(\sqrt{3^3}\cdot\sqrt[3]{3}\right)^2 = \log_3\left(3^{\frac{3}{2}}\times3^{\frac{1}{3}}\right)^2$

$= \log_3 3^{\frac{11}{3}} = \frac{11}{3}$

11\. 정답 ⑤

[출제의도] 로그를 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\log_5 3\times\left(\log_3\sqrt{5}-\log_{\frac{1}{9}}125\right) = \log_5 3\times\left(\frac{1}{2}\log_3 5+\frac{3}{2}\log_3 5\right)$

$= \log_5 3\times2\log_3 5 = 2$

12\. 정답 3

[출제의도] 로그의 성질을 이해하여 계산하기

$\log_2 3-\log_2\frac{9}{2}+\log_2 12 = \log_2\dfrac{3\times12}{\frac{9}{2}} = \log_2 8 = 3$

13\.정답 ①

$\log_2 9\cdot\log_3\sqrt{2} = \dfrac{2\log3}{\log2}\times\dfrac{\frac{1}{2}\log2}{\log3} = 1$

14\. 정답 ③

$\log_4 64 = \log_4 4^3 = 3\log_4 4 = 3$

15\. 정답 ①

$\log_2 16+\log_2\frac{1}{8} = \log_2 2^4+\log_2 2^{-3}$

$= 4-3 = 1$

16\.정답 ①

$\log_5 81\times\log_3\sqrt[4]{25} = \log_5 3^4\times\log_3 5^{\frac{2}{4}}$

$= 4\times\frac{2}{4}\times\log_5 3\times\log_3 5 = 2$

17\. 정답 ②

[출제의도] 로그의 성질을 이용하여 계산하기

$\log_4\frac{16}{9}+\log_2 3 = \log_2\frac{4}{3}+\log_2 3 = 2$

18. 정답 ④

준식 $=4\times(2^3)^{\frac{2}{3}}=4\times4=16$

19. 정답 ③

$\log_4 2+\log_{16} 2=\log_{2^2} 2+\log_{2^4} 2=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

20. 정답 36

[출제의도] 밑의 변환공식을 이용하여 로그를 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

(주어진 식)$=3\times3\times\frac{\log4}{\log3}\times\frac{\log9}{\log2}$

$=3\times3\times2\times2=36$

21. 정답 ④

$\log_3 6^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\log_3 2=\frac{1}{2}(\log_3 6-\log_3 2)=\frac{1}{2}\log_3\frac{6}{2}=\frac{1}{2}$

22. 정답 ①

$a>0,\ a\neq1$일 때,

$\log_a\frac{1}{a}=\log_a a^{-1}=-1$이므로

$\log_{\frac{1}{2}} 2+\log_7\frac{1}{7}=-1-1=-2$

23. 정답 ⑤

[출제의도] 주어진 지수 로그의 식을 간단히 계산 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$3^{\frac{2}{3}}\times27^{\frac{1}{9}}+\log_2 8=3^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}+3=6$

24. 정답 ①

[출제의도] 로그의 성질을 이용하여 계산하기

$\log_2\left(\frac{2}{9}\times12^2\right)=\log_2 2^5=5$

25. 정답 ⑤

[출제의도] 로그를 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\frac{\frac{3}{2}\log2}{\log3}\times\frac{2\log3}{\log2}=3$

26. 정답 ②

[출제의도] 로그의 성질을 활용하여 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\log_2(\log_2 3)+\log_2(\log_3 4)$

$=\log_2(\log_2 3\times\log_3 4)=\log_2(\log_2 4)$

$=\log_2 2=1$

27. 정답 ①

[출제의도] 로그의 성질을 이용하여 식의 값 구하기

(준식)$=(\log_{10}2)^2+(\log_{10}5)^2+2\log_{10}2\cdot\log_{10}5$

$=(\log_{10}2+\log_{10}5)^2=(\log_{10}10)^2=1$

28.정답①

[출제의도] 로그의 성질을 이해하고 계산하기

[해설] $\log\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^2\times\frac{1}{2}}{18}=\log\frac{1}{100}=-2$

29. 정답 ②

(준식) $=(3^2)^{\frac{3}{2}}+\log_3 3^4=3^{2\times\frac{3}{2}}+4\log_3 3$

$=27+4=31$

30. 정답 ④

[출제의도] 지수와 로그 계산하기

$(\log_2 16)\times\sqrt[3]{64}=4\times2^{\frac{6}{3}}=16$

31. 정답 ②

준식 $=2^{2\cdot2}=2^4=16$

32. 정답 ④

[해설] $\frac{\log_2 a}{6}=\frac{\log_2 b}{8}=\frac{1}{4}$이므로

$\log_2 a=\frac{3}{2},\ a=2^{\frac{3}{2}}$

$\log_2 b=2,\ b=2^2$이므로 $a^2b=2^5=32$이다.

33. 정답 ④

[출제의도] 로그의 성질을 이용하여 계산하기

(준식)$=\left(\log_2 3+\frac{1}{3}\log_2 3\right)\left(\log_3 2+\frac{1}{2}\log_3 2\right)$

$=\left(\frac{4}{3}\log_2 3\right)\left(\frac{3}{2}\log_3 2\right)$

$=\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}=2$

34. 정답②

$\sin 1560°=\sin(90°\times17+30°)=\cos30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로

$\log_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\times1\right)=\log_2\frac{1}{2}=-1$

35. 정답 ①

[출제의도] 로그의 정의를 이용하여 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$4^a = 3-2\sqrt{2}$, $2^a = \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$

$2^{-a} = \dfrac{1}{2^a} = \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$

$\therefore\ 2^a + 2^{-a} = (\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}+1) = 2\sqrt{2}$

36. 정답 12

[출제의도] 로그의 성질을 이용하여 계산하기

$\log_{\sqrt{2}} 9^{\log_3 8} = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 3^{2\log_3 8} = 2\log_2 2^6 = 12$

37. 정답 ②

$\dfrac{1}{2}\log_2\dfrac{8}{5} + \log_2\sqrt{5} = \log_2\left(\dfrac{8}{5}\right)^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}} = \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \dfrac{3}{2}$

38. 정답 ⑤

[출제의도] 로그의 성질을 이용하여 표현하기

$a = \log_5 2$, $b = \log_5 3$

$\log_6 72 = \dfrac{3\log_5 2 + 2\log_5 3}{\log_5 2 + \log_5 3} = \dfrac{3a+2b}{a+b}$

39. 정답 ③

[출제의도] 상용로그의 뜻을 알고 이를 활용하기

$(준식) = \log_{10}\dfrac{5}{2} = 1 - 2\log_{10}2 = 0.398$

40. 정답 ①

$\log_a 3 = 2$ 에서 $\log_3 a = \dfrac{1}{2}$, $\log_b 3 = 5$ 에서

$\log_3 b = \dfrac{1}{5}$ 이므로 $\log_b a = \dfrac{\log_3 a}{\log_3 b} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{5}} = \dfrac{5}{2}$

41. 정답 12

$a\log_3 2 = 4$ 에서 $a = \dfrac{4}{\log_3 2}$,

$\log_3 b = 1 - \log_3(\log_2 3) = \log_3\dfrac{3}{\log_2 3}$

$\therefore\ b = \dfrac{3}{\log_2 3}$

$\therefore\ ab = 4\log_2 3 \cdot \dfrac{3}{\log_2 3} = 12$

42. 정답 15

$a = \log_2(2+\sqrt{3})$일 때, $2^a = 2+\sqrt{3}$,

$4^a = (2^a)^2 = 7+4\sqrt{3}$ 이다.

$\therefore\ 4^a + \dfrac{4}{2^a} = 7+4\sqrt{3} + \dfrac{4}{2+\sqrt{3}} = 7+4\sqrt{3}+4(2-\sqrt{3}) = 15$

43. 정답 ①

$xyz = 3^{a+b+c} = 1$

준 식$= \log_x\dfrac{1}{x} + \log_y\dfrac{1}{y} + \log_z\dfrac{1}{z} = -3$

44. 정답 15

$\log_2 x + \log_4\dfrac{1}{x} = \log_2 x - \log_2 x^{\frac{1}{2}}$

$= \log_2 x^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\log_2 x = 5$

$\therefore x = 2^{10}$ ·········㉠

$\therefore \log_4 x - \log_2\dfrac{1}{x} = \log_2 x^{\frac{1}{2}} + \log_2 x$

$= \log_2 x^{\frac{3}{2}} = \log_2 2^{15}$ ($\because$ ㉠)

$= 15$

45. 정답 25

$a+b = \log_3 4$, $a-b = \log_2 5$

$a^2-b^2 = (a+b)(a-b) = \log_3 4 \times \log_2 5 = 2\log_3 5$

$\therefore 3^{a^2-b^2} = 3^{2\log_3 5} = 5^2 = 25$

46. 정답18

[출제의도] 로그의 밑과 진수 조건 구하기

밑 $x-3>0$이고 $x-3 \neq 1$이므로

$3<x<4$ 또는 $x>4$이다.

진수 $-x^2+11x-24>0$이므로

$3<x<8$이다.

두 조건을 동시에 만족하는 정수는 5, 6, 7이다.

$\therefore\ 5+6+7=18$

47. 정답 ⑤

ㄱ. $2^x \cdot 3^y = 6^z \cdot 6^z = 36^z$ (참)

ㄴ. $2^z \cdot 3^{z-y} = \dfrac{2^z \cdot 3^z}{3^y} = \dfrac{6^z}{3^y} = 1$ (참)

ㄷ. $2^x = 3^y = 3^{1-x}$에서 $6^x = 3$, $x = \log_6 3$

$6^z = 2^x = 2^{\log_6 3}$에서 $z = \log_6 2^{\log_6 3} = \log_6 2 \cdot \log_6 3$ (참)

48. 정답①

로그의 정의에서 밑은 1이 아닌 양수이고, 진수는 양수이어야

한다.

ㄱ. 밑의 조건 $a^2-a+2=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>1$

진수의 조건 $a^2+1\geq 1$

따라서 항상 로그를 정의할 수 있다.

ㄴ. (반례)$a=0$일 때 밑은 $2|a|+1=1$이므로 로그를 정의할 수 없다.

ㄷ. (반례)$a=1$일 때 진수는 $a^2-2a+1=0$이므로 로그를 정의할 수 없다.

따라서 항상 로그를 정의할 수 있는 것은 ㄱ뿐이다.

49. 정답 ③

[출제의도] 로그의 뜻과 그 성질을 이해하여 추론하기

(가) $\log_a b$ (나) 1 (다) a^2

50. 정답 ④

ㄱ. $\log_3 2+\log_3 7=\log_3 14\neq 2$ ∴ 거짓

ㄴ. $\log_3 6-\log_3 2=\log_3\frac{6}{2}=1$ ∴ 참

ㄷ. $\log_3 4\times\log_4 3=\frac{\log_{10}4}{\log_{10}3}\times\frac{\log_{10}3}{\log_{10}4}=1$ ∴ 참

51. 정답 ④

$f(n)=2^n-\log_2 n$

ㄱ. $f(2)=2^2-\log_2 2=4-1=3$ ∴ 참

ㄴ. $f(8)=2^8-\log_2 8=2^8-3$

$-f(\log_2 8)=-2^{\log_2 8}+\log_2(\log_2 8)=-8+\log_2 3$ ∴ 거짓

ㄷ. $f(2^n)+n=2^{2^n}-\log_2 2^n+n=2^{2^n}-n+n=2^{2^n}$

$f(2^{n-1})+n-1=2^{2^{n-1}}-\log_2 2^{n-1}+n-1$

$=2^{2^{n-1}}-(n-1)+n-1=2^{2^{n-1}}$

$\therefore f(2^{n-1})+n-1^2=2^{2^n}$ ∴ 참

52. 정답 ④

[출제의도] 상용로그의 성질을 추론하기

$a^p=x$, $a^q=y$ 이므로 $\frac{a^p}{a^q}=\frac{x}{y}$, $a^{p-q}=\frac{x}{y}$

$\therefore p-q=\log_a\left(\frac{x}{y}\right)$ 답 ④

53.정답 ③

[출제의도] 지수와 로그의 성질 이해하기

$a=\log_2 c$, $b=\log_2 d$

ㄱ. $c^b=c^{\log_2 d}=d^{\log_2 c}=d^a$ (참)

ㄴ. $a+b=\log_2 c+\log_2 d=\log_2 cd$ (참)

ㄷ. $\frac{a}{b}=\frac{\log_2 c}{\log_2 d}=\log_d c$ (거짓)

54. 정답⑤

자연수 n에 대하여 $n=2^k m$을 만족시키는 $k\geq 0$인 정수 k와 자연수 m이 존재하므로

$\log_2 n=\log_2 2^k\cdot m=\log_2 2^k+\log_2 m=k+\log_2 m$

유리수의 집합은 뺄셈에 대하여 닫혀있으므로 $\log_2 n$이 유리수이면 $\log_2 m$도 유리수이어야 한다. 따라서 $\log_2 m=\frac{q}{p}$ (단, p는 자연수이고 q는 정수)로 놓을 수 있다.

이 때, $m=2^{\frac{q}{p}}$에서 $m^p=\left(2^{\frac{q}{p}}\right)^p$이므로 $m^p=2^q$이다.

그런데 m이 홀수이므로 m^p은 홀수이다. 따라서 2^q도 홀수이어야 하므로 $q=0$이다.

이 때 $2^0=1$이므로 $m=1$이다.

따라서 n을 $n=2^k$ (단, k는 $k\geq 0$인 정수)의 꼴로 나타낼 수 있다.

55. 정답②

[출제의도] 로그의 성질을 이용하여 값 구하기

$b=a^{\frac{1}{2}}$, $c=b^{\frac{2}{3}}$, $a=c^3$이므로

$\log_a b+\log_b c+\log_c a=\log_a a^{\frac{1}{2}}+\log_b b^{\frac{2}{3}}+\log_c c^3$

$=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+3=\frac{25}{6}$

56. 정답90

$\frac{1}{\log_3 2}+\frac{1}{\log_5 2}+\frac{1}{\log_6 2}=\log_2 3+\log_2 5+\log_2 6$

$=\log_2(3\cdot5\cdot6)$

$=\log_2 90=\frac{1}{\log_{90}2}$

$\therefore k=90$

57. 정답 ⑤

[출제의도] 지수와 로그의 성질을 이용하여 방정식의 해를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$2^\alpha=5$이므로 $\alpha=\log_2 5$이다.

$\therefore \log_2(\log_5 x)+\log_2(\log_2 5)=2$

$\log_2(\log_5 x\cdot\log_2 5)=2$

$\log_5 x\cdot\log_2 5=2^2=4$

$\log_5 x=4\log_5 2=\log_5 2^4$

$\therefore x=2^4$ 이므로 $\log_2\beta=\log_2 2^4=4$ 이다.

58. 정답 25

[출제의도] 근과 계수와의 관계와 로그의 성질을 이용하여 식의 값 구하기

두 근을 α, β라 하면

$\alpha\beta=1$이고,

$\log_2\left(\alpha+\frac{4}{\beta}\right)+\log_2\left(\beta+\frac{4}{\alpha}\right)$

$=\log_2\left(\alpha+\frac{4}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{4}{\alpha}\right)=\log_2\left(\alpha\beta+4+4+\frac{16}{\alpha\beta}\right)$

$=\log_2 25=k$

$\therefore 2^k=25$

59. 정답 ③

ㄱ. $1<a<b$에서 $0<\log a<\log b$이다.

$\log_b a=\frac{\log a}{\log b}<\frac{\log b}{\log a}=\log_a b$ (참)

ㄴ. (반례) $a=10$, $b=100$일 때

$10<100$이지만 $\frac{1}{10}\log 10>\frac{1}{100}\log 100$ (거짓)

ㄷ. $2\log(a+b)<\log 2(a^2+b^2) \Leftrightarrow \log(a+b)^2<\log 2(a^2+b^2)$

$2(a^2+b^2)-(a+b)^2=a^2-2ab+b^2=(a-b)^2>0\,(\because a<b)$

$(a+b)^2<2(a^2+b^2)$

$\therefore 2\log(a+b)<\log 2(a^2+b^2)$ (참)

60. 정답 ③

[출제의도] 로그부등식을 이용하여 실수의 대소를 비교할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$a<b<1$에서

$\log_a a>\log_a b>\log_a 1$

$\therefore\ 0<\log_a b<1$ … ㉠

$a+1>1$에서

$\log_b(a+1)<\log_b 1=0$ … ㉡

$1<a+1<b+1$ 에서

$\log_{a+1}(a+1)<\log_{a+1}(b+1)$

$\therefore\ \log_{a+1}(b+1)>1$ … ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

$\log_b(a+1)<\log_a b<\log_{a+1}(b+1)$

$\therefore\ B<A<C$

61.정답 ②

$f(1)+f(2)+f(4)+f(8)+f(16)=0+0+1+1+2=4$

62. 정답⑤

$\log_4\{\log_3(\log_2 x)\}=1$ 에서

$\log_3(\log_2 x)=4 \Leftrightarrow \log_2 x=3^4=81 \Leftrightarrow x=2^{81}$

$\log x=\log 2^{81}=81\log 2=81\times 0.3010=24.381$

$\log x$ 의 지표가 24 이므로 x 는 25 자리 자연수이다.

63. 정답 ②

ㄱ. $1<a<10$에서 $0<\log a<1$이므로

$\log 100a=2+\log a$

$\therefore\ [\log 100a]=2$ (참)

ㄴ. $[\log x]=3$이므로 $10^3\leqq x<10^4$

따라서, 정수 x의 개수는

$10^4-10^3=10^3(10-1)=9\times 10^3$ (참)

ㄷ. $\log x=n+\alpha\ \ (0\leqq\alpha<1)$

$0\leqq\alpha<\frac{1}{2}$일 때, $[\log x^2]=2n$

$\frac{1}{2}\leqq\alpha<1$일 때, $[\log x^2]=2n+1$

$\therefore\ [\log x^2]=2n$ 또는 $2n+1$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

64. 정답 ②

[출제의도] 지수부등식을 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

n년 후의 물가지수가 현재의 2배 이상이 된다면

$(1+0.04)^n\geqq 2$

양변에 상용로그를 취하면

$n\log 1.04\geqq\log 2$

$n\geqq\frac{\log 2}{\log 1.04}=\frac{0.301}{0.017}=17.7\times\times$

따라서 18년 후에 물가지수가 처음으로 현재의 2배 이상이 된다.

65. 정답 13

[출제의도] 로그의 기본성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

주어진 조건에서 각 변끼리 더하면

$2(\log_2 ab+\log_2 bc+\log_2 ca)=20$

$\log_2 ab+\log_2 bc+\log_2 ca=10$ ⋯㉠

따라서 $\log_2 ab=2$, $\log_2 bc=3$, $\log_2 ca=5$이므로

$ab=4$, $bc=8$, $ca=32$ ⋯㉡

㉠에서 $\log_2(abc)^2=10$, $\log_2 abc=5$

$\therefore\ abc=32$ ⋯㉢

㉡, ㉢에서 $a=4$, $b=1$, $c=8$이므로 $a+b+c=13$

66. 정답 ④

A지점에서의 수신 전력을 S_A,

B지점에서의 수신 전력을 S_B라고 하면

$S_A=p-20\log\left(\frac{4\pi f R_A}{c}\right)=-25$

$$S_B = p - 20\log\left(\frac{4\pi f R_B}{c}\right) = -5$$

$$S_B - S_A = 20\left\{\log\frac{4\pi f R_A}{c} - \log\frac{4\pi f R_B}{c}\right\} = 20\log\frac{\frac{4\pi f R_A}{c}}{\frac{4\pi f R_B}{c}}$$

$$20\log\frac{R_A}{R_B} = 20 \quad \therefore \frac{R_A}{R_B} = 10$$

67. 정답 58

(나)에서 $b - a = 2^3 \quad \therefore b = a + 2^3$

(다)에서 $c - b = 2^2$

$\therefore c = b + 2^2 = a + 2^3 + 2^2$

$a + b + c = 3a + 20$에서 $23 \leq 3a + 20 \leq 35$

$\therefore$ (최댓값)+(최솟값)$= 35 + 23 = 58$

68. 정답 ②

[출제의도] 로그의 성질을 이해하고 이를 활용하여 지수방정식을 풀 수 있는가를 묻는 문제이다.

$2^a 5^b = 500^c = 2^{2c} 5^{3c} \quad \therefore a = 2c,\ b = 3c$

이때, $c = 2$이므로 $a + b + c = 12$이다.

69. 정답28

$\log_{10} 18 - \log_{10} 3 = \log_{10} 12 - \log_{10} y$ …㉠

$\log_{10} x - \log_{10} 18 = \log_{10} 20 - \log_{10} 12$ …㉡

㉠에서 $\log_{10} y = \log_{10}\frac{12\times 3}{18} = \log_{10} 2$

$\therefore\ y = 2$

㉡에서 $\log_{10} x = \log_{10}\frac{20\times 18}{12} = \log_{10} 30$

$\therefore\ x = 30$ 그러므로 $x - y = 28$ 이다.

70. 정답 80

[출제의도] 로그의 뜻을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$10 \leq n < 16$일 때 $2 < \log_3 n < 3,\ 1 < \log_4 n < 2$이므로

$\log_3 n$과 $\log_4 n$의 정수부분은 각각 2, 1이다.

$16 \leq n < 27$일 때 $2 < \log_3 n < 3,\ 2 \leq \log_4 n < 3$이므로

$\log_3 n$과 $\log_4 n$의 정수부분은 2로 같다.

$27 \leq n < 64$일 때 $3 \leq \log_3 n < 4,\ 2 < \log_4 n < 3$이므로

$\log_3 n$과 $\log_4 n$의 정수부분은 각각 3, 2이다.

$64 \leq n < 81$일 때 $3 < \log_3 n < 4,\ 3 \leq \log_4 n < 4$이므로

$\log_3 n$과 $\log_4 n$의 정수부분은 3으로 같다.

$81 \leq n < 100$일 때 $4 \leq \log_3 n < 5,\ 3 < \log_4 n < 4$이므로

$\log_3 n$과 $\log_4 n$의 정수부분은 각각 4, 3이다.

따라서 구하는 두 자리의 자연수 n의 최댓값은 80이다.

71. 정답 13

$xy = 2x + y + 2,\ xy - 2x - y + 2 = 4$

$(x-1)(y-2) = 4,\ x, y$는 자연수이므로

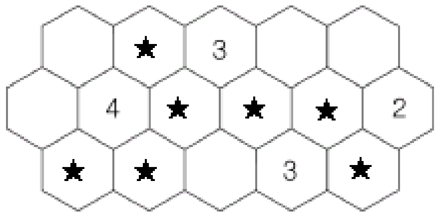
$\begin{cases} x-1=1 \\ y-2=4 \end{cases},\ \begin{cases} x-1=2 \\ y-2=2 \end{cases},\ \begin{cases} x-1=4 \\ y-2=1 \end{cases}$

$x = 5,\ y = 3$일 때, $2x + y$의 최댓값은 13

72. 정답 63

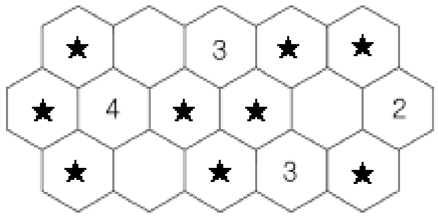
[출제의도] 지수와 로그를 이용하여 실생활에서의 문제 해결하기

최소 보물의 개수가 감추어진 한 경우



최소개수 7개

최대 보물의 개수가 감추어진 한 경우



최대개수 9개

따라서 $M \cdot m = 63$

73. 정답 ④

$\log_3 27 \cdot 8^{\frac{1}{3}} = \log_3 3^3 \cdot (2^3)^{\frac{1}{3}} = 3 \cdot 2 = 6$

74.[정답] ②

[해설]

$$\frac{4^3}{2}\times\log_3\sqrt{3} = (2^2)^{\frac{3}{2}}\times\log_3 3^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2^3\times\frac{1}{2} = 2^2 = 4$$

75. 정답 ①

ㄱ. $2^{\log_2 1 + \log_2 2 + \log_2 3 + \cdots + \log_2 10}$

$= 2^{\log_2(1\cdot 2\cdot 3\cdots 10)} = 2^{\log_2 10!} = (10!)^{\log_2 2}$

$= (10!)^1 = 10!$ 따라서, 옳다.

ㄴ. $\log_2(2^1\times 2^2\times 2^3\times\cdots\times 2^{10})^2$

$= \log_2 2^{2(1+2+3+\cdots+10)} = \log_2 2^{110} = 110$

따라서, 옳지 않다.

ㄷ. $(\log_2 2^1)(\log_2 2^2)(\log_2 2^3)\cdots(\log_2 2^{10})$

$= 1\cdot 2\cdot 3\cdots 10 = 10!$ 따라서, 옳지 않다.

76. 정답 ②

$b^a=(2\sqrt{2})^{\log_2 10}=10^{\log_2 2\sqrt{2}}=10^{\frac{3}{2}}$

$\therefore\ a\log b=\log b^a=\log 10^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}$

77. 정답 ④

$\log_a c : \log_b c=2:1$에서

$\log_a c=2\log_b c$

$\log_a c=2\dfrac{\log_a c}{\log_a b}$

$\log_a b=2(\because \log_a c\neq 0)$

또, $\log_b a=\dfrac{1}{\log_a b}=\dfrac{1}{2}$

따라서 $\log_a b+\log_b a=2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$

78. 정답 32

$ab=27$ 에서 $\log_3 ab=\log_3 a+\log_3 b=3$

$\log_3\dfrac{b}{a}=\log_3 b-\log_3 a=5$

$\therefore \log_3 a=-1\quad \log_3 b=4$

$\therefore 4\log_3 a+9\log_3 b=-4+36=32$

79. 정답 ⑤

$a=r,\ b=r^2,\ c=r^3$ 이므로

$\log_8 c=\log_{2^3} r^3=\log_2 r$

$\log_a b=\log_r r^2=2$

따라서 $\log_8 c=\log_a b$에서 $\log_2 r=2$

$\therefore\ r=2^2=4$

80. 정답 20

$\dfrac{3a}{\log_a b}=\dfrac{b}{2\log_b a}=\dfrac{3a+b}{3}=k$로 놓으면

$3a=k\log_a b,\ b=2k\log_b a,\ 3a+b=3k$

$\therefore\ k\log_a b+2k\log_b a=3k$

$\log_a b+2\log_b a=3$

$\log_a b=t$로 놓으면 $\log_b a=\dfrac{1}{t}$ 이므로

$t+\dfrac{2}{t}=3,\ t^2-3t+2=0,\qquad (t-1)(t-2)=0$

$t\neq 1$ 이므로 $t=2$

$\therefore\ 10\log_a b=10\cdot 2=20$

[다른 풀이]

$\dfrac{3a}{\log_a b}=\dfrac{b}{2\log_b a}$ 에서

$6a\log_b a=b\log_a b,\ \dfrac{6a}{\log_a b}=b\log_a b$

$\dfrac{6a}{b}=(\log_a b)^2\ \cdots ㉠$

$\dfrac{3a}{\log_a b}=\dfrac{b}{2\log_b a}=\dfrac{3a+b}{3}$ 이므로

$\left(\dfrac{3a+b}{3}\right)^2=\dfrac{3a}{\log_a b}\times\dfrac{b}{2\log_b a}$

$=\dfrac{3ab}{2}\quad (\because\ \log_a b\times\log_b a=1)$

$\dfrac{9a^2+6ab+b^2}{9}=\dfrac{3ab}{2}$ 에서

$18a^2+12ab+2b^2=27ab$

$18a^2-15ab+2b^2=0$

$b\neq 0$ 이므로 양변을 b^2으로 나누면

$18\left(\dfrac{a}{b}\right)^2-15\cdot\dfrac{a}{b}+2=0$

$\dfrac{a}{b}=t$로 놓으면 $18t^2-15t+2=0$

$(3t-2)(6t-1)=0$

$t=\dfrac{2}{3}$ 또는 $t=\dfrac{1}{6}$

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{2}{3}$ 이면 ㉠에서 $(\log_a b)^2=4$

$\log_a b>1$ 이므로 $\log_a b=2$

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{6}$ 이면 ㉠에서 $(\log_a b)^2=1$

$\log_a b>1$ 이므로 모순

따라서 $\log_a b=2$ 이므로 $10\log_a b=20$

81. 정답 ③

$10^a=3\cdot Q+2$(Q는 정수, $0<a<1$)

$0<a=\log(3Q+2)<1$

$1<3Q+2<10$

$\therefore Q=0,1,2$

$\therefore a=\log 2,\log 5,\log 8$

$\therefore\ a$의 합$=\log 2+\log 5+\log 8=1+3\log 2$

82. 정답 ⑤

$27^{\frac{1}{3}}+\log_2 4=(3^3)^{\frac{1}{3}}+2\log_2 2=3+2=5$

정답및 해설

1. 정답 ④

$1 \leqq \log n < 3$에서

$10 \leqq n < 10^3$

$\log_2 10 \leqq \log_2 n < \log_2 10^3$

따라서 $\log_2 n$의 정수값은 4에서 9까지 자연수이므로 만족하는 것은 6개이다.

2. 정답 ③

$\log\left(\frac{5}{2}\right)^{100} = 100(\log 5 - \log 2)$

$= 100(0.6990 - 0.3010) = 100 \times 0.3980 = 39 + 0.8$

지표가 39이므로 정수부분은 40자리의 수

3. 정답 ①

[출제의도] 상용로그의 지표와 가수의 성질 이해하기

$\log_{10} 3^{10} = 10\log_{10} 3 = 4.771$ 이므로 3^{10} 은 5 자리의 정수이고,

$\log_{10}\left(\frac{3}{10}\right)^{10} = 10\log_{10} 3 - 10 = -6 + 0.771$ 이므로 $\left(\frac{3}{10}\right)^{10}$ 은

소수점 아래 6 번째 자리에서 처음으로 0 이 아닌 수가 나타난다. $\therefore 5 + 6 = 11$

4. 정답②

[출제의도] 상용로그의 가수의 성질을 이용한 수학내적 문제해결하기

$2^4 \times 3^3$은 20개의 양의 약수를 갖는다.

약수들의 곱 $A = (2^4 \times 3^3)^{10} = 2^{40} \times 3^{30}$

$\left[\frac{A}{10^{n-1}}\right]$는 A의 최고자리의 숫자이고

$\log A = 40\log 2 + 30\log 3 = 26.353$이다.

$\log 2 < 0.353 < \log 3$이므로

$\left[\frac{A}{10^{n-1}}\right] = 2$

5.정답 ①

[출제의도] 상용로그의 지표의 성질 이해하기

$\log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{20} = \log_{10} 2^{-10} = -3.01 = \bar{4}.99$

$\therefore n = 4$ 이므로 $\log_2 4 = 2$

6. 정답41

[출제의도] 상용로그를 이용하여 문제 해결하기

$\log 7^{40} = 40\log 7 = 40 \times 0.8451 = 33.804$

지표는 33이므로 7^{40}은 34자리 자연수

$\therefore n = 34$

$33 + \log 6 < 33.804 < 33 + \log 7$

$\log 10^{33} + \log 6 < \log 7^{40} < \log 10^{33} + \log 7$

$\therefore 6 \times 10^{33} < 7^{40} < 7 \times 10^{33}$

7^{40}의 맨 앞자리의 숫자는 6이므로 $a = 6$

7의 n제곱의 일의 자리의 숫자는 7, 9, 3, 1, …가 반복되므로

7^{40}의 일의 자리의 숫자는 1

$\therefore n + a + b = 34 + 6 + 1 = 41$

7. 정답 ②

[출제의도] 로그의 지표와 가수의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$\log_3 10 = 2 + \alpha$ $(0 \leqq \alpha < 1)$이므로 $\alpha = \log_3 10 - 2 = \log_3\frac{10}{9}$이

된다. 따라서 $3^\alpha = 3^{\log_3\frac{10}{9}} = \frac{10}{9}$이다.

8. 정답 ②

$\log x = n + \alpha$ $\left(n\text{은 정수, } 0 < \alpha < \frac{1}{4}\right)$라 하면

(i) $\log x^2 = 2\log x = 2n + 2\alpha$

그런데 $0 < 2\alpha < \frac{1}{2}$이므로 가수는 2α이다.

(ii) $\log\frac{\sqrt{10}}{x^2} = \frac{1}{2}\log 10 - \log x^2$

$= \frac{1}{2} - 2(n + \alpha)$

$= -2n + \frac{1}{2} - 2\alpha$

$0 < \frac{1}{2} - 2\alpha < \frac{1}{2}$이므로 가수는 $\frac{1}{2} - 2\alpha$이다.

$\therefore$ $2\alpha + \frac{1}{2} - 2\alpha = \frac{1}{2}$

9. 정답490

[출제의도] 상용로그의 지표와 가수의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

(가)에서 $5 \leqq \log k < 6$ 이므로

$10^5 \leqq k < 10^6$ … ㉠

(나)에서 $\log\frac{\sqrt{k}}{7}$의 가수가 0이므로

$\log\frac{\sqrt{k}}{7} = n$ (n은 정수)

따라서 $\frac{\sqrt{k}}{7} = 10^n$이므로

$k = 49 \times 10^{2n}$

㉠에서 $n=2$이므로

$k=49\times10^4=490000$

$\therefore\ \dfrac{k}{1000}=490$

10. 정답 ①

[출제의도] 상용로그의 지표와 가수의 성질을 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. [반례] $a=10^{\frac{3}{2}}$ 이면 $f(a)=1,\ f(a^2)=3$ (거짓)

ㄴ. $\log a=f(a)+g(a),\ \log a^2=2\log a=2f(a)+2g(a)$

$\log a^2=f(a^2)+g(a^2)$ (참)

ㄷ. [반례] $a=b=10^{-\frac{1}{2}}$ 이면

$g(a)+g(b)=1,\ ab=\dfrac{1}{10}$ (거짓)

11. 정답 ②

[출제의도] 상용로그의 가수의 뜻을 이해하고 이를 활용할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $\log ab-\log b$ 의 가수가 0 이므로 $f(a)=0$ (참)

ㄴ. ㄱ에서 $a=b$ 를 대입하면 $f(a)=0$ 이므로

$a=10$ 으로 1 개이다. (참)

ㄷ. $f(ab)=0$ 을 만족시키는 순서쌍 (a,b) 는

$(10,10),(20,50),(25,40),(40,25),(50,20)$ 으로 5 개이다.

(거짓)

12. 정답 ④

[출제의도] 상용로그의 지표와 가수의 뜻을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $\log\dfrac{x}{y}=\log x-\log y=7$ 이므로 $\dfrac{x}{y}=10^7$ 이다.

따라서 $\dfrac{x}{y}$ 의 값은 자연수이다. (참)

ㄴ. $\log x=\log(a\times10^m)=m+\log a=5+0.65$ 에서

$m=5,\ \log a=0.65$

$\log y=\log(b\times10^n)=n+\log b=-2+0.65$ 에서

$n=-2,\ \log b=0.65$

$\therefore\ m+n=3$ (거짓)

ㄷ. ㄴ에서 $\log ab=\log a+\log b=1.3$이므로

$ab=10^{1.3}>10$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

13. 정답 ③

[출제의도] 지표와 가수의 성질 이해하기

ㄱ. $n=\alpha=0\Leftrightarrow\ \log_{10}A=0\ \Leftrightarrow A=1$ (참)

ㄴ. $\alpha\neq0$일 때,

$\log_{10}10A=1+n+\alpha$의 가수는 α

$\log_{10}\dfrac{10}{A}=-n+(1-\alpha)$의 가수는 $1-\alpha$ (거짓)

ㄷ. $\log_{10}100A$의 지표는 $2+n$,

$\log_{10}\dfrac{A}{100}=n+\alpha-2$의 지표는 $n-2$

$\therefore$지표의 합은 $2n$ (참)

14. 정답 ③

[출제의도] 상용로그의 지표와 가수의 성질을 이해하기

$\log_{10}x=n+\alpha\quad(0\leq\alpha<1)$라 하면

ㄱ. $n\leq\log_{10}x<n+1$ 이므로 $[\log_{10}x]=n\quad\therefore$ 참

ㄴ. $\log_{10}1000x=3+\log_{10}x=(n+3)+\alpha$ 이므로

지표는 $(n+3)$ 이다. $\therefore$ 거짓

ㄷ. $n+\alpha-[n+\alpha]=\alpha=\dfrac{1}{2}$

$\log_{10}x^2=2\log_{10}x=2\left(n+\dfrac{1}{2}\right)=2n+1$

$\log_{10}x^2$ 의 지표는 $2n+1$ 이고

x^2 은 $2n+2$ 자리 정수이다. $\therefore$ 참

15. 정답 ①

$[\log_2x]=2,\ [\log_2y]=1,\ [\log_2z]=1$인 경우

$x=4,\ 5,\ 6,\ 7;\ y=2,\ 3;\ z=2,\ 3$이므로

$(x,\ y,\ z)$는 $4\cdot2\cdot2=16$(가지)가 있다.

따라서 $[\log_2y]=2$인 경우와 $[\log_2z]=2$인 경우도

마찬가지이므로 $16+16+16=48$(가지)이다.

16. 정답 ⑤

[출제의도] 로그의 연산법칙 이해하기

ㄱ. $4◎16=\log_4 16+\log_{16}4=\dfrac{5}{2}$ (참)

ㄴ. $a^k◎b^k=\log_{a^k}b^k+\log_{b^k}a^k=a◎b$ (참)

ㄷ. $a^b◎b^a=\log_{a^b}b^a+\log_{b^a}a^b=\dfrac{a}{b}\log_a b+\dfrac{b}{a}\log_b a$

$=\log_a b^{\frac{a}{b}}+\log_{b^{\frac{a}{b}}}a=a◎b^{\frac{a}{b}}$ (참)

17. 정답 ④

[출제의도] 상용로그의 가수 계산하기

$\log_2x=5.2$ 이므로 $\dfrac{\log x}{\log 2}=5.2,\log x=1.56$

$\log\dfrac{1}{x}=-\log x=\bar{2}.44$

$\therefore\ \log\dfrac{1}{x}$ 의 가수 $=0.44$

18. 정답④

$\log A=n+\alpha$ (n 은 정수, $0<\alpha<1$)라 하면

$\log\frac{1}{A} = -\log A = -n - \alpha = (-n-1) + (1-\alpha)$ 이므로

지표는 $-n-1$, 가수는 $1-\alpha$, 이 때, 지표의 합은 -1 ,

가수의 합은 1 이다.

$\therefore\ a^2 + b^2 = 2$

19. 정답 ①

[출제의도] 지표와 가수의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 질문이다.

$\log a = 5+\alpha$ (단, $0 \leqq \alpha < 1$)

$\log\sqrt{\alpha} = \frac{5+\alpha}{2} = 2 + \frac{1+\alpha}{2}\left(\frac{1}{2} \leqq \frac{1+\alpha}{2} < 1\right)$

가수의 합이 $\frac{3}{4}$ 이므로 $\alpha + \frac{1+\alpha}{2} = \frac{3}{4}$, $\alpha = \frac{1}{6}$ 이다.

$\therefore \log a = 5 + \frac{1}{6} = \frac{31}{6}$

20. 정답 ⑤

$\log_{10} 2^{2005} = 2005 \times 0.3010 = 603.505$

$\log_{10} 5^{2005} = 2005 \times (1-0.3010) = 1401.495$ 이므로

$m = 604$, $n = 1402$

$\therefore\ m + n = 2006$

21. 정답 ①

[출제의도] 상용로그의 지표를 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A = \{2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ \cdots\}$이고 집합 A의 원소 중에서 상용로그의 지표가 1인 자연수는 두 자리 자연수이다.

따라서 주어진 조건을 만족시키는 원소는 $2^4,\ 2^5,\ 2^6$이므로

$2^4 + 2^5 + 2^6 = 112$이다.

22. 정답 ②

[출제의도] 지표와 가수의 성질을 이해하기

(가) $[\log x] = [\log 365] = 2$에서 $2 \le \log x < 3$이다.

(나) $\log x^3$과 $\log\frac{1}{x}$의 가수가 같으므로 $\log x^3 - \log\frac{1}{x} = 4\log x$는 정수이다. $8 \le 4\log x < 12$이므로 $4\log x = 8,\ 9,\ 10,\ 11$이다.

따라서 $x = 10^2,\ 10^{\frac{9}{4}},\ 10^{\frac{5}{2}},\ 10^{\frac{11}{4}}$ 이므로 모든 양의 실수 x의 곱은 $10^{2+\frac{9}{4}+\frac{5}{2}+\frac{11}{4}} = 10^{\frac{19}{2}}$ 이다.

23. 정답 ①

[출제의도] 지표와 가수의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 질문이다.

$\log a = 5+\alpha$ (단, $0 \leqq \alpha < 1$)

$\log\sqrt{\alpha} = \frac{5+\alpha}{2} = 2 + \frac{1+\alpha}{2}\left(\frac{1}{2} \leqq \frac{1+\alpha}{2} < 1\right)$

가수의 합이 $\frac{3}{4}$ 이므로 $\alpha + \frac{1+\alpha}{2} = \frac{3}{4}$, $\alpha = \frac{1}{6}$ 이다.

$\therefore \log a = 5 + \frac{1}{6} = \frac{31}{6}$

24. 정답⑤

$\log_{10} x = -\frac{28}{3} = -10 + \frac{2}{3}$ 에서 $n = -10$, $\alpha = \frac{2}{3}$

$\therefore\ \frac{n}{\alpha} = -15$

25. 정답 ④

$24 \leqq \log_{10} x^8 < 25$ 이므로 $3 \leqq \log_{10} x < \frac{25}{8} = 3.125$,

$15 \leqq \log_{10} y^5 < 16$ 이므로 $3 \leqq \log_{10} y < \frac{16}{5} = 3.2$

$6 \leqq \log_{10} x + \log_{10} y < 6.325$

$\therefore\ xy$ 는 7 자리의 자연수

26. 정답①

$\log A = n + \alpha$ (n 은 정수, $0 \leqq \alpha < 1$)라 놓으면

ㄱ. $\log 10A = 1 + \log A = (1+n) + \alpha$ 이므로 $\log 10A$ 의 가수는 α 이다. (참)

ㄴ. $\log A^{10} = 10\log A = 10n + 10\alpha$ 이므로 $\log A^{10}$ 의 가수는 항상 α 라 할 수 없다. (거짓)

ㄷ. $\log\frac{10}{A} = 1 - \log A = -n + (1-\alpha)$ 이므로 $\log\frac{10}{A}$ 의 가수는 항상 α 라 할 수 없다. (거짓)

27. 정답 16

[출제의도] 상용로그의 지표와 가수를 이용할 수 있다.

$\log A = n + \alpha$ (n은 정수, $0 \leqq \alpha < 1$)라고 하면 근과 계수의 관계에서

$n + \alpha = \frac{33}{2},\ n\alpha = \frac{k}{2}$

$n + \alpha = 16 + \frac{1}{2}$

$\therefore\ n = 16,\ \alpha = \frac{1}{2}$

$\therefore\ k = 2n\alpha = 2 \cdot 16 \cdot \frac{1}{2} = 16$

28.정답 ④

[출제의도] 상용로그의 뜻을 알고, 지표와 가수의 성질을 이해하기

ㄱ. 2004와 200.4의 숫자 배열이 일치하므로, 가수는 같다.

ㄷ.$\log_{10} x$ 의 소수부분과 $\log_{10} y$ 의 소수부분의 합이 1 이면

$\log_{10}x+\log_{10}y$ 는 정수 이다.

29. 정답 ④

[출제의도] 상용로그의 지표와 가수를 활용할 수 있다.

$\log x$의 가수를 α라 하면

$\log x=3+\alpha$ $(0\leqq\alpha<1)$

$\log\sqrt{x}=\dfrac{1}{2}\log x=\dfrac{3+\alpha}{2}=1+\dfrac{1+\alpha}{2}$

$0\leqq\dfrac{1+\alpha}{2}<1$이므로 문제의 조건에서

$\alpha+\dfrac{1+\alpha}{2}=\dfrac{3}{4}$ $\therefore$ $\alpha=\dfrac{1}{6}$

따라서 $\log\sqrt{x}$ 의 가수는 $\dfrac{1+\alpha}{2}=\dfrac{7}{12}$이다.

30. 정답 ④

[출제의도] 상용로그의 지표와 가수의 성질을 이해하기

X는 정수 부분이 두 자리인 양의 정수이고 상용로그의 가수가 x이므로

$\log X=1+x$ $(0\leqq x<1)$

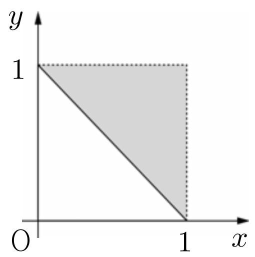
Y는 정수 부분이 세 자리인 양의 정수이고 상용로그의 가수가 y이므로

$\log Y=2+y$ $(0\leqq y<1)$

XY의 정수 부분은 다섯 자리이므로

$\log XY=\log X+\log Y$
$\quad=3+x+y$ $(1\leqq x+y<2)$

따라서 점 (x,y)가 존재하는 영역은 그림과 같다.



31. 정답 ②

[출제의도] 상용로그의 지표와 가수의 성질 추론하기

ㄱ.(반례) $x=2$, $m=2$, $n=3$일 때

$f(2^{2+3})=f(32)=1$

$f(2^2)+f(2^3)=f(4)+f(8)=0$ (거짓)

ㄴ.(반례) $a=6$일 때 성립하지 않는다. (거짓)

ㄷ. $\log x+\log x^2+\cdots+\log x^n$

$=f(x)+f(x^2)+\cdots+f(x^n)$

$+g(x)+g(x^2)+\cdots+g(x^n)$

$\dfrac{n(n+1)}{2}\log x=f(x)+f(x^2)+\cdots+f(x^n)+1$ (참)

32. [출제의도] 상용로그의 지표와 행렬의 정의를 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$a_{11}=2,\ a_{12}=4,\ a_{21}=4,\ a_{22}=5$이므로 구하는 값은 15

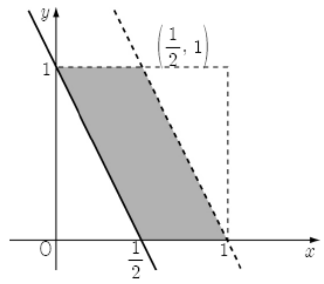
33.정답 ②

$\log a=1+x$, $(0\leqq x<1)$

$\log b=1+y$, $(0\leqq y<1)$

$\log a^2b=2\log a+\log b=3+2x+y$

$\log a^2b$의 지표가 4이므로 $4\leqq 3+2x+y<5$



따라서 (x,y)가 나타내는 어두운 부분의 넓이는 $\dfrac{1}{2}$이다.

34. 정답 ②

빵의 개당 가격을 a원, 무게를 b라 하면

$\dfrac{a}{0.9^nb}\geqq 1.5\times\dfrac{a}{b}=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{a}{b}$

$0.9^n\leqq\dfrac{2}{3}$

양변에 로그를 취하면 $n\log 0.9\leqq\log 2-\log 3$

$\log 0.9=\log\dfrac{9}{10}=2\log 3-1$이므로

$n\geqq\dfrac{\log 2-\log 3}{2\log 3-1}=\dfrac{0.1761}{0.0458}=3.8\text{xxx}$

$\therefore$ n의 최솟값은 4

35. 정답 ②

[출제의도] 지수부등식과 로그부등식을 이해하고 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

초기 박테리아의 수를 a 라 하면 t 일 후의 박테리아 수는 배증시간이 12 시간, 즉 $\dfrac{1}{2}$ 일이므로

$a\cdot 2^{2t}\geqq a\cdot 20000$

이 되므로 양변에 로그를 취하면

$2t\log 2\geqq\log 20000$

따라서 $t\geqq\dfrac{4+\log 2}{2\log 2}=\dfrac{4.3}{0.6}=7.1\cdots$

이므로 답은 8 일이다.

36.정답 31

처음 염분의 양을 a, 여과기를 통과시키는 횟수를 n이라 하자.

$$a\times\left(\frac{4}{5}\right)^n \leq a\times\frac{1}{1000}$$

$$\log\left(\frac{4}{5}\right)^n \leq \log\frac{1}{1000}$$

$$n(3\log2-1)\leq-3$$

$$n\geq\frac{3}{1-3\log2}\fallingdotseq 30.928$$

따라서 구하는 최소 횟수는 31이다.

37. 정답 100

[출제의도] 상용로그를 이용하여 실생활문제 해결하기

$D=2$이므로 $2=\log_{10}\frac{I_0}{I}$, $\frac{I_0}{I}=100$

$\therefore I_0=100I$ $\therefore 100$배

38. 정답 ②

n년 후 이산화탄소 배출량은 $6\times(1-0.05)^n$억 톤이므로

$6\times0.95^n\leq4$, $0.95^n\leq\frac{2}{3}$

양변에 상용로그를 취하면 $n(\log9.5-1)\leq\log2-\log3$

$0.022n\geq0.176$, $n\geq8$

따라서, 8년 후에 4억톤 이하가 된다.

39. [출제의도] 상용로그의 성질을 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$80=10\left(12+\log\frac{I}{1^2}\right)=120+10\log I$에서 $\log I=-4$

$\therefore a=10\left(12+\log\frac{I}{10^2}\right)=120+10\log I-20=60$

40. 정답 20

[출제의도] 로그의 성질을 이용하여 수학외적 문제해결하기

$\Gamma_A=\frac{2}{100}$, $\Gamma_B=\frac{20}{100}$

$A=20\log\frac{1}{|\Gamma_A|}=20\log\frac{100}{2}$

$B=20\log\frac{1}{|\Gamma_B|}=20\log\frac{100}{20}$

$\therefore$ $|A-B|=20$

41. 정답 65

$25=20+(120-20)10^{-0.02t}$ 에서 $\frac{1}{20}=10^{-0.02t}$ 양변에 상용로그를 취하면

$-(1+\log2)=-0.02t$

$\therefore$ $t=\frac{1.3}{0.02}=65$

42. 정답 27

어떤 지점에서 지진해일의 높이가 am 인 지진해일의 규모는 지진해일의 높이가 $9m$ 일 때의 지진해일의 규모의 1.5 배이므로 $1.5\times\log_8 9=\log_8 a$

$\therefore$ $a=9^{1.5}=(3^2)^{\frac{3}{2}}=27$

43. 정답⑤

$\log_{10}\frac{E_1}{E_2}=\log_{10}E_1-\log_{10}E_2$

$=(11.8+1.5\times9)-(11.8+1.5\times5)=6$

$\therefore$ $\frac{E_1}{E_2}=10^6$

44. 정답 10

$R=0.67\log(0.37E)+1.46$에서

지진의 규모가 6.15일 때 방출되는 에너지가 E_1이므로

$6.15=0.67\log(0.37E_1)+1.46$

$\log(0.37E_1)=7$

$0.37E_1=10^7\cdots\cdots$ ①

지진의 규모가 5.48일 때 방출되는 에너지가 E_2이므로

$5.48=0.67\log(0.37E_2)+1.46$

$\log(0.37E_2)=6$

$0.37E_2=10^6\cdots\cdots$ ②

①÷②하면 $\frac{E_1}{E_2}=10$

45. 정답 ⑤

10년전의 중심온도를 u_A, 현재의 중심온도를 u_B, 농촌온도를 r, 도시화된 지역의 넓이를 a라 하면

$u_A=r+0.65+1.6\log a$ -------------- ①

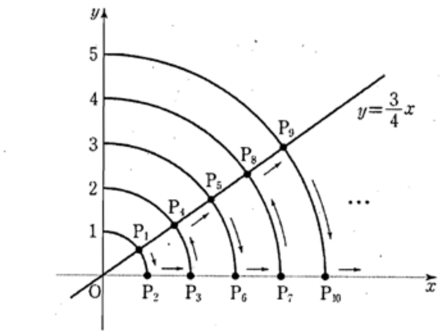
$u_B=r+0.65+1.6\log1.25a$ -------------- ②

로 나타낼 수 있다.

이 때, $x=u_B-u_A$이므로

②-①에 의해 $x=1.6\log\frac{5}{4}=1.6\log\frac{10}{8}=1.6(1-3\log2)$

$=1.6\times0.1=0.16$



46.정답 ③

[출제의도] 지수함수를 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

1991년 말 인구를 A(명), 매년 인구 증가율을 r라 하면, 15년 동안 2배 증가하였으므로

$A(1+r)^{15}=2A \quad \therefore (1+r)^{15}=2$

또, 6년 후인 1997년 말 인구는

$A(1+r)^6=A\{(1+r)^{15}\}^{\frac{2}{5}}=2^{\frac{2}{5}}A$

$x=2^{\frac{2}{5}}$라 하고, 양변에 상용로그를 취하면

$\log x=\frac{2}{5}\log 2=\frac{2}{5}\times 0.30=0.12$

$\therefore\ x=1.32$

따라서 1997년 말 인구는 $1.32A$이므로 1991 년 말보다 32% 증가하였다.

47. 정답 ②

$T=2T_0$일 때, $v=\sqrt{10}\,v_0$이므로 이를 대입하면

$\log\sqrt{10}=K\left(\frac{1}{T_0}-\frac{1}{2T_0}\right)$

$\frac{1}{2}=\frac{K}{2T_0} \quad \therefore \frac{K}{T_0}=1$

$T=4T_0$일 때

$\log\frac{v}{v_0}=K\left(\frac{1}{T_0}-\frac{1}{4T_0}\right)=\frac{3K}{4T_0}=\frac{3}{4}$

$\frac{v}{v_0}=10^{\frac{3}{4}}$

$\therefore v=10^{\frac{3}{4}}v_0=\sqrt[4]{1000}\,v_0$

48. 정답 ②

10초일 때와 20초일 때의 열전도계수를 구하면

$k=C\frac{\log t_2-\log t_1}{T_2-T_1}=C\frac{\log 20-\log 10}{202-200}$이고

10초일 때와 x초일 때의 열전도계수를 구하면

$k=C\frac{\log t_2-\log t_1}{T_2-T_1}=C\frac{\log x-\log 10}{206-200}$이므로

$C\frac{\log 20-\log 10}{202-200}=C\frac{\log x-\log 10}{206-200}$

$\frac{(\log 2+1)-1}{2}=\frac{\log x-1}{6}$

$\frac{\log 2}{2}=\frac{\log x-1}{6}$

$6\times\frac{\log 2}{2}=6\times\frac{\log x-1}{6}$

$3\log 2=\log x-1$

$\log 2^3+\log 10=\log 80=\log x$

$\therefore x=80$

49. 정답 ⑤

[출제의도] 로그 방정식을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

$90=100\log(h+7.57-1.7\times 50^{0.37})$

$0.9=\log(h+7.57-7.24)$

$3\log 2=\log(h+0.33)$

$\log 8=\log(h+0.33)$

$\therefore\ h=7.67$

50.정답 1

[출제의도] 상용로그의 지표와 가수를 이용하고 이를 활용하기

Ⅱ에서 $\log x=n+\alpha$, $\log y=n+\beta$라 하면

Ⅲ에 의해서 $\alpha+\beta=1$이다.

한편 Ⅰ에서 $2(n+\alpha)+3(n+\beta)=12.5$

$5n+2+\beta=12.5$이므로 $n=2,\ \beta=\frac{1}{2}=\alpha$이다.

$x=10^{\frac{5}{2}},\ y=10^{\frac{5}{2}} \quad \therefore \frac{x}{y}=1$

51. 정답11

[출제의도] 상용로그의 지표와 가수의 성질을 이용하여 무한급수의 합 구하기

$\log_{10}x=[\log_{10}x]$이므로 $\log_{10}x$의 가수는 0이다. 따라서

$\log_{10}x=n$(n은 음의 정수)

따라서 $x=\frac{1}{10},\ \frac{1}{10^2},\ \frac{1}{10^3},\ \cdots,\ \frac{1}{10^n},\ \cdots$

$S=\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\cdots+\frac{1}{10^n}+\cdots=\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{9}$

$\therefore\ 99S=11$

52. 정답 43

[출제의도] 로그의 성질을 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$200\leqq x\leqq 300$이므로 $7<\log_2 x<9$

(ⅰ) $7<\log_2 x<8$ 즉, $200\leqq x<256$일 때

$[\log_2 x]=7$, $[\log_4 x]=[\frac{1}{2}\log_2 x]=3$ 이므로 $[\log_3 x]=4$

$\therefore$ $4 \leqq \log_3 x < 5$, $200 \leqq x < 243$

(ii) $8 \leqq \log_2 x < 9$ 즉, $256 \leqq x \leqq 300$일 때

$[\log_2 x]=8$, $[\log_4 x]=4$, $[\log_3 x]=5$ 이므로 조건 (나)를 만족하는 자연수는 없다.

(i), (ii)에서 자연수 x는 43개이다.

53. 정답 32

[출제의도] 상용로그의 지표와 가수의 성질을 활용하여 정수부분의 자리수 구하기

$\log_{10}2430 = 3.3856$, $\log_{10}541 = 2.7332$이고

$\log_{10}(2430^{10} \div 541)$

$= 10\log_{10}2430 - \log_{10}541 = 10 \cdot 3.3856 - 2.7332$

$= 33.856 - 2.7332 = 31.1228$

$2430^{10} \div 541$의 정수부분은 32자리수이다.

54. 정답 11

$\log\frac{x^2}{y} = 2\log x - \log y$

$= 11 + 2\alpha - \beta$

$= 10 + \{1-(2\alpha-\beta)\}$ ($\therefore$ $2\alpha - \beta < 0$)

따라서 $\log\frac{x^2}{y}$의 지표는 10이므로 $\frac{x^2}{y}$의 정수부분은 11자리이다.

$\therefore n = 11$

55. 정답 37

$0 < \log a < 1$, $0 < \log b < 1$이고,

$\log a^3 = 3\log a$와 $\log b^5 = 5\log b$의 가수가모두 0이 되려면

$\log a = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$

$\log b = \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$

$\log a + \log b$의 최대값은 $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{22}{15}$

즉, $\log ab$의 최대값이 $\frac{22}{15}$이므로 ab의 최대값은 $10^{\frac{22}{15}}$이다.

$\therefore p+q = 37$

56. [출제의도] 상용로그의 가수를 이해하고 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\log x^3 - \log x = 3\log x - \log x = 2\log x =$(정수)이므로

ㄱ. $\sqrt{10} < x < 1000$에서 $1 < 2\log x < 6$

$\therefore N(\sqrt{10}, 1000) = 4$ (참)

ㄴ. $10^p < x < 10^{p+10}$에서 $2p < 2\log x < 2p+20$

$\therefore N(10^p, 10^{p+10}) = 19$ (참)

ㄷ. $2^{10} < x < 2^{50}$에서 $6.02 < 2\log x < 30.10$

$\therefore N(2^{10}, 2^{50}) = 24$ (거짓)

57. 정답 ③

[해설] $\log_{10}0.02 = -2 + \log_{10}2$, $\log_{10}200 = 2 + \log_{10}2$,

$\log_{10}2500 = 3 + \log_{10}2.5$

지표의 합은 $-2+2+3=3$

가수의 합은 $\log_{10}2 + \log_{10}2 + \log_{10}2.5 = 1$

58.정답 ⑤

ㄱ. (log10의 지표)=(log99의 지표)= 1

$\therefore$ $A_{10} = A_{99}$

ㄴ. (log100의 지표)= 2

$\therefore$ $A_{100} = \{l \mid 100 \leqq l \leqq 999, l$은 정수$\}$

(log10의 지표)=1

$\therefore$ $A_{10} = \{l \mid 10 \leqq l \leqq 99, l$은 정수$\}$

$n(A_{100}) = 900$, $n(A_{10}) = 90$

$\therefore$ $n(A_{100}) = 10 n(A_{10})$

ㄷ. $A_p \cap A_q \neq \phi$에서

($\log p$의 지표)=($\log q$의 지표)

$\therefore$ $A_p = A_q$

59. 정답 40

$\log\frac{1}{2} = -\log 2 = -1 + (1-\log 2)$이므로 $\log\frac{1}{2}$의 가수는 $1-\log 2$이다.

$\log n = 1+\alpha$ $(0 \leq \alpha < 1)$라 하면 $0 \leq \alpha < 1 - \log 2$이므로

$1 \leq \log n < 2 - \log 2 = \log 50$

$\therefore$ $10 \leq n < 50$

따라서 자연수 n의 개수는 40개다.

60. 정답 ③

[출제의도] 상용로그의 지표와 가수의 성질을 알고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $f(2010) = f(0.201) = \log 2.01$ (참)

ㄴ. (반례) $x = 10$, $y = \sqrt{10}$이면 $f\left(\frac{x}{y}\right) = 0.5$,

$f(x) - f(y) = -0.5$이다. (거짓)

ㄷ. $f(x) + f(y) = 0$이므로 $f(x) = f(y) = 0$이다. 따라서 $x = 10^m$, $y = 10^n$ (m, n은 정수)이다. 그런데 $x > 1$, $y > 1$ 이므로 x, y는 모두 정수이다. (참)

61. 정답 6

[출제의도] 상용로그의 가수를 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\log n = \alpha$라 하면 $1 < n < 10$이므로 $0 < \alpha < 1$이다.

$\log\frac{1}{n} = -\log n = -\alpha = -1+(1-\alpha)$

$\log n^2 = 2\log n = 2\alpha$

(i) $0<\alpha<\frac{1}{2}$일 때,

$1-\alpha>2\alpha$이므로 $0<\alpha<\frac{1}{3}$

따라서 $0<\log n<\frac{1}{3}$이므로 $1<n<\sqrt[3]{10}$

$\therefore n=2$

(ii) $\frac{1}{x}\leq\alpha<1$일 때,

$1-\alpha>2a-1$이므로 $\frac{1}{2}\leq\alpha<\frac{2}{3}$

따라서 $\frac{1}{2}\leq\log n<\frac{2}{3}$이므로 $\sqrt{10}\leq n<\sqrt[3]{100}$

$\therefore n=4$

따라서 구하는 모든 자연수 n의 값의 합은 $2+4=6$이다.

62. 정답: 48

[출제의도] 상용로그의 지표와 가수의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

(가) 에서 $1\leqq\log M<2$ 임을 알 수 있고

(가)에 의해 $\log M=21+\alpha\,(0\leqq\alpha<1)$ 라 하면

$\log M^2=2+2\alpha=2\log M$에서 $2\leqq\log M^2<3$ 이므로

$0\leqq2\alpha<1$ 즉 $0\leqq\alpha<\frac{1}{2}$ 이다.

이때, (다)는 $\log M$과 $\log M^2$ 의 가수의 합이 1 임을 나타내므로 $\log M+\log M^2=3+3\alpha$ 는 정수이다.

$0\leqq3\alpha<3$ 이므로 $3\alpha=0, 1, 2$ 이고 $\alpha=\frac{1}{3}$ ($\because$ 가수의 합이 1 이고 $0\leqq\alpha<\frac{1}{2}$)

$\log M=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$

$\therefore 36\log M=36\times\frac{4}{3}=48$

63. 정답 ②

$\log x=-\frac{4}{5}$이므로

$\log x^2=-\frac{8}{5}=-2+0.4$

이고 $\log2<0.4<\log3$ 이므로

따라서 x^2은 소수점 아래 2번째 자리에서

처음으로 0이 아닌 숫자 2가 나타난다.

$\therefore a+b=2+2=4$

64. 정답 ③

$\log_{10}x=1+\alpha\ (0\leqq\alpha<1)$

$\log_{10}y=2+\beta\ (0\leqq\beta<1)$

ㄱ. $\log_{10}xy=\log_{10}x+\log_{10}y=3+\alpha+\beta$ 이고 여기에서 $0\leqq\alpha+\beta<2$이므로 지표는 3 또는 4이다.

$\therefore$ xy는 4자리 또는 5자리 자연수이다. (참)

ㄴ. $\log_{10}y=\log_{10}10x=1+\log_{10}x=2+\alpha$ (참)

ㄷ. (반례) $x=10$일 때, $\frac{1}{10}=0.1$ (거짓)

65. 정답100

$\log x=f(x)+g(x)$ 이므로

$\log a=f(a)+g(a)\ \cdots$ ㉠, $\log b=f(b)+g(b)\ \cdots$ ㉡

㉠-㉡에서

$\log a-\log b=f(a)-f(b)+g(a)-g(b)=2-\log3$

이므로 $\log\frac{a}{b}=\log\frac{100}{3}$, $\frac{a}{b}=\frac{100}{3}$

$\therefore\ 3a=100b$

산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$3a+\frac{25}{b}=100b+\frac{25}{b}\geqq2\sqrt{100b\times\frac{25}{b}}=100$ 이고, 등호는

$a=\frac{50}{3}$, $b=\frac{1}{2}$일 때 성립한다.

따라서 구하는 최솟값은 100

66.정답 19

[출제의도] 상용로그의 지표와 가수를 이용하여 주어진 조건을 해결할 수 있다.

Ⅰ에서 $6\leqq\log_{10}x<7\ \cdots$ ㉠

Ⅱ에서 $\log_{10}x^2$과 $\log_{10}\frac{1}{x}$ 의 소수부분(가수)이 같으므로

$\log_{10}x^2-\log_{10}\frac{1}{x}=3\log_{10}x=$ (정수)

㉠에서 $18\leqq3\log_{10}x<21$ 이므로

$3\log_{10}x=18,\ 19,\ 20$

$\log_{10}x=6,\ \frac{19}{3},\ \frac{20}{3}$

$x=10^6,\ 10^{\frac{19}{3}},\ 10^{\frac{20}{3}}$

$\log M=\log10^6\times10^{\frac{19}{3}}\times10^{\frac{20}{3}}$

$\therefore\ \log M=19$

67. 정답1

$\left[\frac{[\log_2x]}{\log_2x}\right]=1$ 을 만족시키려면

$[\log_2x]=\log_2x=n$ (정수)이어야 한다. $0<x<1$ 에서 이를 만족시키는 값은 $x=2^{-1},\ 2^{-2},\ 2^{-3},\ \cdots$이며 이들을 모두

더하면 된다.

$$\therefore \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

68. 정답 ⑤

ㄱ. (참)

(i) $f(n)=g(n)$ 인 경우는 $f(n)=g(n)=0$ 인 경우이다.

$\log n = f(n)+g(n)$ 이므로 $\log n = 0$, $n=1$ 이다.

(ii) $n=1$ 이면 $\log 1 = 0$ 이므로 $f(1)=g(1)=0$

(i), (ii)에서 필요충분조건이 성립한다.

ㄴ. (참) $\log 50 = 1+\log 5$ ∴

$f(50)=1$, $g(50)=\log 5$

$10^{f(50)}\times 10^{g(50)} = 10^1\times 10^{\log 5} = 10\times 5 = 50$

ㄷ. (참) $\log 10n = 1+\log n = 1+f(n)+g(n)$

$\therefore f(10n)=1+f(n)$, $g(10n)=g(n)$

$\therefore f(10n)g(10n)=(1+f(n))\cdot g(n) = f(n)g(n)+g(n)$

69. 정답 ④

ㄱ. $3<\log_2 9<4$ 이므로 $f(2,9)=3$ (거짓)

ㄴ. $f(a,b)=2$ 이면 $2\leqq \log_a b<3 \Leftrightarrow \frac{1}{3}<\log_b a \leqq \frac{1}{2}$

$\therefore f(b,a)=0$ (참)

ㄷ. $f(a,b)=-2$ 이면

$-2\leqq \log_a b<-1 \Leftrightarrow -1<\log_b a\leqq -\frac{1}{2}$

$\therefore f(b,a)=-1$ (참)

70. 정답 ③

$[\log 2N]=[\log N]+1$ 에서 $\log 2N$의 지표가 $\log N$의 지표보다 1 만큼 크므로 $2N$의 자리수가 N의 자리수보다 1 만큼 크다. 즉 $5\times 10^2\leqq N<10^3$

$\therefore 2+\log 5\leqq \log N<3$

ㄱ. $5.3980\leqq \log N^2<6$ 에서 $\log N^2$ 의 지표는 항상 5 이다.

$\therefore N^2$ 은 항상 6 자리의 수이다.

ㄴ. $8.0970\leqq \log N^3<9$ 에서 $\log N^3$ 의 지표는 항상 8 이다.

$\therefore N^3$ 은 항상 9 자리의 수이다.

ㄷ. $10.7960\leqq \log N^4<12$ 에서 $\log N^4$ 의 지표는 10 또는 11 이다.

$\therefore N^4$ 은 11 자리 또는 12 자리의 수이다.

따라서, 옳은 것은 ㄱ과 ㄴ이다.

71. 정답 ⑤

[출제의도] 상용로그의 지표의 뜻과 주어진 수열의 항을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\log 2^{201}=201\log 2=201\cdot 0.3010=60.5010$ 이므로

2^{201} 은 61자리의 자연수이다.

따라서 $1\leqq k\leqq 60$ 인 모든 자연수 k에 대하여 2^n 이 k자리의 수이고, 2^{n+1} 이 $k+1$자리의 수인 자연수 n이 반드시 하나씩 대응한다.

따라서 $a_{n+1}>a_n$ 을 만족하는 자연수 n의 개수는 60이므로

$b_n=1$을 만족하는 자연수 n의 개수는 60이고, 나머지 n에 대해서는 $b_n=0$이다.

$$\therefore \sum_{k=1}^{200} b_k = 60$$

72. 정답 ③

[출제의도] 상용로그의 가수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$50=2\times 5^2$ 이므로 50 의 양의 약수는 1, 2, 5, 10, 25, 50 의 6 개이다. 이때 3 개의 쌍 (1, 50), (2, 25), (5, 10) 에 대하여

$\log 1$ 과 $\log 50$ 의 가수는 각각 $\log 1$, $\log 5$,

$\log 2$ 과 $\log 25$ 의 가수는 각각 $\log 2$, $\log 2.5$,

$\log 5$ 과 $\log 100$ 의 가수는 각각 $\log 5$, $\log 1$

이므로 구하는 가수의 합은

$(\log 1+\log 5)+(\log 2+\log 2.5)+(\log 5+\log 1)=3\log 5$

73. 정답 19

[출제의도] 상용로그의 가수의 성질을 활용하여 진수 구하기

[해설] $1<a<10$에서 $\log_{10}a=\alpha\ (0<\alpha<1)$이다.

$\log_{10}a^3$과 $\log_{10}\sqrt{a}$ 의 가수의 합이 1이므로

$3\alpha+\frac{1}{2}\alpha=\frac{7}{2}\alpha$는 정수이다.

$\alpha=\frac{2}{7},\alpha=\frac{4}{7},\ \alpha=\frac{6}{7}$ 이므로

a의 곱은 $10^{\frac{2}{7}}\cdot 10^{\frac{4}{7}}\cdot 10^{\frac{6}{7}}=10^{\frac{2}{7}+\frac{4}{7}+\frac{6}{7}}=10^{\frac{12}{7}}$

$\therefore 7+12=19$

74. 정답 ⑤

[출제의도] 상용로그의 지표와 가수의 의미를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$x\geqq 1$이므로 $\log_2 x\geqq 0$ $f(x)=n$ (n은 음이 아닌 정수)라 하면

$n\leqq \log_2 x<n+1$

$\Leftrightarrow 2^n\leqq x<2^{n+1}$ …① $f(2x+12)=f(x)+3=n+3$

$\therefore\ n+3\leqq \log_2(2x+12)<n+4$ $2^{n+3}\leqq 2x+12<2^{n+4}$

$2^{n+2}-6\leqq x<2^{n+3}-6$…②

①,②에서

i) $n=0$ 일 때, $1\leqq x<2$, $-2\leqq x<2$ $\therefore 1\leqq x<2$

ii) $n=1$ 일 때, $2\leqq x<4$, $2\leqq x<10$ $\therefore 2\leqq x<4$

iii) $n=2$ 일 때, $4 \leqq x < 8$, $10 \leqq x < 26$ ∴ 해가 없다.
iv) $n \geqq 3$ 일 때, 해가 없다.
따라서 i)~iv)에서 $1 \leqq x < 4$이 된다.

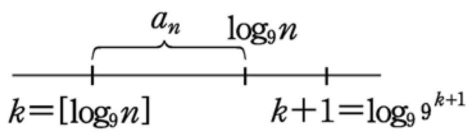
75. 정답 64
N은 두 자리의 자연수이므로 $\log N = 1+\alpha$
$\frac{1}{2}+1+\alpha = \alpha + \frac{1}{2}\left(\frac{1+\alpha}{\log 2}-3\right)$, $\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1+\alpha}{\log 2}-3\right)$
$3=\frac{1+\alpha}{\log 2}-3$, $6=\frac{1+\alpha}{\log 2}$
$\log N = 1+\alpha = 6\log 2 = \log 64$
$\therefore N=64$

76. 정답 21
N^2이 7자리 수이므로 $\log N^2 = 6+\alpha$ $(0<\alpha<1)$이라 하면
$\log N = 3+\frac{\alpha}{2}$
$\log\frac{1}{N} = -\log N = -4+\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$
$\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{4}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow \alpha = \frac{2}{5}$
$\therefore \log N = 3+\frac{1}{5}=\frac{16}{5}$
$p+q=5+16=21$

77. 정답 310
[출제의도] 상용로그의 지표와 가수를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.
$100 \leqq A < 1000$, $900 < B < 1000$이고,
$\log B$의 가수가 $\log A$의 가수의 2배이므로
$\log A = 2+\alpha$, $\log B = 2+2\alpha$ $\left(0 \leqq \alpha < \frac{1}{2}\right)$
$2\log A - \log B = \log\frac{A^2}{B} = 2$ 이므로 $\frac{A^2}{B}=100$
$\therefore 100B = A^2$
A는 10의 배수이므로 $A=10C$ (C는 자연수)라
하면 $100B=(10C)^2=100C^2$ $\therefore B=C^2$
따라서 B는 900보다 큰 세 자리의 수이면서 완전제곱수이다.
$30^2=900$, $31^2=961$, $32^2=1024$이므로
$B=31^2$, $A^2=100B=10^2 \cdot 31^2=(310)^2$
$\therefore A=310$

78. 정답 80
i) $10 \leqq n < 81$이면 $[\log_9 n]=1$이므로
$\log_9 n - [\log_9 n] = \log_9\frac{n}{9}$이고
$\log_9\frac{n}{9}$이 최대이어야 하므로 $n=80$

ii) $81 \leqq n < 100$이면 $[\log_9 n]=2$이므로
$\log_9 n - [\log_9 n] = \log_9\frac{n}{81}$이고
$\log_9\frac{n}{81}$이 최대이어야 하므로 $n=99$
따라서, i), ii)에서 $\log_9\frac{80}{9} > \log_9\frac{99}{81}$이므로
구하는 n은 80이다.



[다른 풀이]
$a_n = \log_9 n - [\log_9 n]$을 수직선 위에 나타내어보면
$[\log_9 n]=k$일 때
∴ n이 9^{k+1}보다 왼쪽에 있는 최대수일 때 즉 $9^{k+1}-1$일 때 a_n이 최대이다.
n이 두 자리수 이므로 $n=9^2-1=80$일 때
a_n이 최대이다.

79. 정답 ⑤
[출제의도] 상용로그의 지표와 가수의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.
ㄱ. $N_{15}=1515\cdots15$ 는 2×15자리의 수이므로
$\log N_{15}$ 의 지표는 $30-1=29$이다.
$\therefore p(15)=29$ (거짓)
ㄴ. $q(n)=0$이면 $\log N_n = p(n)$ (정수)
즉, $N_n=10^{p(n)}$이다.
한편, $q(1)=0$이고, $n \neq 1$이면 N_n은 10^k의 꼴이 될 수 없다.
즉, $q(n)\neq 0$
따라서 n은 1뿐이다. (참)
ㄷ. $n=10^k$은 $(k+1)$자리의 수이고
N_n은 $n(k+1)$자리의 수이므로 $p(n)=nk+n-1$
이때 $n-1=10^k-1$은 k자리의 수이고
N_{n-1}은 $(n-1)k$자리의 수이므로
$p(n-1)=nk-k-1$
$\therefore p(n)-p(n-1)=n+k$ (참)

80. 정답 11
$\log x$의 지표가 4, $\log y$의 지표가 1이므로
$4 \leqq \log x < 5$, $1 \leqq \log y < 2$
$\log\frac{x}{y}=\log x - \log y$ 이므로
$2<\log\frac{x}{y}<4$ ……㉠
$\left(\log\frac{x}{y}\right)\left(\log\frac{y}{x}\right)=\left(\log\frac{x}{y}\right)\left(\log\left(\frac{x}{y}\right)^{-1}\right)=-\left\{\log\frac{x}{y}\right\}^2$ 이다.

㉠에서 $-16<-\left\{\log\frac{x}{y}\right\}^2<-4$

이므로 구하는 정수는 $-15,\ -14,\ -13,\ \cdots,\ -6,\ -5$

따라서 정수의 개수는 11개이다.

81.정답 ②

[출제의도] 상용로그의 지표와 가수의 성질 이해하기

[해설] $10^{f(x)+g(x)}=x$의 양변에 상용로그를 취하면 $f(x)+g(x)=\log x$이다.

즉, $\log x$의 지표가 $f(x)$, 가수가 $g(x)$이다.

$f(a)=3$이므로 $\log a$의 지표는 3이다.

$\log a=3+g(a)$

$\log\sqrt{a}=\frac{3}{2}+\frac{g(a)}{2}=1+\left\{\frac{1}{2}+\frac{g(a)}{2}\right\}$

$\log\sqrt{a}$ 의 가수는 $\frac{1}{2}+\frac{g(a)}{2}$이다.

$g(a)+g(\sqrt{a})=g(a)+\left\{\frac{1}{2}+\frac{g(a)}{2}\right\}=1$이므로

$g(a)=\frac{1}{3}$이다.

따라서 $\log a=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$이므로 $a=10^{\frac{10}{3}}$ 이다.

82.정답 24

$3\leq\log N<4,\ 3\leq\frac{\log_2 N}{\log_2 10}<4$

$\frac{3}{\log 2}\leq\log_2 N<\frac{4}{\log 2}$

$9.96\cdots\leq\log_2 N<13.28\cdots$

따라서 자연수 N을 이진법의 수로 나타낼 때, 가능한 자릿수는 10,11,12,13,14이다.

$\therefore a+b=10+14=24$

83. 정답 ③

ㄱ. $\log 100=2$의 지표가 2이므로 $f(100)=(-1)^2=1$ ∴ 참

ㄴ. $\log x$의 지표를 n_1이라 하면 $f(x)=-1$이므로 $(-1)^{n_1}=-1$

$\log 100x=2+\log x$이므로 $\log 100x$의 지표는 n_1+2

$f(100x)=(-1)^{n_1+2}=(-1)^{n_1}\times(-1)^2=-1$ ∴ 참

ㄷ. $\log x_1$의 지표를 n_1, 가수를 α

$\log x_2$의 지표를 n_2, 가수를 β라 하면

($n_1,\ n_2$는 정수, $0\leq\alpha<1,\ 0\leq\beta<1$)

$\log x_1x_2=n_1+n_2+\alpha+\beta$이므로

$0\leq\alpha+\beta<1$이면 $\log x_1x_2$의 지표는

n_1+n_2 ……㉠

$1\leq\alpha+\beta<2$이면 $\log x_1x_2$의 지표는

n_1+n_2+1 ……㉡

$f(x_1)=1,\ f(x_2)=1$이므로 $(-1)^{n_1}=(-1)^{n_2}=1$이다.

하지만 ㉡의 경우

$f(x_1x_2)=(-1)^{n_1+n_2+1}=(-1)^{n_1}\times(-1)^{n_2}\times(-1)=-1$

∴ 거짓

84. 정답 ②

$f(t)=20(1-a^{-0.7(t+0.4)})\geqq 16\Leftrightarrow a^{-0.7(t+0.4)}\leqq\frac{1}{5}$

양변에 밑이 a인 로그를 취하면

$0.7(t+0.4)\geqq\log_a 5=1.4\Leftrightarrow t\geqq 1.6$

85.정답 ⑤

[출제의도] 로그를 활용하여 실생활문제 해결하기

[해설] 원산지 생산가격을 a, 비율을 r라 하자.

$a(1+r)^5=2.24a,\ (1+r)^5=2.24$

$5\log(1+r)=\log 2.24=0.35$

$\log(1+r)=0.07=\log 1.17$ ∴ $1+r=1.17$

$\frac{a(1+r)}{a(1+r)^5}\times 100=\frac{1.17}{2.24}\times 100\fallingdotseq 52$이므로

약 52%이다.

86. 정답 ④

[출제의도] 지수의 성질을 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는 가를 묻는 문제이다.

$N(5)=\frac{K}{1+c\cdot a^{-5b}}=\frac{K}{2}$에서 $c=a^{5b}$ 이므로

$N(7)=\frac{K}{1+a^{-2b}}=\frac{3}{4}K$에서 $a^{-2b}=\frac{1}{3}$이다.

∴ $N(9)=\frac{K}{1+a^{-4b}}=\frac{K}{1+(a^{-2b})^2}=\frac{9}{10}K$

87. 정답 ①

[출제의도] 로그의 성질을 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\log_a D_2-\log_a D_1=\log_a\frac{D_2}{D_1}=\frac{1}{3}\log_a\frac{P_1}{4P_1}$

$=\log_a\frac{1}{4}^{\frac{1}{3}}$ ∴ $\frac{D_2}{D_1}=\frac{1}{4}^{\frac{1}{3}}=2^{-\frac{2}{3}}$

88.정답 416

$20+180\times 3^{-\frac{n}{256}}=50$

$3^{-\frac{n}{256}}=\frac{1}{6}$

$3^{\frac{n}{256}}=6$

$\frac{n}{256}=\log_3 6=\log_3 2+1$

$= 1 + \frac{\log_2}{\log_3} = 1 + \frac{0.30}{0.48}$

$= 1 + \frac{5}{8} = \frac{13}{8}$

$\therefore\ n = 256 \times \frac{13}{8} = 32 \times 13$

$= 416$

89. 정답 ②

초기 이산화탄소 농도 $C(0) = 0.83$이고, 1시간 뒤 즉 $t = 1$일 때 이산화탄소 농도 $C(1) = 0.43$이므로 주어진 식에 $t = 1$을 대입하면 환기량

$Q = k \times \frac{V}{1} \log \frac{0.83 - 0.03}{0.43 - 0.03} = kV \cdot \log 2$

이다. 이산화탄소 농도가 0.08%가 되는 t는

$Q = k \times \frac{V}{t} \log \frac{0.83 - 0.03}{0.08 - 0.03} = \frac{4kV\log 2}{t}$

를 만족한다. 그런데 환기량이 일정하므로

$kV\log 2 = \frac{4kV\log 2}{t}$

$\therefore\ t = 4$

90. 정답80

[출제의도] 로그를 이용하여 실생활에서의 문제 해결하기

$K = \frac{2.3Q}{2\pi LH} \cdot \log_{10} \frac{L}{r}$ …①

$\frac{1}{2}K = \frac{2.3 \times 2Q}{2\pi LH} \cdot \log_{10} \frac{L}{4r}$ …②

①÷② 하면 $2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\log_{10} \frac{L}{r}}{\log_{10} \frac{L}{4r}}$

따라서 $\frac{L}{r} = 10^{0.8}$

$\therefore\ 100n = 80$

91. 정답 42

$t = 25.2$, $a : b = 3 : 1$이므로

$25.2 = k\log_{10}\left(\frac{9b}{3b} + 1\right) = k\log_{10}4$

$k = \frac{25.2}{2\log_{10}2} = 42$

$x = k\log_{10}\left(\frac{9a}{a} + 1\right) = k\log_{10}10 = k = 42$

92. 정답 ①

철수와 철수 아빠의 표면적을 각각 S_1, S_2 라 하자.

$S_1 = 0.02 \times 90^{0.4} \times 20^{0.5}$,

$S_2 = 0.02 \times (90 \times 2)^{0.4} \times (20 \times 4)^{0.5}$

$= 0.02 \times (90)^{0.4} \times (20)^{0.5} \times 2^{0.4} \times 4^{0.5} = 2^{1.4} S_1$

이때, $2^{1.4} = k$라 하면

$\log k = 1.4 \times \log 2 = 1.4 \times 0.3010 = 0.4214$ 상용로그표에서

$k \fallingdotseq 2.64$

따라서 $S_2 = 2.64\, S_1$

93.정답 14

f가 일정하고 $m \to 5m$일 때, $L \to L + a$가 된다.

$L = 20\log mf - 48$ … ①

$L + a = 20\log 5mf - 48$

$= 20\log 5 + 20\log mf - 48$ … ②

①, ②에서

$a = 20\log 5$

$= 20\log \frac{10}{2}$

$= 20(1 - \log 2)$

$= 20(1 - 0.3)$

$= 14$

94. 정답②

$B = 14 + 0.6T + (0.4T - 12)v^{0.16}$ 에서

$T = -15$, $v = x$, $B = -25$ 이므로

$-25 = 14 + 0.6 \cdot (-15) + \{0.4 \cdot (-15) - 12\}\, x^{0.16} \Leftrightarrow$

$18x^{0.16} = 30 \Leftrightarrow x^{0.16} = \frac{30}{18} = \frac{10}{6}$

양변에 상용로그를 취하면

$0.16\log x = 1 - (\log 2 + \log 3) = 1 - (0.30 + 0.48) = 0.22$

$\therefore\ \log x \fallingdotseq 1.38$

따라서 로그표에서 $\log 2.4 = 0.38$ 이므로 $x = 24$

95. 정답 ④

[출제의도] 상용로그의 지표를 이용하여 자리수 구하기

구하고자 하는 수는 $\sqrt{2\pi} \cdot 100^{100+\frac{1}{2}} \cdot e^{-100}$의 정수부분의 자리수가 같으므로

$\log_{10}\left(\sqrt{2\pi} \cdot 100^{100+\frac{1}{2}} \cdot e^{-100}\right)$

$= \log_{10}\sqrt{2\pi} + \log_{10}100^{100+\frac{1}{2}} + \log_{10}e^{-100}$

$= \frac{1}{2}(\log_{10}2 + \log_{10}\pi) + 201 - 100\log_{10}e$

$= 157.96905$

$\therefore$ 158자리수

96. 정답②

이 학생이 $3n$ 개월 후에 제품 A를 구입할 수 있다고 하면

$24\times(0.9)^n - 16\times(0.95)^n \leqq \dfrac{1}{5}\times 16\times(0.95)^n$

$\Leftrightarrow 120\times(0.9)^n - 80\times(0.95)^n \leqq 16\times(0.95)^n$

$\Leftrightarrow 15\times(0.9)^n \leqq 12\times(0.95)^n \Leftrightarrow \left(\dfrac{0.9}{0.95}\right)^n \leqq \dfrac{4}{5}$

양변에 상용로그를 취하면

$n(2\log 3 - 1 - \log 0.95) \leqq 3\log 2 - 1$

$\Leftrightarrow n(0.96 - 1 + 0.02) \leqq 0.9 - 1$

$\therefore\ n \geqq \dfrac{-0.1}{-0.02} = 5$

따라서 $3\times 5 = 15$ 개월 후에 제품 A 를 최초로 구입할 수 있다.

97. 정답②

현재 인구를 a 라 하면, n 년 후 두 도시의 인구는

A: $(1+0.02)^n a$, B: $(1-0.02)^n a$ 이다.

$(1+0.02)^n a \geqq 2(1-0.02)^n a$ 이므로

$1.02^n \geqq 2\times 0.98^n \Leftrightarrow \left(\dfrac{1.02}{0.98}\right)^n \geqq 2 \Leftrightarrow \left(\dfrac{51}{49}\right)^n \geqq 2$ 이다.

양변에 상용로그를 취하면

$n(\log_{10} 51 - \log_{10} 49) \geqq 0.3010 \Leftrightarrow n\times 0.0174 \geqq 0.3010$

$\therefore\ n \geqq \dfrac{0.3010}{0.0174} = 17.29\cdots \quad \therefore 2022 \sim 2023$년

98. 정답③

현재 산소농도가 21% 이므로 10 분씩 n 번 경과한 후의 농도는

$21(1-0.01)^n$ 따라서

$21(1-0.01)^n \leqq 18 \Leftrightarrow (0.99)^n \leqq \dfrac{6}{7}$ 양변에 상용로그를 취하여

계산하면 $n(\log 9.9 - 1) \leqq \log 6 - \log 7 \Leftrightarrow$

$n \geqq \dfrac{0.0669}{0.0044} = \dfrac{669}{44} = 15.2\times\times$

$\therefore\ n = 16$

따라서 처음으로 산소농도가 18% 이하로 측정되는 시간은

10 분씩 16 번 경과했으므로 160 분 후이다.

99. 정답 ②

[출제의도] 로그를 활용한 실생활 문제 해결하기

매장된 석유량 $= \dfrac{a\{(1.02)^{40}-1\}}{1.02-1}$,

2008 년부터 n 년 동안의 소비량$= \dfrac{a\{1-(0.99)^n\}}{1-0.99}$ 이므로

$\dfrac{a\{1-(0.99)^n\}}{1-0.99} = \dfrac{a\{1-(0.99)^n\}}{1-0.99}$

$\dfrac{2.208-1}{0.02} = \dfrac{1-(0.99)^n}{0.01}$

$0.604 = 1-(0.99)^n$

$n\log_{10} 0.99 = \log_{10} 0.396$

$n(\log_{10} 9.9 - 1) = \log_{10} 3.96 - 1$

$n(0.9956-1) = (0.5977-1)$

$n = \dfrac{0.4023}{0.0044} \fallingdotseq 91.4$ 이므로

2099 년에는 고갈될 것으로 예측할 수 있다.

100. 정답 10

20 분마다 분열해서 2 배씩 증가하므로 1 시간에 2^3 배 만큼 증가하고 n 시간 동안에는 $(2^3)^n$ 배만큼 증가한다.

$2.56\times 10^3\times(2^3)^n = 2.56\times 10^{12}$

$2^{3n} = 10^9 \quad 3n\log 2 = 9 \quad \therefore\ n = 10$(시간)

101. 정답 ①

[출제의도] 실생활에서 상용로그를 이용하여 최소시간 구하기

[해설] 시간을 t라 하면

A는 3시간마다 2배씩 증가하므로 t시간 후에는 $2^{\frac{t}{3}}$ 배,

B는 5시간마다 3배씩 증가하므로 t시간 후에는 $3^{\frac{t}{5}}$ 배이다.

$100\cdot 2^{\frac{t}{3}} \geqq 1000\cdot 3^{\frac{t}{5}}$ 양변에 상용로그를 취하면

$\dfrac{t}{3}\log 2 \geqq 1 + \dfrac{t}{5}\log 3$

$(5\log 2 - 3\log 3)t \geqq 15$

$t \geqq \dfrac{15}{5\times 0.30 - 3\times 0.48} = 250$

102. 정답 15

[출제의도] 로그를 이용하여 실생활에서의 문제 해결하기

상환할 금액이 a원

1월에 상환하고 남은 금액 $0.9a$

2월에 상환하고 남은 금액 $0.9\times 0.8\times a$

3월에 상환하고 남은 금액 $(0.9)^2\times 0.8\times a$

4월에 상환하고 남은 금액 $(0.9)^2\times(0.8)^2\times a$

...

홀수달 s개월, 짝수달 t개월 만에 상환한다면

$0.9^s\times 0.8^t\times a \leqq \dfrac{1}{10}a$

양변에 로그에 취하면

$s\log 0.9 + t\log 0.8 \leqq \log\dfrac{1}{10}$

$-0.04s - 0.1t \leqq -1$

$4s + 10t \geqq 100$ ($s=t$ 또는 $s=t+1$)

$\therefore s=8,\ t=7$

$\therefore s+t=15$

$\therefore n=15$

103. 정답 ②

농업 또는 임업 종사자의 매년 감소율을 r 라 하면 $(1+r)^5=0.8$

$\therefore 1+r=0.8^{\frac{1}{5}}$

2000 년으로부터 n년 후의 종사자의 수(단위만명)는

$216(1+r)^n=216\times0.8^{\frac{n}{5}}$ 이므로 $216\times0.8^{\frac{n}{5}}\leq 216\times\frac{1}{2}$

양변에 로그를 취하여 정리하면 $\frac{n}{5}\log0.8\leq -\log2$

$n\geq\frac{5\times0.3010}{0.097}=15.5\cdots$

따라서 2000년으로부터 16년 후인 2016년 초이다.

104. 정답 ②

현재의 수출량을 a 라 하면 n 년후의 수출량은 $a(1.08)^n$ 이므로 3 배이상이 되려면

$a(1.08)^n\geq 3a$, 양변에 상용로그를 취하면

$n\log_{10}1.08\geq\log_{10}3$

$n\geq\frac{\log_{10}3}{\log_{10}1.08}=\frac{0.4771}{0.0334}\fallingdotseq 14.27$

∴ 최소 15 년 후부터 수출량이 3 배 이상이 된다.

105. 정답③

2015 년 초 원리합계는 $10^8\times(1+0.05)^{10}$ (원)

매년 A 원 씩 연금을 받는다고 할 때, 2015 년을 기준으로 했을 때의 가치는 각각

A , $\frac{A}{(1+0.05)}$, $\frac{A}{(1+0.05)^2}$, …이다. 따라서

$\frac{A}{1-\frac{1}{1.05}}=10^8\times1.05^{10}$ 에서

$A=10^8\times1.05^{10}\times\frac{0.05}{1.05}=10^8\times1.05^9\times0.05=7{,}750{,}000$

106. 정답 ③

새 차의 가격 $P=2\times10^7$, $t=5$, $r=0.15$를

주어진 식에 대입하면

$\log0.85=\frac{1}{5}(\log W-\log(2\times10^7))$

$\log W=5\log0.85+\log(2\times10^7)$

$\log W=5\times\overline{1}.93+0.3+7=6.95=\log(8.9\times10^6)$

$W=8.9\times10^6=890$만 원

107. 정답 ③

$1\leq n\leq 9$ 일 때, $\log n$ 의 지표는 0이므로 가수 $f(n)$ 의 값은

$\log1, \log2, \log3, \cdots, \log9$ …㉠

의 9개이고, 이들은 서로 다른 값이다.

$10\leq n\leq 99$ 일 때, $\log n$ 의 지표는 1이므로 가수 $f(n)$ 의 값은

$\log\frac{10}{10}, \log\frac{11}{10}, \log\frac{12}{10}, \cdots, \log\frac{99}{10}$ …㉡

의 90개이고, 이들은 서로 다른 값이며, 이들 중

$\log\frac{10}{10}, \log\frac{20}{10}, \log\frac{30}{10}, \cdots, \log\frac{90}{10}$

의 9개는 ㉠의 값과 중복된다.

$100\leq n\leq 150$ 일 때, $\log n$ 의 지표는 2이므로 가수 $f(n)$ 의 값은

$\log\frac{100}{100}, \log\frac{101}{100}, \log\frac{102}{100}, \cdots, \log\frac{150}{100}$

의 51개이고, 이들은 서로 다른 값이며, 이들 중

$\log\frac{100}{100}, \log\frac{110}{100}, \log\frac{120}{100}, \cdots, \log\frac{150}{100}$

의 6개는 ㉠,㉡의 값과 중복된다.

따라서 집합 A 의 원소의 개수는

$9+(90-9)+(51-6)=135$ (개)이다.

108. 정답 ③

$f(t+c)=3^{-t-c}$, $\frac{1}{2}f(t)=\frac{1}{2}3^{-t}$ $\therefore 3^{-t-c}=\frac{1}{2}3^{-t}$

$3^{-c}=\frac{1}{2}$ 에서 $3^c=2$ $\therefore c=\log_3 2$

109. 정답 ①

$21=10+990\times a^{-5s}$

$\therefore 11=990\times a^{-5s}$, $a^{5s}=\frac{990}{11}=90$

양변에 상용로그를 취하면

$5s\log a=\log90=1+2\log3$

$\therefore s=\frac{1+2\log3}{5\log a}$

110. 정답 ①

매 3년마다의 횟수를 n 이라 하면 n 회 후의 컴퓨터 중앙처리 장치의 속도는 $1\cdot4^n$ 이다. $\therefore 1\cdot4^n\leq 4000$

양변에 상용로그를 취하면 $n\log4\leq\log4000=\log4+3$

$\therefore n\leq\frac{2\log2+3}{2\log2}=\frac{0.6+3}{0.6}=6$ 이 때 기간은

$3\times6=18$ (년)이 걸리므로 $1985+18=2003$ (년)

<별해> 처리속도가 매년 r 배($r>0$)의 비율로 빨라진다고 하면

$r^3=4$ $\therefore r=4^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{2}{3}}$ ……㉠

1985년 이후 n 년만에 속도의 한계에 도달한다고 가정하면

$r^n\geq 4000$ ㉠에서 $\left(2^{\frac{2}{3}}\right)^n\geq 2^2\times10^3$ 양변에 상용로그를 취하면

$\frac{2}{3}n\log2\geq 2\log2+3$

$\therefore\ n \leq \dfrac{3(2\log 2+3)}{2\log 2} = \dfrac{3(0.6+3)}{0.6} = 18$

따라서 18년 후에 정확히 4000MHz에 도달하게 된다.

111. 정답 ①

처음 신호의 세기를 a라 하면 $a\times 0.99^n = \dfrac{1}{2}a$

양변에를 취하면 $n\log 0.99 = \log\dfrac{1}{2}$

$\therefore n = \dfrac{0.3010}{0.0044} = 68.4\cdots$

길이는 약 68km이다.

112.[정답] ④

[해설]

지반 A, B의 유효수직응력을 각각 S_A, S_B

저항력을 각각 R_A, R_B

상대밀도를 각각 D_A, D_B라 하면

$S_A = 1.44S_B$

$R_A = 1.5R_B$

$D_B = 65$이므로

$D_B = -98+66\log\dfrac{R_B}{\sqrt{S_B}} = 65$

$\dfrac{R_B}{\sqrt{S_B}} = 10^{\frac{163}{66}}$

$\dfrac{R_A}{\sqrt{S_A}} = \dfrac{1.5R_B}{\sqrt{1.44S_B}} = \dfrac{5}{4}\cdot 10^{\frac{163}{66}}$

$D_A = -98+66\log\dfrac{R_A}{\sqrt{S_A}}$

$= -98+66\log\left(\dfrac{5}{4}\cdot 10^{\frac{163}{66}}\right)$

$= -98+66\left(0.1+\dfrac{163}{66}\right)$

$= 71.6$

113. 정답 ④

상용로그의 지표가 2인 수를 A라 하면

$2 \leq \log A < 3,\ 100 \leq A < 1000 \qquad \therefore\ a = 999$

또, 상용로그의 지표가 -2인 수를 B라 하면

$-2 \leq \log B < -1,\ \dfrac{1}{100} \leq B < \dfrac{1}{10} \qquad \therefore b = \dfrac{1}{100}$

$\therefore ab = 999\times\dfrac{1}{100} = 9.99$

114. 정답 10

$C_0 = 8\times 10^5$ 이고 $t = 3$ 일 때,

$C = 2\times 10^5$ 이므로

$\log\dfrac{2\times 10^5}{8\times 10^5} = -k\cdot 3 - 2\log 2 = -k\cdot 3$

$\therefore\ k = \dfrac{2}{3}\log 2$

$t \geq a$ 일 때 $C \leq 8\times 10^3$ 이므로

$-\left(\dfrac{2}{3}log2\right)t \leq \log\dfrac{8\times 10^3}{8\times 10^5} = -2$

로 부터

$\therefore\ t \geq \dfrac{2}{\frac{2}{3}\log 2} = \dfrac{3}{\log 2} = 10$ (시간)

115. 정답54

$\log 64 = a - 0.9\times 4$

$a = 3.6+6\log 2$

$\log 1 = 3.6+6\log 2 - 0.9x$

$0.9x = 5.4$

$\therefore x = 6 \quad \therefore 9x = 54$

116. 정답 ②

n 년 후의 총인구를 S_n, 65세 이상의 인구를 T_n이라 하면

$S_n = 1000\times(1+0.003)^n$ (만 명)

$T_n = 50\times(1+0.04)^n$ (만 명)

초고령화 사회로 진입하는 시기는

$\dfrac{T_n}{S_n} = \dfrac{50\times 1.04^n}{1000\times 1.003^n} \geq 0.2$에서 $\dfrac{1.04^n}{1.003^n} \geq 4$

부등식의 양변에 상용로그를 취하면

$n(\log 1.04 - \log 1.003) \geq 2\log 2$

$(0.0170-0.0013)n \geq 2\times 0.3010 \qquad \therefore\ n \geq \dfrac{0.6020}{0.0157} \fallingdotseq 38.34$

따라서, ② 2038~2040년에 초고령화 사회가 예측된다.

117. 정답 ②

$\left(\dfrac{n}{10}\right)^{10}$이 소수 여섯째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가

나타나므로 $\log\left(\dfrac{n}{10}\right)^{10}$의 지표는 -6이다.

$\therefore\ -6 \leq \log\left(\dfrac{n}{10}\right)^{10} < -5$

이때, $-6 \leq 10(\log n - 1) < -5$이므로

$0.4 \leq \log n < 0.5$

$\log 2 = 0.3010,\ \log 3 = 0.4771,\ \log 4 = 2\log 2 = 0.6020$이므로 구하는 자연수 n의 값은 3이다.

[다른 풀이]

$\left(\frac{n}{10}\right)^{10}$이 소수 여섯째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타나므로

$\log\left(\frac{n}{10}\right)^{10}=-6+\alpha$ (단, $0\le\alpha<1$)로 나타낼 수 있다.

$\log n-1=\frac{-6+\alpha}{10}$이므로 $\log n=\frac{4+\alpha}{10}$이다.

$0\le\alpha<1$이므로 $\frac{4}{10}\le\frac{4+\alpha}{10}<\frac{5}{10}$ 즉, $0.4\le\frac{4+\alpha}{10}<0.5$이므로

$0.4\le\log n<0.5$이다.

$\log 2=0.3010$, $\log 3=0.4771$이므로

$\log 2<0.4\le\log n<0.5<0.6020=\log 4$

따라서 $\log 2<\log n<\log 4$

$\therefore\ 2<n<4$

자연수 n의 값은 3이다.

118.[정답] **77**

[해설]

가수 α의 범위는 $0\le\alpha<1$ 이므로

(ⅰ) $n=0$일 때

$n\le 2\alpha$에서 $0\le\alpha<1$이므로

따라서 만족하는 자연수 A는

$1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9$

이므로 9개다.

(ⅱ) $n=1$일 때

$1\le 2\alpha$에서 $\frac{1}{2}\le\alpha<1$이므로

이때 $3.1<\sqrt{10}<3.2$ 이므로

$\log 3.1<\frac{1}{2}<\log 3.2$

따라서 만족하는 자연수 A는

$32,\ 33,\ 34,\ \cdots,\ 99$

이므로 68개다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하고자 하는 자연수 A의 개수는

$9+68=77$

1. 정답①

$2^{x^2} < 4 \cdot 2^x = 2^{x+2}$ 에서 $x^2 < x+2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 < 0$

$\therefore -1 < x < 2$

$\therefore \alpha + \beta = -1 + 2 = 1$

2. 정답 ②

[해설] $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-4} > (2^6)^{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}$, $2^{4-x} > 2^1$

$4 - x > 1$, $x < 3$ ∴ 정수 x의 최대값은 2

3. 정답 ②

[출제의도] 지수법칙을 이용하여 수의 대소 관계 구하기

$A = 3^{\frac{1}{3}}$, $B = 5^{\frac{1}{4}}$, $C = 10^{\frac{1}{6}}$이므로

A, B, C를 각각 12제곱하면

$A^{12} = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^{12} = 3^4 = 81$

$B^{12} = \left(5^{\frac{1}{4}}\right)^{12} = 5^3 = 125$

$C^{12} = \left(10^{\frac{1}{6}}\right)^{12} = 10^2 = 100$

$A^{12} < C^{12} < B^{12}$이므로 $A < C < B$이다.

4. 정답 ④

$\sqrt{2} = 8^{\frac{1}{6}}$, $\sqrt[3]{3} = 9^{\frac{1}{6}}$, $\sqrt[6]{6} = 6^{\frac{1}{6}}$이므로

$\sqrt[6]{6} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$이다. $a = \sqrt[6]{6}$, $b = \sqrt[3]{3}$일 때, 최대이고

$\frac{b}{a} = \sqrt[6]{\frac{3}{2}}$ 이다.

5. 정답 ③

$\sqrt{2^{\sqrt{2}}} = 2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$, $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}} = 2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$, $\sqrt{2\sqrt{2}} = 2^{\frac{3}{4}}$

$\therefore \sqrt{2^{\sqrt{2}}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}} < \sqrt{2\sqrt{2}}$

6. 정답 ①

(1) $\frac{A}{B} = \frac{a^a b^b c^c}{a^a b^c c^b} = \frac{b^{b-c}}{c^{b-c}} = \left(\frac{b}{c}\right)^{b-c}$ 에서

$0 < \frac{b}{c} < 1$, $b - c < 0$이므로 $\frac{A}{B} > 1$ ∴ $B < A$

(2) $\frac{B}{C} = \frac{a^a b^c c^b}{a^b b^c c^a} = \frac{a^{a-b}}{c^{a-b}} = \left(\frac{a}{c}\right)^{a-b}$ 에서

$0 < \frac{a}{c} < 1$, $a - b < 0$이므로 $\frac{B}{C} > 1$ ∴ $C < B$

(1), (2)에서 $C < B < A$

7. 정답 ④

[출제의도] 지수법칙을 활용하여 수의 대소 관계를 구분할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$a = 3^{55} = (3^5)^{11} = 243^{11}$ $b = 4^{44} = (4^4)^{11} = 256^{11}$,

$c = 5^{33} = (5^3)^{11} = 125^{11}$ ∴ $b > a > c$

8.정답 ④

[출제의도] 지수법칙을 이용하여 거듭제곱근의 대소를 비교할 수 있다.

$\sqrt[3]{6} = 6^{\frac{4}{12}}$, $\sqrt[4]{8} = 2^{\frac{9}{12}}$, $\sqrt[6]{12} = 12^{\frac{2}{12}}$

이므로 세 수를 12 제곱하면

$6^4 = 2^4 \times 81$, $2^9 = 2^4 \times 32$, $12^2 = 2^4 \times 9$

따라서 작은 것부터 차례로 나열하면

$\sqrt[6]{12}$, $\sqrt[4]{8}$, $\sqrt[3]{6}$

9. 정답⑤

$f(10) = g(10)$ 에서

$(1 + r_1)^{10} = \left(1 + \frac{r_2}{2}\right)^{20} \Leftrightarrow$

$1 + r_1 = \left(1 + \frac{r_2}{2}\right)^2 = 1 + r_2 + \left(\frac{r_2}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow r_1 = r_2 + \left(\frac{r_2}{2}\right)^2$

∴ $r_1 > r_2$ …㉠

$g(10) = h(10)$ 에서

$\left(1 + \frac{r_2}{2}\right)^{20} = \left(1 + \frac{r_3}{4}\right)^{40} \Leftrightarrow$

$1 + \frac{r_2}{2} = \left(1 + \frac{r_3}{4}\right)^2 = 1 + \frac{r_3}{2} + \left(\frac{r_3}{4}\right)^2$

$\Leftrightarrow r_2 = r_3 + 2 \cdot \left(\frac{r_3}{4}\right)^2$

∴ $r_2 > r_3$ …㉡

㉠, ㉡에서 $r_3 < r_2 < r_1$

10. 정답①

$\sqrt{2}^{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3}^{\sqrt{2}} - \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3}^{\sqrt{3}}$

$= \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3}^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{2}^{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \sqrt{3}^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right) < 0$

∴ $\sqrt{2}^{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3}^{\sqrt{2}} < \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3}^{\sqrt{3}}$

따라서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은 순서대로 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3} - \sqrt{2}$, $<$ 이다.

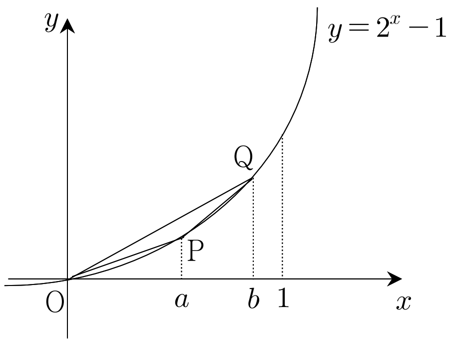
11. 정답①

[출제의도] 직선의 기울기를 이용하여 크기 비교하기

A는 원점과 점P 와의 기울기

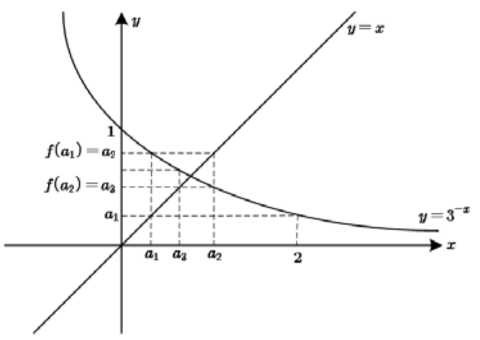
B는 원점과 점Q 와의 기울기

C는 점P 와 점Q 의 기울기이므로 그림에서



$\therefore\ A<B<C$

12. 정답 ⑤



위의 그림에서 $a_{n+1}=f(a_n)$이다.

$a_2=f(a_1)$

$a_3=f(a_2)=f(f(a_1))$

$a_4=f(a_3)=f(f(a_2))=f(f(f(a_1)))$이므로

위의 그림에서 y축상의 $a_2,\ a_3,\ a_4$사이의 대소관계는

$a_2>a_4>a_3$이다.

13.정답 ⑤

[출제의도] 지수의 법칙을 이해하고 이를 활용하여 식을 간단히 나타내기

① $f(0)=a^0=1$

② $f(kx)=a^{kx}=(a^x)^k=\{f(x)\}^k$

③ $f(x+y)=a^{x+y}=a^x\times a^y=f(x)\times f(y)$

④ $f(x-y)=a^{x-y}=a^x\times a^{-y}=f(x)\div f(y)$

⑤ $f(x\times y)=a^{x\times y}=(a^x)^y\neq f(x)+f(y)$

14. 정답 ③

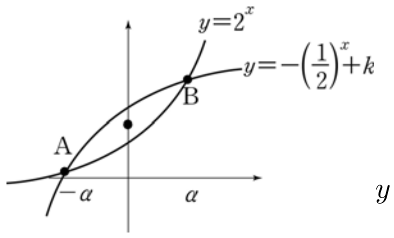
[출제의도] 지수함수의 성질을 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $f(-x)=a^{-x}=\dfrac{1}{a^x}=\dfrac{1}{f(x)}$ (참)

ㄴ. $f(2x)=(a^x)^2$ 이므로 $\sqrt{f(2x)}=f(x)$ (참)

ㄷ. $f(x^3)=a^{x^3}\neq a^{3x}=\{f(x)\}^3$ (거짓)

15. 정답 ⑤



y

$2^x=-\left(\dfrac{1}{2}\right)^x+k$의 두 근을 α,β라 하면

$\dfrac{\alpha+\beta}{2}=0$에서 $\beta=-\alpha$

선분 AB의 중점의 y 좌표가 $\dfrac{5}{4}$이므로

$$\frac{2^\alpha-\left(\frac{1}{2}\right)^\beta+k}{2}=\frac{5}{4}$$

$\dfrac{k}{2}=\dfrac{5}{4}(\because \beta=-\alpha)$

$\therefore k=\dfrac{5}{2}$

16. 정답 18

$y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동시킨 그래프는 $y-n=2^{x-m}$이다.

이 그래프가 두 점 $(-1,1),(0,5)$를 지나므로

$1-n=2^{-1-m}$ …… ㉠

$5-n=2^{-m}$ …… ㉡

㉡에서 $2^{-m}=5-n$이므로, ㉠에 대입하면

$1-n=\dfrac{1}{2}(5-n)\quad \therefore n=-3$

㉡에서 $5-(-3)=2^{-m}\quad \therefore m=-3$

17. 정답 ⑤

[출제의도] 내분점을 이용하여 지수함수의 그래프 이해하기

$P(a,\ 4^a)$이라 하자.

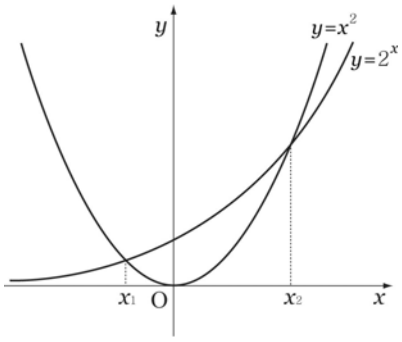
원점 O와 점 $P(a,\ 4^a)$을 $1:3$으로 내분하는 점$\left(\dfrac{a}{4},\ \dfrac{4^a}{4}\right)$이

$g(x)=2^x$ 위의 점이므로

$2^{2a-2}=2^{\frac{a}{4}}\qquad \therefore a=\dfrac{8}{7}$

18. 정답③

[출제의도] 두 곡선의 관계 추론하기



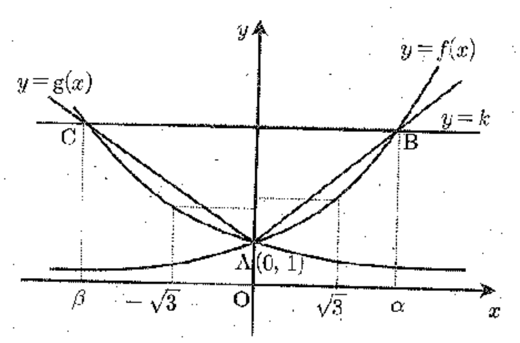
ㄱ. $-1 < x_1 < 0$ (참)

ㄴ. $|x_1 y_1| < |x_2 y_2|$ (거짓)

ㄷ. $|x_1 \cdot y_2| - |x_2 \cdot y_1| = |x_1 \cdot x_2{}^2| - |x_2 \cdot x_1{}^2|$

$= |x_1 \cdot x_2|(|x_2| - |x_1|) > 0$ (참)

19. 정답 ②



A$(0,\ 1)$, B$(\alpha,\ a^{\alpha})$, C$(\beta,\ a^{-\beta})$라 하면

ㄱ. $f(\sqrt{3}) > g(-\sqrt{3})$이므로 성립 $\therefore$참

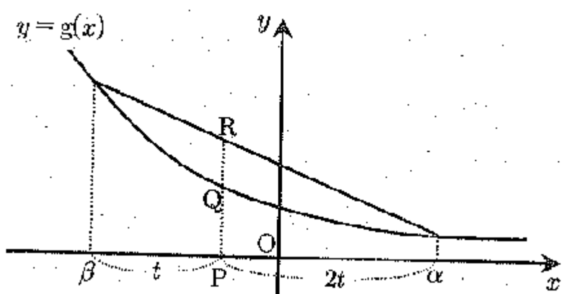
ㄴ. AB의 기울기 $\dfrac{a^{\alpha}-1}{\alpha}$, AC의 기울기 $\dfrac{b^{-\beta}-1}{\beta}$

그런데 $\left|\dfrac{a^{\alpha}-1}{\alpha}\right| > \left|\dfrac{b^{-\beta}-1}{\beta}\right| \Rightarrow \dfrac{a^{\alpha}-1}{|\alpha|} > \dfrac{b^{-\beta}-1}{|\beta|}$

$\Rightarrow |\beta|(a^{\alpha}-1) > (b^{-\beta}-1)|\alpha|$

$\Rightarrow |\beta| a^{\alpha} - |\alpha|\left(\dfrac{1}{b}\right)^{\beta} > |\beta| - |\alpha|$ $\therefore$ 참

ㄷ. $\dfrac{1}{3}\alpha - \dfrac{2}{3}\beta$는 두 점 $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$를 $2 : 1$로 내분하는 점의 x좌표이다.



그림에서 $\overline{PQ} < \overline{PR}$이므로

$g\left(\dfrac{1}{3}\alpha + \dfrac{2}{3}\beta\right) < \dfrac{1}{3}g(\alpha) + \dfrac{2}{3}g(\beta)$ $\therefore$거짓

20. 정답 ③

[출제의도] 식을 변형하여 함숫값 이해하기

$f(1) = f\left(2 \times \dfrac{1}{2}\right) = \left\{f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right\}^2 = 64$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 8$

$f(1) = f\left(3 \times \dfrac{1}{3}\right) = \left\{f\left(\dfrac{1}{3}\right)\right\}^3 = 64$, $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = 4$

$f(1) = f\left(6 \times \dfrac{1}{6}\right) = \left\{f\left(\dfrac{1}{6}\right)\right\}^6 = 64$, $f\left(\dfrac{1}{6}\right) = 2$

$\therefore\ f\left(\dfrac{1}{2}\right) + f\left(\dfrac{1}{3}\right) + f\left(\dfrac{1}{6}\right) = 14$

21. 정답 2

[출제의도] 지수함수의 값 구하기

(가)에서 $f\left(\dfrac{5}{2}\right) = 2^{\frac{5}{2}a+b} = 2\sqrt{2} = 2^{\frac{3}{2}}$

$\therefore\ \dfrac{5}{2}a + b = \dfrac{3}{2}$

(나)에서 $f(x+y) = 2f(x)f(y)$에 $x = y = 0$을 대입하면

$f(0) = 2f(0)f(0)$이고 $f(0) > 0$이므로 $f(0) = 2^b = \dfrac{1}{2}$이다.

$\therefore\ b = -1$

따라서 $a = 1,\ b = -1$이다.

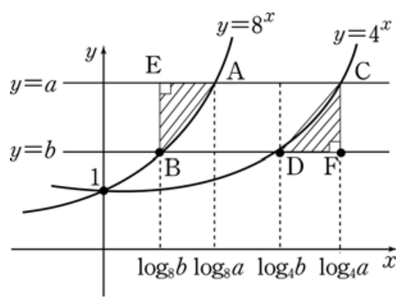
22.정답 3

[출제의도] 무리방정식을 활용하여 여러 가지 문제를 해결하기

$f(x) - 2 = f(x)^2 - 8f(x) + 16$

$f(x) = 6\ (f(x) > 4)$ 의 두 근은 대칭축을 중심으로 좌우 대칭이므로 합은 9이다.

23. 정답 ③



$\triangle \mathrm{AEB} = \dfrac{1}{2}(\mathrm{a}-\mathrm{b})(\log_8 a - \log_8 b)$

$= \dfrac{1}{2}(a-b) \cdot \dfrac{1}{3} log_2 ab$

$\triangle \mathrm{CDF} = \dfrac{1}{2}(\mathrm{a}-\mathrm{b})(\log_4 a - \log_4 b)$

$= \dfrac{1}{2}(a-b) \cdot \dfrac{1}{2} log_2 ab$

$\therefore \triangle CDF = \frac{3}{2}\triangle AEB = 30$

24. 정답 ④

주어진 그래프는 $f(x)=x+1$이므로

$y=2^{2-f(x)}=2^{2-(x+1)}=2^{-(x-1)}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$

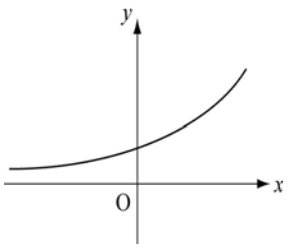
따라서, 지수함수 중에서 감소하는 그래프를 찾으면 ④번이 된다.

25.정답③

[출제의도] 지수함수의 성질을 이용하여 그래프 개형 구하기

$f(x)=a^x\ (a>1),\ \ g(x)=b^x\ (0<b<1)$

$y=\frac{f(x)}{g(x)}=\left(\frac{a}{b}\right)^x\ \left(\frac{a}{b}>1\right)$이므로 개형은 ③번



26. 정답 ①

y축 위의 점은 x좌표가 0이므로

$y=3^{x+m}$이 y축과 만나는 점은 $A(0,\ 3^m)$

$y=3^{-x}$이 y축과 만나는 점은 $B(0,\ 1)$

$\overline{AB}=|3^m-1|=8$에서 $m=2$

27. 정답③

[출제의도] 지수함의 그래프를 이해하여 지수방정식을 풀수 있는가를 묻는 문제이다.

$n\times 2^n=2(2^{n+2}-2^n)$

$n=2\times 3$

$\therefore n=6$

28. [출제의도] 지수함수의 평행이동을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$y=2^{x-2}$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 $\overline{P_kQ_k}=2$

$\therefore A_k=\frac{1}{2}\times 2\times k=k\ \ \therefore A_1+A_4+A_7+A_{10}=22$

29. 정답 16

$f(x)=3^x\times 2^{-2x}\times 2^2=4\left(\frac{3}{4}\right)^x$는 x의 값이 증가할 때, $f(x)$의 값은 감소. 따라서 $-1\leq x\leq 1$에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때, 최대, $x=1$에서 최소

$M=4\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}=\frac{16}{3}\cdot m=4\times\frac{3}{4}=3$

$\therefore M\times m=16$

30. 정답9

[출제의도] 지수함수의 최대값과 최소값 구하기

$y=3^{x^2-4x-3}$이므로

(지수)$t=x^2-4x-3$

$=(x-2)^2-7\ \ (-2\leq x\leq 4)$

$x=2$일 때 최소값 $t=-7$

$x=-2$일 때 최대값 $t=9$

지수함수 $y=3^t$ 은 증가함수이므로

$3^{-7}\leq 3^t\leq 3^9$이므로 최대값은 3^9, 최소값은 3^{-7}이다.

$\therefore 3^9\cdot 3^{-7}=3^2=9$

31. 정답 ⑤

$f(x)=2^{(x-1)^2+2}$ 이므로 $x=1$일 때 지수의 최소값이 2이다. 따라서 함수 $f(x)$의 최소값은 4이다.

32. 정답64

[출제의도] 최댓값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

함수 $f(x)=2^{-(x-2)^2+a+4}$에서 지수의 최솟값은 a이므로 $2^a=2^2$ 즉, $a=2$이다. 이때, 지수의 최댓값은 $a+4=6$이므로 $f(x)$의 최댓값은 $2^6=64$이다.

33. 정답④

[출제의도] 지수법칙을 활용할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$3^{x+1}-3^x=2\cdot 3^x=a\qquad\therefore\ 3^x=\frac{a}{2}$

$2^{x+1}+2^x=3\cdot 2^x=b\qquad\therefore\ 2^x=\frac{b}{3}$

$\therefore\ 12^x=2^{2x}\times 3^x=\frac{ab^2}{18}$

34. [정답] 12

[출제의도] 지수방정식의 해 계산하기

$3^{-\frac{3}{2}x}=3^{6-2x}$

$-\frac{3}{2}x=6-2x$

$\therefore\ x=12$

35. 정답 ⑤

$\left(\frac{1}{3}\right)^x=A,\ A^2-9A+9=0$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{\alpha}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{\beta}=9,\ \left(\frac{1}{3}\right)^{\alpha+\beta}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

$\therefore \alpha+\beta=-2$

36. 정답 ④

$\frac{16^x}{2}=2^{x+3} \Leftrightarrow 2^{4x-1}=2^{x+3} \Leftrightarrow 4x-1=x+3$

$\therefore\ x=\frac{4}{3}$

37. 정답 10

$2^x-8=0$ 에서 $x=3$

$3^{2x}-9=9^x-9=0$ 에서 $x=1$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=3^2+1^2=10$

38. 정답 12

[출제의도] 지수방정식의 해 계산하기

$3^{-\frac{3}{2}x}=3^{6-2x}$

$-\frac{3}{2}x=6-2x$

$\therefore\ x=12$

39. 정답10

$y=x-2$ 이므로

$2^x-2^{x-2}=6 \Leftrightarrow 2^x\left(1-2^{-2}\right)=6 \Leftrightarrow 2^x=8$

$\therefore\ x=3,\ y=1$

$\therefore\ 2^3+2^1=10$

40. 정답 10

[출제의도] 지수 방정식의 해 구하기

방정식 $16^x-4^{x+3}+100=0$ 의 두 근을 α,β라 하고, $4^x=t(t>0)$라 치환하면 $4^\alpha,4^\beta$은 방정식 $t^2-4^3t+100=0$ 의 두 근이다.

근과 계수와의 관계에 의해서 $4^\alpha 4^\beta=100$ 이다.

$4^{\alpha+\beta}=100$

$2^{2(\alpha+\beta)}=100$

$2^{\alpha+\beta}=10$

41. 정답 20

[출제의도] 역행렬을 이용한 연립방정식의 문제해결과정 이해하기

$\begin{pmatrix}1&-1\\2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^x\\3^{y-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-17\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2^x\\3^{y-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\2&-3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}5\\-17\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}32\\27\end{pmatrix}$

$a=5,\ b=4\qquad \therefore\ ab=20$

42. 정답 13

$2^x=X,\ 3^y=Y$라고 하면

$3X-2Y=6$

$\frac{1}{4}X-\frac{1}{3}Y=-1$

두 식을 연립하면

$X=8,\ Y=9$

$\therefore x=3,\ y=2$

$\alpha^2+\beta^2=13$

43. 정답 128

$a^x=t$라 하면 주어진 방정식은

$t^2-t-2=0,\ (t+1)(t-2)=0$

$\therefore t=2\ (\because t>0)$

$a^{\frac{1}{7}}=2$

$\therefore a=2^7=128$

44. 정답 1

[출제의도] 지수방정식을 풀기

$(2^x)^2-3\cdot2^x+2=0 \Leftrightarrow 2^x=1,\ 2$

$\therefore\ x=0,\ 1$

45. 정답 65

$9^x-3^{x+2}+8=0$에서 $3^x=t\ (t>0)$이라 놓으면

$t^2-9t+8=0$

$(t-1)(t-8)=0$

$\therefore\ t=1,8$ 이므로

$3^x=1,\ 8=3^\alpha,\ 3^\beta$

따라서, $3^{2\alpha}+3^{2\beta}=1^2+8^2=65$

46. 정답 ⑤

$2^{3x^2-4x-9}=2^{-3}$

$3x^2-4x-9=-2$

$x=-1,\ \frac{7}{3}$에서 x가 양수이므로 $x=\frac{7}{3}$

47.정답 ①

$4^x-2^{x+2}+2=0$에서 $2^x=t\ (t>0)$라 놓으면

$t^2-4t+2=0$이다.

이 방정식의 두 근의 곱 $2^\alpha\cdot2^\beta=2$이므로 $\alpha+\beta=1$이다.

48.정답 12

$2^{2x}-3\cdot2^x-1=0$의 양변에 2^{-x}를 곱하면 $2^x-2^{-x}=3$이다.

(준식)$=\dfrac{(2^x-2^{-x})^3+3(2^x-2^{-x})}{2^x-2^{-x}}=12$

49.정답 3

$2^x=t$라 가정하고 주어진 식의 양변에 t를 곱하면

$6t-t^2=8$

$\therefore\ t^2-6t+8=(t-2)(t-4)=0$이므로

$t=2$또는 4이다.

$\therefore 2^x=2,\quad 2^x=4$이어야 한다.

따라서 $x=1$ 또는 $x=2$이므로 모든 실근의 합은 3이다.

50. 정답128

[출제의도] 지수법칙을 활용하여 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$4^a>0,\ 2^b>0$ 이므로

$4^a+2^b\geqq 2\sqrt{4^a\cdot 2^b}=2\sqrt{2^{2a+b}}=2\sqrt{2^{12}}=128$

(단, 등호는 $a=3,\ b=6$일 때 성립한다.)

51. 정답 6

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3x-1}\geqq\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x+2}$ 이므로 $3x-1\leqq 2x+2$

$x\leqq 3$ 이므로 자연수의 합은 6 ($=1+2+3$)

52. 정답 18

$3^x=t$ 라 하면

$t^2-9t+18<0$

$(t-3)(t-6)<0$

$\therefore\ 3<t<6$

$\therefore\ 3<3^x<6,\ 1<x<\log_3 6$

$\therefore \alpha=1,\ \beta=\log_3 6$

$\therefore\ 3^\alpha 3^\beta=3\cdot 6=18$

53. 정답③

[출제의도] 지수부등식의 해 구하기

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=t\ (t>0)$라 하면

주어진 부등식은 $t^2-2t-8\leqq 0$

$(t-4)(t+2)\leqq 0$에서

$0<t\leqq 4$이므로 $0<\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\leqq\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}$이고

밑이 1보다 작으므로 $x\geqq -2$

54. 정답⑤

$2^x=t(t>0)$, $g(t)=t^2-2at+a^2-a-6$이라 하자. 방정식

$4^x-a\cdot 2^{x+1}+a^2-a-6=0$이 서로 다른 두 실근을 가지면,

방정식 $g(t)=0$이 서로 다른 두 양의 실근을 갖는다.

방정식 $g(t)=0$의 서로 다른 두 양의 실근을 α,β 라 하면,

$\alpha>0,\ \beta>0$ 이므로

$D/4=a^2-(a^2-a-6)=a+6>0$에서 $a>-6$ … ㉠

$\alpha+\beta=2a>0$ 에서 $a>0$ … ㉡

$\alpha\beta=a^2-a-6=(a-3)(a+2)>0$에서

$a>3$, $a<-2$ … ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 구하는 범위는 $a>3$

55. 정답 ④

[출제의도] 근의 분리를 이용한 지수부등식 이해하기

$f(x)=(2^x)^2-(k+1)2^x+4\geqq 0$

$g(t)=t^2-(k+1)t+4\geqq 0\ (t=2^x>0)$

(1) $y=g(t)$의 대칭축이 양수 일 때,

$-1<k\leqq 3$

(2) $y=g(t)$의 대칭축이 음수 일 때,

$k<-1$

(3) $k=-1$일 때, $g(t)=t^2+4>0$

(1), (2), (3)에서 $k\leqq 3$

56. 정답②

[출제의도] 지수함수 이해하기

[해설] ㄱ. $x<0$일때, $g(x)<f(x)$ (거짓)

ㄴ. $12f(x)g(x)=12\cdot 2^x\cdot 3^x=2^{x+2}\cdot 3^{x+1}$

$=f(x+2)g(x+1)$ (참)

ㄷ. $y=f(-2x)g(x)=2^{-2x}\cdot 3^x=\left(\dfrac{3}{4}\right)^x$는 감소 (거짓)

57. 정답 ③

두 함수 $f(x)=2^{x-2}+1,\ g(x)=\log_2(x-1)+2$는 서로 역함수 관계이다.

ㄱ. 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 서로 역함수 관계이므로

$f^{-1}(5)=g(5)$

$f^{-1}(5)\cdot\{g(5)+1\}=g(5)\cdot\{g(5)+1\}$

$=4\cdot\{4+1\}=20$

$\therefore$ 참

ㄴ. 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 서로 역함수 관계이므로 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

$\therefore$ 참

ㄷ. $f(2)=2,\ g(2)=2$이므로 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 점$(2,2)$에서 만난다.

$\therefore$ 거짓

58. 정답 ⑤

ㄱ.$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{2+2}=\frac{1}{2}$

ㄴ.$\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2}=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{4\frac{1}{4^x}}{4\frac{1}{4^x}+2}$

$=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{\frac{4}{4^x}}{\frac{4}{4^x}+2}=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{4}{4+2\times 4^x}=1$

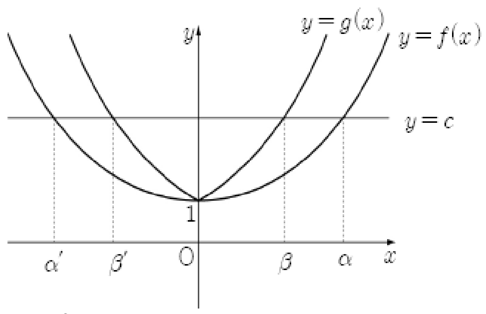
ㄷ. ㄴ을 이용한다.

$f\left(\frac{1}{101}\right)+f\left(\frac{100}{101}\right)=f\left(\frac{1}{101}\right)+f\left(1-\frac{1}{101}\right)=1$ 이므로

$\sum_{k=1}^{100} f\left(\frac{k}{101}\right)=50$

59.정답 ⑤

ㄱ. $f(-x)=\frac{a^{-x}+a^x}{2}=f(x)$이므로 $f(x)$는 y축 대칭이다. (참)



ㄴ. (참)

ㄷ. (참)

60.정답 ③

$g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.

$f(-2)=2^{2+a}+1=9 \qquad \therefore a=1$

$f(x)=2^{-x+1}+1$

$g(17)=k$라 하면 $f(k)=17$이므로

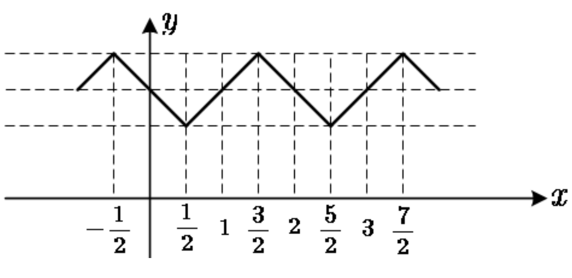
$2^{-k+1}+1=17$이다. $\qquad \therefore k=-3$

61. 정답 ②

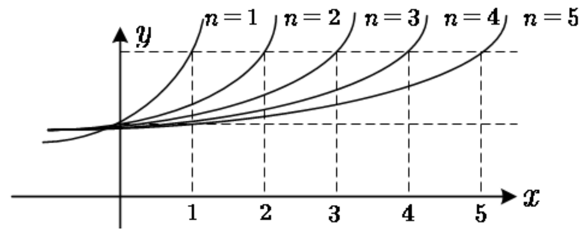
$y=f(x)$ 의 그래프는

$-\frac{1}{2}\leq x<\frac{3}{2}$ 에서 $f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|+1$ 이고

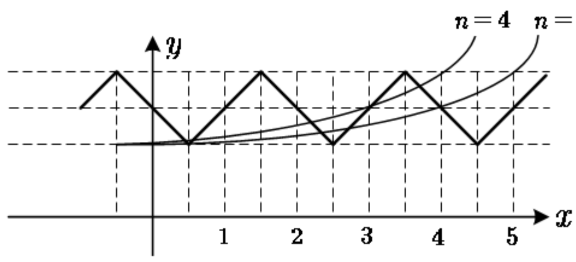
주기가 2인 주기함수이므로 다음과 같다.



그리고, $y=2^{\frac{x}{n}}$ 의 그래프는 다음과 같다,.



이 때, $y=f(x)$ 와 $y=2^{\frac{x}{n}}$ 의 교점의 개수가 5개이려면 다음의 그래프와 같이 $n=4$ 또는 $n=5$일 때 뿐이다.



따라서 n의 값의 합은 $4+5=9$이다.

62. 정답 ③

함수 $y=2^{x+n}$과 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의

교점의 좌표는 $2^{x+n}=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 에서

$x+n=-x$

$\therefore\ x=-\frac{n}{2},\ y=2^{\frac{n}{2}}$

$\therefore a_n=-\frac{n}{2},\ b_n=2^{\frac{n}{2}}$

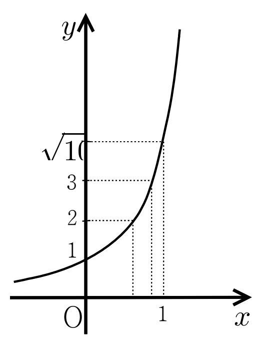
ㄱ. 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다. ∴ 참

ㄴ. $b_m b_n=2^{\frac{m}{2}}2^{\frac{n}{2}}=2^{\frac{m+n}{2}}=b_{m+n}$ ∴ 참

ㄷ. $2b_n-b_{n+1}=2\cdot 2^{\frac{n}{2}}-2^{\frac{n+1}{2}}=(2-\sqrt{2})2^{\frac{n}{2}}>0$이므로

$2b_n>b_{n+1}$ ∴ 거짓

63. 정답 ⑤



$\log k$의 지표 n, 가수 α $(0\leq\alpha<1)$에 대하여 점 P_k의 x좌표가 α, y좌표가 n이므로 $y=(\sqrt{10})^x$에 대입하면 $n=(\sqrt{10})^{\alpha}$에서 $0\leq\alpha<1$이므로

$1 \leqq (\sqrt{10})^{\alpha} < \sqrt{10}$

$1 \leqq n < \sqrt{10}$

$\therefore n=1,\ 2,\ 3$

$n=(\sqrt{10})^{\alpha}$에서 $\alpha=2\log n=\log n^2$이므로

i) $n=1$일 때 $\alpha=0$ $\log k=1$이므로 $k=10$

ii) $n=2$일 때 $\alpha=\log 4$ $\log k=2+\log 4=\log 400$이므로 $k=400$

iii) $n=3$일 때 $\alpha=\log 9$ $\log k=3+\log 9=\log 9000$이므로 $k=9000$

∴ 모든 k의 값의 합은 $10+400+9000=9410$

64. 정답 25

[출제의도] 두 지수방정식의 해를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$2^x=-\dfrac{1}{2^x}+\dfrac{5}{2}$ 의 지수 방정식을 정리하면

$2(2^x)^2-5\cdot 2^x+2=0$ 이고 이를 인수분해하면

$(2^x-2)(2\cdot 2^x-1)=0$

$\therefore 2^x=2$ 또는 $2^x=\dfrac{1}{2}$ 이다.

$\therefore x=1$ 또는 $x=-1$ 이므로 $A\left(-1,\ \dfrac{1}{2}\right)$, $B(1,\ 2)$ 이다. 따라서

A와 B의 중점 $M\left(0,\ \dfrac{5}{4}\right)$ 이다. 따라서 $20(a+b)=25$ 이다.

65. 정답②

[출제의도] 지수함수의 그래프와 관련된 내적문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

곡선 $y=3^x$을 x축의 방향으로 b_k만큼 평행이동시킨 곡선

$y=3^{x-b_k}$이 점 $(k,\ 2)$를 지난다고 하면

$2=3^{k-b_k}$이다.

$\therefore 3^{-b_k}=\dfrac{2}{3^k}$

이때 곡선 $y=3^{x-b_k}$의 y절편은 3^{-b_k}이므로

$a_k=3^{-b_k}=\dfrac{2}{3^k}$이다.

$$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} a_k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{3^k}=2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k$$

$$=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}}=1$$

66. 정답 71

[출제의도] 지수함수의 그래프를 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

삼각형 AOB의 넓이가 16이고 $\overline{OB}=4$이므로 점 A의 y좌표는 8이다. 점 A는 곡선 $y=2^x-1$위의 점이므로 점 A의 x좌표를 α라 하면 $2^{\alpha}-1=8$ $\therefore \alpha=\log_2 9$

이때, 점 $A(\log_2 9,\ 8)$은 곡선 $y=2^{-x}+\dfrac{\alpha}{9}$위의 점이므로

$8=2^{-\log_2 9}+\dfrac{\alpha}{9}=\dfrac{1}{9}+\dfrac{\alpha}{9}$

$\therefore \alpha=71$

67. 정답 ③

[출제의도] 지수함수 그래프의 이해하기

$2^a=b,\ 2^b=c,\ 2^c=d,\ 2^d=e$

$a=\log_2 b,\ b=\log_2 c,\ c=\log_2 d,\ d=\log_2 e$

$$\therefore \log_{de} bc=\frac{\log_2 bc}{\log_2 de}=\frac{\log_2 b+\log_2 c}{\log_2 d+\log_2 e}=\frac{a+b}{c+d}$$

68. 정답 ⑤

[출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프를 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^d=c$ (참)

ㄴ. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^a=e$에서 $a=-\log_2 e,\ d=\log_2 e$ $\therefore a+d=0$ (참)

ㄷ. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^d=c,\ \log_2 e=d$에서 $2^d=e$ $\therefore ce=1$ (참)

69. 정답 ⑤

[출제의도] 지수함수의 성질 추론하기

ㄱ. $f(x)=a^x>0$ (참)

ㄴ. $a^x+a^{-x} \geqq 2\sqrt{a^x\cdot a^{-x}}=2$ (참)

ㄷ. (ⅰ) $x \geqq 0$일 때,

$f(|x|)-\dfrac{1}{2}\{f(x)+f(-x)\}$

$=\dfrac{1}{2}\{f(x)-f(-x)\} \geqq 0$

(ⅱ) $x<0$일 때,

$f(|x|)-\dfrac{1}{2}\{f(x)+f(-x)\}$

$=\dfrac{1}{2}\{f(-x)-f(x)\}>0$ (참)

70. 정답 ③

[출제의도] 지수함수의 그래프와 직선의 기울기를 이용하여 부등식의 대소 관계를 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$는 점 $(1,1)$에서 만나므로 오른쪽 그림에서

$0<a<1$이면 $f(a)<a$이고,

$a>1$이면 $f(a)>a$이다. (참)

ㄴ. 직선 AB의 기울기는

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{2^b-1-(2^a-1)}{b-a}=\dfrac{2^b-2^a}{b-a}$ 이고

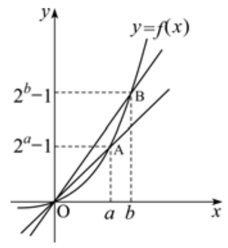
기울기가 1보다 큰 경우는 $\dfrac{2^b-2^a}{b-a}>1$

즉, $b-a<2^b-2^a$

기울기가 1보다 작은 경우는

$\dfrac{2^b-2^a}{b-a}<1$

즉, $b-a>2^b-2^a$ (거짓)



ㄷ. (직선 OA의 기울기)

<(직선 OB의 기울기)이므로 $\dfrac{2^a-1}{a}<\dfrac{2^b-1}{b}$

$\therefore$ $b(2^a-1)<a(2^b-1)$ (참)

71. 정답6

[출제의도] 지수함수의 그래프에서 도형의 넓이 구하기

S는 평행사변형 ABDC의 넓이와 같다.

B(2, 1), C(2, 4)이므로

$S=2\times3=6$이다.

72. 정답④

[출제의도] 함수에서 조건을 만족하는 최소값 구하기

$\mathrm{P}(k,\ 2^k),\ \mathrm{Q}\left(k,\ -\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$

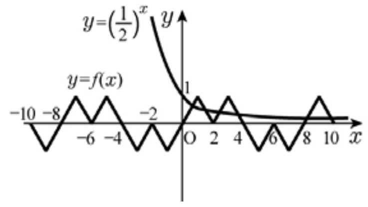
$\overline{\mathrm{PQ}}=2^k+\left(\frac{1}{2}\right)^k\geq2\sqrt{2^k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k}=2$

(등호는 $2^k=\left(\frac{1}{2}\right)^k$일 때 성립)

$\therefore$ 최소값은 2

73. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$y=f(x)$와 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 두 그래프의 교점의 개수는 6이다.

74. 정답 27

B의 x좌표를 k라 하면 A의 x좌표는 $k-2$이다.

y좌표가 같으므로 $2^{-k+2}=4^k$

$\therefore$ $k=\dfrac{2}{3}$

$B\left(\frac{2}{3},4^{\frac{2}{3}}\right)$, $C\left(\frac{2}{3},2^{-\frac{2}{3}}\right)$이므로 $l=2^{\frac{4}{3}}-2^{-\frac{2}{3}}$

$\therefore$ $4l^3=27$

75. 정답①

$S_n=\dfrac{1}{2}\cdot(2^{2n-1}+2^{2n+1})\cdot2=\dfrac{5}{2}\cdot2^{2n}\geq320$

$2^{2n}\geq2^7$에서 $n\geq3.5$이므로 n의 최소값은 4

76. 정답⑤

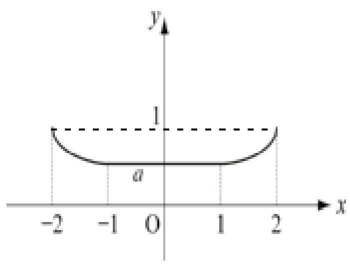
[출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기

그림에서

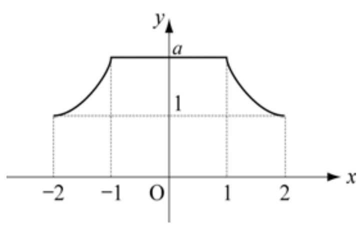
$$f(x)=\begin{cases}x+2 & (-2\leq x\leq-1)\\ 1 & (-1\leq x\leq1)\\ -x+2 & (1\leq x\leq2)\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}a^{x+2} & (-2\leq x\leq-1)\\ a & (-1\leq x\leq1)\\ a^{-x+2} & (1\leq x\leq2)\end{cases}$$

i) $0<a<1$



ii) $a>1$



옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

77. 정답⑤

[출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프를 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

직선 $y=2x$ 위의 한 점 P를 $(a,2a)$라 하면

$\mathrm{A}(a,4^a)$, $\mathrm{B}(4^a,2a)$이므로

$\dfrac{S_3}{S_1}=\dfrac{(4^a-a)2a}{(4^a-2a)a}=\dfrac{7}{3}$, $4^a=8a$

$\dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{(4^a-a)(4^a-2a)}{(4^a-2a)a}=\dfrac{k}{3}$ $\therefore$ $k=21$

78. 정답

[출제의도] 무한등비급수의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{H}_n$의 길이는 $\left(\frac{1}{2}\right)^n$이므로 $S_n=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

$a=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\sqrt{3}}{9}$이므로 $\dfrac{1}{a^2}=27$이다.

79. 정답 ⑤

[출제의도] 지수함수를 활용한 함수의 최댓값 구하기

분모, 분자를 2^x 으로 나눈 $y=\dfrac{8}{2^x+2^{-x}-1}$ 의 최댓값은 분모인 $2^x+2^{-x}-1$ 이 최소일 때 이다. $2^x+2^{-x} \geqq 2\sqrt{2^x 2^{-x}}=2$ 이므로 y 의 최대값은 8

80. 정답②

$2^{\frac{x}{2}}=t\ \ (t>0)$ 로 치환하면 $2^{x+1}=2^x \cdot 2=\left(2^{\frac{x}{2}}\right)^2 \cdot 2=2t^2$,

$2^{\frac{x+4}{2}}=2^{\frac{x}{2}} \cdot 2^2=4t$ 이므로 주어진 부등식은

$2t^2-4t+a=2(t-1)^2+a-2 \geqq 0$ …㉠

여기서 $t>0$ 일 때 이차부등식 ㉠이 항상 성립하기 위해서는 $a-2 \geqq 0$ 이어야 한다.

$\therefore\ a \geqq 2$

따라서 구하는 실수 a 의 최소값은 2 이다.

81. 정답 9

$\dfrac{1}{y}$ 이 최소이면 $y=\dfrac{3^{x+3}}{3^{2x}+3^x+1}$ 이 최대이다.

$\dfrac{1}{y}=\dfrac{3^{2x}+3^x+1}{3^x+3}=\dfrac{1}{27}\left(3^x+\dfrac{1}{3^x}\right)+\dfrac{1}{27}$ 이고 $3^x>0$,

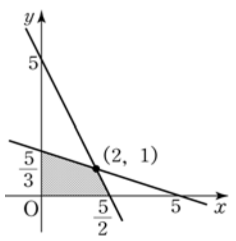
$\dfrac{1}{3^x}>0$ 이므로 산술기하평균에 의해

$\dfrac{1}{y} \geqq \dfrac{1}{9}$ $(x=0$ 일 때 등호성립)이므로 y 의 최대값은 9 이다.

82. 정답 16

$$\begin{cases} x+33y \leqq 5 \\ 2x+y \leqq 5 \\ x \geqq 0,\ y \geqq 0 \end{cases}$$

위의 연립부등식을 만족하는 영역을 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



$2^x 4^y$ 를 k 라 하자. $k=2^{x+2y}$

k 는 $x+2y$ 가 최대일 때 최대값을 갖는다. $x+2y$ 를 t 라 하면, $t=x+2y$, $k=2^t$

$(x, y)=(2, 1)$ 일 때 t 는 최대값 4 를 갖는다.

따라서 k 의 최대값은 $2^4=16$ 이다.

83. 정답 ①

$A=m^{\frac{1}{m-8}} \cdot n^{\frac{1}{n-5}}=\left(m^{n-5} \cdot n^{m-8}\right)^{\frac{1}{(m-8)(n-5)}}$

$B=m^{-\frac{1}{m-8}} \cdot n^{\frac{1}{n-5}}=\left(m^{-(n-5)} \cdot n^{m-8}\right)^{\frac{1}{(m-8)(n-5)}}$

$C=m^{\frac{1}{m-8}} \cdot n^{-\frac{1}{n-5}}=\left(m^{n-5} \cdot n^{-(m-8)}\right)^{\frac{1}{(m-8)(n-5)}}$

$1<m^{n-5}<n^{m-8}$ 이므로 $A>B>C$ 이다.

84. 정답①

주어진 조건에서 $a \neq 1, b \neq 1$이다.

자연수 n에 대하여 $a^n<b^n$이므로

$a<b$

$0<a<b<1$ 또는 $1<a<b$일 때,

i) $m>n$이면 $a^m>a^n$, $b^m>b^n$이고,

ii) $m<n$이면 $a^m<a^n$, $b^m<b^n$이다.

그런데, i), ii)는 모두 주어진 조건에 모순이다.

$\therefore\ 0<a<1<b$

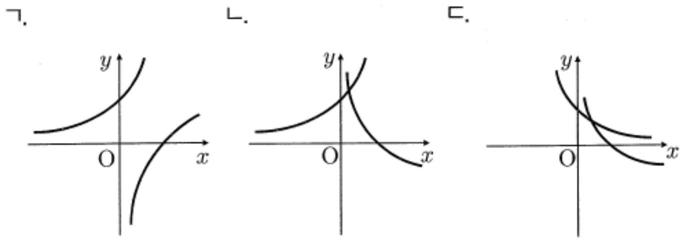
주어진 조건에서 $b^n<b^m$이므로 $n<m$이어야 하고, 이 때 $a^m<a^n$이 성립한다.

$\therefore\ n<m$

이상에서 $0<a<1<b, m>n$이다.

85. 정답 ⑤

각각의 경우를 그래프로 그리면 다음과 같다.



그림에서 두 그래프가 항상 만나는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

86. ③

$y=a^{x-m}$과 역함수의 교점은 $y=a^{x-m}$과 $y=x$의 교점이므로 $a^{x-m}=x$

$a^{1-m}=1\quad \therefore\ 1-m=0\quad \therefore m=1$

$a^{3-1}=3\quad \therefore\ a^2=3\quad \therefore\ a=\sqrt{3}$

$\therefore\ a+m=1+\sqrt{3}$

87. 정답①

$f(x)$는 $x=3$일 때 최대값 $M=4^3=64$를 갖고,

$g(x)$는 $x=3$일 때 최소값 $m=\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{8}$ 을 갖는다.

$\therefore\ Mm=8$

88. ①

조건에서 $g(x)=2^{x-m}+n$이다. 점 A(1, 2)를 x축으로 m만큼, y축으로 n만큼 이동하면

$A'(1+m,\ 2+n)$이므로 $1+m=3$

$\therefore\ m=2$

또한, $y=g(x)$가 점 (0, 1)을 지나므로

$g(0)=2^{-m}+n=1$

$2^{-2}+n=1$

$\therefore\ n=\frac{3}{4}$

$\therefore\ m+n=2+\frac{3}{4}=\frac{11}{4}$

89.[정답] ①

[해설]

$y=a^x$ 를 y축 대칭시키면 $y=a^{-x}$ 이다.

이것을 다시 x축으로 3 , y축으로 2만큼 평행이동하면

$y=a^{-(x-3)}+2$ ------- *

* 의 그래프가 (1,4)를 지나므로

$4=a^{-(1-3)}+2$

$\therefore\ a^2=2$

$\therefore\ a=\sqrt{2}\ (\because a>0)$

90. 정답 ⑤

ㄱ. $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$ [참]

ㄴ. $f(1-x)=\frac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2}=\frac{4}{4+2\cdot4^x}=\frac{2}{4^x+2}$

$f(x)+f(1-x)=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{2}{4^x+2}=1$ [참]

ㄷ. $\sum_{k=1}^{100}f\left(\frac{k}{101}\right)=f\left(\frac{1}{101}\right)+f\left(\frac{2}{101}\right)+\cdots+f\left(\frac{100}{101}\right)=50$ [참]

s에서 $f(x)+f(1-x)=1$이므로

$f\left(\frac{1}{101}\right)+f\left(\frac{100}{101}\right)=1,\quad f\left(\frac{2}{101}\right)+f\left(\frac{99}{101}\right)=1\cdots$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

91. 정답 ①

$f(x)$는 밑>1이므로 증가함수이다. 따라서 $x=3$일 때 최대값 $4^3=64$를 갖는다. M$=64$

$g(x)$는 $0<$밑<1이므로 감소함수이다.

따라서 $x=3$일 때 최소값 $\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$을 갖는다. $m=\frac{1}{8}$

$\therefore \mathrm{M}m=64\times\frac{1}{8}=8$

92. 정답 27

$y=5^{x-1}$의 그래프가 점$(a, 5)$를 지나므로

$5=5^{a-1}$에서 $a-1=1$

$\therefore\ a=2$

$y=5^{x-1}$의 그래프가 점$(3, b)$를 지나므로

$b=5^{3-1}$에서 $b=25$

$\therefore\ a+b=2+25=27$

93. 정답 ①

$f(x)=a^{bx-1}$의 그래프와 $g(x)=a^{1-bx}$의 그래프는 직선$x=2$에 대하여 대칭이므로

$f(2)=g(2)$

가 성립한다.

따라서, $a^{2b-1}=a^{1-2b}$에서

$2b-1=1-2b,\ 4b=2$

$\therefore\ b=\frac{1}{2}$

$f(4)=g(0),\ g(4)=f(0)$이므로

$f(4)+g(4)=g(0)+f(0)=\frac{5}{2}$

$a+a^{-1}=\frac{5}{2}$

$2a^2-5a+2=0$

$(a-2)(2a-1)=0$

$0<a<1$이므로 $a=\frac{1}{2}$

$\therefore\ a+b=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

94. 정답 25

$4^x-7\cdot2^x+12=0$에서

$(2^x-3)(2^x-4)=0$

따라서 $2^\alpha=3, 2^\beta=4$로 놓을 수 있다.

$\therefore\ 2^{2\alpha}+2^{2\beta}=(2^\alpha+2^\beta)^2-2\cdot2^\alpha\cdot2^\beta$

$=(3+4)^2-2\cdot3\cdot4$

$=49-24=25$

95. 정답 ⑤

$2^x+2^{2-x}=5,\ 2^x+\frac{4}{2^x}=5$

$2^x=t\ (t>0)$라 하면 $t+\frac{4}{t}=5$

양변에 t를 곱하여 정리하면

$t^2-5t+4=0,\ (t-1)(t-4)=0$

$\therefore\ t=1$또는 $t=4$

$\therefore\ 2^x=1$ 또는 $2^x=4$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=2$

따라서 모든 실근의 합은 2이다.

96. 정답20

점 P의 x좌표를 α라 하면 $k\cdot 3^{\alpha}=3^{-\alpha}$

따라서 $k\cdot 3^{\alpha}=\dfrac{1}{3^{\alpha}}$ 이므로 양변에 3^{α}을 곱하여 정리하면

$(3^{\alpha})^2=3^{2\alpha}=\dfrac{1}{k}$

이 때, 점 Q의 x좌표는 2α이므로

$k\cdot 3^{2\alpha}=-4\cdot 3^{2\alpha}+8$

이 때, $3^{2\alpha}=\dfrac{1}{k}$ 이므로

$k\cdot\dfrac{1}{k}=-4\cdot\dfrac{1}{k}+8$

$k>0$ 이므로 $1=-\dfrac{4}{k}+8$

$\therefore\ k=\dfrac{4}{7}$

$\therefore\ 35k=20$

97.[정답] ③

[해설]

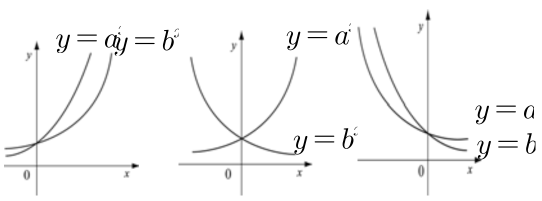
$5<3^x<100$ 에서 $x=2,3,4$

x의 값의 합은 $2+3+4=9$

98. 정답 ③

[출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기

ⅰ) $a>b>1$ ⅱ) $a>1>b>0$ ⅲ) $1>a>b>0$



ㄱ. 위 그래프에서 양수 n에 대하여 항상

$a^n>b^n$ (참)

ㄴ. $1>a>b>0$일 때 $f(n)<g(-n)$ (거짓)

ㄷ. $f(n)=g(-n)$이면 $a^n=b^{-n}$이므로 $a=\dfrac{1}{b}$

$a^{\frac{1}{n}}=\left(\dfrac{1}{b}\right)^{\frac{1}{n}}=(b^{-1})^{\frac{1}{n}}=b^{-\frac{1}{n}}$ (참)

1. 정답 ④

[출제의도] 지수함수와 로그함수의 관계를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$(a,\ b)\in A$, $(c,\ d)\in B$이므로

$3^a=b$, $\log_3 c=d$이다.

ㄱ. (반례) $a=1$, $b=3$일 때 $(1,\ 3)\in A$이지만

$(1^3,\ 3\cdot 3)\not\in A$이다. (거짓)

ㄴ. $3^a=b$ 즉, $\log_3 b=a$

$\therefore$ $(b,\ a)\in B$ (참)

ㄷ. $3^a=b$, $\log_3 c=d$ 즉, $3^d=c$가 성립하므로

$3^{a+d}=bc$

$\therefore$ $(a+d,\ bc)\in A$ (참)

2. 정답 ④

[출제의도] 함수의 성질을 이해하고 로그와 수열의 기본개념을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $x>1$일 때, $f(x)>0$이다. 따라서 $0<f(x)<1$이면 $f(f(x))<0$이고 $f(x)>1$이면 $f(f(x))>0$이다. (거짓)

ㄴ. $f\left(\dfrac{x}{2}\right)=\log_2\dfrac{x}{2}=\log_2 x-\log_2 2=\log_2 x-1=f(x)-1$ (참)

ㄷ. $f(8^n)=\log_2 8^n=\log_2(2^3)^n=\log_2(2)^{3n}=3n$ (참)

3. 정답 669

[출제의도] 로그의 성질을 이용하여 함수를 추론하고 함숫값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$f_1(x)=\log_2 x$

$f_2(x)=f_1(x^2)+f_1(x)=\log_2 x^2+\log_2 x$

$=2\log_2 x+\log_2 x=3\log_2 x$

$f_3(x)=f_2(x^2)+f_2(x)=3\log_2 x^2+3\log_2 x$

$=6\log_2 x+3\log_2 x=3^2\log_2 x$

$f_4(x)=f_3(x^2)+f_3(x)=9\log_2 x^2+9\log_2 x$

$=18\log_2 x+9\log_2 x=3^3\log_2 x$

…

이상에서 $f_n(x)=3^{n-1}\log_2 x$임을 알 수 있다.

$a=f_{2007}(8)=3^{2006}\log_2 8=3^{2007}$

$\therefore$ $\log_{27}a=\log_{3^3}3^{2007}=\dfrac{2007}{3}=669$

4. 정답 ④

[출제의도] 지수함수와 로그함수의 값 구하기

ㄱ. $\sqrt{3}\neq\dfrac{3}{2}$ 이므로 $2^{\sqrt{3}}\neq(2^3)^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{3}{2}}$ $\therefore$ 거짓

ㄴ. $g(12)=\log_3 12=2\log_3 2+1=2g(2)+1$ $\therefore$ 참

ㄷ. $g\left(f\left(\dfrac{3}{2}\right)\right)=g(2^{\frac{3}{2}})=\log_3 2^{\frac{3}{2}}$

$=\log_3 2\sqrt{2}<\log_3 3=1$ $\therefore$ 참

5. 정답 ①

[출제의도] 로그함수 이해하기

함수 $f(x)=\log_2 x$ 의 그래프 위의 두 점

$\mathrm{A}(a,\log_2 a)$, $\mathrm{B}(b,\log_2 b)$ 을 이은 선분 AB를 $1:2$로 내분한 점은

$\left(\dfrac{2a+b}{3},\ \dfrac{2\log_2 a+\log_2 b}{3}\right)$이다.

내분점이 x축 위에 있으므로

$\dfrac{2\log_2 a+\log_2 b}{3}=0$, $\log_2 a^2 b=0$ $\therefore$ $a^2 b=1$

6. 정답 ④

밑이 $\dfrac{1}{2}$인 로그함수의 그래프는 감소하는 그래프이므로

$x=8$일 때 최소가 된다.

$\therefore\log_{\frac{1}{2}}(8-a)=-2$

$\therefore 8-a=4$

따라서 $a=4$

7. 정답 ②

$y=\log(10-x^2)$에서

$10-x^2>0$

$\therefore-\sqrt{10}<x<\sqrt{10}$

$\therefore A=\{x\,|-\sqrt{10}<x<\sqrt{10}\}$

$y=\log(\log x)$에서

$\log x>0$

$x>1$

$\therefore B=\{x\,|\,x>1\}$

$\therefore A\cap B=\{x\,|\,1<x<\sqrt{10}\}$

따라서 정수 x는 2, 3이므로 2개이다.

8. 정답④

[출제의도] 지수함수의 평행과 대칭이동 이해하기

ㄱ. $y-2=16^{-x-\frac{3}{2}}=\left(\dfrac{1}{16}\right)^{x+\frac{3}{2}}$ 밑이 $\dfrac{1}{16}$ 이므로 평행이동, 대칭이동으로 일치하지 않는다.

ㄴ. 준식 $\rightarrow y=x$ 에 대칭 $\rightarrow y$축 방향으로 -1 만큼 평행이동하면 ㄴ이 된다.

ㄷ. 준식→$y=x$ 에 대칭 →x 축 방향으로 $\frac{3}{2}$ 만큼, y 축 방향으로 $\frac{1}{2}$ 만큼 평행이동하면 ㄷ이 된다.

9. 정답 ③
ㄱ. $y=a^{x-1}$ 를 x 에 대하여 정리하면 $x-1=\log_a y$ 즉, $x=\log_a y+1$ 이다.
이제 x, y 를 바꾸면 $y=\log_a x+1$ 이므로 함수 $y=a^{x-1}$ 의 역함수는
$y=\log_a x+1$ 이다. 따라서 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다. (참)
ㄴ. $a=3$ 이면 두 함수 $y=3^x$, $y=\log_3 x$ 의 그래프는 만나지 않는다.
따라서 두 함수 $y=-3^x$, $y=-\log_3 x$ 의 그래프는 만나지 않는다.
이 때, $-\log_3 x=\log_{\frac{1}{3}} x$ 이므로 두 함수 $y=-3^x$, $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ 의 그래프는 만나지 않는다. (거짓)
ㄷ. 함수 $y=\log_a x$ 의 그래프는 점 $(a, 1)$ 을 지난다.
이 때, 1 보다 큰 양수 a 에 대하여 $k=\frac{1}{a^a}$ 라 하면
$k>0$ 이고 함수 $y=ka^x$ 의 그래프는 점 $(a, 1)$ 을 지나므로 두 함수의 그래프가 만난다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

10. 정답 58
$y=\log_2(x+3)$에 $(a,\ 6)$을 대입하면
$6=\log_2(a+3) \Rightarrow a+3=64$ $\therefore a=61$
점근선의 방정식이 $x=-3$이므로 $b=-3$이다.
따라서 $a+b=58$이다.

11. 정답 ③
[해설] O와 A가 평행이동한 점을 각각 O′, A′이라 하면 $\mathrm{O}'(3, 2)$, $\mathrm{A}'(4, 2)$이다.
$y=\log_3(x+a)$가 선분 O′A′과 만나려면
$\log_3(3+a) \leq 2$, $3+a \leq 9$, $a \leq 6$이고
$\log_3(4+a) \geq 2$, $4+a \geq 9$, $a \geq 5$이다.
$\therefore\ 5 \leq a \leq 6$
a의 최댓값은 6, 최솟값은 5이다.

12. 정답 ①
[출제의도] 로그함수의 밑과 진수에 대하여 그래프의 개형을 알고 있는 지를 알아보는 문제이다.
주어진 문제의 로그함수 $y=\log_b ax$ 가 감소함수이므로 밑의 조건이 $0<b<1$ 이고, x 절편이 1 보다 작기 때문에 $a>1$ 이다. 따라서 $y=\log_a bx$ 의 그래프는 밑이 $a>1$ 이므로 증가함수이고, 진수조건에서 $0<b<1$ 이므로 x 절편이 1 보다 큰 그래프이다.

13.정답 46
[출제의도] 지수함수와 로그함수를 이용하여 합성함수의 값을 구할 수 있다.
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\log_2\left(\frac{1}{4}\right)^x$
$=\log_2 2^{-2x}=-2x \quad \therefore (g\circ f)(-23)=46$

14. 정답 ④
$\log_3(\log_3 x) \leq 1,\ 0<\log_3 x \leq 3,\ 1<x \leq 27$
따라서 만족하는 자연수 x의 개수는 26 개

15. 정답 16
$f(x)=1+3\log_2 x$ 이고 $(g\circ f)(x)=x$ 이므로
$g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.
따라서, $g(13)=t$ 라 하면 $f(t)=13$이 만족한다.
$\therefore 1+3\log_2 t=13$
$\therefore \log_2 t=4 \quad \therefore t=16$
따라서, $g(13)=16$

16. 정답 ②
[출제의도] 로그함수의 역함수 이해하기
$f(m)=2$ 이므로 $a^2=m$
$f(n)=3$ 이므로 $a^3=n$
$f^{-1}(7)=k$라 하면 $f(k)=7$
$k=a^7=(a^2)^2a^3=m^2n$

17. 정답⑤
[출제의도] 로그의 대소관계를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.
ㄱ. $0<a<1,\ b>1$ 이므로 $\log_a b<\log_a 1=0$
$\therefore\ A=\frac{1}{2}\log_a b<0$ (참)
ㄴ. $0<a<1,\ b<\frac{1}{a}$ 이므로 $\log_a b>\log_a \frac{1}{a}=-1$
$\therefore\ A=\frac{1}{2}\log_a b>-\frac{1}{2}$
따라서 $-\frac{1}{2}<A<0$ 이므로 $B=\frac{1}{A}<-2$
$\therefore\ A>B$ (참)
ㄷ. $A=\frac{1}{B}$ 이므로 $AB=1$
$\therefore\ \log_{ab}|A|+\log_{ab}|B|=\log_{ab}|AB|=\log_{ab}1=0$ (참)

18. 정답 ⑤

[출제의도] 로그의 대소관계 이해하기

[해설] Ⅰ에서 $\log_{10}A > \log_{10}B$ 이므로 $A > B$

Ⅱ에서 $\log_{10}A - \log_{10}B = \log_{10}B - \log_{10}C$ 이고

Ⅰ에 의해 $\log_{10}B - \log_{10}C > 0$ 이므로 $B > C$

$\therefore C < B < A$

19. 정답 ③

$0 < \log_x 2 < \log_y 2$ 에서

$0 < \dfrac{1}{\log_2 x} < \dfrac{1}{\log_2 y}$ $\quad \therefore o < \log_2 y < \log_2 x$

$\therefore 1 < y < x$

20. 정답 ④

[출제의도] 도형의 넓이에 관한 무한급수의 합을 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

곡선 $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ 와 직선 $y = \dfrac{1}{2}$, $y = 1$, $y = \dfrac{3}{2}$, $\cdots$ 이

만나는 점의 x 좌표는 각각 $\dfrac{1}{2}, \left(\dfrac{1}{2}\right)^2, \left(\dfrac{1}{2}\right)^3, \cdots$ 이다.

$y = \log_{\frac{1}{4}} x$ 와 $y = \log_{\frac{1}{4}}(-x)$ 는 y 축에 대하여 대칭이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots\right\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

21. 정답 ⑤

$\log_2 2 = 1$, $\log_2 16 = 4$ 에서 $C(0, 1)$, $D(0, 4)$ 이므로 점

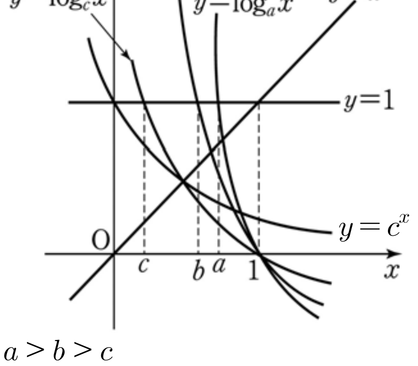
F 의 좌표는 $\left(0, \dfrac{4+2}{3}\right)$

즉 $(0, 2)$ 이다.따라서 점 E 의 x 좌표는 $\log_2 x = 2$ 에서

$x = 4$

22. 정답; ①

$y = c^x$ 의 역함수 $y = \log_c x$ 를 나타내어 직선 $y = 1$과의 교점의 x 좌표를 구한다.



$\therefore a > b > c$

23. 정답②

$\overline{AH} = a - 1$, $\overline{PH} = \log_2 a$ 이고, $\overline{AH} = \overline{PH}$ 이므로

$a - 1 = \log_2 a \quad \therefore a - \log_2 a = 1$

따라서 점 P 에서 직선 $y = x$ 까지의 거리는

$$\frac{|a - \log_2 a|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

24.정답 503

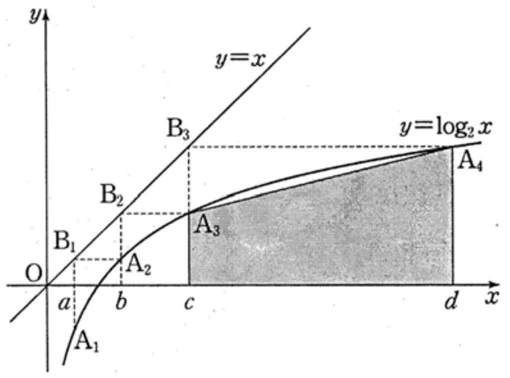
두 점의 좌표가 $P_n(4^n, n)$, $P_{n+1}(4^{n+1}, n+1)$이므로

$$\overline{P_nP_{n+1}}^2 = (4^{n+1} - 4^n)^2 + \{(n+1) - n\}^2$$

$= 9 \cdot 2^{4n} + 1$이다.

따라서 $4n = 2012$이고, $n = 503$이다.

25. 정답 ①



$y = \log_2 x$의 역함수는 $y = 2^x$ 이므로 위 그림에서

$f(a) = 2^a = b$

$f(b) = 2^b = c = f(f(a)) = (f \circ f)(a)$

$f(c) = 2^c = d = f(f(b)) = (f \circ f)(b)$

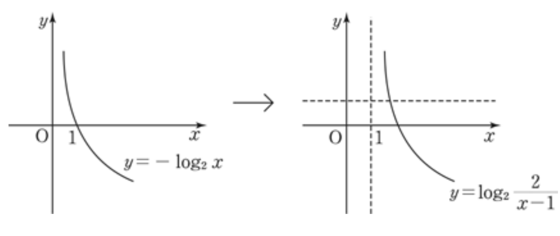
위 그림의 사다리꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2}(b+c)(d-c) = \frac{1}{2}\{f(b) + f(a)\}\{(f \circ f)(b) - (f \circ f)(a)\}$$

26. 정답 ②

$y = \log_2 \dfrac{2}{x-1} = 1 - \log_2(x-1)$

따라서, $y = -\log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 양의 방향으로 1만큼, y 축의 양의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프이다.



27. 정답18

네 점 A, Q, P, R 의 좌표가 각각

$(1, 0)$, $(a, 0)$, (a, b), $(0, b)$ 이므로

(삼각형 AQP 의 넓이) $= \frac{1}{2}\overline{AQ}\cdot\overline{PQ} = \frac{1}{2}(a-1)\cdot b$

(사각형 $OAPR$ 의 넓이) $= \frac{1}{2}(\overline{OA}+\overline{PR})\cdot\overline{OR} = \frac{1}{2}(a+1)\cdot b$

$\frac{\text{사각형 } OAPR\text{의 넓이}}{\text{삼각형 } AQP\text{의 넓이}} = \frac{5}{4}$ 에서 $\frac{\frac{1}{2}(a+1)\cdot b}{\frac{1}{2}(a-1)\cdot b} = \frac{5}{4}$

$\therefore\ 5a-5 = 4+4a$

$\therefore\ a = 9$ …㉠

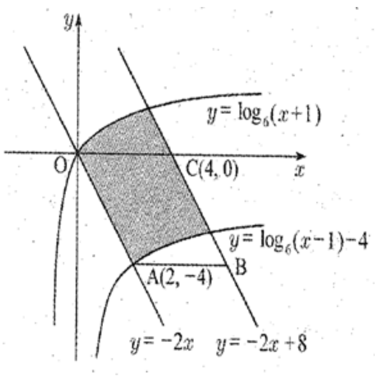
$P(a, b)$ 는 $y = \log_3 x$ 위에 있으므로 $b = \log_3 9 = 2$

$\therefore\ ab = 9\cdot2 = 18$

28. 정답 16

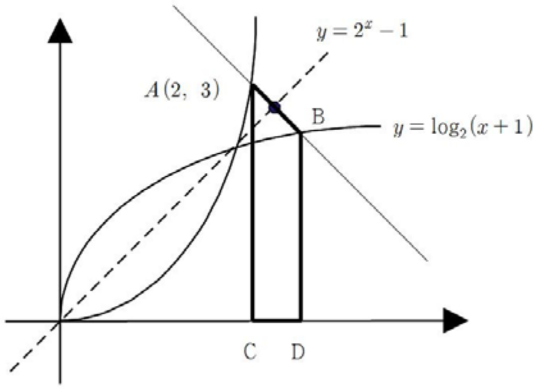
[출제의도] 로그함수의 그래프를 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

주어진 두 곡선과 두 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이는 그림과 같이 평행사변형 OABC의 넓이와 같다.



$y=\log_6(x-1)-4$의 그래프는 $y=\log_6(x+1)$의 그래프를 x축, y축 방향으로 각각 2, -4만큼 평행이동시킨 것이다. 원점을 x축, y축의 방향으로 각각 2, -4만큼 평행이동시키면 $(2,\ -4)$이고, 점 $(2,\ -4)$는 직선 $y=-2x$ 위의 점이다. 따라서 $y=\log_6(x-1)-4$의 그래프와 직선 $y=-2x$의 교점 A의 좌표는 A$(2,\ -4)$이다. 이때, 점 C의 좌표는 $(4,\ 0)$이므로 $\overline{\text{OC}}=4$이고, 평행사변형 OABC의 넓이는 $4\times4=16$이다.

29. 정답 ①



$y=2^x-1$ 과 $y=\log_2(x+1)$는 서로 역함수 관계이므로 두 함수는 $y=x$에 대칭이다.

$A(2,3)$을 기울기가 -1인 직선이 $y=\log_2(x+1)$와 만나는 점은 $A(2,3)$를 $y=x$에 대칭이동한 점이 된다.
그러므로 $B(3,2)$가 된다.

따라서 사각형 $ACDB$의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot(2+3)\cdot1=\frac{5}{2}$이다.

30. 정답 ②

[출제의도] 함수의 그래프를 해석하여 수학 내적 문제 해결하기

$\mathrm{A}(\alpha,\ m\alpha)$, $\mathrm{B}(\beta,\ m\beta)$라 하자. (단, $\alpha\neq0$)

$\triangle\mathrm{OBD}:\triangle\mathrm{OAC}=4:1$ 이므로

$\overline{\mathrm{OB}}:\overline{\mathrm{OA}}=2:1$. 즉, $\beta=2\alpha$

$m\alpha=\log_2\alpha$ 이고 $2m\alpha=\log_2 2\alpha$ 이므로

$2\log_2\alpha=\log_2 2\alpha,\ \alpha^2=2\alpha$

$\alpha\neq0$ 이므로 $\therefore\alpha=2,\ \beta=4$

사각형 ABDC 는 등변사다리꼴이므로,

$y=mx$은 $y=nx$ 의 역함수이다.

따라서 $\mathrm{C}(2m,\ 2)$, $\mathrm{D}(4m,\ 4)$ 이므로

$2^{2m}=2$ 에서 $m=\frac{1}{2}$, $n=2$

$\therefore\ m+n=\frac{5}{2}$

31. 정답 ②

$A,\ B$의 좌표는 각각 $A(-2,\ 1),\ B(a+2,\ 1)$이므로

$\overline{AB}=a+2-(-2)=a+4=8$

$\therefore\ a=4$

32. 정답 ①

$g(2)=4$ 이므로 $(f\circ g)(2)=f(4)=2^4=16$,

$h(2)=1$ 이므로 $(g\circ h)(2)=g(1)=1$

$\therefore(f\circ g)(2)+(g\circ h)(2)=16+1=17$

33. 정답 15

[출제의도] 산술 · 기하 평균을 활용한 로그의 최솟값 구하기

두 양수 $a,\ b$에 대하여 $a+b\geq2\sqrt{ab}$

(단, 등호는 $a=b$ 일 때 성립한다.)

$a+b\geq2\sqrt{ab}=2\sqrt{16}=2^3$

$a^2+b^2\geq2ab=2^5$

$a^3+b^3\geq2\sqrt{(ab)^3}=2^7$

(준식) $\geq\log_2 2^3+\log_2 2^5+\log_2 2^7=15$

34. [정답] 81

$(\log_3 x)^2-12=\log_3 x^4$는 $(\log_3 x)^2-4\log_3 x-12=0$

$(\log_3 x-6)(\log_3 x+2)=0,\ \log_3 x=6,\ -2$ 이므로

$x=3^6,\ 3^{-2}$이다. $\therefore\alpha\beta=81$

35. 정답32

[출제의도] 로그방정식을 풀 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\log_2 x-6=t$로 치환하면 $\log_2 x=t+6$이므로

$(\log_2 x-6)^2+\log_2 x^2-11=t^2+2(t+6)-11=0$

$t^2+2t+1=(t+1)^2=0$

$\therefore\ t=-1$

이때 $\log_2 x=5$이므로

$x=2^5=32$

36. 정답 30

[출제의도] 로그방정식의 두 근의 합 구하기

[해설] $\log_5 x=t$라 하면

주어진 방정식은

$t^2-3t+2=0$

$t=1,\ t=2$

$t=\log_5 x=1,\quad x=5$

$t=\log_5 x=2,\quad x=25$

$\therefore 5+25=30$

37. 정답 ③

$\log_2 x=t$ 라 하면 준식은

$t^2-3t+2=0$

$\therefore t=1,2$

$\therefore x=2,4$

따라서, 두 근의 합 $\alpha+\beta=6$

38. 정답16

$\log_4(\log_2 x)=1 \Leftrightarrow \log_2 x=4^1=4 \Leftrightarrow x=2^4=16$

39. 정답③

$(\log_2 x)^2-3\log_2 x-1=0$ 의 두 근을 α,β 라 하고

$\log_2 x=t$ 라 하면 $t^2-3t-1=0$ 의

두 근은 $t_1=\log_2\alpha$, $t_2=\log_2\beta$

$t_1+t_2=\log_2\alpha+\log_2\beta=\log_2\alpha\beta=3$ $\therefore$

$\alpha\beta=2^3=8$

40. 정답 64

[출제의도] 로그방정식이 실근을 가질 조건을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\log_2 x=t$ 라 하면 $\log_2\frac{16}{x}=4-t$ 이므로

$t(4-t)=\frac{m}{16}$, $16t^2-64t+m=0$

이 때, $\frac{D}{4}=32^2-16m\geq 0\quad \therefore\ m\leq 64$

따라서 구하는 m의 최댓값은 64이다.

41.정답 ②

[출제의도] 로그방정식을 풀기

주어진 방정식의 두 근을 α,β 라 하고 양변에

상용로그를 취하면

$(\log x)^2-k\log x-2=0$

$k=\log\alpha+\log\beta=\log\alpha\beta=\log 10^2=2$

42. 정답 ⑤

$\left(\log_3\frac{x}{3}\right)^2-20\log_9 x+26=0$

$(\log_3 x-1)^2-10\log_3 x+26=0$

$(\log_3 x)^2-12\log_3 x+27=0$

$(\log_3 x-3)(\log_3 x-9)=0$

$\log_3 x=3$ 또는 $\log_3 x=9$

$\therefore\ x=3^3,\ 3^9$

따라서, 두 근의 곱은 $3^3\times 3^9=3^{12}$이다.

43. 정답 ③

[출제의도] 로그방정식의 해 구하기

[해설] 주어진 로그방정식을 정리하면

$\log_{10}(y+5)=\log_{10}x(y+1)$이므로

$y+5=xy+x$이다.

$xy+x-y-5=0,\ (x-1)(y+1)=4$이므로

$x>0,\ y>-1$인 정수 $x,\ y$의 순서쌍은

$(2,3),\ (3,1),\ (5,0)$이다.

44. 정답③

진수 조건에서 $x-1>0$ 으로부터 $x>1$ 이고,

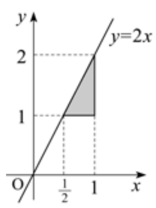
$\log_3(x-1)<2 \Leftrightarrow x-1<3^2$, $x<10$

$\therefore\ 1<x<10$

이를 만족하는 정수 x 는 2, 3, 4, ⋯, 9 로 모두 8 개이다.

45. 정답 25

[출제의도] 로그부등식을 풀 수 있는가를 묻는 문제이다.



$\log_x(\log_y 2x)<0,\ \log_y 2x>1\ \left(\because \frac{1}{2}<x<1\right)$

$\therefore\ 2x>y\ (\because y>1)$

따라서 주어진 부등식의 영역을 좌표평면에 나타내면 그림과 같다. (단, 경계선 제외)

이때, $S=\frac{1}{4}$이므로 $100S=25$이다.

46. 정답 ⑤
진수 조건에서 $x-5>0$, $x-6>0$
$x>6$ …… ㉠
$\log_{\frac{1}{2}}(x-5)(x-6)>\log_{\frac{1}{2}}2$
$(x-5)(x-6)<2$
$x^2-11x+28<0$
$(x-4)(x-7)<0$
$4<x<7$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $6<x<7$
$\therefore \alpha=6,\ \beta=7$
$\therefore \alpha+\beta=13$

47. 정답 ④
[출제의도] 로그 부등식의 해 구하기
진수 $x-4>0$, $x-2>0$이므로 $x>4$
주어진 로그의 밑이 1보다 작으므로
$(x-4)^2<x-2$, $3<x<6$
따라서 만족하는 로그부등식의 해는
$4<x<6$
$\therefore\ ab=24$

48. 정답 ②
[출제의도] 지수부등식과 로그부등식을 풀 수 있는가를 묻는 문제이다.
$a^{x-1}<a^{2x+1}$의 해가 $x<-2$이려면
$x<-2 \Leftrightarrow x-1>2x+1$
$\therefore\ 0<a<1$
$\log_a(x-2)<\log_a(4-x)$에서
$x-2>4-x$ $\therefore\ x>3$ … ㉠
진수는 양수이어야 하므로 $x-2>0, 4-x>0$
$\therefore\ 2<x<4$ … ㉡
㉠, ㉡에서 주어진 부등식의 해는 $3<x<4$이다.

49. 정답 ②
$\frac{1}{3}<x<9$에서
$\log_3\frac{1}{3}<\log_3 x<\log_3 9$
$-1<\log_3 x<2$ … ㉠
$(1+\log_3 x)(a-\log_3 x)>0$에서
$(\log_3 x+1)(\log_3 x-a)<0$
이 부등식의 해가 ㉠이므로 $a=2$

50. 정답 ④
진수의 조건에 의해 $x^2+x-2>0$, $-2x+2>0$
$x^2+x-2>0 \Leftrightarrow x>1$ 또는 $x<-2$
$-2x+2>0 \Leftrightarrow x<1$
두 조건을 모두 만족시키는 범위는 $x<-2$ … (1)
$\log_2(x^2+x-2)<\log_2(-2x+2) \Leftrightarrow x^2+x-2<-2x+2 \Leftrightarrow$
$x^2+3x-4<0$
부등식을 풀면 $-4<x<1$ … (2)
(1), (2)를 동시에 만족하는 범위는 $-4<x<-2$이다.
$\alpha=-4$, $\beta=-2$이므로 $\alpha\beta=8$

51. 정답 ①
$$\begin{cases} 2^{x+3}>4 \text{ …… ㉠} \\ 2\log(x+3)<\log(5x+15) \text{ …… ㉡} \end{cases}$$
㉠에서 $2^{x+3}>2^2$
$\therefore x+3>2$
$\therefore x>-1$ …… ㉢
㉡에서 진수조건에서 $x>-3$,
$\log(x+3)^2<\log(5x+15)$
$\therefore (x+3)^2<5x+15$
$\therefore x^2+x-6<0$
$\therefore -3<x<2$ …… ㉣
㉢, ㉣에서 $-1<x<2$
따라서 정수 x는 0, 1로 2개이다.

52. 정답 15
$\log_3(x-3)+\log_3(x+1)<1+\log_3 4$
$\log_3(x-3)(x+1)<\log_3 3+\log_3 4$
$(x-3)(x+1)<12$
$x^2-2x-15<0$, $(x+3)(x-5)<0$
$\therefore -3<x<5$
그런데, 진수 조건에서 $x>3$이어야 하므로
$3<x<5$
$\therefore a=3, b=5$
$\therefore ab=15$

53. 정답 ③
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\log_2 3^x$
$0\leq \log_2 3^x<7$
$\Rightarrow \log_2 1\leq \log_2 3^x<\log_2 2^7 \Rightarrow 1\leq 3^x<2^7=128$
$\Rightarrow 0\leq x\leq \log_3 128$
$\therefore$ 정수 x는 0, 1, 2, 3, 4이므로 5개이다.

54. 정답 ③

[출제의도] 지수부등식과 로그부등식을 풀 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A=\{x|2^{x(x-3a)}<2^{a(x-3a)}\}=\{x|(x-a)(x-3a)<0\}$

$B=\{x|\log_3(x^2-2x+6)<2\}=\{x|-1<x<3\}$

$A\cap B=A$ 즉, $A\subset B$가 성립해야 하므로

(i) $a>0$일 때

$A=\{x|a<x<3a\}\subset\{x|-1<x<3\}=B$에서

$0<a\leqq 1$

(ii) $a=0$일 때 $A=\{x|x^2<0\}=\phi\subset B$ 이므로 $a=0$

(iii) $a<0$일 때

$A=\{x|3a<x<a\}\subset\{x|-1<x<3\}=B$에서

$-\frac{1}{3}\leqq a<0$

(i), (ii), (iii)에서 $-\frac{1}{3}\leqq a\leqq 1$이다.

55. 정답 10

$\log_x y+\frac{1}{\log_x y}=\frac{10}{3}$

$\log_x y=t$라 하면 $t+\frac{1}{t}=\frac{10}{3}$

$3t^2-10t+3=0$

$\therefore$ $t=3$ 또는 $t=\frac{1}{3}$

$1<x<y$이므로

$\log_x y=3,\ y=x^3$

이 식을 $xy=16$에 대입하면

$x^4=16$ $\therefore x=2,\ y=9$ $\therefore$ $x+y=10$

56. 정답 ②

[출제의도] 로그방정식의 해 구하기

$(\log_3 x)(\log_4 y)=\frac{\log_2 x}{\log_2 3}\frac{\log_3 y}{\log_3 4}$, $\log_2 x\log_3 y=-3$

$\log_2 x+\log_3 y=2$이므로 $\log_2 x$와 $\log_3 y$를 두 근으로 하는 t에 관한 이차방정식은 $t^2-2t-3=0$

이를 풀면 $t=-1$ 또는 $t=3$

$a>1$이므로 $\log_2 x=3$, $\log_3 y=-1$이고

$x=a=8,\ y=b=\frac{1}{3}$ $\therefore 3ab=8$

57.정답 92

$0<[-2+\log_2 x]<2,\ [-2+\log_2 x]=1$

$1\leqq -2+\log_2 x<2,\ 3\leqq\log_2 x<4$

$\therefore 8\leqq x<16$

따라서 모든 정수 x의 값의 합은 92이다.

58. 정답 16

$1+\log_{\frac{1}{2}}x^2>\log_{\frac{1}{2}}(5x-8)$에서

(1) 진수조건에 의해 $x^2>0,\ 5x-8>0$

$\therefore$ $x>\frac{8}{5}$ $\cdots$①

(2) 준식을 정리하면 $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}x^2>\log_{\frac{1}{2}}(5x-8)$

따라서, $\frac{1}{2}x^2<5x-8$、$x^2-10x+16<0$

$(x-2)(x-8)<0$ $\therefore$ $2<x<8$ $\cdots$②

①, ②에 의하여 $2<x<8$

따라서, $\alpha\beta=2\times 8=16$

59. 정답 12

[출제의도] 로그부등식을 풀 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\log_{\frac{1}{2}}(x-2)>-3$ 에서 $0<x-2<8$

즉, $2<x<10$ 이므로 $\alpha+\beta=12$이다.

60. 정답29

[출제의도] 로그부등식을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$(\log_2 x)^2-6\log_2 x+5<0$

$(\log_2 x-1)(\log_2 x-5)<0$

$1<\log_2 x<5$

$2<x<32$

$\therefore 29$

61.정답 36

$\log_3(12x-x^2)\leqq\log_3 27$

$\begin{cases}12x-x^2\leqq 27\cdots① \\ 12x-x^2>0\ \cdots②\end{cases}$

①에 의해서 $x^2-12x+27\geqq 0$이므로 $x\leqq 3$또는 $x\geqq 9$

②에 의해서 $x^2-12x<0\leftrightarrow 0<x<12$

$\therefore$ ①, ②를 동시에 만족하는 정수는 1,2,3,9,10,11이므로 모든 정수의 합은 36이다.

62. 정답 ②

$|a-\log_2 x|\leqq 1$ $\Leftrightarrow$ $-1\leqq a-\log_2 x\leqq 1$

$a+1\geqq\log_2 x\geqq a-1$ $\Leftrightarrow$ $2^{a+1}\geqq x\geqq 2^{a-1}$

최댓값과 최솟값의 차는 $2^a\left(2-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}\cdot 2^a=18$

$\therefore$ $2^a=18\cdot\frac{2}{3}=12$

63.정답 18

[출제의도] 지수함수와 로그함수의 관계를 알고 활용하기

$g(n)=\log_3(x-1)$

$A_3=\{n \mid 2 \leqq \log_3(n-1)<3\}$
$\quad =\{n \mid 10 \leqq n<28\}$

이므로 18개.

64. 정답 10

두 함수 $y=\log_4(x+p)+q$, $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+p)+q$ 의

그래프는 모두 점 $(4,1)$ 을 지나므로 $1=\log_4(4+p)+q$,

$1=\log_{\frac{1}{2}}(4+p)+q \Leftrightarrow \log_4(4+p)=\log_{\frac{1}{2}}(4+p)$

$4+p=1$ 에서 $p=-3$, $q=1$

$\therefore\ p^2+q^2=10$

65. 정답③

ㄱ. $C=\left\{\frac{1}{10},1,10\right\}$ 이므로 $10^x=\frac{1}{10}$ 에서 $x=-1$,

$10^x=1$ 에서 $x=0$, $10^x=10$ 에서 $x=1$

$\therefore\ B=\{-1,\ 0,1\}$ (참)

ㄴ. (반례) $x=\log_{10}2$, $y=\log_{10}2$ 이면 $10^x=10^y=2$ 이므로 $x\in B, y\in B$ 이다.

이 때, $0<\log_{10}2<1$ 이므로 $\log_{10}1<(\log_{10}2)^2<\log_{10}2$

$\therefore\ \log_{10}1<xy<\log_{10}2$

$\therefore\ 1<10^{xy}<2$

따라서 $10^{xy}=N$를 만족하는 자연수 N이 존재하지 않는다.

$\therefore\ xy \not\in B$

따라서 집합 B는 곱셈에 대하여 닫혀있지 않다.

ㄷ. $X=\{10^x \mid x\in C\}\ (\neq \phi)$ 로 놓자.

i) 임의의 $10^x\in X$에 대하여 $x\in C$를 만족하는 실수 x가 존재하고, 이 x에 대하여

$f(t)=\log t=x$ 를 만족하는 실수 $t\in A$ 도 존재한다.

이 때, $10^x=t$ 이므로 $10^x\in A$

$\therefore\ X\subset A$

ii) 임의의 $t\in A$ 에 대하여 $f(t)=\log t=x$ 를 만족하는 실수 $x\in C$가 존재한다. 이 x 에 대하여 $10^x\in X$이다.

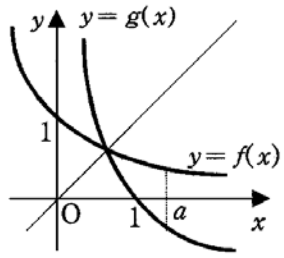
그런데, $10^x=t$ 이므로 $t\in X$이다.

$\therefore\ A\subset X$ $\qquad\qquad$ $\therefore\ X=A$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

66. 정답④

두 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $g(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$ 는 서로 역함수이므로 그래프는 그림과 같이 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.



ㄱ. 그래프에서 $a>1$ 일 때, $f(a)>g(a)$ 이다.(거짓)

ㄴ. 두 그래프의 교점은 직선 $y=x$ 위에 있으므로 $\alpha=\beta$ (참)

ㄷ. $b<f(a)\Leftrightarrow g(b)>a\Leftrightarrow 2a<2g(b)\Leftrightarrow 2a<g(b^2)$

따라서, 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

67. 정답 53

$y=\log_2 x$를 x축의 양의 방향으로 a만큼 평행이동시킨 그래프는 $y=\log_2(x-a)$

점 (9, 2)는 곡선 $y=\log_2(x-a)$ 위의 점이므로

$2=\log_2(9-a)$ ...... ㉠

또, 점 (9, 2)는 $y=\log_b x$ 위의 점이므로

$2=\log_b 9$ ...... ㉡

㉠에서 $9-a=2^2 \quad \therefore a=5$

㉡에서 $9=b^2 \quad \therefore b=3\ (\because b>0)$

$\therefore 10a+b=50+3=53$

68. 정답①

조건을 만족하는 두 함수는 $y=10^{x-k}$, $y=\log_{10}x+k$ 이다.

또한 두 함수는 서로 역함수이고 두 함수의 그래프가 만나는 교점은 $y=x$ 와 $y=\log_{10}x+k$ 의 그래프와의 교점과 같고 두 점 사이의 거리가 $\sqrt{2}$ 이다. 만나는 두 점을 $P(\alpha,\alpha)$, $Q(\beta,\beta)$ (단,$\alpha<\beta$)라 하면

$\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(\beta-\alpha)^2}=\sqrt{2}(\beta-\alpha)=\sqrt{2}$

$\therefore\ \beta-\alpha=1$ ...㉠

한편, $\begin{cases}\alpha=\log_{10}\alpha+k\cdots ㉡\\ \beta=\log_{10}\beta+k\cdots ㉢\end{cases}$ 에서 ㉢ − ㉡ 하면

$\beta-\alpha=\log_{10}\beta-\log_{10}\alpha$ 에서

$\therefore\ \frac{\beta}{\alpha}=10\cdots$ ㉣

㉠과 ㉣를 연립하면 $\alpha=\frac{1}{9}$, $\beta=\frac{10}{9}$ 이므로 ㉡에서

$\frac{1}{9}=\log_{10}\frac{1}{9}+k$

$\therefore\ k=\frac{1}{9}+2\log_{10}3$

69.정답 ⑤

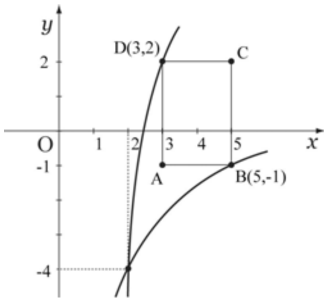
$y=\log_2\{x-(k+1)\}+k$에서 $y=0$을 대입하면

$a_k=k+1+2^{-k}$이다.

$\sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10}(k+1+2^{-k})=66-\frac{1}{2^{10}}$

70. 정답 64

[출제의도] 로그함수의 밑의 성질을 이용한 그래프 이해하기



$y=\log_a(x-1)-4$가 $(2,\ -4)$를 항상 지나므로

직사각형과 만나려면 $a>1$

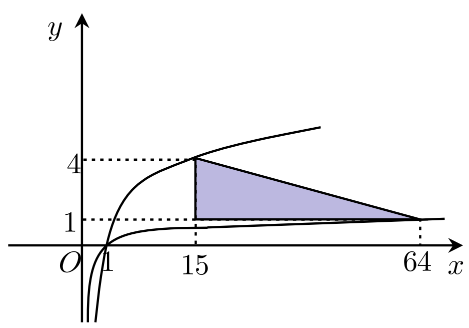
따라서, $y=\log_a(x-1)-4$는 증가함수이므로

$\mathrm{B}(5,\ -1)$을 지날 때, a의 최댓값 $M=4^{\frac{1}{3}}$

$\mathrm{D}(3,\ 2)$를 지날 때, a의 최솟값 $N=2^{\frac{1}{6}}$

$\left(\frac{M}{N}\right)^{12}=64$

71.정답 63개



$y=\log_k x$에서 k는 자연수이므로 증가함수이다.

$y=\log_k x$는 $(15,4)$와 $(64,1)$ 사이를 지날 때 만나므로

$(15,4)$를 지날 때 $4=\log_k 15$이므로 $k=\sqrt[4]{15}$

$(64,1)$을 지날 때 $1=\log_k 64$이므로 $k=64$

$\therefore \sqrt[4]{15}\le k\le 64$이고 $1<\sqrt[4]{15}<2$이므로 자연수의 개수는 2부터 64까지 63개다.

72. 정답 ③

[출제의도] 로그함수의 그래프를 해석하여 수학내적 문제해결하기

$\mathrm{D}(1,\ 0)$, $\mathrm{A}(2^{-k},\ k)$, $\mathrm{B}(2^k,\ k)$ 이므로

$\mathrm{S}_1=\frac{1}{2}(1-2^{-k})k$, $\mathrm{S}_2=\frac{1}{2}(2^k-1)k$,

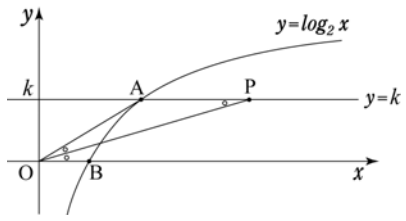
$\mathrm{S}_3=\frac{1}{2}(2^k-2^{-k})k$

$S_1,\ S_2,\ S_3$는 등차수열이므로 $2S_2=S_1+S_3$.

대입하여 풀면 $k=1$

73. 정답 370

[출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기



직선 OP 가 $\angle\mathrm{AOB}$ 의 이등분선이므로

$\angle\mathrm{AOP}=\angle\mathrm{POB}$ 이고

$\angle\mathrm{POB}=\angle\mathrm{APO}$ (엇각)이므로

$\angle\mathrm{AOP}=\angle\mathrm{APO}$, $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{AP}}$ 이다.

$\overline{\mathrm{AP}}=f(k)$ 이므로 $\overline{\mathrm{OA}}=f(k)$.

A 의 좌표가 $(2^k,\ k)$ 이므로

$f(k)=\sqrt{4^k+k^2}$

$\therefore \sum_{k=1}^{4}\{f(k)\}^2=\sum_{k=1}^{4}(4^k+k^2)=370$

74. 정답 ③

선분 AC가 y축에 평행하므로

두 점 A, C의 좌표를 각각

$\mathrm{A}(t,\ \log_2 4t)$, $\mathrm{B}(t,\ \log_2 t)$ $(t>1)$라고 하면

$\overline{\mathrm{AB}}=\log_2 4t-\log_2 t=\log_2\frac{4t}{t}=2$

선분 AC의 중점을 M이라 하면 삼각형 ABC가 정삼각형이므로

$\overline{\mathrm{BM}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\sqrt{3}$

따라서 점 B의 좌표는

$\mathrm{B}(t-\sqrt{3},\ \log_2 4(t-\sqrt{3}))$ 이고

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(t-\sqrt{3}-t)^2+\{\log_2 4(t-\sqrt{3})-\log_2 4t\}^2}$

$=\sqrt{3+\left\{\log_2\frac{(t-\sqrt{3})}{t}\right\}^2}=2$

이므로 $\log_2\frac{(t-\sqrt{3})}{t}=\pm 1$이다.

그런데 $t>1$이므로 $\frac{t-\sqrt{3}}{t}<1$

따라서 $\log_2\frac{(t-\sqrt{3})}{t}=-1$ 이고

$\frac{(t-\sqrt{3})}{t}=\frac{1}{2}$, $2(t-\sqrt{3})=t$

$\therefore t=2\sqrt{3}$

이 때 점 B의 좌표는

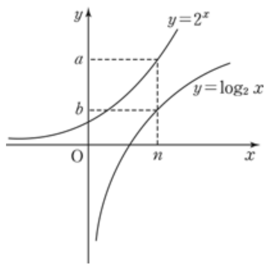
$B(\sqrt{3}, \log_2 4\sqrt{3})$이므로

$p=\sqrt{3}$, $q=\log_2 4\sqrt{3}$

$\therefore\ p^2\times 2^q=(\sqrt{3})^2\times 2^{\log_2 4\sqrt{3}}$

$=3\times 4\sqrt{3}=12\sqrt{3}$

75. 정답 259



다음 그림에서 $a=2^n$, $b=\log_2 n$, $a+b$가 세 자리의 자연수이려면 최소한 a가 세 자리의 자연수이어야 한다.($\because$ a가 두 자리 자연수인 경우 $a+b$가 세 자리의 자연수일 수 없다)

$\therefore\ n=7, 8, 9$

이 때, b가 자연수인 경우는 $n=8$인 경우밖에 없다.

$\therefore\ a=2^8=256, b=\log_2 8=3$

$\therefore\ a+b=259$

76. 정답12

[출제의도] 주어진 함수의 정의를 이해하여 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$2^{f(x)-g(x)}=x$ 의 양변에 밑이 2 인 로그를 취하면

$f(x)-g(x)=\log_2 x$

$\therefore\ f(x)=\log_2 x+g(x)$

조건 (가), (나)에 의해

$f(4)=\log_2 4+g(4)=2+g(4)$

$\therefore\ f(4)=2$

$f(1000)=\log_2 1000+g(1000)$ 에서

$2^9<1000<2^{10}$ 이므로 $f(1000)=10$

$\therefore\ f(4)+f(1000)=2+10=12$

[참고]

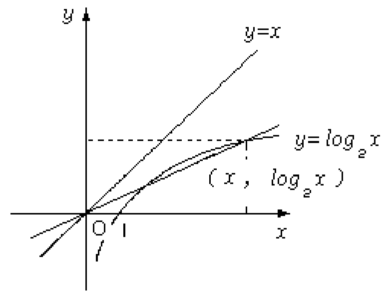
$g(4)=0$, $g(1000)=\log_2\dfrac{1024}{1000}$

77. 정답①

ㄱ. 참. 원점과 $(x, \log_2 x)$ 를 지나는 직선의 기울기 이므로 그림과 같이 두 점을 지나는 직선의 기울기는 항상 1 보다 작다.

ㄴ. 거짓. (반례) $x=\dfrac{1}{2}$ 일 때, $\dfrac{\log_2\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1}=2>1$

ㄷ. 거짓. (반례) $x=1$ 일 때 $\dfrac{\log_2(1+1)}{1}=1$



78. 정답 ④

$y=\log_2|5x|$, $y=\log_2(x+2)$의 교점의 x좌표를 구하면

$|5x|=x+2$에서

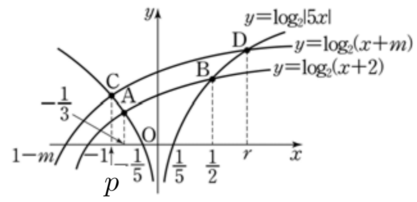
$x>0$일 때 $5x=x+2$, $x=\dfrac{1}{2}$

$x<0$일 때 $-5x=x+2$, $x=-\dfrac{1}{3}$

$\therefore\ A\left(-\dfrac{1}{3}, \log_2\dfrac{5}{3}\right)$ $\therefore\ B\left(\dfrac{1}{2}, \log_2\dfrac{5}{2}\right)$

$y=\log_2|5x|$는 y축에 대하여 대칭인 함수이므로

$y=\log_2|5x|$, $y=\log_2(x+2)$, $y=\log_2(x+m)$의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. $m>2$이므로 그림에서 $r>\dfrac{1}{2}$, $p<-\dfrac{1}{3}$ $\therefore$ 참

ㄴ. $y=\log_2|5x|$, $y=\log_2(x+m)$의 교점을 구하면

$|5x|=x+m$에서 $x=\dfrac{m}{4}$, $-\dfrac{m}{6}$

$\therefore C\left(-\dfrac{m}{6}, \log_2\dfrac{5m}{6}\right)$, $D\left(\dfrac{m}{4}, \log_2\dfrac{5m}{4}\right)$

직선 AB의 기울기는 $\dfrac{\log_2\frac{5}{2}-\log_2\frac{5}{3}}{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\dfrac{6}{5}\log_2\dfrac{3}{2}$

직선 CD의 기울기는 $\dfrac{\log_2\frac{5m}{4}-\log_2\frac{5m}{6}}{\frac{m}{4}-\left(-\frac{m}{6}\right)}=\dfrac{12}{5m}\log_2\dfrac{3}{2}$

$m>2$이므로 $\dfrac{12}{5m}<\dfrac{6}{5}$

따라서, 두 직선의 기울기는 서로 다르다.

$\therefore$ 거짓

ㄷ. B의 y좌표와 C의 y좌표가 같으므로

$\log_2\frac{5}{2}=\log_2\frac{5m}{6}$ $\quad\therefore\ m=3$

$\overline{BC}$가 공통이므로 $\overline{BC}$를 밑변으로 하면

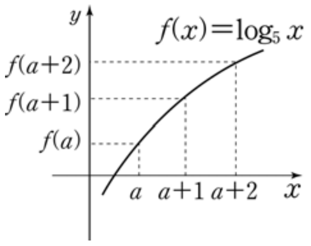
$\triangle$ABC의 높이는 $\log_2\frac{5}{2}-\log_2\frac{5}{3}=\log_2\frac{3}{2}$

$\triangle$DBC의 높이는 $\log_2\frac{5m}{4}-\log_2\frac{5m}{6}=\log_2\frac{3}{2}$

따라서 $\triangle$ABC, $\triangle$DBC의 넓이는 같다.

$\therefore$ 참

79. 정답 ⑤



ㄱ. $\left\{f\left(\frac{a}{5}\right)\right\}^2=\left(\log_5\frac{a}{5}\right)^2=(\log_5 a-1)^2$

$\left\{f\left(\frac{5}{a}\right)\right\}^2=\left(\log_5\frac{5}{a}\right)^2=(1-\log_5 a)^2$ $\quad\therefore$ 참

ㄴ. $f(a+1)-f(a)=\log_5(a+1)-\log_5 a=\log_5\left(1+\frac{1}{a}\right)$

$f(a+2)-f(a+1)=\log_5(a+2)-\log_5(a+1)=\log_5\left(1+\frac{1}{a+1}\right)$

$1+\frac{1}{a}>1+\frac{1}{a+1}$ 이므로

$\log_5\left(1+\frac{1}{a}\right)>\log_5\left(1+\frac{1}{a+1}\right)$ $\quad\therefore$ 참

ㄷ. $f^{-1}(x)=5^x$

$f(a)<f(b)$이면 $a<b$

$a<b$이면 $f^{-1}(a)<f^{-1}(b)$ $\quad\therefore$ 참

따라서, ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

80. 정답 ④

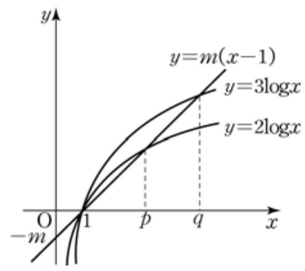
[출제의도] 합성함수의 불연속점 개수 구하기

$$g(f(x))=\begin{cases}2 & \left(0<x<\frac{1}{2}\right)\\ 0 & \left(\frac{1}{2}\leq x<\frac{7}{2}\right)\\ 2 & \left(\frac{7}{2}\leq x<\frac{15}{2}\right)\\ 6 & \left(\frac{15}{2}\leq x<\frac{31}{2}\right)\\ 12 & \left(\frac{31}{2}\leq x<20\right)\end{cases}$$

따라서 불연속 점의 개수는 4개이다.

81. 정답④

ㄱ. (거짓) 문제의 조건들을 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



$\therefore\ p<q$

ㄴ. (참) 두 점 $(1, 0)$, $(0, -m)$을 지나는 직선은 $y=m(x-1)$이고, $(p, 2\log p)$와 $(q, 3\log q)$는 이 직선 위의 점이므로 다음 식이 성립한다.

$2\log p=m(p-1)$ ⋯㉠, $3\log q=m(q-1)$ ⋯㉡

㉡−㉠을 하면 $3\log q-2\log p=m(q-p)$

$$\therefore\ m=\frac{3\log q-2\log p}{q-p}$$

ㄷ. (참) $\frac{3\log q}{q}$는 원점과 점 $(q, 3\log q)$를 지나는 직선의 기울기이다.

이는 위의 그림에서 $(1, 0)$과 $(0, -m)$을 지나는 직선의 기울기 m보다 크다.

82. 정답 ②

[출제의도] 로그부등식의 영역 구하기

[해설] $x>0$, $x\neq1$, $y>0$

(i) $0<x<1$

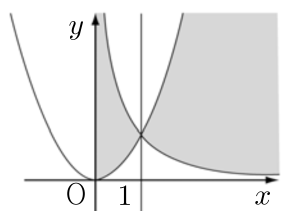
$\log_x\frac{1}{x}<\log_x y<\log_x x^2$

$\therefore x^2<y<\frac{1}{x}$

(ii) $x>1$

$\log_x\frac{1}{x}<\log_x y<\log_x x^2$

$\therefore\frac{1}{x}<y<x^2$



(단, 경계선은 포함하지

83. 정답 ⑤

[출제의도] 로그함수의 그래프를 이해하고 이를 이용할 수 있는가를 묻는 문제이다.

점 B, C의 좌표를 각각 B$(a,\ 0)$, C$(b,\ 0)$이라 하고, 점 E의 x좌표를 k라 하면 $\overline{DG}=1$에서

$\log_2 b=\log_2 a+1=\log_2 2a$

$\therefore\ b=2a$

$\overline{AD}:\overline{DE}=2:3$에서

$(b-a):(k-b)=2:3$

$k=\dfrac{5}{2}b-\dfrac{3}{2}a=\dfrac{7}{2}a$

□ABCD＝□DEFG 에서

$(b-a)\log_2 a=k-b=\dfrac{3}{2}(b-a)$

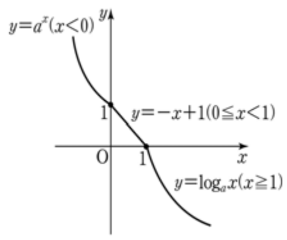
$a\neq b$이므로 $a=2\sqrt{2},\ b=4\sqrt{2}$

$\therefore\ k=\dfrac{7}{2}a=7\sqrt{2}$

84. 정답 ⑤

ㄱ. $\{f(-3)\}^5=(a^{-3})^5=a^{-15}=f(-15)$ ∴ 참

ㄴ. 함수 $f(x)$는 일대일 대응이므로 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$는 한 점에서 만난다. ∴ 참



ㄷ. $y=a^x(x<0)$, $y=\log_a x(x\geqq 1)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고 $y=-x+1(0\leqq x<1)$도 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. ∴ 참

따라서, ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

85. 정답 90

[출제의도] 로그함수의 성질을 이용하여 정사각형의 개수 세기

[해설] $1\leqq x\leqq 2$일 때 정사각형은 0(개)

$2\leqq x\leqq 4$일 때 정사각형의 개수는 $2\times1=2$(개)

$4\leqq x\leqq 8$일 때 정사각형의 개수는 $4\times2=8$(개)

$8\leqq x\leqq 16$일 때 정사각형의 개수는 $8\times3=24$(개)

$16\leqq x\leqq 30$일 때 정사각형의 개수는 $14\times4=56$(개)

따라서 최대 정사각형의 개수는

$2+8+24+56=90$(개)이다.

86. 정답 30

[출제의도] 로그로 정의된 함수를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

그림에서 $\log_4 y$와 $\log_2 x$사이의 관계는 원점과 $(4,1)$을 지나는 일차함수이다. 따라서 $\log_4 y=\dfrac{1}{4}\log_2 x=\dfrac{1}{4}\log_4 x^2$

$=\log_4 x^{\frac{1}{2}}$이다. $y=x^{\frac{1}{2}}$이므로 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$이 된다. 방정식

$4^{[f(x)]}=16$은 $4^{\left[x^{\frac{1}{2}}\right]}=4^2$이므로 $\left[x^{\frac{1}{2}}\right]=2$가 된다. $\therefore 4\leqq x<9$

87. 정답 ③

[출제의도] 수열의 극한을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\log_4 x=n$에서 $A_n(4^n,\ n)$, $\log_2 x=n$에서 $B_n(2^n,\ n)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}(n+1)(4^{n+1}-2^{n+1})}{\frac{1}{2}n(4^n-2^n)}=4$$

88. 정답 ⑤

[출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프를 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^d=c$ (참)

ㄴ. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^a=e$에서 $a=-\log_2 e,\ d=\log_2 e\ \ \therefore a+d=0$ (참)

ㄷ. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^d=c,\ \log_2 e=d$ 에서 $2^d=e\ \ \therefore ce=1$ (참)

89. [정답] ③

[해설] [출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프의 성질과 관계를 파악할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $f(x)$는 감소함수이고, $g(x)$는 증가함수이다. 따라서, 제1사분면의 한 점에서 만나므로 $k=1$이다. (참)

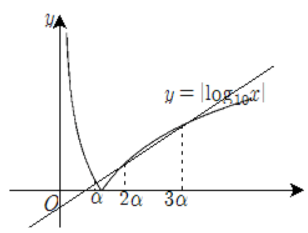
ㄴ. $y=(\sqrt{2})^x$은 $y=x$와 두 점 $(2,2),(4,4)$에서 만난다. 따라서 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 서로 다른 두 점에서 만나므로 $k=2$이다. (참)

ㄷ. (반례) $a=6,\ b=\dfrac{1}{2}$이라 하면 $k=1$이다. (거짓)

90. 정답 ②

[출제의도] 상용로그와 직선의 그래프의 관계를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

함수 $y=|\log_{10}x|$와 $y=ax+b$의 그래프를 방정식 $|\log_{10}x|=ax+b$의 세 실근의 비가 $1:2:3$가 되도록 그려보면 아래와 같다.



세 실근의 비가 $1:2:3$이므로 세 실근을 $\alpha,2\alpha,3\alpha$ $(\alpha>0)$라 하자. α는 $y=-\log_{10}x$와 $y=ax+b$의 교점의 x좌표이고, 2α와 3α는 $y=\log_{10}x$와 $y=ax+b$의 교점의 x좌표들이다. 따라서

$-\log_{10}\alpha=a\alpha+b\cdots$①, $\log_{10}2\alpha=2a\alpha+b\cdots$②,

$\log_{10}3\alpha=3a\alpha+b\cdots$③을 얻을 수 있다. ②−①

$\log_{10}2\alpha^2=a\alpha\cdots$④ ③−① $\log_{10}3\alpha^2=2a\alpha\cdots$⑤

④와 ⑤에서 $2\log_{10}2\alpha^2=\log_{10}3\alpha^2$을 얻을 수 있다. 따라서

$4\alpha^4 = 3\alpha^2$이 된다. $\alpha > 0$이므로 $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$이 된다. $\therefore$세 실근은 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$이므로, 그 합은 $3\sqrt{3}$ 이다.

91. 정답 43

[출제의도] 로그의 성질을 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$200 \leqq x \leqq 300$ 이므로 $7 < \log_2 x < 9$

(i) $7 < \log_2 x < 8$ 즉, $200 \leqq x < 256$ 일 때

$[\log_2 x] = 7,\ [\log_4 x] = [\frac{1}{2}\log_2 x] = 3$ 이므로 $[\log_3 x] = 4$

$\therefore\ 4 \leqq \log_3 x < 5,\ 200 \leqq x < 243$

(ii) $8 \leqq \log_2 x < 9$ 즉, $256 \leqq x \leqq 300$ 일 때

$[\log_2 x] = 8,\ [\log_4 x] = 4,\ [\log_3 x] = 5$ 이므로 조건 (나)를 만족하는 자연수는 없다.

(i), (ii)에서 자연수 x는 43개이다.

92. 정답 ①

$g(x) = 2^x - 1$이므로

ㄱ. $g(4) = 2^4 - 1 = 15$ $\therefore$참

ㄴ. $g(a) + g(b) + 1 = (2^a - 1) + (2^b - 1) + 1 = (2^a + 2^b) - 1$

$g(ab) = 2^{ab} - 1$이므로 거짓

ㄷ. $\mathrm{A}(a,\ \log_2(a+1)),\ \mathrm{B}(b,\ \log_2(b+1))$라 하면 직선 AB의 기울기는 $\dfrac{\log_2(b+1) - \log_2(a+1)}{b-a}$이다.

① (직선 AB의 기울기) < 1일 때,

$\Rightarrow \dfrac{\log_2(b+1) - \log_2(a+1)}{b-a} < 1$

$\Rightarrow \log_2\left(\dfrac{b+1}{a+1}\right)^{b-a} < 1 \Rightarrow \left(\dfrac{b+1}{a+1}\right)^{b-a} < 2$

② (직선 AB의 기울기) > 1일 때,

$\Rightarrow \left(\dfrac{(b+1)}{(a+1)}\right)^{b-a} > 2$

따라서, AB의 기울기에 따라 다르다. $\therefore$거짓

93. 정답 ③

[출제의도] 밑의 범위에 따른 로그함수의 그래프 이해하기

$0 < x < 1$인 범위에서 $\log_a x > \log_b x$ 이기 위해서는 $\log_a x - \log_b x > 0$이어야 한다. 따라서,

$1 < b < a,\ 0 < a < 1 < b,\ 0 < b < a < 1$

$\therefore$ 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

94. 정답 246

[출제의도] 함수의 최대, 최소 구하기

$f(x) = 9x^{-2+\log_3 x}$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 f(x) = \log_3 9 + \log_3 x^{-2+\log_3 x}$

$= 2 + (-2 + \log_3 x)\log_3 x$

$\log_3 x = t$라 하면 $\dfrac{1}{3} \leq x \leq 3$에서 $-1 \leq t \leq 1$이다.

$\log_3 f(x) = t^2 - 2t + 2 = (t-1)^2 + 1$에서

$t = -1$일 때, 최댓값 $M = 243$

$t = 1$일 때, 최솟값 $m = 3$이므로 $M + m = 246$이다.

95. 정답10

$\log_3 x = X,\ \ \log_3 y = Y$라 하면

$(\log_3 x)^2 + (\log_3 y)^2 = 2\log_9 x + 2\log_9 y = \log_3 x + \log_3 y$ 는

$X^2 + Y^2 = X + Y,\ \left(X - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(Y - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2} \cdots$ ㉠

$\log_3 xy = \log_3 x + \log_3 y = X + Y$ 에서 직선 $X + Y - \log_3 xy = 0$과 ㉠이 만나야 하므로

$\dfrac{\left|\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \log_3 xy\right|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ |1 - \log_3 xy| \leq 1$

$\therefore 0 \leq \log_3 xy \leq 2$

$\therefore 1 \leq xy \leq 9$ $\quad\therefore\ M + m = 9 + 1 = 10$

96. 정답 ④

점 A의 x좌표를 a, 점 B의 x좌표를 b라 하면

$\mathrm{A}(a,\ 2\log_2 a),\ \mathrm{B}(b,\ 2^{b-3}),\ \mathrm{D}(b,\ 2\log_2 b)$

이고 $\overline{\mathrm{AB}} = 2$에서 $b - a = 2$ ……㉠

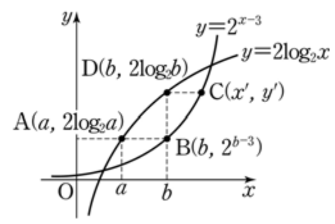
$\overline{\mathrm{BD}} = 2$에서 $2\log_2 b - 2\log_2 a = 2$ ……㉡

($\because$ A와 B의 y좌표가 같으므로)

㉠, ㉡에서

$\log_2 \dfrac{b}{b-2} = 1$이고

$b = 4,\ a = 2$



점 C의 y좌표가 점 D의 y좌표와 같으므로

점 C의 좌표를 $(x',\ y')$라 하면

$y' = 2^{x'-3} = 2\log_2 4$이므로 $x' = 5,\ y' = 4$

$\therefore \mathrm{C}(5,\ 4)$

$\triangle\mathrm{ABD}$의 넓이는 $\dfrac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$

$\triangle\mathrm{BCD}$의 넓이는 $\dfrac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$

따라서, 사각형 ABCD의 넓이는 3이다.

97. 정답 ①

[출제의도] 로그함수의 그래프를 이해하기

$f(x)=-2x+1\ (x<0)$

$y=(g\circ f)(x)=\log_2 f(x)=\log_2(-2x+1)$

$f(x)=1\ (0\leqq x<1)$

$y=(g\circ f)(x)=\log_2 f(x)=0$

$f(x)=2x-1(x\geqq 1)$

$y=(g\circ f)(x)=\log_2 f(x)=\log_2(2x-1)$

98. 정답 11

$x^2-2x+65=(x-1)^2+64$이므로 진수의 최솟값은 64이고 최댓값은 없다.

$\log_{a-3}(x^2-2x+65)$의 최솟값이 2가 되려면 $\log_{a-3}64=2$이고

$a-3=8,\quad \therefore a=11$

99. 정답④

밑을 2 로 변환시킨 후 정리하면

$\log_2 y=(\log_2 x)^2-6\log_2 x+12$

$\log_2 x=t$ 라 하면 $\log_2 y=t^2-6t+12$ 이고 $1\leqq t\leqq 4$ 에서

$3\leqq \log_2 y\leqq 7$

$\therefore\ 2^3\leqq y\leqq 2^7$

$a=2^7$, $b=2^3$ 이므로 $\dfrac{a}{b}=16$

100.정답 ②

[출제의도] 지수함수와 로그함수를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.

직선 AB 의 방정식은 $y=-x+5$ 이므로

점 P 의 좌표를 (a,b)라 하면 $a+b=5$

이 때, 점 H 의 x좌표는 $b=\log_2 x-1$ 에서 $x=2^{b+1}$ $\therefore$

$\overline{\mathrm{PH}}=2^{b+1}-a$

또, 점 K 의 y좌표는 $y=2^a-1$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PK}}=2^a-1-b$

$\overline{\mathrm{PH}}+\overline{\mathrm{PK}}=2^{b+1}-a+2^a-1-b$

$=2^a+2^{b+1}-6\ \geqq\ 2\sqrt{2^a\cdot 2^{b+1}}-6$

$=10$

따라서 $a=3$, $b=2$ 일 때 최솟값은 10 이다.

101. 정답③

$x+1<3\log_2 x \Leftrightarrow 2^{x+1}<x^3$ 이고 이를 만족하는 x 의 범위는 그래프에서 $2<x<8$ 이다.

한편, 구하는 부등식은 $y=2^{x+1}$, $y=x^3$ 을 각각 x 축 방향으로 -1 만큼 평행이동한 결과이므로 $2^{x+2}<(x+1)^3$ 를 만족시키는 x 의 범위는 $1<x<7$ 이다.

$\therefore\ \alpha+\beta=8$

102. 정답 ①

$3^a=p,\ 3^b=q$이므로 $a=\log_3 p$, $b=\log_3 q$

ㄱ. $a+b=\log_3 p+\log_3 q=\log_3 pq$ $\quad\therefore$거짓

ㄴ. $\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{1}{2}\log_3 pq=\log_3\sqrt{pq}$,

$f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=3^{\frac{a+b}{2}}=\sqrt{pq}$ $\quad\therefore$참

ㄷ. 반례) $A\left(-1,\ \dfrac{1}{3}\right)$, $B(1,3)$에 대하여

$\dfrac{3-\frac{1}{3}}{1-(-1)}$ $\quad\therefore$거짓

103. 정답 27

[출제의도] 로그방정식의 해 구하기

양변에 밑을 3 으로 하는 로그를 취하면

$\log_3 x^{\log_3 x}=\log_3 27x^3$ 이며

$\log_3 x^{\log_3 x}=(\log_3 x)^2$ 이므로

$(\log_3 x)^2-3\log_3 x-3=0$

$\log_3 x=t$ 라 하면

$t^2-3t-3=0$ 은 서로 다른 두 실근을 가진다. 이를 $\log_3\alpha$, $\log_3\beta$ 라하면 두 근은 합은

$3=\log_3\alpha+\log_3\beta=\log_3\alpha\beta$ 이므로 $\alpha\beta=27$ 이다.

104. 정답 ②

교점의 개수를 구하면 된다.

$\log_3 x+\log_3 y=(\log_3 xy)^2$ 에서 로그 방정식을 풀면

$y=\dfrac{1}{x}$, $y=\dfrac{3}{x}$ $(x>0)$ 와 $|x|+|y|=2$의 교점은 1 개

105. 정답 ①

[출제의도] 실수의 대소관계를 알아낼 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\log_2 a-\log_2 b=x$, $\log_2 b-\log_2 c=y$,

$\log_2 c-\log_2 a=z$ 라 하면

$x>y>z$ 이고 $x+y+z=0$

이므로 항상 $x>0$, $z<0$가 성립하고, y 의 부호는 알 수 없다. 따라서 항상 $a>b, a>c$ 가 성립하고, b, c 의 대소관계는 알 수 없다.

106. 정답 ②

교점의 개수를 구하면 된다.

$\log_3 x+\log_3 y=(\log_3 xy)^2$ 에서 로그 방정식을 풀면

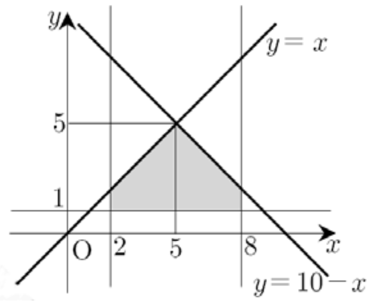
$y=\dfrac{1}{x}$, $y=\dfrac{3}{x}$ $(x>0)$ 와 $|x|+|y|=2$의 교점은 1 개

107. 정답 15

$\log_x y \leqq 1$에서 $y \leqq x$ ($\because$ $2 \leqq x \leqq 8$)

$\log_{(10-x)} y \leqq 1$에서 $y \leqq 10-x$ ($\because$ $2 \leqq 10-x \leqq 8$)

이므로 $2 \leqq x \leqq 8$, $y \geqq 1$, $y \leqq x$, $y \leqq 10-x$를 모두 만족시키는 영역은 그래프의 색칠한 부분이다.



구하는 영역의 넓이는 $S = 1 \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 15$

108. 정답②

[출제의도] 로그의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 지수부등식의 해 구하기

$1 + \frac{1}{\log_3 x} - \frac{1}{\log_5 x} < 0$

$1 + \log_x 3 - \log_x 5 < 0$

$1 < \log_x \frac{5}{3}$

따라서 $1 < x < \frac{5}{3}$

$2^a > 2^{x(x-a+1)}$

$a > x(x-a+1)$

$x^2 - (a-1)x - a < 0$

$(x-a)(x+1) < 0$

따라서 $-1 < x < a$

$\therefore$ $A \subset B$이기 위한 a의 최솟값은 $\frac{5}{3}$

109. 정답100

양변에 상용로그를 취하여 정리하면

$x^2 + (2\log_{10} a)x + 2\log_{10} a \geqq 0$

모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$D/4 = (\log_{10} a)^2 - 2\log_{10} a \leqq 0$ 에서 $1 \leqq a \leqq 100$

$\therefore$ 양의 정수 a 의 최댓값은 100

110.정답 84

[출제의도] 로그부등식을 만족하는 최대, 최소 구하기

[해설] ⅰ) $\log_3 x \geq 0$, $\log_3 y \geq 0$인 경우

$x \geq 1$, $y \geq 1$이고 $xy \leq 9$이므로 $y \leq \frac{9}{x}$이다.

ⅱ) $\log_3 x \geq 0$, $\log_3 y < 0$인 경우

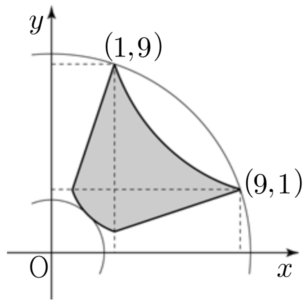
$x \geq 1$, $0 < y < 1$이고 $\frac{x}{y} \leq 9$이므로 $y \geq \frac{x}{9}$이다.

ⅲ) $\log_3 x < 0$, $\log_3 y \geq 0$인 경우

$0 < x < 1$, $y \geq 1$이고 $\frac{y}{x} \leq 9$이므로 $y \leq 9x$이다.

ⅳ) $\log_3 x < 0$, $\log_3 y < 0$인 경우

$0 < x < 1$, $0 < y < 1$이고 $xy \geq \frac{1}{9}$이므로 $y \geq \frac{1}{9x}$이다.



$x^2 + y^2 = k$라 하면 최댓값은 $(1,9)$, $(9,1)$을 지날 때이므로 $M = 82$, 최솟값은 $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$에서 접할 때이므로 $m = \frac{2}{9}$이다.

따라서 $M + 9m = 84$이다.

111.정답 4

[출제의도] 로그부등식을 풀기

$x^2 - x - 2 \leqq 10 \Leftrightarrow -3 \leqq x \leqq 4$

한편, $x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow x < -1, x > 2$ 이므로

$-3 \leqq x < -1$, $2 < x \leqq 4$ 정수개수는 4개.

112. 정답 ②

[출제의도] 로그함수의 성질 이해하기

$\log_2(y+1) - \log_2|x| = \log_2 \frac{y+1}{|x|}$ 에서

$\frac{y+1}{|x|} = k$ $(k > 0)$ 즉, $y = k|x| - 1$ 로 놓으면

k 가 최솟값을 가질 때, $\log_2 \frac{y+1}{|x|}$ 즉, $\log_2 k$ 도 최솟값을 갖는다.

$y = x^2$ 과 $y = k|x| - 1$ 이 접할 때,

즉, 방정식 $x^2 - k|x| + 1 = 0$ 이 중근을 가질 때, k 가 최솟값을 가지므로 $k = 2$ 이다.

$\therefore$ $\log_2 \frac{y+1}{|x|} = \log_2 k = \log_2 2 = 1$

113. 정답②

[출제의도] 로그부등식의 해 구하기

로그의 밑이 $f(x)$ 이므로

(ⅰ) $0 < f(x) < 1$ 일 때, $f(x) > g(x)$ 의 해는 $a < x < b$ 이다.

(ⅱ) $f(x) > 1$ 일 때, $f(x) < g(x)$ 의 해는 $0 < x < e$ 에서 없다.

$\therefore$ (ⅰ), (ⅱ) 에 의하여 해는 $a < x < b$

114. 정답 ③

$f(x)=x^2-4x+31$로 놓으면

$f(x)=(x-2)^2+27$에서

$f(x)$의 최솟값이 27이므로

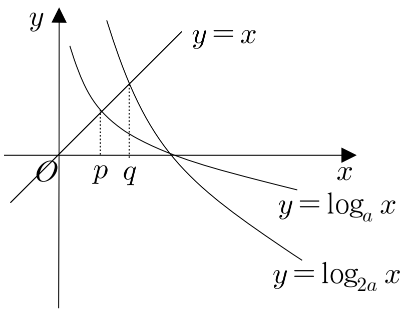
$y=3+\log_3(x^2-4x+3)$의 최솟값은

$3+\log_3 27=3+3=6$

115. 정답 ⑤

$0<a<\frac{1}{2}$에서 $0<a<2a<1$이므로

두 함수$y=\log_a x$, $y=\log_{2a} x$의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. $p=\frac{1}{2}$이면 $p=\log_a p$에서

$a^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

양변을 제곱하면 $a=\frac{1}{4}$ (참)

ㄴ. 위의 그림에서

$p<q$ (참)

ㄷ. $p=\log_a p$, $q=\log_{2a} q$이므로

$a^p=p$, $(2a)^q=q$

즉, $a^p=p$, $a^q=\frac{q}{2^q}$

$\therefore\ a^{p+q}=a^p\cdot a^q=p\cdot\frac{q}{2^q}=\frac{pq}{2^q}$ (참)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

116. 정답 13

$\log_3 x=t$라 두면 $(0\leq t\leq 4)$

$y=t(-t)+2t+10$

$=-t^2+2t+10$

$=-(t-1)^2+11$

(i) $t=4$ 일 때, 최솟값 $m=2$

(ii) $t=1$ 일 때, 최댓값 $\mathrm{M}=11$

$\therefore \mathrm{M}+m=13$

117. 정답 81

$(\log_3 x)(\log_3 3x)\leq 20$에서

$(\log_3 x)(\log_3 3+\log_3 x)\leq 20$

$(\log_3 x)(1+\log_3 x)\leq 20$ $\log_3 x=t$로 놓으면

$t(t+1)\leq 20$

$t^2+t-20\leq 0$ $(t+5)(t-4)\leq 0$

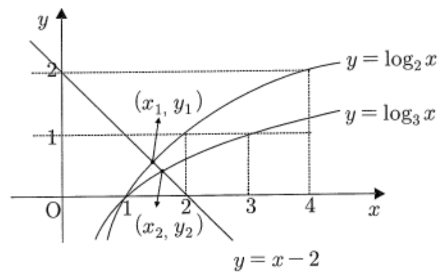
$\therefore -5\leq t\leq 4$ $-5\leq\log_3 x\leq 4$에서

$3^{-5}\leq x\leq 3^4$이다.

$\therefore \frac{1}{243}\leq x\leq 81$

따라서, 자연수 x의 최댓값은 81이다.

118. 정답 ⑤



ㄱ. 위 그림에서 $x_1>1$, $y_2<1$이므로 $x_1>y_2$ [참]

ㄴ. $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$는 직선 $y=2-x$ 위의 점이므로

직선의 기울기가 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-1$이므로

$\therefore\ x_2-x_1=-(y_2-y_1)=y_1-y_2$ [참]

ㄷ. $x_1y_1-x_2y_2=x_1(2-x_1)-x_2(2-x_2)$

$=({x_2}^2-{x_1}^2)-2(x_2-x_1)$

$=(x_2-x_1)(x_2+x_1-2)$

$x_2-x_1>0$이고,

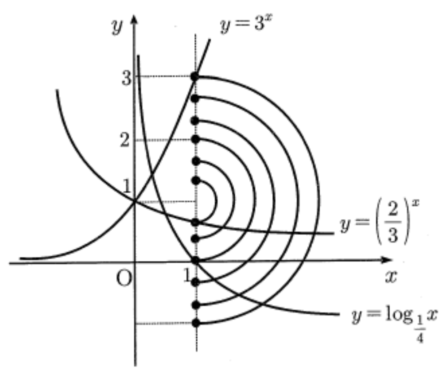
$x_1>1$, $x_2>1$에서 $x_1+x_2>2$이므로

$x_1y_1-x_2y_2>0$ $\therefore x_1y_1>x_2y_2$

따라서, 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

119. 정답 ④

세 그래프의 $x=0$과 $x=1$일 때 교점을 조사하여 그래프를 그린다.



$\therefore a=4,\ b=6,\ c=1$ $\therefore\ c<a<b$

120. [정답] 12

[해설]

$\log_3(x-4)=\log_{3^2}(5x+4)$

$\log_3(x-4)=\frac{1}{2}log_3(5x+4)$

$2\log_3(x-4)=\log_3(5x+4)$

$\log_3(x-4)^2=\log_3(5x+4)$

$(x-4)^2=5x+4,\ x^2-13x+12=0$

$(x-1)(x-12)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=12$

이때 진수조건에 의하여 $x>4$이므로

$\alpha=12$

121. 정답 14

로그의 진수의 조건에서

$x>0,\ 12x+28>0$이므로 $x>0$……㉠

주어진 로그부등식은

$\log_2 x \leqq \frac{\log_2(12x+28)}{\log_2 4}$

$\log_2 x^2 \leqq \log_2(12x+28)$

이다. 따라서

$x^2 \leqq 12x+28,\ x^2-12x-28 \leqq 0$

$(x-14)(x+2) \leqq 0$

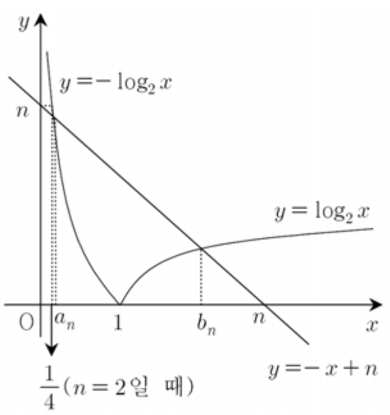
$\therefore\ -2 \leqq x \leqq 14$……㉡

㉠,㉡에서

$0<x \leqq 14$

따라서 주어진 로그부등식을 만족하는 자연수 x의 개수는 14(개)이다.

122. 정답 ④



ㄱ. $2=-\log_2 x$ 을 만족하는 x의 값은 $\frac{1}{4}$이므로

$a_2>\frac{1}{4}$이다. (거짓)

ㄴ. 모든 자연수 n에 대하여 $0<a_{n+1}<a_n$이므로

$0<\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$이다. (참)

ㄷ. $b_n<n$이므로 $\frac{b_n}{n}<1$이다.

또, $\log_2 b_n=-b_n+n$이므로

$0=b_n-n+\log_2 b_n<b_n-n+\log_2 n$

따라서 $n-\log_2 n<b_n$

양변을 n으로 나누면

$1-\frac{\log_2 n}{n}<\frac{b_n}{n}$

따라서 $1-\frac{\log_2 n}{n}<\frac{b_n}{n}<1$이 성립한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

123.[정답] ③

[해설]

ㄱ. $y=-\log_2 x$의 그래프 위의 점 $\left(\frac{1}{2},1\right)$과 $P(x_1,y_1)$의 위치를 비교하면 $y_1<1$이므로 $\frac{1}{2}<x_1<1$ $\quad\therefore$ 참

ㄴ. $y=2^x$의 역함수는 $y=\log_2 x$이고,

$y=-\log_2 x$의 역함수는 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^2$이므로

$y=2^x$와 $y=-\log_2 x$의 교점 $R(x_3,y_3)$와 $y=\log_2 x$와

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 교점 $Q(x_2,y_2)$는 직선 $y=x$에 대해 대칭이다.

$\therefore x_3=y_2, x_2=y_3 \cdots\cdots (*)$

$\therefore x_2y_2-x_3y_3=0 \qquad \therefore$ 참

ㄷ. 점 (1,0)을 S라 하면

($\overline{RS}$의 기울기) < ($\overline{PS}$의 기울기) 이므로

$\frac{y_3}{x_3-1}<\frac{y_1}{x_1-1}$이고, 여기에 위의 (*)을 대입하면

$\frac{x_2}{y_2-1}<\frac{y_1}{x_1-1}$이 성립하므로

$x_2(x_1-1)<y_1(y_2-1)\ (\because x_1-1<0, y_2-1<0) \qquad \therefore$거짓

따라서, 옳은 것은 ㄱ,ㄴ이다.

정답및 해설

1. 정답 ④

[출제의도] 행렬의 뜻 이해하기

$\begin{pmatrix}8000 & 6000\\ 10000 & 7000\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}62000\\ 75000\end{pmatrix}$

절약 할 수 있는 금액은 $75000-62000=13000$

2. 정답 ⑤

$X+Y=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdots$ ㉠, $X-Y=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}\cdots$㉡

㉠+㉡을 하면 $2X=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$

$\therefore\ X=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

$\therefore$

$X^2+XY=X(X+Y)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

3. 정답 ③

$AX+BX=(A+B)X=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 8 & 4\end{pmatrix}$ 이므로 $\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 8 & 4\end{pmatrix}$이 된다.

$\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -5 & 3\end{pmatrix}$이므로

$\therefore\ X=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 8 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & -4\\ 24 & 12\end{pmatrix}$

4. 정답 ①

[출제의도] 행렬의 연산을 할 수 있다.

$AB-A=A(B-E)$

$=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

5. 정답 ④

$A+B=2E$에서

$B=2E-A$

$=2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$

$A-B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0 & 4\\ -4 & 4\end{pmatrix}$

따라서 $0+4-4+4=4$

6. 정답 ②

[출제의도] 행렬의 연산을 이용하여 행렬 구하기

$A+X=3B+2X$를 정리하면 $X=A-3B$이다.

따라서, $X=\begin{pmatrix}-5 & 3\\ -9 & -11\end{pmatrix}$이다.

7. 정답 ②

[출제의도] 행렬의 곱셈을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}$

따라서 행렬 X의 모든 성분의 합은 6이다.

8. 정답 ①

[출제의도] 행렬의 연산 성질을 이해하고 계산하기

[해설]$X=3A-B=\begin{pmatrix}6 & -3\\ 0 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -2 & 0\end{pmatrix}$

9. 정답 ③

[출제의도] 행렬의 정의를 알고 연산하기

A는 2×3행렬, B는 3×2행렬, C는 3×1행렬이므로

$AC=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_{11}\\ c_{21}\\ c_{31}\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}a_{11}c_{11}+a_{12}c_{21}+a_{13}c_{31}\\ a_{21}c_{11}+a_{22}c_{21}+a_{23}c_{31}\end{pmatrix}$

10. 정답 ④

[출제의도] 행렬의 연산을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A^2+AB=A(A+B)=A\cdot(2E)=2A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 6 & 8\end{pmatrix}$이므로 구하는 모든 성분의 합은 20이다.

11. 정답①

$X=\frac{3}{2}B-\frac{1}{2}A$ 이므로 $X=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 8 & -6\end{pmatrix}$

12. 정답 ①

[출제의도] 두 행렬의 합과 실수배 계산하기

[해설] 두 식을 더하면

$2X=A+B,\quad X=\frac{1}{2}(A+B)$

$\therefore\ X=\frac{1}{2}(A+B)$

$=\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 5 & 3\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix}$

따라서 모든 성분의 합은 8

13. 정답 ①

$A-B=\begin{pmatrix}3&5\\-4&2\end{pmatrix}\cdots$ ①, $\quad 2A+B=\begin{pmatrix}6&-2\\1&4\end{pmatrix}\cdots$ ②

①+②을 하면

$3A=\begin{pmatrix}9&3\\-3&6\end{pmatrix}$, $\therefore A=\begin{pmatrix}3&1\\-1&2\end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix}3&1\\-1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&5\\-4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-4\\3&0\end{pmatrix}$

따라서 행렬 B의 모든 성분의 합은 -1이다.

14. 정답 ⑤

$X=X+Y-Y=\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&-2\end{pmatrix}$

$\therefore 2X=\begin{pmatrix}2&4\\0&-4\end{pmatrix}$

15. 정답 ⑤

$A-2B=\begin{pmatrix}-7&-2\\6&0\end{pmatrix}$에서

$A=2B+\begin{pmatrix}-7&2\\6&0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}2&-1\\-3&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-7&-2\\6&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-4\\0&2\end{pmatrix}$

성분의 합$=-5$

16. 정답 ③

$X+B=AB$에서

$X=AB-B=\begin{pmatrix}1&2\\0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0\\1&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&0\\1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-4\\3&-6\end{pmatrix}$

17. 정답 ⑤

$(A+B)^2=\left(\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right)^2$

$=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}^2$

$=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$

18. 정답 ②

[출제의도] 행렬의 연산 계산하기

$2X=B-3A=\begin{pmatrix}-2&2\\-10&-2\end{pmatrix}$

$X=\begin{pmatrix}-1&1\\-5&-1\end{pmatrix}$ $\quad\therefore$ 성분의 합 -6

19. 정답 ④

[출제의도] 행렬을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A=\begin{pmatrix}2&2\\4&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$이므로 $AB=\begin{pmatrix}4&8\\8&16\end{pmatrix}$

따라서 모든 성분의 합은 36이다.

20. 정답 ②

[출제의도] 행렬의 덧셈과 곱셈을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7&2\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&4\\2&2\end{pmatrix}$

$\therefore$ 16

21. 정답 ①

(준식) $=A(A+B)$

$=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}$

22. 정답 ①

[출제의도] 행렬의 성분의 뜻을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$a_{11}=\left[\frac{3-1}{2}\right]=\left[\frac{2}{2}\right]=1$, $\quad a_{12}=\left[\frac{3-2}{2}\right]=\left[\frac{1}{2}\right]=0$,

$a_{21}=\left[\frac{6-1}{2}\right]=\left[\frac{5}{2}\right]=2$, $\quad a_{22}=\left[\frac{6-2}{2}\right]=\left[\frac{4}{2}\right]=2$

$\therefore A=\begin{pmatrix}1&0\\2&2\end{pmatrix}$

따라서 A의 모든 성분의 합은 5이다.

23. 정답 ③

P모집단위에 대한 갑의 점수는

$70\times0.6+65\times0.4$이므로 BC의 (1, 1)의 성분과 같다.

24. 정답 ①

$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

25. 정답 ④

$\begin{cases}x+y=10\\10x+12y=114\end{cases}$ 에서 $\begin{cases}x+y=10\\5x+6y=57\end{cases}$ 이 식을 행렬로

나타내면 $\begin{pmatrix}1&1\\5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\57\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\5&6\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}10\\57\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-1\\-5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\57\end{pmatrix}$

$\therefore\ a+b=-1+(-5)=-6$

26. 정답 25

[출제의도] 실생활의 상황을 행렬을 이용하여 나타낼 수 있는가를 묻는 문제이다.

남아 있는 에너지는 $1000-2x-3y$이고,

현재의 점수는 $100+10x+20y$이므로

$a=-2,\ b=-3,\ c=10,\ d=20$

$\therefore\ a+b+c+d=-2-3+10+20=25$

27.정답 ②

[출제의도] 행렬을 실생활에 적용하여 문제해결하기

[해설] $p+q=5$, $p+r=6\cdots$①, $q+r=7\cdots$②

①-②에서 $p-q=-1$이다. 따라서 $\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & a\\b & -1\end{pmatrix}$이므로

$a+b=2$이다.

28.정답 79

[출제의도] 역행렬을 이용하여 실생활문제 해결하기

[해설] $\begin{cases}x+y=30\\x(1-0.2)^2+y(1-0.3)^2=15\end{cases}$

$\begin{pmatrix}1 & 1\\0.64 & 0.49\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}30\\15\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\0.64 & 0.49\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}30\\15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{49}{15} & \frac{20}{3}\\\frac{64}{15} & -\frac{20}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}30\\15\end{pmatrix}$

A의 $(2,\ 1)$성분은 $\frac{64}{15}$이므로 $a+b=79$이다.

29. 정답 16

[출제의도] 행렬의 성분에 대한 정의를 알고 있는가를 묻는 문제이다.

$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 3\\4 & 6\end{pmatrix}$

$\therefore 16$

30.정답 ④

$a_{11}=1$, $a_{12}=2$, $a_{21}=2$, $a_{22}=3$

$\therefore A=\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 3\end{pmatrix}$

따라서 모든 성분의 합은 8이다

31. 정답 ④

[출제의도] 행렬의 뜻을 이해하기

$a_{11}=1+1=2$, $a_{12}=1-4=-3$

$a_{21}=2-1=1$, $a_{22}=2+2=4$

이므로 $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\1 & 4\end{pmatrix}$이다.

따라서, A의 모든 성분의 합은 4이다.

32. 정답 ④

[출제의도] 원과 직선의 위치관계를 이해하여 행렬을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

원의 중심에서 직선까지의 거리는 $\frac{i+j}{\sqrt{2}}$이다.

$\therefore\ A=\begin{pmatrix}2 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}$

33. 정답 ②

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.6 & 0.2\\0.4 & 0.8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}20\\15\end{pmatrix}$

34. 정답 ④

[출제의도] 행렬의 곱셈을 이용하여 실생활 문제 해결하기

표에서 각 세트에 구성된 과자와 사탕의 봉의 개수를 행렬로 나타내면 $\begin{pmatrix}5 & 1\\2 & 4\end{pmatrix}$이고 각 세트의 개수가 10, 15이므로 전체 과자와 사탕의 봉의 개수는

$(10\ \ 15)\begin{pmatrix}5 & 1\\2 & 4\end{pmatrix}=(10\times5+15\times2\ \ \ 10\times1+15\times4)$이다.

한 봉 당 과자가 500원, 사탕이 800원이므로

전체 구입금액은 $(10\ \ 15)\begin{pmatrix}5 & 1\\2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}500\\800\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}80\times500\\70\times800\end{pmatrix}$

$\therefore (10\ \ 15)\begin{pmatrix}5 & 1\\2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}500\\800\end{pmatrix}$ 또는 $(500\ \ 800)\begin{pmatrix}5 & 2\\1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\15\end{pmatrix}$

35. 정답 ⑤

[출제의도] 행렬의 덧셈을 활용할 수 있다.

$A+B=\begin{pmatrix}a+c\\b+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$

$0\leq a\leq 1$, $0\leq b\leq 1$, $0\leq c\leq 1$, $0\leq d\leq 1$ 이므로

$0\leq a+c\leq 2$, $0\leq b+d\leq 2$

$\therefore\ 0\leq p\leq 2$, $0\leq q\leq 2$

따라서 구하는 영역의 넓이는 4 이다.

36.정답 24

[출제의도] 행렬의 곱셈의 성질 이해하기

[해설] $A=(p\ \ q)$, $B=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$라 하자.

$MA+B=\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}(p\ \ q)+\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$의 성분의 합은

$-(p+q)+(a+b+c+d)$

$=-(p+q)+18=-6$이다. $\therefore\ p+q=24$

따라서 A의 모든 성분의 합은 24이다.

37. 정답 23

$A=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$라 하면 $\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2c & b+2d\\2a+c & 2b+d\end{pmatrix}$

모든 성분의 합이 27이므로 $3(a+b+c+d)=27$이다.

또, $A+B=2E$이므로 $B=2E-A$를 $AB=E$에 대입하면

$AB=A(2E-A)=2A-A^2=E$

$A^2=2A-E$

양변에 A를 곱하면

$A^3=2A^2-A=2(2A-E)-A$

$=3A-2E=3\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3a-2 & 3b\\3c & 3d-2\end{pmatrix}$

따라서 모든 성분의 합은 $3(a+b+c+d)-4=23$

38. 정답 ②

ㄱ. $(1\ \ 2)\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=(11)$ $\qquad\therefore$거짓

ㄴ. $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}(1\ 2)=\begin{pmatrix}3&6\\4&8\end{pmatrix}$ $\therefore$참

ㄷ. $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3\\7&7\end{pmatrix}$ $\therefore$거짓

39. 정답 ②

[출제의도] 행렬의 곱셈에서 교환법칙이 성립하는 상수 구하기

[해설] $AB=\begin{pmatrix}a&1\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\b&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b&-a+1\\-b&-1\end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix}1&-1\\b&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&1\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&2\\ab&b-1\end{pmatrix}$

$AB=BA$이므로

$a+b=a$에서 $b=0$

$-a+1=2$에서 $a=-1$ $\therefore a+b=-1$

40. 정답 ③

$AB=\begin{pmatrix}-2&-3&-10\\4&6&20\end{pmatrix}$이므로 모든 성분의 합은 15이다.

41. 정답 ①

$A^2+AB=A(A+B)=AE=A=\begin{pmatrix}3&1\\2&4\end{pmatrix}$

따라서 구하는 모든 성분의 합은 10이다.

42. 정답 14

$X=2A+3B=\begin{pmatrix}4&6\\-2&8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}9&3\\-3&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&9\\-5&14\end{pmatrix}$

$\therefore$ 2 행 2 열의 성분은 14 이다.

43. 정답 ④

$A^2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&-2\\2&0\end{pmatrix}$이므로

$A^4=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-4&0\\0&-4\end{pmatrix}=-2E$

$B^3=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}-8&0\\0&-8\end{pmatrix}=-2E$

$\therefore A^{12}+B^{12}=(A^4)^3+(B^3)^4=-8E+16E=8E$

따라서 모든 성분의 합은 $8+8=16$이다.

44. 정답 30

[출제의도] 행렬의 곱셈을 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a+3b\\2c+3d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

$A^2\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=AA\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3a+4b\\3c+4d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}$

$2a+3b=3,\ 3a+4b=5$

$\therefore a=3,\ b=-1$

$2c+3d=4,\ 3c+4d=7$

$\therefore c=5,\ d=-2$

따라서 $abcd=30$이다.

45. 정답 17

$x=b,\ y=9$가 연립방정식을 만족하므로

$\begin{pmatrix}1&-2\\a&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}b-18\\ab+18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

즉, $b-18=0,\ ab+18=0$ 에서

$a=-1,\ b=18$

$\therefore\ a+b=17$

46. 정답 ①

$\begin{pmatrix}x&y\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2xy\\y+x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14\\6\end{pmatrix}$에서 $x+y=6,\ xy=7$

$\therefore x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=6^2-2\times7=22$

47. 정답 ①

[출제의도] 행렬의 거듭제곱 계산하기

$x^2+x-6=0,\ (x+3)(x-2)=0$ 에서

두 근이 a, d 이므로

$a=-3, d=2$ 또는 $a=2, d=-3$

$x^2-8x-7=0$ 에서 두 근이 b, c 이므로

근과 계수와의 관계에 의해 $b+c=8,\ bc=-7$

(1) $a=-3, d=2$의 경우

$A=\begin{pmatrix}-3&b\\c&2\end{pmatrix}$

$A^2=\begin{pmatrix}-3&b\\c&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&b\\c&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9+bc&-b\\-c&bc+4\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2&-b\\-c&-3\end{pmatrix}$

$A^3=\begin{pmatrix}2&-b\\-c&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&b\\c&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6-bc&0\\0&-bc-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$A+A^2+A^3=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ 이므로

$A+A^2+A^3+A^4+\cdots+A^{10}=A$

따라서 모든 성분의 합은 7

(2) $a=2, d=-3$의 경우

마찬가지의 방법으로 모든 성분의 합은 7

(별해)

$x^2+x-6=0,\ (x+3)(x-2)=0$ 에서

두 근이 a, d 이므로 $a+d=-1$

$x^2-8x-7=0$ 에서 두 근이 b, c 이므로

근과 계수와의 관계에 의해 $b+c=8,\ bc=-7$

케일리-해밀턴 공식을 이용하여 풀면

$A^2+A+E=O$

$A+A^2+A^3=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ 이므로

$A+A^2+A^3+A^4+\cdots+A^{10}=A$
따라서 모든 성분의 합은 7

48. 정답 8

$A-B=\begin{pmatrix}0 & -3\\12 & 2\end{pmatrix}$ ……㉠

$2A+B=\begin{pmatrix}6 & 3\\9 & 7\end{pmatrix}$ …… ㉡

㉠+㉡에서 $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\7 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3\\-5 & 1\end{pmatrix}$

따라서 A의 $(2,1)$성분은 7이고 B의 $(2,2)$성분은 1이므로 합은 8이다.

49.정답 ④
[출제의도] 행렬의 곱셈법칙 이해하기
ㄱ : 거짓
$A◎B=AB-BA$
$B◎A=BA-AB$
$\therefore A◎B\neq B◎A$
ㄴ,ㄷ 모두 참

50. 정답 ⑤
[출제의도] 정의되어진 행렬의 연산 이해하기
ㄱ. $a◎b=\begin{pmatrix}a & b\\b & a\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}b & a\\a & b\end{pmatrix}=b◎a$
ㄴ. $(a◎b)+(c◎d)$
$=\begin{pmatrix}a & b\\b & a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c & d\\d & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+c & b+d\\b+d & a+c\end{pmatrix}$
$=(a+c)◎(b+d)$
ㄷ. $(ka)◎(kb)=\begin{pmatrix}ka & kb\\kb & ka\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}a & b\\b & a\end{pmatrix}=k(a◎b)$
옳은 것은 ㄴ, ㄷ

51. 정답 5
[출제의도] 행렬의 거듭제곱의 성질 이해하기
$A^{10}=\begin{pmatrix}1 & 10m\\0 & 1\end{pmatrix}$
$BX=AB$이면 $X=B^{-1}AB$
$X^{10}=B^{-1}A^{10}B$
X^{10}의 모든 성분의 합 $10m+2=52$
$\therefore\ m=5$

52. 정답 33 개
[출제의도] 행렬의 거듭제곱을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.
$A^2=\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & -1\end{pmatrix}$이므로 $A^3=-E$이다.
$\therefore\ A^6=E$
그런데 $(A^n)^2=A^{2n}=E$이므로 n은 3의 배수이어야 한다.
따라서 구하는 100 이하의 자연수 n은 33개다.

53. 정답 3
[출제의도] 행렬의 연산에 대한 성질을 알고 이를 활용하기
$AB=BA$이므로
$AB=\begin{pmatrix}a & a\\-b+1 & 2\end{pmatrix}, BA=\begin{pmatrix}1 & ab-1\\-1 & a+1\end{pmatrix}$
$a=1$,$b=2$
$\therefore a+b=3$

54. 정답 16
[출제의도] 행렬의 덧셈, 뺄셈의 정의를 알고 연산하기
$A=\begin{pmatrix}7 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & -4\end{pmatrix}$이므로
$A-B=\begin{pmatrix}6 & 2\\2 & 6\end{pmatrix}$ $\therefore$합은 16

55. 정답 ①
준식을 정리하면 $(x+y-27)+(x-2y-18)\sqrt{3}=0$, x와 y가 모두 유리수이므로
$x+y-27=0$ 이고, $x-2y-18=0$ 이어야한다.
따라서 이 두 식은 연립방정식$\begin{cases}x+\ y=27\\x-2y=18\end{cases}$ 으로
나타내어지므로 $x=24$, $y=3$ 이다.
$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m & 1\\1 & n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9\\6\end{pmatrix}$ 에서 $24=9m+6$
$\therefore\ m=2$, $3=9+6n$
$\therefore\ n=-1$
따라서 $mn=-2$

56. 정답: 93
$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}$, $A^2=\begin{pmatrix}1 & -2\\0 & 1\end{pmatrix}$,
$A^3=\begin{pmatrix}1 & -3\\0 & 1\end{pmatrix},\cdots A^n=\begin{pmatrix}1 & -n\\0 & 1\end{pmatrix}$
$A^{100}=\begin{pmatrix}1 & -100\\0 & 1\end{pmatrix}$
$A^{100}B=\begin{pmatrix}1 & -100\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -7\\0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 93\\0 & -1\end{pmatrix}$
따라서 $A^{100}B$의 모든 성분의 합은 93 이다.

57. 정답:①
원 $(x+c-1)^2+y^2=c^2$에서 중심은 $(1-c,0)$, 반지름의 길이는 c이므로 대응되는 행렬 A는 $A=\begin{pmatrix}1-c & 0\\1 & c\end{pmatrix}$ 원 $(x-1)^2+y^2=k^2$에서 중심은 $(1,0)$, 반지름의 길이는 k이므로 대응되는 행렬 A^2은

$A^2=\begin{pmatrix}1&0\\1&k\end{pmatrix}$

$\therefore\ A^2=AA=\begin{pmatrix}1-c&0\\1&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-c&0\\1&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1-c)^2&0\\1&c^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&k\end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의해 $(1-c)^2=1,\ c^2=k$

$c>0,\ k>0$ 이므로 $c=2,\ k=4$

$\therefore\ c+k=6$

58. 정답 ③

i) A 과수원에서는 a_{11} 그루의 사과나무에서 평균 b_{11} 개의 사과가 열리고, B 과수원에서는 a_{12} 그루의 사과나무에서 평균 b_{21} 개의 사과가 열리므로 두 과수원에서 생산된 사과의 총 개수는 $a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}=a$ (개)이다.

ii) 두 과수원에서 생산된 복숭아의 총 개수는 $a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}=d$ 이고, 복숭아나무의 총 그루 수는 $a_{21}+a_{22}=q$ 이므로 두 과수원의 복숭아 한 그루당 열매의 평균개수는 $\dfrac{d}{q}$ 이다.

59. 정답 8

[출제의도] 행렬의 연산을 이용하여 성분 구하기

$A=\begin{pmatrix}2-k&6\\-7&7\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}k-1&-6\\7&-6\end{pmatrix}$

$AB=\begin{pmatrix}40+3k-k^2&6k-48\\56-7k&0\end{pmatrix}=O$이므로

$\therefore k=8$

60. 정답 18

$\begin{pmatrix}a&3\\0&a\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}a&3\\0&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&3\\0&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2&6a\\0&a^2\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}a&3\\0&a\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}a^2&6a\\0&a^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&3\\0&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^3&9a^2\\0&a^3\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}a&3\\0&a\end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix}a^3&9a^2\\0&a^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&3\\0&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^4&12a^3\\0&a^4\end{pmatrix}$

$\vdots$

$\begin{pmatrix}a&3\\0&a\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}a^n&3n\cdot a^{n-1}\\0&a^n\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}a&3\\0&a\end{pmatrix}^n$의 (1, 1) 성분과 (1, 2) 성분이 같으므로

$a^n=3n\cdot a^{n-1}$

$\therefore\ a=3n$

따라서 가능한 a의 값은 $n=1$일 때 $a=3$, $n=2$일 때 $a=6$이다. 따라서 가능한 a의 곱은 18이다.

61. 정답:52

[출제의도] 행렬의 거듭제곱을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$(A+B)^2=(A^2+B^2)+(AB+BA)$

$=\begin{pmatrix}5&0\\\frac{3}{2}&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4&0\\-\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$

$(A+B)^{100}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}^{50}=\begin{pmatrix}1&0\\50&1\end{pmatrix}$

행렬 $(A+B)^{100}$의 모든 성분의 합은 52이다.

[참고] $A=\begin{pmatrix}2&0\\\frac{1}{2}&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1&0\\0&0\end{pmatrix}$인 경우 성립.

62. 정답 ①

$A^2=A$

$\begin{pmatrix}-1&a\\b&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&a\\b&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&a\\b&2\end{pmatrix}$ 에서

$ab=-2$

$\therefore (a+b)^2=a^2+b^2+2ab=10+2(-2)=6$

63. 정답:①

$(BA)^1=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix},\ (BA)^2=\begin{pmatrix}4&0\\0&0\end{pmatrix},\ (BA)^3=\begin{pmatrix}8&0\\0&0\end{pmatrix},\cdots\cdots,$

$(BA)^n=\begin{pmatrix}2^n&0\\0&0\end{pmatrix}$ ……… (가)

따라서

$(AB)^nA=\begin{pmatrix}2^{n-1}&2^{n-1}\\2^{n-1}&2^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^n&0\\2^n&0\end{pmatrix}=2^nA$ ……… (나)

$(BA)^nB=\begin{pmatrix}2^n&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^n&2^n\\0&0\end{pmatrix}=2^nB$ ………… (다)

64. 정답 ③

$A=\begin{pmatrix}0&2\\3&0\end{pmatrix}$

$A^2=\begin{pmatrix}0&2\\3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2\\3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&0\\0&6\end{pmatrix}=6E$

$A^{11}=(A^2)^5\cdot A=6^5\cdot E\cdot A=\begin{pmatrix}0&2\cdot 6^5\\3\cdot 6^5&0\end{pmatrix}$

$\therefore c=3\cdot 6^5=2^5\cdot 3^6$

65. 정답 128

$A=\begin{pmatrix}-1&3\\-1&-1\end{pmatrix}$

$A^2=\begin{pmatrix}-1&3\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&3\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-6\\2&-2\end{pmatrix}$

$A^3=\begin{pmatrix}-2&-6\\2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&3\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&0\\0&8\end{pmatrix}=8E$

따라서 $A^6\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=64E\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}64\\64\end{pmatrix}$

$\therefore a+b=128$

66. 정답 ②

근과 계수와의 관계에서 $\alpha+\beta=5,\ \alpha\beta=-1$

$A^2=\begin{pmatrix}4+\alpha\beta & 0\\ 0 & 4+\alpha\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}=3E$ 이므로

$A^4=9E,\ A^5=9A$이다.

67. 정답 12

$A=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ 행렬 $A^2=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$

$\therefore\ A^{2005}=(A^3)^{668}\cdot A=A(\because\ A^3=E)$

$\therefore\ A^{2005}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$ 에서 $A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$

그런데 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}$ 이므로

$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\ -5\end{pmatrix}$

$\therefore\ x-y=12$

68. 정답 ③

$f(1)=2,\ f(2)=1$이므로 $a_{12}=a_{21}=1,\ a_{11}=a_{22}=0$

따라서 $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ A^2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$

$\therefore A^{2006}=(A^2)^{1003}=E^{1003}=E$

69. 정답 250

[출제의도] 행렬의 거듭제곱을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A^2=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 2 & -2\end{pmatrix}$

$A^4=A^2A^2=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}=-4E$

따라서 n은 4의 배수이어야 하므로 구하는 자연수 n의 개수는 $\dfrac{1000}{4}=250$이다.

70. 정답 ①

ㄱ. $A+B=E$에서 $A=E-B$

$\therefore\ A^2-B^2=(E-B)^2-B^2=E-2B$

$=(E-B)-B=A-B$ (참)

ㄴ. (반례) $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ (거짓)

ㄷ. (반례) $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ (거짓)

71. 정답 ⑤

[출제의도] 행렬의 성질 이해하기

ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 참

ㄱ. $A^7=A^5A^2=E$이므로 $A^2=E$이고

$A^5=(A^2)^2A=E$이므로 $\therefore A=E$

72. 정답 ③

ㄱ. 참.

$(A-E)^2=(A-E)(A-E)=A^2-AE-EA+E^2$

$=A^2-2A+E$

ㄴ. 거짓. (반례)$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

ㄷ. 참. $A^2=AA=(AB)A=A(BA)=AB=A$

73. 정답 ⑤

[출제의도] 행렬에서 정의된 연산의 성질 추론하기

[해설] ㄱ. $A\odot B=AB+BA=BA+AB=B\odot A$ (참)

ㄴ. $pA\odot qB=(pA)(qB)+(qB)(pA)$

$=pqAB+pqBA$

$=pq(AB+BA)=pq(A\odot B)$ (참)

ㄷ. $(A+B)\odot C=(A+B)C+C(A+B)$

$=AC+BC+CA+CB$

$=AC+CA+BC+CB$

$=(A\odot C)+(B\odot C)$ (참)

74. 정답 ⑤

[출제의도] 행렬의 곱셈의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ($a,\ b$는 실수)이라 하면

ㄱ. $AB=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & a+b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 이므로

$AB\in X$ (참)

ㄴ. $BA=\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & a+b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 이므로

$AB=BA$

$\therefore\ A^2-B^2=(A+B)(A-B)$ (참)

ㄷ. $A^2=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$,

$B^2=\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 이므로

$A^2+B^2=\begin{pmatrix}2 & 2(a+b)\\ 0 & 2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1 & a+b\\ 0 & 1\end{pmatrix}=2AB$

$\therefore\ (A+B)^2=A^2+B^2+2AB=4AB$ (참)

75. 정답 ②

[출제의도] 정의된 행렬의 성질 이해하기

ㄱ. $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & m\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & m+n\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & m+n\end{pmatrix}$

(거짓)

ㄴ. $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & mn\end{pmatrix}$ (참)

ㄷ. $\frac{1}{n}\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}$ (거짓)

76. 정답 ④

[출제의도] 삼각함수로 정의된 행렬 구하기

[해설] $A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$라 하면

$a_{11}=\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$

$a_{12}=\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=-\cos\theta$

$a_{21}=\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=-\cos\theta$

$a_{22}=\sin(2\pi+\theta)=\sin\theta$이므로

모든 성분의 합$=-2\cos\theta=1$

$\cos\theta=-\frac{1}{2}$이므로 $\theta=\frac{2}{3}\pi$

77. 정답: 11

$a_{11}=$(3의 양의 약수의 개수)$=2$

$a_{12}=$(5의 양의 약수의 개수)$=2$

$a_{21}=$(4의 양의 약수의 개수)$=3$

$a_{22}=$(6의 양의 약수의 개수)$=4$

$\therefore\ A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$이므로 성분의 합은 11

78. 정답 ②

[출제의도] 연립방정식을 행렬을 이용하여 나타낼 수 있는가를 묻는 문제이다.

집과 학교 사이의 거리가 5km이므로

$x+y=5$ ⋯ ㉠

집에서 학교에 갈 때 걸리는 시간은 $\frac{x}{4}+\frac{y}{8}$(시간)이고,

학교에서 집으로 올 때 걸리는 시간은 $\frac{y}{4}+\frac{x}{8}$(시간)이므로

$\frac{x}{4}+\frac{y}{8}+\frac{1}{4}=\frac{y}{4}+\frac{x}{8}$

$\therefore\ x-y=-2$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 행렬로 나타내면

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\therefore\ p=1,\ q=-1 \quad \therefore\ p-q=2$

79. 정답 102

행렬 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$에서 $A^3=-E$이므로 $A^6=E$이다.

따라서 다음 등식이 성립한다.

$A=A^7=A^{13}=\cdots=A^{97}$

$A^2=A^8=A^{14}=\cdots=A^{98}$

$A^3=A^9=A^{15}=\cdots=A^{99}$

$A^4=A^{10}=A^{16}=\cdots=A^{100}$

$A^5=A^{11}=A^{17}=\cdots=A^{95}$

$A^6=A^{12}=A^{18}=\cdots=A^{96}$

즉, $A^m=A^n$이 성립하려면 $|m-n|$의 값이 6의 배수가 되어야 한다.

따라서 $|m-n|$의 최댓값은 96, 최솟값은 6이다.

$\therefore\ p+q=96+6=102$

80. 정답 37

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^2 & 2-2^2 \\ 0 & 2^4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix} 2^2 & 2-2^2 \\ 0 & 2^4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^3 & 2^2-2^3+2^4 \\ 0 & -2^6 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix} 2^3 & 2^2-2^3+2^4 \\ 0 & -2^6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 2^4 & 2^3-2^4+2^5-2^6 \\ 0 & 2^8 \end{pmatrix}$

따라서 (1, 2)의 성분이

$2^4-2^5+2^6-2^7+2^8$

이 되는 행렬은 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}^5$ 이고

그 때의 (1, 1)의 성분은 $2^5=32$ 이다.

$\therefore\ a+n=32+5=37$

81. 정답 50

[출제의도] 행렬을 이용해 실생활 문제해결하기

주어진 조건으로부터 $\begin{cases} a-0.04a+0.12c=c \\ b-0.12b+0.04a=d \end{cases}$

즉, $\begin{cases} 0.96a+0.12b=c \\ 0.04a+0.88b=d \end{cases}$ 이다.

연립방정식을 행렬을 이용하여 나타내면

$\frac{1}{25}\begin{pmatrix} 24 & 3 \\ 1 & 22 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$이므로 행렬 $A=\begin{pmatrix} 24 & 3 \\ 1 & 22 \end{pmatrix}$이다.

따라서, 행렬 A의 모든 성분의 합은 50이다.

82. 정답 ①

[출제의도] 행렬의 곱셈을 활용할 수 있는가를 묻는 문제이다.

2차 조사에서 찬성한 사원의 비율과 반대한 사원의 비율을 나타내는 행렬이 $AB=(a\ \ b)$일 때, 3차 조사에서 찬성한 사원의 비율은 $0.9a+0.4b$로 행렬 ABC의 $(1,1)$성분과 같다.

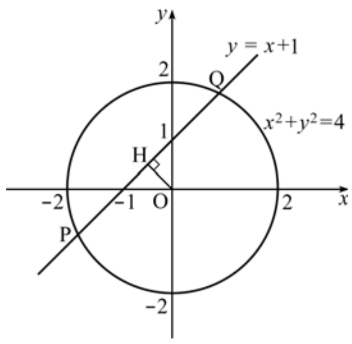
83. 정답 ⑤

주어진 등식에서

$\begin{pmatrix} 4(x^2+y^2)-(x-y) & x^2+y^2 \\ x^2+y^2 & -(x-y) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 17 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ 이므로

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x-y=-1 \end{cases}$$

이를 좌표평면에 나타내면 다음 그림과 같다.



$\overline{OH}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\overline{OP}=2$이므로 $\overline{PH}=\frac{\sqrt{14}}{2}$

$\therefore \overline{PQ}=2\overline{PH}=\sqrt{14}$

84. 정답 ⑤

ㄴ. 행렬 $A=\begin{pmatrix} a\ b \\ c\ d \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} x\ y \\ z\ w \end{pmatrix}$라 하면

$AB=\begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix} ax+cy & bx+dy \\ az+cw & bz+dw \end{pmatrix}$이므로

$f(AB)=(ax+bz)+(cy+dw)\ 2$

$=(ax+cy)+(bz+dw)=f(BA)$

85. 정답 ④

ㄱ. (반례) $A=3E$, $B=O$일 때,

$A+B=3E$, $AB=4B$이지만 $A\neq 4E$ (거짓)

ㄴ. $A+B=3E$이고 $AB=4B$이므로

$(A+B)B=3EB$, $AB+B^2=3B$, $4B+B^2=3B$

$\therefore B^2+B=O$ (참)

ㄷ. $A+B=3E$에서 $B=3E-A$

$AB=A(3E-A)=3A-A^2=(3E-A)A=BA$

$\therefore A^2-B^2=(A+B)(A-B)=3E(A-B)=3(A-B)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

86.정답 ②

[출제의도] 행렬의 거듭제곱 계산하기

[해설] $A^{n+2}=A^{n+1}-A^n$에서

$A^3=A^2-A$

$A^4=A^3-A^2=(A^2-A)-A^2=-A$

$A^5=A^4-A^3=-A-(A^2-A)=-A^2$

$A^6=A^5-A^4=-A^2-(-A)=-A^2+A$

$A^7=A^6-A^5=-A^2+A-(-A^2)=A$

$\therefore A^{2009}=(A^7)^{287}=A^{287}=(A^7)^{41}=A^{41}$

$=(A^7)^5A^6=A^5A^6=A^{11}=A^7A^4$

$=AA^4=A^5=-A^2$

87. 정답 10 개

[출제의도] 행렬의 거듭제곱의 규칙성을 발견할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A^2=\begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ m^2-5^2 & 5^2 \end{pmatrix}$

$A^3=\begin{pmatrix} m^3 & 0 \\ m^3-5^3 & 5^3 \end{pmatrix}$

$\vdots$

이므로 $A^n=\begin{pmatrix} m^n & 0 \\ m^n-5^n & 5^n \end{pmatrix}$임을 추론할 수 있다.

따라서 A^n의 모든 성분의 합은 $2m^n=2^{49}$이다.

$\therefore m^n=2^{48}$

이때, m, n은 자연수이므로 n은 $48=2^4\times 3$의 약수이다.

따라서 구하는 순서쌍 (m, n)의 개수는

$(4+1)(1+1)=10$이다.

88. 정답 ④

[출제의도] 행렬의 성질을 이해하기

$ABC=BCA=CAB=E$

89. 정답 ②

(나)의 양변에 A^2을 곱하면

$A^3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}+A\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ …… ①

(가)에서 $A^3=-E$이므로 ①에 대입하면

$-E\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}+A\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}=E\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore a=1, b=1 \qquad a+b=2$

90.정답 2

$A^3=E$, $B^3=-E$, $AB=BA=-E$이다.

$A^{100}+A^{99}B+\cdots+AB^{99}+B^{100}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ …… ①

등식 ①에서 양변 왼쪽에 $(A-B)$를 곱하면

$A^{101}-B^{101}=(A-B)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$(A^3)^{33}A^2-(B^3)^{33}B^2=(A-B)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$A^2+B^2=(A-B)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$-E=-E\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \therefore E=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

따라서 $a+b+c+d=2$이다.

91. 정답 180가지

주어진 행렬을 제곱하여 계산해보면

(a) $A^1=A^5=A^9=\cdots=A^{37}$

(b) $A^2 = A^6 = \cdots = A^{38} = -E$

(c) $A^3 = A^7 = \cdots = A^{39} = -A$

(d) $A^4 = A^8 = \cdots = A^{40} = E$

를 만족한다.

(a) $A^m = A^n = A$(단, $m > n$)를 만족하는 순서쌍 (m,n)의 개수는 1,5,9,14,⋯,37의 10개의 수 중 2개를 뽑는 조합의 수와 같으므로 ${}_{10}C_2$

(b),(c),(d)도 (a)와 같은 방법으로 경우의 수는 ${}_{10}C_2$이므로

$4 \times {}_{10}C_2 = 180$가지

92. 정답 ㄴ,ㄷ

$S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$에서

ㄱ. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$이라 하면

$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ 이므로 성분이 모두 짝수인 것은 아니다. ∴ 거짓

ㄴ. 각각의 원소인 행렬을 a번, b번, c번, d번 선택하여 더한다면

$a\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} b+c+d & a+c+d \\ a+c+d & a+b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{rl} & b+c+d=9 \\ & a+c+d=9 \\ & a+b+d=9 \\ +) & a+b+c=9 \\ \hline & 3(a+b+c+d)=36 \end{array}$$

$a+b+c+d=12$ $\qquad$ $\therefore\ a=b=c=d=3$

즉 각각의 행렬을 3번씩 선택하여 더하면 $\begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}$를 만들 수 있다. ∴ 참

ㄷ. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & c \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b+c+d & a+c+d \\ a+b+d & a+b+c \end{pmatrix}$ $(a+b+c+d=n)$

의 성분이 모두 짝수가 되려면

$\begin{pmatrix} b+c+d & a+c+d \\ a+b+d & a+b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-a & n-b \\ n-c & n-d \end{pmatrix}$의 성분이 모두 홀수가 되어야 한다.

n이 홀수이면 $n-a$, $n-b$, $n-c$, $n-d$ 모두 홀수이어야 되므로 a, b, c, d 모두 짝수이다.

이것은 $a+b+c+d=n$에서 짝수 네 개의 합은 짝수이므로 모순

∴ n은 짝수, a, b, c, d는 모두 홀수

∴ $a=1$, $b=1$, $c=1$, $d=1$일 때,

$n = a+b+c+d = 1+1+1+1$

4가 조건을 만족시키는 n의 최솟값이 된다.

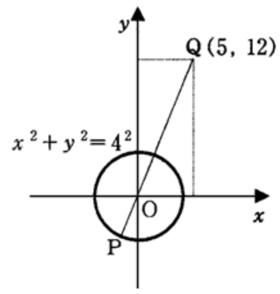
93. 정답 17

$A^2 = 16E$ 이므로

$A^2 = \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+y^2 & 0 \\ 0 & x^2+y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

$\therefore\ x^2 + y^2 = 16$

따라서 점 P의 자취는 중심이 원점이고 반지름의 길이가 4인 원이다. 원의 중심 O에서 점 $Q(5, 12)$에 이르는 거리는 $\overline{OQ} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ 이므로 선분 PQ의 최댓값은 $13 + 4 = 17$ 이다.



94. 정답 ⑤

$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$,

$A_3 = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$,

$A_4 = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$,

$A_5 = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = A_1$

따라서 $A_6 = A_2$, $A_7 = A_3$, ⋯, $A_{n+4} = A_n$

$\therefore\ A_{2005} = A_{4 \times 501 + 1} = A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

그러므로 A_{2005} 의 $(2, 1)$ 성분은 3 이다.

95. 정답 ⑤

복소수 $z_1 = a+bi$, $z_2 = c+di$ (a, b, c, d는 실수)라 하면

$z_1 + z_2 = (a+c) + (b+d)i$, $z_1 z_2 = (ac-bd) + (ad+bc)i$이므로

ㄱ. $M(z_1 + z_2) = \begin{pmatrix} a+c & -(b+d) \\ b+d & a+c \end{pmatrix}$

$M(z_1) + M(z_2) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & -(b+d) \\ b+d & a+c \end{pmatrix}$

이므로 $M(z_1) + M(z_2) = M(z_1 - z_2)$이다. ∴참

ㄴ. $M(z_1)M(z_2) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix}$

$= M(z_1 z_2)$ $\qquad$ ∴참

ㄷ. $\{M(z)\}^3 = M(z^3) = E$을 만족하는 복소수 z는 $z^3 = 1$인 z를 구하면 된다.

$z^3 - 1 = (z-1)(z^2 + z + 1) = 0$이므로

$z=1,\ z=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$이다.

따라서, 허수 $z=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$이 존재한다. ∴참

96. 정답 ③

[출제의도] 행렬의 거듭제곱의 성질 이해하기

ㄱ. $(A^n)^2=(A^2)^n=A^n$

$\therefore A^n\in X$

ㄴ. $\{(E-A)^n\}^2=\{(E-A)^2\}^n$

$=(E-2A+A^2)^n$

$=(E-A)^n$

$\therefore (E-A)^n\in X$

ㄷ.(반례)

$A=\begin{pmatrix}3&6\\-1&-2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&1\\-6&2\end{pmatrix}$일 때,

$AB=\begin{pmatrix}-27&-9\\9&3\end{pmatrix}\neq(AB)^2\quad\therefore AB\notin X$

97. 정답 100

[출제의도] 행렬의 거듭제곱을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$B=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3&4\\6&5\end{pmatrix}$에서 $BC=\begin{pmatrix}0&0\\9&9\end{pmatrix}=9B$

$BC^{50}=9BC^{49}=9^2BC^{48}=\cdots=9^{50}B$이다.

행렬 A의 $(2,1)$성분은 $9^{50}=3^{100}$이므로 $n=100$이다.

98. 정답 21 개

[출제의도] 행렬의 곱셈을 이용하여 조건을 만족하는 행렬의 개수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A^2=\begin{pmatrix}a&b\\1&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\1&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+b&b(a+c)\\a+c&b+c^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

따라서 $c=-a,\ b=-a^2+1$을 만족하는 a^2의 값은 0, 1, 4, ⋯, 100등의 모두 11개이다. $a^2=0$을 만족하는 경우의 행렬은 1개이고 그 이외의 경우는 모두 2개씩 있으므로 구하는 행렬의 개수는 모두 21(개)이다.

99. 정답 ①

$X=2B-A=2\begin{pmatrix}2&0\\1&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-2\\3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0\\2&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-2\\3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\-1&-2\end{pmatrix}$

100.[정답] ④

[해설]

$A=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$ 이므로 $A+B=2E$

따라서 $A(A+B)=2A=\begin{pmatrix}2&-2\\2&2\end{pmatrix}$

∴ 모든 성분의 합은 4 이다

101. 정답 24

$A=\begin{pmatrix}1&0\\t&1\end{pmatrix}$일 때, $A^n=\begin{pmatrix}1&0\\nt&1\end{pmatrix}$이므로

$A=\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}$일 때, $A^8=\begin{pmatrix}1&0\\24&1\end{pmatrix}$이다.

$\therefore a=24$

102. 정답 ①

$A+B=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&-2\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}$이므로

$(A+B)A=\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&0\\5&3\end{pmatrix}$

따라서 행렬$(A+B)A$의 모든 성분의 합은

$1+0+5+3=9$

103. 정답 ①

$A=3E$이므로 $AB+2B=3EB+2B=5B=\begin{pmatrix}-5&5\\5&5\end{pmatrix}$

따라서 구하려는 행렬의 모든 성분의 합은 $5\times2=10$

104. 정답 ③

$B=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$이므로 $B^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}$이다.

$(BA)^2=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$이므로 $BABA=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$

이 등식의 왼쪽에 B^{-1}을 곱하면 $B^{-1}BABA=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$

$ABA=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$

$\therefore\ (AB)^2=(ABA)B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$

105. 정답 18

$A^2+A^3=-3A-3E$이므로

$A^4+A^5=A^2(A^2+A^3)$

$=A^2(-3A-3E)$

$=-3A^3-3A^2$

$=-3(A^2+A^3)$

$=-3(-3A-3E)$

$=9A+9E$

$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$로 놓으면 $a+b+c+d=0$이므로

행렬$9A+9E$의 모든 성분의 합은

$9(a+b+c+d)+9(1+0+0+1)$

$=9\cdot 0+9\cdot 2$

$=18$

106.[정답] ④

[해설]

$a_{11}=0,\ a_{12}=-1,\ a_{21}=1,\ a_{22}=0$이므로 $A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$

$A^2=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-E$

$A^3=-A,\ A^4=E,\ A^5=A,\ \cdots$

$\therefore A+A^2+A^3+\cdots+A^{2010}=(A+A^2+A^3+A^4)+\cdots$

$+(A^{2005}+\cdots+A^{2008})+A^{2009}+A^{2010}$

$=O+\cdots+O+A+A^2$

$=A-E=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&-1\end{pmatrix}$

따라서 $(2,1)$의 성분은 1이다.

107.[정답] ①

[해설]

$\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$에서 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&-2\\-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$

응시자 A의 각 원점수는

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&-2\\-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}45\\40\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\6\end{pmatrix}$

응시자 B의 각 원점수는

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&-2\\-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}50\\50\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}$

응시자 C의 각 원점수는

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&-2\\-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}45\\50\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\12\end{pmatrix}$

따라서 $a=11, b=10, c=7$이므로 $a>b>c$

1. 정답 ②

[출제의도] 행렬의 곱셈을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&4\\1&-2\end{pmatrix}$

따라서 행렬 X의 모든 성분의 합은 6이다.

2. 정답 ④

[해설]

$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&3\end{pmatrix}$이므로

$A^{-1}B=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2\\-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\-4&5\end{pmatrix}$

그러므로 모든 성분의 합은 $1+(-1)+(-4)+5=1$

3. 정답 ①

$AX-BX=(A-B)X$이므로

$\begin{pmatrix}3&1\\5&2\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}3&1\\1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=E$

$\therefore\ X=\begin{pmatrix}3&1\\5&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1\\-5&3\end{pmatrix}$

4. 정답 ④

[출제의도] 역행렬을 이용하여 행렬을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}1&1\\3&4\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-1&2\\3&4\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-7&4\\6&-2\end{pmatrix}$

따라서 행렬 X의 모든 성분의 합은 1이다.

5. 정답 ⑤

$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&3\\1&4\end{pmatrix}$, $A^{-1}B=\begin{pmatrix}2&1\\3&1\end{pmatrix}$ 이므로 성분의 합은 7

6. 정답 ②

$A=\begin{pmatrix}3&1\\5&2\end{pmatrix}$ 에서 $A^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1\\-5&3\end{pmatrix}$

$\therefore\ A-A^{-1}=\begin{pmatrix}3&1\\5&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&-1\\-5&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\10&-1\end{pmatrix}$

따라서 모든 성분의 합은 12 이다.

7. 정답 ③

$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\3&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$\therefore a=2,\ b=1$이므로 $a+b=3$

8. 정답 ①

$A^{-1}B=\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\1&0\end{pmatrix}$

따라서 성분의 합은 1이다.

9. 정답 ①

$A=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}$ 에서 $A^{-1}=\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}$ 이므로

$(A+E)A^{-1}=E+A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-5\\-1&3\end{pmatrix}$

따라서 모든 성분의 합은 1 이다.

10. 정답②

[출제의도] 역행렬의 성질을 이용하여 행렬의 곱 계산하기

$A=B^{-1}\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}$에서 $BA=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}$ 이므로

$BAB=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2\\-3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&6\\-14&16\end{pmatrix}$

$\therefore$ (모든 성분의 합) ＝3

11. 정답 ④

[출제의도] 역행렬을 이용하여 행렬의 곱셈을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$X=\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3&1\\-2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\-2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&-2\\-13&5\end{pmatrix}$

따라서 행렬 X 의 모든 성분의 합은

$8+(-2)+(-13)+5=-2$

12. 정답 ④

[출제의도] 역행렬을 이용하여 행렬의 곱셈의 성질 이해하기

$X^{-1}\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$이므로 $X\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$

$X\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$이므로 $X^2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=X\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$

$\therefore$ 성분의 합은 11

13.정답 ①

$AB=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1\\0&1\end{pmatrix}$

$(AB)^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\0&-2\end{pmatrix}$이므로 모든 성분의 합은 1이다.

14. [출제의도] 역행렬을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$B^{-1}A=(A^{-1}B)^{-1}$이므로 모든 성분의 합은 -1

15. 정답⑤

$\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix}$이므로

$X=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}6&2\\-10&-3\end{pmatrix}$

따라서, 행렬 X의 모든 성분의 합은 -5이다.

16. 정답 ⑤

$A=\begin{pmatrix}1&1\\2&4\end{pmatrix}$

$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-1\\-2&1\end{pmatrix}$

$\therefore\ A+2A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1\\2&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&-1\\-2&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&1\\2&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&-1\\-2&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}$

17. 정답 ⑤

[출제의도] 행렬을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$AB^{-1}+B=\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1\\-2&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\3&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\5&2\end{pmatrix}$

따라서 주어진 행렬의 모든 성분의 합은 9 이다.

18. 정답 ②

[출제의도] 행렬의 곱셈의 정의를 알고 그 연산을 하기

$(A^{-1})^3=E,$

$(A^{-1})^{2004}=\{(A^{-1})^3\}^{668}=E^{668}=E,$

19. 정답④

[출제의도] 역행렬을 이해하고 행렬의 곱셈을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A^{-1}X=B$의 양변의 왼쪽에 행렬 A를 곱하면

$AA^{-1}X=AB$

$\therefore\ X=AB=\begin{pmatrix}2&3\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2\\1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&-2\\1&6\end{pmatrix}$

따라서 행렬 X의 모든 성분의 합은 14이다.

20. 정답 ②

[출제의도] 역행렬 계산 및 행렬의 연산하기

[해설] $(A-B^{-1})A^{-1}=E-(AB)^{-1}$

$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7&18\\5&13\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-12&18\\5&-6\end{pmatrix}$

$\therefore$모든 성분의 합은 5

21. 정답 ①

[출제의도] 역행렬을 구하여 행렬 연산하기

[해설] $(E+A)A^{-1}=A^{-1}+E$이므로

$=\begin{pmatrix}3&-1\\-2&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-1\\-2&2\end{pmatrix}$

$\therefore$ 모든 성분의 합은 3

22. 정답 ⑤

B가 역행렬이 존재하므로 $BA=B+E$의 양변의 왼쪽에 B^{-1}를 곱하면

$A=E+B^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-1\\-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\-2&4\end{pmatrix}$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은 3이다.

23. 정답 ①

$A(2A^{-1}+3E)=2E+3A$

$=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}9&6\\15&-12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&6\\15&-10\end{pmatrix}$

$\therefore$ 성분의 합은 22

24. 정답②

[출제의도] 역행렬의 성질을 이용하여 계산하기

$\begin{pmatrix}k&3\\2&k+1\end{pmatrix}$가 역행렬이 존재하지 않을 때

$D=k(k+1)-6=k^2+k-6=0$

$\therefore$ (모든 k값들의 합)$=-1$

25.정답79

[출제의도] 역행렬을 이용하여 실생활문제 해결하기

[해설] $\begin{cases}x+y=30\\x(1-0.2)^2+y(1-0.3)^2=15\end{cases}$

$\begin{pmatrix}1&1\\0.64&0.49\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}30\\15\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0.64&0.49\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}30\\15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{49}{15}&\frac{20}{3}\\\frac{64}{15}&-\frac{20}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}30\\15\end{pmatrix}$

A의 (2, 1)성분은 $\frac{64}{15}$이므로 $a+b=79$이다.

26. 정답 ④

[출제의도] 연립방정식과 행렬의 관계 이해하기

$c=-\frac{1}{\sqrt{2}}a+\frac{1}{\sqrt{2}}b,\ d=\frac{1}{\sqrt{2}}a+\frac{1}{\sqrt{2}}b$

$$M\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$$

$M+M^{-1}$의 모든 성분의 합은 $2\sqrt{2}$

27. 정답 16

[출제의도] 역행렬을 이용하여 행렬 구하기

[해설] A의 역행렬은 $A^{-1}=\begin{pmatrix}8 & -1\\-7 & 1\end{pmatrix}$이므로

$AB=\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$의 양변에 A^{-1}를 곱하면

$B=A^{-1}\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}8 & -1\\-7 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & 1\\7 & -1\end{pmatrix}$

$\therefore\ A+B=\begin{pmatrix}-7 & 2\\14 & 7\end{pmatrix}$

따라서 모든 성분의 합은 16

28. 정답 22

[출제의도] 행렬의 연산 이해하기

$A^{-1}(2A+B)=2E+A^{-1}B$

$=\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 3\\-1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\1 & 2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}7 & 6\\3 & 6\end{pmatrix}$

$\therefore$ 모든 성분의 합은 $7+6+3+6=22$

29. 정답 ④

[출제의도] 행렬의 연산을 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 2\end{pmatrix}$이다. $AB+A^{-1}=E$에서

$AB=E-A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$

따라서 $B=A^{-1}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\2 & -3\end{pmatrix}$

$\therefore\ a=2$

30. 정답 ④

[출제의도] 행렬의 거듭제곱의 성질 이해하기

$A^{10}=\begin{pmatrix}1 & 10m\\0 & 1\end{pmatrix}$

$BX=AB$이면 $X=B^{-1}AB$

$X^{10}=B^{-1}A^{10}B$

X^{10}의 모든 성분의 합 $10m+2=52$

$\therefore\ m=5$

31. 정답12

$A=\begin{pmatrix}-2 & -3\\1 & 1\end{pmatrix}$ 행렬 $A^2=\begin{pmatrix}-2 & -3\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & -3\\1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\-1 & -2\end{pmatrix}$ 2

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1 & 3\\-1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & -3\\1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=E$

$\therefore\ A^{2005}=(A^3)^{668}\cdot A=A(\because\ A^3=E)$

$\therefore\ A^{2005}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 에서 $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

그런데 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 3\\-1 & -2\end{pmatrix}$ 이므로

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\-1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-5\end{pmatrix}$

$\therefore\ x-y=12$

32. 정답 15

$AB^{-1}=B^{-1}A$에서

$BAB^{-1}=A,\quad BA=AB$

$\therefore\begin{pmatrix}0 & a\\3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -5\\-1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -5\\-1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & a\\3 & 3\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}-a & 2a\\6 & -9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-15 & 3a-15\\6 & -a+6\end{pmatrix}$

$\therefore a=15$

33. 정답 22

[출제의도] 역행렬의 뜻을 이해하여 계산을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$AA^{-1}=A^{-1}A=E,\ (A^2)^{-1}=(A^{-1})^2$ 이고

$(A+A^{-1})^2=\begin{pmatrix}-1 & 2\\6 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\6 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & 0\\0 & 13\end{pmatrix}=13E$ 이므로

$A^2+(A^2)^{-1}=(A+A^{-1})^2-2AA^{-1}=13E-2E=11E$

따라서 구하는 모든 성분의 합은 22 이다.

[참고]

주어진 등식을 만족하는 행렬의 예 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\3 & 2\end{pmatrix}$

34. 정답 ②

[출제의도] 역행렬의 연산에 관한 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$A^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}-1 & -b\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & b\\0 & -1\end{pmatrix}=A$

$(2A+A^{-1})(3A-A^{-1})=6A^2-(A^{-1})^2+E$이고

$A=A^{-1}$이므로 $A^2=E$이다.

$\therefore(2A+A^{-1})(3A-A^{-1})=6E$

35. 정답 ③

[출제의도] 역행렬의 성질을 알고 계산을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$C=(2B)^{-1}=\frac{1}{2}B^{-1}=\frac{1}{2}(2A)=A=\begin{pmatrix}4 & 12\\-8 & 0\end{pmatrix}$

36. 정답 4

$A^2 = \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}$, ⋯,

$A^{10} = \begin{pmatrix}1&10\\0&1\end{pmatrix}$, $(A^{-1})^{10} = (A^{10})^{-1} = \begin{pmatrix}1&-10\\0&1\end{pmatrix}$

$\therefore\ A^{10} + (A^{-1})^{10} = \begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$

따라서 모든 성분의 합은 4 이다.

37. 정답 30

[출제의도] 역행렬 계산하기

$A^{-1} = \begin{pmatrix}-2&-3\\-1&-2\end{pmatrix}$, $(A^{-1})^2 = \begin{pmatrix}7&12\\4&7\end{pmatrix}$

따라서 모든 성분의 합은 30

38. 정답 ④

$A^2 = E,\ X = B^{-1}AB$

$X^2 = (B^{-1}AB)^2 = B^{-1}A^2B = B^{-1}EB = B^{-1}B = E$

$\therefore X^2 = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

39. 정답 ③

$AB = CA$의 양변의 오른쪽에 A^{-1}를 곱하면

$C = ABA^{-1} = \begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&a\\b&1\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&a\\2b&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&a\\4b&2\end{pmatrix}$

행렬 C의 모든 성분의 합은 $2+\frac{1}{2}a+2b$이다. a와 b가 모두 양수이므로 산술평균, 기하평균 사이의 관계에 의해

$2+\frac{1}{2}a+2b \geqq 2+2\sqrt{\frac{1}{2}a\cdot 2b} = 6$

따라서 $a=4,\ b=1$일 때 최솟값 6을 갖는다.

40. 정답 ④

$A^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix}-1&b\\0&1\end{pmatrix}$에서

$A^{-1}B^{-1} = (BA)^{-1} = \begin{pmatrix}-1&b\\0&1\end{pmatrix}$

$\therefore\ BA = \begin{pmatrix}-1&b\\0&1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}-1&b\\0&1\end{pmatrix}$

이 때, $BA = \begin{pmatrix}2&-3\\a&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&1\\a-1&2a-1\end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix}-1&1\\a-1&2a-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&b\\0&1\end{pmatrix}$

$\therefore a=1,\ b=1$ $\qquad\therefore a+b=2$

41.정답 14

$A^{-1} = \frac{1}{5\times2-1\times7}\begin{pmatrix}2&-1\\-7&5\end{pmatrix}$이므로

$A+3A^{-1} = \begin{pmatrix}5&1\\7&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&-1\\-7&5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7&0\\0&7\end{pmatrix}$이다.

따라서 성분의 합은 14

42. 정답 36

행렬 M이 역행렬을 갖지 않으려면, $D = a9 - bc = 0$ $\quad\therefore$ $9a = bc$

서로 다른 a, b, c에 대하여 위의 등식을 만족하는 경우는 $a = 2$이고, $(b=3,\ c=6)$

또는 $(b=6,\ c=3)$일 때 뿐이다. $\therefore\ abc = 36$

43. 정답①

[출제의도] 역행렬의 뜻을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$-A^2+A = E$이므로 $(-A)(A-E) = (A-E)(-A) = E$

$\therefore\ (A-E)^{-1} = -A$

44. 정답 12

$A(2A-E) = 2E$이므로 $(2A-E)^{-1} = \frac{1}{2}A$이다.

따라서 모든 성분의 합은 $\frac{1}{2}\cdot 24 = 12$

45. 정답 ⑤

[출제의도] 행렬을 이용한 행렬의 연산을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

행렬 $A = \begin{pmatrix}a&b\\b&-c\end{pmatrix}$에서 a, b, c가 양수이므로 $-ac-b^2 < 0$

따라서 행렬 A의 역행렬이 항상 존재한다.

$A^4 = 3A^2$에서 양변에 $(A^{-1})^2$을 곱하면 $A^2 = 3E$

$\therefore\ A^2 = \begin{pmatrix}a&b\\b&-c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\b&-c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a^2+b^2&ab-bc\\ab-bc&b^2+c^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}$

$\therefore\ a^2+2b^2+c^2 = (a^2+b^2)+(b^2+c^2) = 3+3 = 6$

46. 정답 ①

$5^{\log b} = a^{2\log 5} = 5^{2\log a} = 5^{\log a^2}$

$\therefore b = a^2 \cdots\cdots$ ㉠

$\begin{pmatrix}a&-1\\-b&2\end{pmatrix}$가 역행렬을 갖지 않으므로

$2a-b=0$ $\quad\therefore b = 2a \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a^2 = 2a$

$\therefore a=2,\ b=4$ ($\because a,\ b$는 양수)

$\therefore ab = 8$

47. 정답②

[출제의도] 역행렬이 존재하지 않을 조건을 알고 있는가를 묻는 문제이다.

내분하는 점과 외분하는 점의 좌표를 구하면

$c = \frac{2b+a}{3}$, $d = 2b-a$

행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않으므로

$ad-bc=(2ab-a^2)-\dfrac{ab+2b^2}{3}$

$=-\dfrac{3a^2-5ab+2b^2}{3}$

$=-\dfrac{(3a-2b)(a-b)}{3}=0$

이때, $a\neq b$이므로 $3a-2b=0$

$\therefore\ \dfrac{b}{a}=\dfrac{3}{2}$

48. 정답 ②

$-A^2+4A=3E,\quad -\dfrac{1}{3}A(A-4E)=E$

$\therefore\ A^{-1}=-\dfrac{1}{3}(A-4E)$

49.정답⑤

[출제의도] 역행렬 구하기

[해설] $(A-3E)(A+4E)=-9E$

$(A-3E)\left\{-\dfrac{1}{9}(A+4E)\right\}=E$

$\therefore\ (A-3E)^{-1}=-\dfrac{1}{9}(A+4E)$

50. 정답 ①

$|a-1|+|b-2|=0$에서 $a=1,\ b=2$

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$이므로 $A^{-1}=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

51. 정답 90

$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & c \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않으므로

$ac-b=0$이다.

$\dfrac{178}{121}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{7}}}$ 이므로 $a=2,\ b=8$

$2c-8=0,\ c=4$

$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$이므로 $\mathrm{A}^2=\begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 48 & 24 \end{pmatrix}$

따라서 모든 성분의 합은 90

52. 정답22

이차방정식 $x^2-6x+2=0$의 두 실근을 $\alpha,\ \beta$라 하면,

$\alpha+\beta=6,\ \alpha\beta=2$

$A=\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$의 역행렬은

$A^{-1}=\dfrac{1}{\alpha\beta-1}\begin{pmatrix} \beta & -1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \beta & -1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}$

이므로

$(A^2)^{-1}=(A^{-1})^2=\begin{pmatrix} \beta & -1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta & -1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \beta^2+1 & -\beta-\alpha \\ -\beta-\alpha & \alpha^2+1 \end{pmatrix}$

따라서 행렬 $(A^2)^{-1}$의 모든 성분의 합은

$\alpha^2+\beta^2-2(\alpha+\beta)+2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+2$

$=6^2-2\cdot2-2\cdot6+2=22$

53. 정답⑤

$A^4=O$의 양변에 $-E$를 더하면 $A^4-E=-E$이므로

$E-A^4=E$

$E-A^4=(E-A)(E+A)(E+A^2)=E$이므로

$(E-A)^{-1}=(E+A)(E+A^2)$,

$(E+A)^{-1}=(E-A)(E+A^2)$,

$(E+A^2)^{-1}=(E-A)(E+A)=E-A^2$

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 역행렬이 존재한다.

54. 정답⑤

$(A-B)^2=A^2-AB-BA+B^2$

$=(A^2+B^2)-(AB+BA)=-2E$

$\Rightarrow (A-B)\left(-\dfrac{1}{2}\right)(A-B)=E$

따라서 $A-B$의 역행렬은 $-\dfrac{1}{2}(A-B)$

55. 정답 ③

$A^{-1}=\dfrac{1}{2(n+1)-n}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -n & n+1 \end{pmatrix}$

A^{-1}의 모든 성분의 합은

$\dfrac{1}{n+2}(2-1-n+n+1)=\dfrac{2}{n+2}$

$\therefore\ a_n=\dfrac{2}{n+2}$ $\qquad\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n+2}=0$

56. 정답 33 개

$D=2a-b\neq0$ $\qquad\therefore\ b\neq2a$ $\qquad\therefore$

$(a,b)\neq(1,2),\ (2,4),\ (3,6)$

그러므로 역행렬 P^{-1}가 존재하도록 하는 순서쌍 (a,b)의 개수는 $36-3=33$ (가지)이다.

57. 정답②

$\begin{pmatrix} x+y & -x \\ y & x+y \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지

않으므로$(x+y)^2+xy=0$ ⋯㉠

복소수 $z=(x+y-3)+xyi$ 에서

$z^2=(x+y-3)^2-(xy)^2+2xy(x+y-3)i$

z^2 이 음의 실수이므로 $(x+y-3)^2-(xy)^2<0$ …ⓛ

$2xy(x+y-3)=0$ …ⓒ

ⓖ, ⓛ, ⓒ에서 $x+y=a$, $xy=b$ 로 치환하면 $a^2+b=0$,

$(a-3)^2-b^2<0 \Leftrightarrow 2(a-3)b=0$

$\therefore \begin{cases} a=3 \\ b=-9 \end{cases}, \quad \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$

이 때, $(a-3)^2-b^2<0$ 을 만족하여야 하므로 $\begin{cases} a=3 \\ b=-9 \end{cases}$

$\therefore xy=b=-9$

58. 정답 ⑤

[해설]

$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 6 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$를 정리하면

$\begin{pmatrix} a-3 & 1 \\ 6 & a+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$이고

$x=0, y=0$이외의 해를 가지려면 역행렬이 존재하지 않아야 하므로

$(a-3)(a+2)-6=0$이다.

$a^2-a-12=0$ 따라서 a의 값의 곱은 -12

59. [출제의도] 행렬과 연립방정식의 관계와 부등식의 영역을 이용할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$에서 $\begin{pmatrix} 4-k & -1 \\ 1 & 2-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(4-k)(2-k)+1=0 \quad \therefore k=3$

따라서 $x-y=0$이므로 두 조건을 만족시키는 순서쌍 (α, β)의 개수는 21이다.

60. 정답 ④

$A=\begin{pmatrix} 2-2^a & 1+2^{a+2} \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$이 역행렬을 갖지 않으므로

$3(2-2^a)-4(1+2^{a-2})=0$

$6-3\cdot2^a-4-4\cdot2^{a-2}=0$

$2-3\cdot2^a-2^a=0$

$\therefore 2^a=\frac{1}{2}$

따라서 $a=-1$

61. [정답] ①

$AB^2C=AB=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$, $CBA=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$에서

$ABBC=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}BC=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$이고 행렬 $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$는 역행렬이 존재하므로 $BC=E=CB$이다.

$CBA=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}=A$이므로

$AB=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}B$

$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$이므로 성분의 합은 1이다.

62. 정답 ③

$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

……

이므로 $A^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$

$A^n\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$의 양변에 $(A^n)^{-1}$을 곱하면

$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -n & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -3n+8 \end{pmatrix}$

$\alpha+\beta=2$에서 $3+(-3n+8)=2$

$\therefore n=3$

63. 정답①

$A+E=\begin{pmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{pmatrix}$에서 $(a+1)(d+1)-bc$ …ⓖ

ⓖ의 값이 0이면 역행렬이 존재하고 0이 아니면 역행렬이 존재하지 않는다.

(i) $ad-bc=1$, $a+d=0$ 이면

ⓖ$=ad-bc+a+d+1=1+0+1=2\neq0$

따라서, 역행렬이 존재하므로 □$=Y$

(ii) $ad-bc=0$, $a+d=$ △ 이면 역행렬이 존재하지 않으므로

ⓖ$=ad-bc+a+d+1 \quad =0+△+1=0$

$\therefore$ △$=-1$

64. 정답 ①

[출제의도] 행렬의 거듭제곱 이용하여 성분 구하기

$A^2=A^5$, A^{-1}가 존재하므로 $A^3=E$, $E=A^2A$ 이므로

$A=\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$이다. 성분의 합은 -3이다.

65. 정답③

[출제의도] 역행렬의 정의를 이용하여 역행렬 구하기

$A^2-2A+E=O, A(-A+2E)=E$이므로

$A^{-1}=-A+2E$이다. $p=-1$, $q=2$ 이므로 $p+q=1$ 이다.

66. 정답 ⑤

[출제의도] 역행렬을 이용하여 거듭제곱 계산하기

[해설] A의 역행렬이 $A-E$이므로 $A(A-E)=E$이다.

$A^2=A+E$에서

$A^3=A^2+A=A+E+A=2A+E$

67. 정답①

[출제의도] 역행렬의 정의를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$A(A+2E)=E$에서 $A^2+2A=E$이므로

$(A-E)(A+3E)=-2E$

$-\frac{1}{2}(A+3E)(A-E)=E$

$\therefore\ (A-E)^{-1}=-\frac{1}{2}A-\frac{3}{2}E$

$\therefore\ p+q=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-2$

68. 정답 ⑤

[출제의도] 주어진 행렬의 역행렬을 구할 수 있다.

$A=(pA+qE)^{-1}$ 이면 $A^{-1}=pA+qE$

$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -3\end{pmatrix}=p\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}+q\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-3p+q & 2p\\ -2p & p+q\end{pmatrix}$

$\therefore\ p+q=-3$

69. 정답 11

[출제의도] 역행렬을 이용하여 주어진 행렬을 구할 수 있다.

$A^{-1}PB=E$에서

양변의 왼쪽에 A, 오른쪽에 B^{-1}를 곱하면

$P=AB^{-1}$

$P=\begin{pmatrix}10 & 1\\ 1 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}^{-1}$

$=\begin{pmatrix}10 & 1\\ 1 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}28 & -9\\ -17 & 9\end{pmatrix}$

따라서 행렬 P의 모든 성분의 합은 11이다.

70.정답 ①

[출제의도] 역행렬을 이용하여 문제 해결하기

$P=A+A^{-1}$이므로

$\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & x\end{pmatrix}+\frac{1}{x^2}\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & x\end{pmatrix}$

$\therefore x+\frac{1}{x}=5$에서 $x^2-5x+1=0$

$\therefore x$의 값들의 합은 5

71. 정답 ⑤

[출제의도] 역행렬이 존재함을 증명할 수 있다.

$A^2+E=O$

$\Leftrightarrow\ (A+kE)(A-kE)+(k^2+1)E=O$

즉, $\left(-\frac{1}{k^2+1}\right)(A+kE)(A-kE)=E$

$\therefore\ (A+kE)^{-1}=-\frac{1}{k^2+1}(A-kE)$

72. 정답 ①

[출제의도] 행렬의 성질을 이용하여 값 구하기

이차정사각행렬 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$에서 $AB=A+B=E$

이면 $B=A^{-1}$

따라서 $A+A^{-1}=E$

$A^2-A+E=O$

위의 식에 행렬 A를 대입하여 정리하면

$a+d=1$ 이다.

$\therefore\ a+d=1$

73. 정답 ③

[출제의도] 역행렬을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$X=\sin\theta A+\cos\theta E$

$=\sin\theta\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\cos\theta\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$이므로

$X^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=-\sin\theta\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\cos\theta\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$=-\sin\theta A+\cos\theta E$

74. 정답 ②

[출제의도] 역행렬의 존재성 이해하기

$A-kE=\begin{pmatrix}2-k & 3\\ 3 & 4-k\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지

않으려면 $(2-k)(4-k)-9=0$

$k^2-6k-1=0$ 의 두 근을 k_1, k_2 라 하면

$k_1+k_2=6$, $k_1k_2=-1$

$\therefore\ {k_1}^2+{k_2}^2=38$

75. 정답 4

[출제의도] 역행렬의 성질을 이용하여 연립방정식의 해를 판별할 수 있는가를 묻는 문제이다.

연립방정식 $\begin{pmatrix}a-3 & -2\\ -3 & b-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$이 $x=0$, $y=0$이외의 해를 갖기 위해서는 행렬 $\begin{pmatrix}a-3 & -2\\ -3 & b-2\end{pmatrix}$가 역행렬을 갖지 않아야 한다.

$(a-3)(b-2)-6=0$에서 $(a-3)(b-2)=6$

a, b는 자연수이므로

$a-3$	1	2	3	6
$b-2$	6	3	2	1

a, b의 값은 다음 표와 같다.

a	4	5	6	9
b	8	5	4	3

따라서 구하는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 4이다.

76. 정답 ①

역행렬을 갖지 않으면 행렬식 D가 0이므로

$D=t(t^2+t)-2t(t+1)=t^3-t^2-2t=t(t-2)(t+1)=0$

$t=-1,\ 0,\ 2$이므로 모든 t의 합은 1이다.

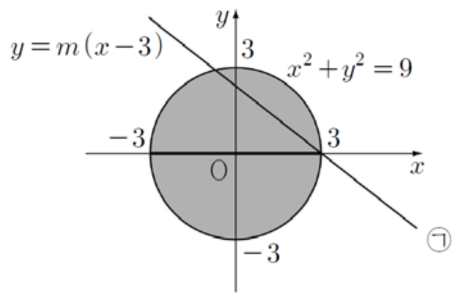
77. 정답 6

[출제의도] 역행렬을 이용하여 문제 해결하기

(가)에서 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$는 중심이 $(0,\ 0)$이고 반지름이 3인 원의 내부 또는 경계선 위에 있다.

(나)에서 $\begin{pmatrix} m & y \\ 1 & x-3 \end{pmatrix}$는 역행렬이 존재하지 않으므로

$D=m(x-3)-y=0$ …… ㉠이다. 그러므로 m의 값에 관계없이 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$는 $(3,\ 0)$을 지나는 직선 위에 있다. 따라서 두 조건을 모두 만족시키는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$가 나타내는 도형의 길이의 최댓값은 아래 그림과 같이 ㉠의 직선이 원의 중심을 지날 때, $m=0$이니 경우이므로 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$가 나타내는 도형의 길이의 최댓값은 6이다.



78. 정답 ⑤

[출제의도] 역행렬의 뜻을 알고 이를 이용하여 성질 추론하기

ㄱ. $k=0$일 때, $D=16\neq 0$이므로 A^{-1}이 존재한다. (참)

ㄴ. $k=1$일 때, A^{-1}이 존재하므로 $AB=O$의 양변에 A^{-1}을 곱하면 $B=O$이다. (참)

ㄷ. 두 실수 s, t에 대하여 $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2s & 2t \\ -s & -t \end{pmatrix}$일 때, $AB=O$이므로 영행렬이 아닌 행렬 B가 존재한다. (단, $s\neq 0$ 또는 $t\neq 0$이다.) (참)

79. 정답 13

[출제의도] 행렬을 이용하여 연립방정식 풀기

[해설] $A^2-A-E=O$

$(A+E)(A-2E)=-E$

$\therefore (A+E)^{-1}=(-A+2E)$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=(A+E)^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=(-A+2E)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}$

$\therefore \alpha=3,\ \beta=10,\ \alpha+\beta=13$

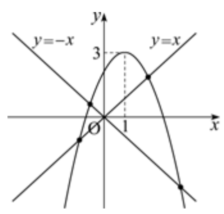
80. 정답 ③

[출제의도] 연립방정식의 해가 무수히 많을 조건과 원의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\begin{pmatrix} a & 3-b \\ 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$에서 $\begin{pmatrix} a-1 & 3-b \\ 1 & a-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$이 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 가지려면 행렬 $\begin{pmatrix} a-1 & 3-b \\ 1 & a-1 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 하므로

$(a-1)^2-(3-b)=0$

$\therefore\ b=-(a-1)^2+3$



따라서 점 $\mathrm{P}(a,b)$의 자취는 그림과 같이 꼭지점이 $(1,3)$이고, 위로 볼록한 포물선이다.

x축과 y축에 동시에 접하도록 하는 원의 중심은 두 직선 $y=x$와 $y=-x$가 곡선 $y=-(x-1)^2+3$과 만나는 점이다.

따라서 구하는 원의 개수는 4이다.

81. 정답 16

역행렬이 존재하지 않으므로 $ab-32=0$

$a+2b\geq 2\sqrt{2ab}$

$a+2b\geq 16$이므로 최솟값은 16이다.

82. 정답 ③

[출제의도] 연립방정식과 행렬을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

연립방정식 $\begin{pmatrix} 2-k & 3 \\ 2 & 1-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$이

$x=0,\ y=0$ 이외의 해를 가지려면

$(2-k)(1-k)-3\cdot 2=0$

즉, $k^2-3k-4=0\ \ \therefore\ k=-1,4$

따라서 구하는 실수 k의 값의 합은 3이다.

83. 정답 ①

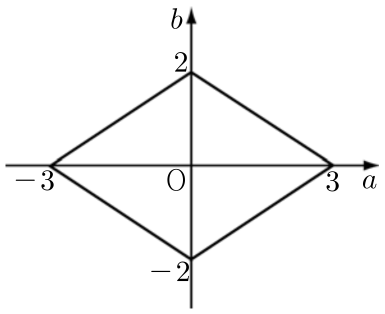
[출제의도] 연립방정식의 해와 역행렬의 관계 이해하기

[해설] 주어진 연립방정식을 정리하면

$\begin{pmatrix} |a|-3 & |b| \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$이고

$\begin{pmatrix} |a|-3 & |b| \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않으므로

$2|a|+3|b|=6$이다. 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$를 좌표평면위에 나타내면



$\therefore$ 도형의 둘레의 길이는 $4\sqrt{13}$

84. 정답 ②

[출제의도] 행렬과 연립방정식의 관계를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

주어진 연립방정식이 $x=0,\ y=0$ 이외의 해를 가지려면 A의 역행렬이 존재하지 않아야 하므로

$a(a+2)-3=a^2+2a-3=0$

$\therefore\ a=-3$ 또는 $a=1$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은 -2이다.

85. 정답 21

$\begin{pmatrix}1 & a-2\\ 2a & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\ b\end{pmatrix}$에서 $\begin{cases}x+(a-2)y=10 & \cdots\ ①\\ 2ax-2y=b & \cdots\ ②\end{cases}$

해가 무수히 많으려면 두 식은 일치해야 하므로

$\dfrac{1}{2a}=\dfrac{a-2}{-2}=\dfrac{10}{b}$ 이다.

$\therefore\ a=1,\ b=20$

$\therefore\ a+b=21$

86. 정답 ②

[출제의도] 연립일차방정식의 해가 무수히 많을 조건 구하기

[해설] 주어진 연립일차방정식을 정리하면

$\begin{pmatrix}a+1 & 1-b\\ b+1 & a-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$이고

$\begin{pmatrix}a+1 & 1-b\\ b+1 & a-1\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않으므로

$(a+1)(a-1)-(1-b)(b+1)=0$이다.

따라서 $a^2+b^2=2$이므로 도형의 둘레의 길이는 $2\sqrt{2}\pi$이다.

87. 정답 12

주어진 식을 변형하면 $\begin{pmatrix}k-6 & 3\\ 3 & k-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\log x\\ \log y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ 이다.

$x=y=1$ 이외의 해를 자지려면 연립방정식의 해가 무수히 많아야 한다.

$(k-6)(k-6)-3\cdot 3=0$

$k^2-12+27=0\quad k=3$ 또는 $k=9$

따라서 k값의 합은 $3+9=12$

88. 정답 ⑤

$\begin{pmatrix}2^k+1 & 2^{k+3}-16\\ 2 & 2^k-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2^k & 8\cdot 2^k-16\\ 2 & 2^k-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

$x=y=0$ 이외의 해를 갖기 위해서는 위 행렬의 역행렬이 존재하지 않아야 한다.

$2^k(2^k-2)-2(8\cdot 2^k-16)=0$

$2^k=t$로 치환하면

$t^2-18t+32=0$

$(t-2)(t-16)=0\qquad t=2^k=2,\ 16$

$\therefore\ k=1,\ 4$

따라서 두 근의 합은 5이다.

89. 정답 ①

[출제의도] 행렬을 이용한 연립방정식과 고차방정식의 수학내적문제 해결하기

행렬 $\begin{pmatrix}a^2+1 & 2a^2-3\\ 2 & a\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 한다.

$a(a^2+1)-2(2a^2-3)=a^3-4a^2+a+6=0$

$\therefore\ a=-1,\ 2,\ 3$이다. $a=-1$일 때,

$X=\{(x,\ y)|y=2x\}$이므로 $X\cap Y=\phi$

$\therefore\ a=2,\ 3$이고 모든 a의 합은 5이다.

90. 정답 ③

[출제의도] 행렬의 성질 이해하기

ㄱ. $A^k=\begin{pmatrix}m^k & 0\\ 0 & n^k\end{pmatrix}$이므로 직선은 $y=m^kx+n^k$ 이다. (참)

ㄴ. $A=\begin{pmatrix}m & 0\\ 0 & n\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재할 조건은

$mn\neq 0$이므로 원점을 지나지 않는다. (참)

ㄷ. $A=\begin{pmatrix}m & 0\\ 0 & n\end{pmatrix},\ \ A^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{m} & 0\\ 0 & \dfrac{1}{n}\end{pmatrix}$ 이므로 두 직선의 기울기는

$m,\ \dfrac{1}{m}$이고 서로 수직이 아니다. (거짓)

91. 정답 ④

[출제의도] 역행렬을 이용하여 연립방정식을 풀 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\begin{pmatrix}a-1 & -2\\ 8 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$에서 $\begin{pmatrix}a & -2\\ 8 & -b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

$x=0,\ \ y=0$ 이외의 해를 가지므로 $ab=16$이다.

$\therefore\ a+b\geq 2\sqrt{ab}=2\sqrt{16}=8$

따라서 $a+b$의 최솟값은 8이다.

92. 정답 ⑤

[출제의도] 연립일차방정식이 무수히 많은 해를 가질 조건과 원과 직선의 위치관계를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

연립일차방정식을 행렬로 나타내면

$\begin{pmatrix}a & b\\ (b-2) & -a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$이 $x=0,\ y=0$ 이외의 해를

가지려면 $\begin{pmatrix} a & b \\ b-2 & -a \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 한다.

$\therefore -a^2-b(b-2)=0 \qquad \therefore a^2+b(b-2)=0$

$a^2+(b-1)^2=1$이므로 점 $(a,\ b)$가 나타내는 도형은 중심이 $(0,1)$, 반지름의 길이가 1인 원이다.

점 $(0,1)$에서 직선 $b-a=k$까지의 거리는 $d \leqq 1$이어야

하므로 $d=\dfrac{|-1+k|}{\sqrt{2}} \leqq 1$이다.

$\therefore 1-\sqrt{2} \leqq k \leqq 1+\sqrt{2}$

$\therefore 1-\sqrt{2} \leqq b-a \leqq 1+\sqrt{2}$

$\therefore b-a$의 최댓값은 $1+\sqrt{2}$

93. 정답 ①

$\begin{pmatrix} a & -1 \\ b-1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a & -1 \\ b-1 & 1 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 하므로

$a+(b-1)=0$

$\therefore a+b=1$

94. 정답; ②

[출제의도] 연립일차방정식과 역행렬의 관계를 이용하여 미지수 구하기

[해설] 연립일차방정식을 행렬로 나타내면

$\begin{pmatrix} a(a+2) & -1 \\ (b+1)^2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x=0,\ y=0$ 이외의 해를 가지려면

$\begin{pmatrix} a(a+2) & -1 \\ (b+1)^2 & 1 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 한다.

$\therefore a(a+2)+(b+1)^2=0$

$(a+1)^2+(b+1)^2=1$이므로 점 $(a,\ b)$가 나타내는 도형은 중심 $(-1,-1)$, 반지름의 길이가 1인 원이다.

따라서 도형의 길이는 2π이다.

95. 정답 12

연립방정식이 $x=y=0$이외의 해를 가지므로

$4a\left(a-\dfrac{10}{a}\right)+b\left(b-\dfrac{8}{b}\right)=0$

$4a^2+b^2-48=0$에서 $4a^2+b^2=48$이고 $a,\ b$가 양의

실수이므로 $48=4a^2+b^2 \geqq 2\sqrt{4a^2b^2}=4ab$

따라서 ab의 최댓값은 12이다.

96. 정답 ⑤

$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \cdots ㉠$

$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \cdots ㉡$

㉠+㉡을 하면

$A\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\therefore A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\therefore p=2,\ q=3$

$\therefore p+q=5$

97. 정답 64

$\begin{pmatrix} 2a+b & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

역행렬이 존재하지 않으므로 $2a+b=8$

$2a+b \geqq 2\sqrt{2ab}$, $8 \geqq 2\sqrt{2ab}$

$8ab \leqq 64$이므로 $8ab$의 최댓값은 64이다.

98. 정답 ①

$x=y=0$ 이외의 해를 가지려면 역행렬을 갖지 않아야

하므로 $2a(a-1)+2(b+1)^2=0$ 이다.

$\therefore\ a(a-1)+(b+1)^2=0$

이것을 $a^2+(b+1)^2=1$ 과 연립하면 $a=1$, $b=-1$ 이다.

$\therefore$ (가) $a(a-1)+(b+1)^2=0$, (나) 0

99. 정답 ④

ㄱ. (반례) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

ㄴ. $A(A-E)=0$에서

$A(A-E)(A-E)^{-1}=0 \quad \therefore A=0$

$\therefore (A-E)$의 역행렬이 존재하면 $A=O$

ㄷ. $A-B=E$이므로

$AB=A(A-E)=A^2-A=(A-E)A=BA$

$A^2+B^2=(A-B)^2+2AB=2AB+E$

100. 정답 ④

[출제의도] 행렬의 연산과 역행렬의 뜻을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. (반례) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$이라 하면

$AB=A$가 성립하지만 $B \neq E$이다. (거짓)

ㄴ. $A^2-A+E=O$의 양변에 $A+E$를 곱하면

$(A+E)(A^2-A+E)=O,\ A^3+E=O$

$\therefore\ A^3=-E$ (참)

ㄷ. A^2의 역행렬 B가 존재하면 $A^2B=E$이므로

$A^3(AB^2)$

$=A^4B^2=A^2(A^2B)B=A^2EB=A^2B=E$

$\therefore\ (A^3)^{-1}=AB^2$

따라서 A^3의 역행렬이 존재한다. (참)

101. [출제의도] 역행렬의 성질을 이해하여 역행렬의 존재성을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $A(-A)=E$ 이므로 $A^{-1}=-A$ (참)

ㄴ. $A^3-E=-A-E$ 이고 $(-A-E)\left(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}E\right)=E$

$\therefore A^3-E$ 의 역행렬이 존재한다. (참)

ㄷ. $(A+kE)(A-kE)=A^2-k^2E=-(1+k^2)E$ 에서

$(A+kE)\left(-\frac{1}{1+k^2}A+\frac{k}{1+k^2}E\right)=E$

$\therefore A+kE$의 역행렬이 존재한다. (참)

102. 정답 ③

[출제의도] 행렬의 연산의 성질을 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $A(A-4E)=E$ 이므로 $A^{-1}=A-4E$이다. (참)

ㄴ. (반례) $A=E$이면 $A^2-A=O$이지만 행렬 A의 역행렬이 존재한다. (거짓)

ㄷ. 대우 'A^2 의 역행렬이 존재하면 A^3 의 역행렬이 존재한다.'는 참이므로 주어진 명제는 참이다. (참)

103. 정답 ③

[출제의도] 행렬의 여러 가지 성질을 이해할 수 있다.

ㄱ. $(A+E)(A-E)=A^2-E^2$

$=A^2-E$ ∴ 참

ㄴ. 반례 $A=\begin{pmatrix}-1&0\\0&0\end{pmatrix}$ 이면

$A(A+E)=O$이 성립한다. ∴ 거짓

ㄷ. $A(A+E)=E$ 이므로 $A^{-1}=A+E$

$(A^2)^{-1}=(A^{-1})^2=(A+E)^2$ ∴ 참

104. 정답 ②

[출제의도] 행렬의 연산에 대한 성질 이해하기

ㄴ. $A^2B=AAB=ABA=BAA=BA^2$ (참)

ㄷ. 반례) $A=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}$

105. 정답 ④

ㄱ.(반례) $A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$ 이면 $A^2=O$이지만 $A\neq O$

106. 정답 ③

ㄱ. $\{(A+B)A^{-1}\}(A-B)=(E+BA^{-1})(A-B)$

$=A+B-B-BA^{-1}B=A-BA^{-1}B$

$\{(A-B)A^{-1}\}(A+B)=(E-BA^{-1})(A+B)$

$=A-B+B-BA^{-1}B=A-BA^{-1}B$

∴ $(A+B)A^{-1}(A-B)=(A-B)A^{-1}(A+B)$ (참)

ㄴ. $AB^2=(AB)B=E$이면 $(AB)^{-1}=B$

∴ $B^{-1}A^{-1}=B$ (참)

ㄷ. 반례) $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$이면 $B^2=E$이므로

$AB^2=B^2A$ 이지만 $AB\neq BA$ 이다. (거짓)

107. 정답 ④

주어진 조건식의 양변에 행렬 A를 곱하여 정리하면

$A^2=-E$, $A^3=-A$, $A^4=E$

$A^2+(A^2)^{-1}=-E-E=-2E$,

$A^3+(A^3)^{-1}=-A-A^{-1}=-(A+A^{-1})=O$,

$A^4+(A^4)^{-1}=E+E=2E$

또한, 행렬 A^n 은 주기가 4 이므로 n이 홀수이면

$A^n+(A^n)^{-1}=O$,

n이 짝수이면 $A^n+(A^n)^{-1}\neq O$ ∴ ㄱ은 참, ㄴ은 거짓

한편, $A+A^2+A^3+A^4=A-E-A+E=O$이므로

$A+A^2+A^3+\cdots+A^{4n}=O$이다.

108. 정답 ⑤

ㄱ. $(A')'=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=A$ (참)

ㄴ. $A+A'=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a&b+c\\b+c&2d\end{pmatrix}$

$(A+A')'=\begin{pmatrix}2a&b+c\\b+c&2d\end{pmatrix}=A+A'$ (참)

ㄷ. $(A^{-1})'=\left\{\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-c\\-b&a\end{pmatrix}\right\}'=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-c\\-b&a\end{pmatrix}$

$(A')^{-1}=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}'=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-c\\-b&a\end{pmatrix}$

∴ $(A^{-1})'=(A')^{-1}$ (참)

109. 정답 ④

ㄱ. $A^2=B^2 \not\Rightarrow A=B$ 또는 $A=-B$

(반례) $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$ (거짓)

ㄴ. $E=E-A^2=(E+A)(E-A)$

$\therefore (E+A)^{-1}=E-A$ (참)

ㄷ. A의 역행렬이 존재한다면 $A^2=A$의 양변에 A^{-1}를 곱하면 $A^2A^{-1}=AA^{-1}$

따라서 $A=E$이므로 $A\neq E$라는 가정에 모순이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

110. 정답 ②

[출제의도] 정의된 행렬의 성질 이해하기

ㄱ. $\begin{pmatrix}1&0\\0&m\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&m+n\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1&0\\0&m+n\end{pmatrix}$

(거짓)

ㄴ. $\begin{pmatrix}1&0\\0&m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&mn\end{pmatrix}$ (참)

ㄷ. $\frac{1}{n}\begin{pmatrix}n&0\\0&1\end{pmatrix}\neq\frac{1}{n}\begin{pmatrix}1&0\\0&n\end{pmatrix}$ (거짓)

111. 정답 ③

[출제의도] 역행렬의 성질을 활용할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A(E+B)=E$에서 $A^{-1}=E+B$이므로

$A(E+B)=(E+B)A=E$

$A+AB=A+BA$

$\therefore\ AB=BA$

이때, $AB-BA=O=A+B$이므로 $B=-A$

$A(E+B)=E$에 $B=-A$를 대입하면

$A(E-A)=E,\ A^2-A+E=O$

위 등식의 양변에 $A+E$를 곱하면

$(A+E)(A^2-A+E)=A^3+E=O$

$\therefore\ A^3=-E$

$\therefore\ (AB)^{20}=(-A^2)^{20}=A^{40}$

$=(A^3)^{13}A=(-E)^{13}A=-A$

112. 정답 ②

(나)의 양변에 A^2을 곱하면

$A^3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ …… ①

(가)에서 $A^3=-E$이므로 ①에 대입하면

$-E\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=E\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$\therefore a=1,\ b=1$ $\quad a+b=2$

113. 정답 ②

ㄱ. [반례] $B=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$

$AB-BA=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\-1&-1\end{pmatrix}$

$\therefore ps-qr=1\neq0$ $\quad\therefore$ 거짓

ㄴ. $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}x&y\\z&u\end{pmatrix}$라 하면

$AB-BA=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y\\z&u\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x&y\\z&y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}ax+bz&ay+by\\cx+dz&cy+du\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}ax+cy&bx+dy\\az+cu&bz+du\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}bz-cy&\square\\\square&cy-bz\end{pmatrix}$

$\therefore p+s=0$ $\quad\therefore$ 참

ㄷ. [반례] $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}$

$AB-BA=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$이지만 B는 A의 역행렬이 아니다.

$\therefore$ 거짓

114. 정답 ⑤

[출제의도] 역행렬의 성질을 이용하여 행렬 간단히 하기

$AB+E=O$이므로

$A=-B^{-1},\ B=-A^{-1}$

$(A+B)(A+B)^{-1}=(A+B)(A^{-1}+B^{-1})$

$E=E+AB^{-1}+BA^{-1}+E$

$E=E-A^2-B^2+E$

$\therefore\ A^2+B^2=E$

115. 정답20

$A=100A^{-1}$ 에서

$\begin{pmatrix}x&y\\y&-x\end{pmatrix}=\frac{100}{-x^2-y^2}\begin{pmatrix}-x&-y\\-y&x\end{pmatrix}=\frac{100}{x^2+y^2}\begin{pmatrix}x&y\\y&-x\end{pmatrix}$

$\therefore\ \frac{100}{x^2+y^2}=1$

$\therefore\ x^2+y^2=100$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 반지름이 10 인 원이고, 이 원의 둘레 $a=20\pi$ 이다.

$\therefore\ \frac{a}{\pi}=20$

116.정답 ①

$-AB=(kE-A)^3B-3k(kE-A)^2B+3k^2(kE-A)B-k^3B$

$=(kE-A)^2-3k(kE-A)+3k^2E-k^3B$

$=A^2+kA+k^2E-k^3B$(가)

(중략)

$E-kB=A^2+kA+k^2E-k^3B$

$\therefore(k^3-k)B=A^2+kA+(k^2-1)E$ (나)

(중략)

$B=\frac{1}{k^3-k}A^2+\frac{1}{k^2-1}A+\frac{1}{k}E$ (다)

117. 정답 ③

[출제의도] 역행렬의 정의를 이해하고 이를 수열에 적용시킬 수 있는가를 묻는 문제이다.

행렬 A의 역행렬이 존재하지 않으므로

$(2a+1)(a+1)-(a-1)(2a-1)=0$ $\quad\therefore a=0$ 따라서 행렬

$A=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$이다. 여기에서

$A^2=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&2\end{pmatrix}=2A$

$A^3=AA^2=A(2A)=2A^2=2(2A)=2^2A$

$A^4=AA^3=A(2^2A)=2^2A^2=2^3A$ 따라서 $A^n=2^{n-1}A$이다.

$A+A^2+A^3+\ldots+A^{2008}=A+2A+2^2A+\ldots+2^{2007}A$

$=(1+2+2^2+\ldots+2^{2007})A=(2^{2008}-1)A$

$E+A+A^2+A^3+\ldots+A^{2008}=E+(2^{2008}-1)A$ 따라서

$p=1,\ q=2^{2008}-1$이므로 $p+q=2^{2008}$

118. 정답 400

[출제의도] 행렬의 거듭제곱을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A^n=\begin{pmatrix}1&-2n\\0&1\end{pmatrix},\ (A^{-1})^n=(A^n)^{-1}=\begin{pmatrix}1&2n\\0&1\end{pmatrix}$ 이므로 $B^n=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$

따라서 모든 성분의 합은 $4\times100=400$이다.

119.정답 ②

(나)의 양변에 A^2을 곱하면

$A^3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ …… ①

(가)에서 $A^3=-E$이므로 ①에 대입하면

$-E\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=E\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$\therefore\ a=1,\ b=1$

$a+b=2$

120. 정답 ⑤

역행렬이 존재하려면 $2k(2k+a-1)-b(k+1)(k-1)\neq0$

$\Leftrightarrow(4-b)k^2+2(a-1)k+b\neq0$

(i) $b\neq4$ 일 때,

$\frac{D}{4}=(a-1)^2-b(4-b)<0\Leftrightarrow(a-1)^2+b^2-4b<0$

$\Leftrightarrow(a-1)^2+(b-2)^2<4$ 이므로 $a<b$ 를 만족시키는

(a,b) 는 $(0,1),(0,2),(1,2),(0,3),(1,3),$

$(2,3)$ 이다.

(ii) $b=4$ 일 때, 임의의 실수 k 에 대하여

$2(a-1)k+4\neq0$ 인 것은 $a=1$ 이다.

이 때 $(a,b)=(1,4)$ 는 $a<b$ 를 만족한다.

(i),(ii)에 의해 $a<b$ 를 만족시키는 순서쌍의 개수는

7 개이다.

121. 정답 ⑤

[출제의도] 역행렬을 이용하여 연립방정식의 해 이해하기

$A^2-A+E=O$

$(A+E)(A-2E)+3E=O$

$(A+E)(A-2E)=-3E$

$(A+E)\left\{-\frac{1}{3}(A-2E)\right\}=E$ 이므로

$(A+E)^{-1}=-\frac{1}{3}(A-2E)$ 이다.

$(A+E)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(A+E)^{-1}\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}=-\frac{1}{3}(A-2E)\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$

$=(-A+2E)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=-A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+2E\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$

$\alpha=-1,\ \beta=5$

$\therefore\ \alpha+\beta=4$

122. 정답 ③

$\begin{pmatrix}1&0\\0&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}y\\-x\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&-k\\k&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

이 $x=0,\ y=0$이외의 해를 가지므로 행렬 $\begin{pmatrix}1&-k\\k&-4\end{pmatrix}$의

역행렬이 존재하지 않는다.

$D=-4+k^2=0$이므로 $k=\pm2$

따라서 모든 k의 값의 합은 0

123. 정답 ①

[출제의도] 연립방정식을 행렬을 이용해 문제해결하기

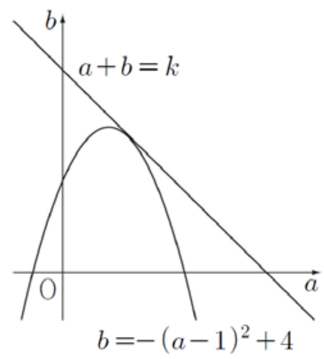
주어진 연립방정식이 $x=y=0$이외의 해를 가지므로

$D=(a-1)(1-a)-(b-4)=0$이다.

따라서, $-(a-1)^2=b-4$ …… ㉠이다.

이 때, $a+b=k$ …… ㉡이라 하면

$a+b$가 최대가 되는 경우는 아래 그림과 같이 직선 ㉡이 이차함수 ㉠의 그래프에 접하는 경우이다.



따라서, ㉡을 ㉠에 대입하여 정리한 a에 대한 이차방정식

$a^2-3a+k-3=0$에서

$D=9-4(k-3)=0$이므로 $k=\frac{21}{4}$이다.

124. 정답 ①

[출제의도] 역행렬의 성질을 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A^2-2A=A(A-2E)=E$ …㉠

$A\left(\frac{1}{2}B\right)=E$ …㉡

㉠, ㉡에서 $A^{-1}=A-2E=\frac{1}{2}B$

$\therefore\ B=2A-4E$

행렬 B의 모든 성분의 합은 $2\times7-4\times2=6$이다.

125. 정답 ⑤

ㄱ. A의 역행렬이 존재하지 않으므로 $ac-b^2=0$

$\therefore\ b^2=ac$

따라서, b는 등비중항이다. $\therefore$ 참

ㄴ. $A+E=\begin{pmatrix}a+1 & b\\ b & c+1\end{pmatrix}$에서

$(a+1)(c+1)-b^2=ac+a+c+1-b^2$

$=a+c+1$

이때, a, c는 양수이므로 $a+c+1>0$

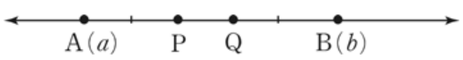
따라서 $A+E$의 역행렬이 존재한다. $\therefore$ 참

ㄷ. $A^2=\begin{pmatrix}a^2+b^2 & ab+bc\\ ab+bc & b^2+c^2\end{pmatrix}$인데 $A^2=A$이므로

$ab+bc=b$, $b>0$이므로 $a+c=1$ $\therefore$ 참

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

126. 정답 36



$p=\frac{3a+2b}{5}=\frac{3}{5}a+\frac{2}{5}b$

$q=\frac{2a+3b}{5}=\frac{2}{5}a+\frac{3}{5}b$

$\therefore\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{2}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}$이므로

$M=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{2}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}$

$M^{-1}=5\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{2}{5}\\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -2 & 3\end{pmatrix}$

따라서 모든 성분의 곱은 36이다.

127. 정답 13개

[출제의도] 역행렬의 존재 조건을 이해할 수 있다.

임의의 실수 x에 대하여 역행렬이 존재하려면

$(x+2a)(x+a)+12\neq0$

이 항상 성립해야 하므로 x에 대한 이차방정식

$x^2+3ax+2a^2+12=0$이 실근을 갖지 않아야 한다.

$D=9a^2-4(2a^2+12)<0$, $a^2<48$

따라서 정수 a는 -6, -5, $\cdots$, 5, 6 으로 13개이다.

128. 정답 ③

$A^{-1}BA=B$에서 $A(A^{-1}BA)=AB$이므로

$BA=AB$

$BA=\begin{pmatrix}\log x & \log y\\ 0 & \log z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ 1 & z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\log x+\log y & y\log x+z\log y\\ \log z & z\log z\end{pmatrix}$

$AB=\begin{pmatrix}x & y\\ 1 & z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\log x & \log y\\ 0 & \log z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\log x & x\log y+y\log z\\ \log x & \log y+z\log z\end{pmatrix}$

$BA=AB$에서 $\log y=0$, $\log x=\log z$

$\therefore y=1$, $x=z$

한편, A^{-1}가 존재하므로 $x\neq1$

따라서 조건을 만족하는 행렬 A는

$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}5 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix}$ 의 4 개이다.

129.정답 ③

역행렬이 존재하지 않으려면 $a^3=b^2$

$5<a$, $b<50$이므로 a를 기준으로 하는 것이 빠르다.

a^3이 완전제곱수이므로 a가 완전제곱수이면 된다.

$a=3^2\ \rightarrow\ a^3=(3^2)^3=(3^3)^2$

$\therefore\ a=9$, $b=27$

130. 정답 76

[출제의도] 역행렬을 이용하여 연립일차 방정식을 풀기

$AX=kX\Leftrightarrow\begin{pmatrix}3-k & 1\\ 4 & 1-k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

$(0,\ 0)$ 이외의 해를 가지려면

$(3-k)(1-k)-4=0\Leftrightarrow k^2-4k-1=0$

두 근이 a와 b이므로 $a+b=4$, $ab=-1$

$\therefore\ a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=76$

131. 정답 36

[출제의도] 행렬을 이용하여 문제를 해결할 수 있다.

$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0.2 & -0.1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}70\\ 2\end{pmatrix}$

$=-\frac{1}{0.3}\begin{pmatrix}-0.1 & -1\\ -0.2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}70\\ 2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}30\\ 40\end{pmatrix}$

$\therefore\ x=30$, $y=40$

따라서 2003 년의 A 매장의 매출액은

$x\times(1+0.2)=30\times1.2=36$(억 원)

132. 정답 ③

[출제의도] 역행렬의 성질을 이용하여 수학내적 문제해결하기

역행렬을 갖지 않도록 하는 실수 x가 존재해야 하므로

$D=2(x^2+2x+a^2+b^2)-(x+1)(x-1)=0$

즉 $x^2+4x+2a^2+2b^2+1=0$ 이 실근을 가져야 하므로

$D/4=4-(2a^2+2b^2+1)\geq 0$

따라서 $a^2+b^2\leq\dfrac{3}{2}$

∴ (구하고자 하는 영역의 넓이) $=\dfrac{3}{2}\pi$

133. 정답 ⑤

연립일차방정식

$$\begin{cases}(k-6)x-2y=3 & \text{---㉠}\\ 2x+(k-1)y=-6 & \text{---㉡}\end{cases}$$

의 해가 무수히 많으므로 두 직선 ㉠, ㉡은 일치한다.

$\dfrac{k-6}{2}=\dfrac{-2}{k-1}=\dfrac{3}{-6}$

$\therefore k=5$

134.정답 ②

$\begin{pmatrix}k^2 & 1-2k\\ k+6 & k-8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$k^2(k-8)-(1-2k)(k+6)=0$

$\therefore k=1,2,3$

$k=1,2$일 때, 해가 없다.

$k=3$일 때, 해가 무수히 많다.

따라서 k의 값의 합은 3이다.

135. 정답 18

$\begin{pmatrix}a\ b\\ c\ d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\-t^2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & -3\\3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\-t^2\end{pmatrix}$

$\therefore \begin{cases}x=9t+3t^2\\ y=3t-5t^2\end{cases}$ 이므로

$x+y=-2t^2+12t=-2(t-3)^2+18$ 이다.

따라서 최댓값은 18 이다.

136. 정답⑤

주어진 연립방정식이 단 한 쌍의 해를 갖기 위해서는

$\begin{pmatrix}2 & f(x)\\-1 & f(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$ 의 역행렬이 존재해야 한다.

$\therefore\ 2\cdot f(x)-(-1)\cdot f(x)=3f(x)\neq 0$

즉, 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)\neq 0$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 x 축과 만나지 않아야 한다. 따라서 구하는 답은 ⑤이다.

137. 정답8

$(a\ 2\ b)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ 에서 $\begin{pmatrix}a & 8\\2 & b\end{pmatrix}$ 의 역행렬이 존재하지 않아야 되므로 $ab-16=0$

$\therefore\ ab=16$

한편, $a>0$, $b>0$ 이므로 산술·기하평균을 이용하면

$a+b\geq 2\sqrt{ab}=8$

($a=b=4$ 일 때 등호성립)이므로 최솟값은 8 이다.

138. 정답 5개

[출제의도] 연립방정식이 해를 갖지 않을 조건을 행렬을 이용하여 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

방정식이 해를 갖지 않으려면

$\dfrac{a+1}{1}=\dfrac{b}{a+3}\neq\dfrac{2}{1}$이 성립하여야 한다.

따라서 순서쌍 (a,b)는 $(-4,3)$, $(-3,0)$, $(-2,-1)$, $(-1,0)$, $(0,3)$으로 5개다.

139. 정답⑤

<표1>을 행렬로 나타내면

$A=\begin{pmatrix}30000 & 10000\\20000 & 20000\end{pmatrix}=10000\begin{pmatrix}3 & 1\\2 & 2\end{pmatrix}$

이고, <표2>를 행렬로 나타내면 $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 3\end{pmatrix}$이다.

그러므로 갑과 을이 P약국과 Q약국에서 1개월간 구입한 약값은 $AB=10000\begin{pmatrix}3 & 1\\2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 3\end{pmatrix}=10000\begin{pmatrix}4 & 9\\4 & 10\end{pmatrix}$이다.

따라서 $10000\begin{pmatrix}4 & 9\\4 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}600000\\640000\end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix}4 & 9\\4 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}60\\64\end{pmatrix}$이므로 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}10 & -9\\-4 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}60\\64\end{pmatrix}$

$\therefore a=10$, $b=4$

$\therefore a+b=10+4=14$

140. 정답 ②

[출제의도] 역행렬의 성질을 이용하여 수학내적 문제 해결하기

영역 $x^2+y^2<1$ 위의 임의의 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$에 대하여

$M+kE=\begin{pmatrix}x_1+k & y_1\\ x_2 & y_2+k\end{pmatrix}$ 이고,

$M+kE$의 역행렬이 항상 존재해야 하므로

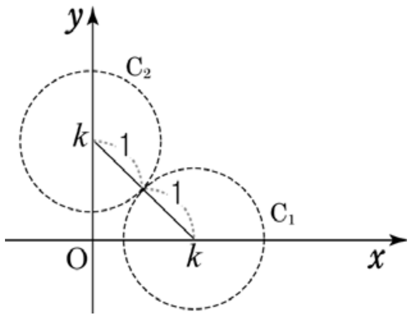
$\dfrac{y_1}{x_1+k}\neq\dfrac{y_2+k}{x_2}$ 이다.

따라서, 점 $\mathrm{C}(x_1+k, y_1)$, $\mathrm{D}(x_2, y_2+k)$ 라 하면

점 C는 $(x-k)^2+y^2<1$ 의 임의의 점이고 …①

점 D는 $x^2+(y-k)^2<1$ 의 임의의 점이다. …②

원점을 지나는 직선이 두 영역을 동시에 지나지 않아야 한다.



따라서 k 의 최솟값은 $\sqrt{2}$ 이다.

141. 정답 ③

[출제의도] 행렬의 연산의 성질을 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $(ABA)^2=(ABA)(ABA)=ABA^2BA$

$=AB^2A=A^2=E$ (참)

ㄴ. (반례) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$라 하면

$A^2=B^2=O$이지만 $AB\neq O$이다. (거짓)

ㄷ. $A^2+2A+E=O$, 즉 $A(-A-2E)=E$이므로 행렬 A는 역행렬을 갖는다.

$AB=A$의 양변에 A^{-1}을 곱하면 $B=E$ (참)

142. 정답 ⑤

[출제 의도] 행렬의 성질을 이해하고 추론하기

ㄱ. $(E+B)=A=2E$이므로 $A^{-1}=\frac{1}{2}(E+B)$이다. (참)

ㄴ. $(E+B)A=A(E+B)=2E$이므로 $AB=BA$이다.

따라서, $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$이다. (참)

ㄷ. $AB=BA$이므로 $2AB=2(2E-A)=-A+B$이다.

따라서, $A+B=4E$이다. (참)

143. **정답 ③**

[출제의도] 행렬의 성질 추론하기

ㄱ. $AB=O$이면

$A^2B^2=A(AB)B=AOB=O \quad \therefore$ 참

ㄴ. $A+B=E$에서 $A(A+B)=AE$이므로

$A^2+AB=A$ … ①

또 $A+B=E$에서 $(A+B)A=EA$ 이므로

$A^2+BA=A$ … ②

①, ② 에 의하여 $AB=BA=A-A^2 \quad \therefore$ 참

ㄷ. $A^2=O$이면 $A^2-E=-E$이므로

$(A-E)(A+E)=-E$

따라서 $A+E$ 의 역행렬이 존재한다. ∴ 거짓

144. 정답 ⑤

$AP=P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ … (1), $BP=P\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ … (2)라 하자.

ㄱ. $A=P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$, $B=P\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}P^{-1}$이므로

$a=c,\ b=d$이면 $A=B$이다. (참)

ㄴ. $AB=P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}P^{-1}=P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}P^{-1}$

$=P\begin{pmatrix} ac & 0 \\ 0 & bd \end{pmatrix}P^{-1}$

$BA=P\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}=P\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$

$=P\begin{pmatrix} ac & 0 \\ 0 & bd \end{pmatrix}P^{-1}$

따라서 $AB=BA$이다. (참)

ㄷ. (1)−(2)하면 $(A-B)P=P\begin{pmatrix} a-c & 0 \\ 0 & b-d \end{pmatrix}$

$A-B$가 역행렬을 가지면 $\begin{pmatrix} a-c & 0 \\ 0 & b-d \end{pmatrix}$도 역행렬을 가지므로

행렬식 $D=(a-c)(b-d)\neq 0$이다.

따라서 $a\neq c,\ b\neq d$이다. (참)

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 참이므로 정답은 ⑤이다.

145. 정답 ⑤

ㄱ. (반례) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$C=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$라고 하면

$A=E,\ ABC=E,\ ACB=E$ 이지만 $B\neq E$ 이다. (거짓)

ㄴ. $ABC=E$ 에서

$C=(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

$ACB=AB^{-1}A^{-1}B=E$

$B^{-1}A^{-1}=A^{-1}B^{-1}$

$(B^{-1}A^{-1})^{-1}=(A^{-1}B^{-1})^{-1}$

$AB=BA$ (참)

ㄷ. (i) $n=1$일 때 $ABC=E$ 이므로 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때 $A^nB^nC^n=E$가 성립한다고 가정하면

$n=k+1$ 일 때

$A^{n+1}B^{n+1}C^{n+1}$

$=A^nAB^nBC^nC=A^nB^nABC^nC$ ($\because$ ㄴ)

$=A^nB^nC^nABC$ ($\because (AB)C=C(AB)=E$)

$=E$

따라서 $n=k+1$일 때도 성립하므로 모든 자연수 n에 대하여

$A^nB^nC^n=E$ 이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ 이다.

146. 정답 ③

[출제의도] 행렬의 연산의 성질을 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $A+B=2E$ 이면 $B=2E-A$ 이므로

$AB=A(2E-A)=2A-A^2=(2E-A)A=BA$ (참)

ㄴ. [반례] $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}$ 이면 $A^2=E$ 이므로

$A^2B=BA^2=B$ 이지만 $AB=\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}=BA$ (거짓)

ㄷ. $A^2B=A+E$ 에서 $A^2B-A=A(AB-E)=E\cdots$ ㉠

$A^{-1}=AB-E$에서 $(AB-E)A=E,\ ABA-A=E\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $A^2B=ABA$이고 A^{-1}을 곱하면

$AB=BA$ (참)

147. 정답 ③

[출제의도] 행렬의 곱셈에 대한 성질과 역행렬의 존재성을 이해하고 옳은 성질을 찾는 문제이다.

ㄱ. $A^3=E\ \therefore\ d(A)=3$ (참)

ㄴ. (반례) $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$ 일 때 $A^n=\begin{pmatrix}1 & n\\0 & 1\end{pmatrix}$이므로

$A^n\neq E\ \therefore\ d(A)=0$ (거짓)

ㄷ. $AB=BA$ 이므로 $(AB)^6=A^6B^6=E$이고,

$(AB)^n\neq E\ (n=1, 2, 3, 4, 5)$ 이다.

$\therefore\ d(AB)=6$ (참)

148. 정답 ③

ㄱ. $X\in S$이면 $X=A^n$이고

$X^2=(A^n)^2=A^{2n}\in S$ $\quad\therefore$ 참

ㄴ. 반례 $A\in S,\ B\in T$이지만 $AB=\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\notin S$이다. $\therefore$거짓

ㄷ. $T=\{B, B^2, B^3, B^4, B^5, E\}$이고 모든 $Y\in T$에 대하여

$BB^5=B^2B^4=B^3B^3=E$이므로 $Y\in T$는 항상 역행렬을 갖는다. $\quad\therefore$ 참

149. 정답 ③

ㄱ. $A^2-AB+BA-B^2=A^2-B^2\quad\therefore$ 참

ㄴ. 반례) $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$이라 하면

$AB+BA=O$ 이지만 $A\neq O,\ B\neq O\ \therefore$ 거짓

ㄷ. $A+2BA-AB=E,\quad A+AB=E$

$A(E+B)=A(B+E)=E\quad\therefore$참

150. 정답 ⑤

ㄱ. $A^2=A$이므로 $A^3=A^2=A$

$\therefore A^3=A\quad\therefore$ 참

ㄴ. $B=-A$에서 $B^2=A^2$

$A^2=A$이므로 $B^2=A\ \ \therefore B^2=-B\ \therefore$ 참

ㄷ. $A^2-A=O$를 변형하면

$(A+3E)(A-4E)=-12E$

$\therefore (A+3E)^{-1}=-\frac{1}{12}A+\frac{1}{3}E\quad\therefore$ 참

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

151. 정답 ①

[출제의도] 행렬의 연산에 대한 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $A\in S$이고 A^{-1}가 존재한다고 가정하자.

$A^2=O$의 양변에 $(A^{-1})^2=(A^2)^{-1}$을 곱하면 $E=O$가 되어 모순이다.

따라서 $A\in S$이면 A의 역행렬이 존재하지 않는다. (참)

ㄴ. (반례) $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$의 역행렬은 존재하지 않는다.

그런데 $A^2=A\neq O$이므로 $A\notin S$이다. (거짓)

ㄷ. (반례) $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}$이면 $A^2=B^2=O$이므로

$A\in S,\ B\in S$이다.

이때 $AB=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$이고, $(AB)^2=AB\neq O$이므로 $AB\notin S$이다.

(거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ이다.

152.정답 ④

ㄱ. (반례) $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$

$ABAB=A^2B^2=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$

$AB=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$ (거짓)

ㄴ. $A=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$일 때, A의 역행렬이 존재하지 않으면

$ad-bc=0$이다.

$$A^2=\begin{pmatrix}a^2+bc & b(a+d)\\c(a+d) & d^2+bc\end{pmatrix}$$

$=\begin{pmatrix}a^2+ad & b(a+d)\\c(a+d) & d^2+ad\end{pmatrix}=(a+d)\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ (참)

ㄷ. (대우) A, B의 역행렬을 각각 A^{-1}, B^{-1}이라 하면

$(AB)(B^{-1}A^{-1})=(B^{-1}A^{-1})(AB)=E$이므로 AB의 역행렬은 존재하고 $B^{-1}A^{-1}$이다. (참)

153. 정답 ③

ㄱ. $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$일 때, $8A=\begin{pmatrix}8 & 8\\8 & 8\end{pmatrix}$

$L(8A)=\begin{pmatrix}\log_2 8 & \log_2 8\\\log_2 8 & \log_2 8\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3 & 3\\3 & 3\end{pmatrix}=3A\quad\therefore$ 참

ㄴ. $L(A)=E$에서

$$L(A)=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\log_2 2 & \log_2 1\\ \log_2 1 & \log_2 2\end{pmatrix}$$

$$\therefore A=\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}$$

따라서 A는 역행렬을 갖는다.　$\therefore$ 참

ㄷ. $A=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$일 때,

$$A^2=\begin{pmatrix}a^2+bc & ab+bd\\ac+cd & bc+d^2\end{pmatrix}$$

$$L(A^2)=\begin{pmatrix}\log_2(a^2+bc) & \log_2(ab+bd)\\ \log_2(ac+cd) & \log_2(bc+d^2)\end{pmatrix}$$

$$2L(A)=2\begin{pmatrix}\log_2 a & \log_2 b\\ \log_2 c & \log_2 d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\log_2 a^2 & \log_2 b^2\\ \log_2 c^2 & \log_2 d^2\end{pmatrix}$$

$a,\ b,\ c,\ d$는 양수이므로

$\log_2(a^2+bc)\neq\log_2 a^2$

따라서 $L(A^2)=2L(A)$를 만족시키는 행렬 A는 없다. $\therefore$ 거짓

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

154. 정답 ⑤

[출제의도] 역행렬의 존재성 추론하기

ㄱ. 두 직선이 만나지 않으면 $a=c,\ b\neq d$

$\therefore\ ad-bc\neq 0$ (참)

ㄴ. 두 직선이 일치하면 $a=c,\ b=d$

$\therefore\ ad-bc=0$ (참)

ㄷ. 두 직선이 x축 위에서 만나면 $-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{d}{c}$

$\therefore\ ad-bc=0$ (참)

155. 정답 ⑤

ㄱ. $ABA=E$이면 AB와 A는 역행렬 관계이다.

$(AB)A=A(AB)=A^2B$이므로

$A^{-1}(ABA)=A^{-1}(A^2B)$　　$\therefore BA=AB$ (참)

ㄴ. $A^{-1}+B^{-1}=E$이면 $A+B=AB$이므로

$AB-A-B=O,\ (A-E)(B-E)=E$이다.

$A-E$와 $B-E$는 서로 역행렬 관계이므로

$(A-E)(B-E)=(B-E)(A-E)$ (참)

ㄷ. $AB=BA$이면 $B^{-1}A^{-1}=A^{-1}B^{-1}$이므로

$A^{-1}(B+B^{-1})A$

$=A^{-1}BA+A^{-1}B^{-1}A$

$=A^{-1}AB+B^{-1}A^{-1}A=B+B^{-1}$ (참)

156. 정답 ⑤

$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 5\end{pmatrix}$에서

$$A^{-1}=\frac{1}{1\times5-2\times2}\begin{pmatrix}5 & -2\\-2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -2\\-2 & 1\end{pmatrix}$$

$$AX=B\Leftrightarrow X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}5 & -2\\-2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -3\\1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -11\\-3 & 4\end{pmatrix}$$

따라서, 행렬 X의 모든 성분의 합은

$8+(-11)+(-3)+4=-2$

157. 정답 ②

$2A+X=AB$에서

$X=AB-2A=AB-2AE$

$$=A(B-2E)=\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4\\-1 & 2\end{pmatrix}$$

158. 정답 ①

$$A+B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 1\\3 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\3 & 4\end{pmatrix}$$

$$\therefore (A+B)^{-1}=\frac{1}{4-3}\begin{pmatrix}4 & -1\\-3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -1\\-3 & 1\end{pmatrix}$$

따라서, 모든 성분의 합은

$4+(-1)+(-3)+1=1$

159. 정답 ②

$|A|=2n^2-7$

$$A^{-1}=\frac{1}{2n^2-7}\begin{pmatrix}n & 7\\1 & 2n\end{pmatrix}$$

2행 1열에서

$2n^2-7=1$

$n^2=4,\ n=2$

160. 정답 58

$A^2+A+E=O$ ………㉠

$(A+A^{-1})\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-7\end{pmatrix}$ …………㉡

㉡의 양변에 A를 곱하면

$(A^2+E)\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}3\\-7\end{pmatrix}$

㉠에 의해

$-A\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}3\\-7\end{pmatrix}$

$\therefore A\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}$

$\therefore p=-3,\ q=7$　$\therefore p^2+q^2=9+49=58$

161. 정답 ③

주어진 연립방정식이 $x=0,\ y=0$이외의 해를 가지려면 행렬

$\begin{pmatrix} 5-\log_2 a & 2 \\ 3 & \log_2 a \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 하므로

$(5-\log_2 a)\log_2 a-6=0$

이어야 한다.

$\log_2 a=t$라 하면

$(5-t)t-6=0$, $(t-2)(t-3)=0$

따라서 $t=2$ 또는 $t=3$

$\therefore$ $\log_2 a=2$ 또는 $\log_2 a=3$

따라서 $a=4$ 또는 $a=8$이다.

그러므로 모든 a의 값의 합은

$4+8=12$

이다.

162. 정답 16

$x^2-4x-1=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=-1$

$\therefore \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha\beta & \alpha^2+\beta^2 \\ 0 & \alpha\beta \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \alpha\beta & (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta \\ 0 & \alpha\beta \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -1 & 18 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

따라서, 모든 성분의 합은

$(-1)+18+0+(-1)=16$

163. 정답 ③

$BAB=E$에서

$B^{-1}=AB=BA$

$ABA=A^{-1}$에서

양변에 A를 곱하면

$AABA=E$

$AB=BA$이므로

$AAAB=E$

$\therefore$ $B^{-1}=A^3$

$B^{-1}=AB=A^3$이므로

$B=A^2$

$\therefore$ $BB^{-1}=A^2 \cdot A^3=E$

$\therefore$ $A^5=E$

한편, A, A^{-1}, B, B^{-1}은 단위행렬이 아니고,

$A^2=B$, $A^3=B^{-1}$,

$A^4=A^2A^2=A^2B=ABA=A^{-1}$

이므로 $A^n=E$를 만족하는 자연수 n의 최솟값은 5이다.

164. 정답 ⑤

(나)에서

$(E-B)^2=E^2-2B+B^2=E-B$

$\therefore$ $B^2=B$ ⋯ ㉠

$\therefore$ $B^3=B^2B=BB=B$

또, $BA^3=(BA)A^2=(AB)A^2=-BA^2$

$=-(BA)A=-(AB)A=BA=AB$

$=-B$

$\therefore$ $B^3+2BA^3=B-2B=-B$

165. 정답 ⑤

ㄱ. B^{-1}가 존재하면

$B^{-1}\cdot B^2=B^{-1}\cdot B$에서 $B=E$(참)

ㄴ.$(E-A)^5=E^5-5A+10A^2-10A^3+5A^4-A^5$

$=E-5A+10E-10A+5E-A$

$=16(E-A)=2^4(E-A)$(참)

ㄷ. $(E-ABA)^2=E-2ABA+ABAABA$

$=E-2ABA+ABBA(\because A^2=E)$

$=E-2ABA+ABA(\because B^2=B)$

$=E-ABA$(참)

166. 정답 ④

$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\therefore$ $a=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} \Leftarrow$ 가, 나의 상반기 제조원가

$b=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \Leftarrow$ 가, 나의 하반기 제조원가

$c=a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} \Leftarrow$ 가, 나의 상반기 판매가격

$d=a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \Leftarrow$ 가, 나의 하반기 판매가격

ㄱ. $a+b$는 가, 나의 지난해 1년 동안에 판매된 제품의 제조원가 (거짓)

ㄴ. $c+d$는 가, 나의 지난해 1년 동안에 판매된 제품의 판매가격 (참)

ㄷ. $d-b$는 가, 나의 지난해 하반기에 판매된 제품의 판매 이익금의 총액 (참)

167. 정답 18

$A^2+A^3=-3A-3E$이므로

$A^4+A^5=A^2(A^2+A^3)$

$=A^2(-3A-3E)$

$=-3A^3-3A^2$

$=-3(A^2+A^3)$

$=-3(-3A-3E)$

$=9A+9E$

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$로 놓으면 $a+b+c+d=0$이므로

행렬$9A+9E$의 모든 성분의 합은

$9(a+b+c+d)+9(1+0+0+1)$

$=9\cdot 0+9\cdot 2$

$=18$

168. 정답 ③

$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$이므로 $B^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$이다.

$(BA)^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$이므로 $BABA=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

이 등식의 왼쪽에 B^{-1}을 곱하면 $B^{-1}BABA=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$ABA=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore\ (AB)^2=(ABA)B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

169. 정답 ②

ㄱ. $(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$

$\neq A^2+2AB+B^2$

$(\because AB\neq BA)$ (거짓)

ㄴ. $A^2+A-2E=O$

$A(A+E)=2E$

$A\left\{\frac{1}{2}(A+E)\right\}=E$

$\therefore A^{-1}=\frac{1}{2}(A+E)$ (참)

ㄷ. $A\neq O,\ A^2=A$이면 $A=E$

(반례) $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이면 $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^2=A$이지만 $A\neq E$이다. (거짓)

170. 정답 ③

ㄱ. $AB=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$에서

$ab-0=ab=a^2>0\,(\because a=b,\ a\neq 0)$

따라서, 행렬 AB의 역행렬이 존재하므로 행렬 A의 역행렬 A^{-1}도 존재한다. ∴참

ㄴ. $AB=aE\Rightarrow B=aA^{-1}$

$BA=(aA^{-1})A=aE$

$\therefore AB=BA$ ∴ 참

ㄷ. $B=A^{-1}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ -a & b \end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix} a & 0 \\ -a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ -a+b & b \end{pmatrix}$

$AB\neq BA$ ∴ 거짓

171. 정답 ③

ㄱ. $A=\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$이면

$\log_4 2=\log_9 3=\frac{1}{2}$ 이므로

$A\in S$ (참)

ㄴ. (반례) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$이면 $A\in U$이고,

$2\cdot 5-3\cdot 4=-2\neq 0$이므로

행렬A의 역행렬이 존재한다. 그러나

$\log_2 5>2$, $\log_3 4<2$ 에서

$\log_2 5\neq\log_3 4$ 이므로 $A\not\in S$ (거짓)

ㄷ. $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in S$이면

$\log_a d=\log_b c$ 이므로 $d=a^{\log_b c}$

$ad-bc=a\cdot a^{\log_b c}-bc$

$=a^{1+\log_b c}-bc$

$=a^{\log_b bc}-bc$

$=(bc)^{\log_b a}-bc$

$\neq 0$ ($\because$ $\log_b a\neq 1$)

이므로 행렬A는 역행렬을 갖는다. (참)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

172. 정답 ⑤

ㄱ. (반례) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$이라 하면

$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A-B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$이므로

$(A+B)^2=(A-B)^2=2E$

그러나 $AB=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\neq O$ (거짓)

ㄴ. $A^2=E,\ B^2=B$이면

$(ABA)^2=(ABA)(ABA)=ABA^2BA$

$=ABEBA=AB^2A=ABA$ (참)

ㄷ. $A(A+E)=E$ 이면 $A^2+A=E$

양변의 오른쪽에 B를 곱하면

$A^2B+AB=B$

$AB=-E$ 이므로 $-A-E=B$

따라서

$B^2=(-A-E)^2=A^2+2A+E$

$=(A^2+A)+(A+E)=E+A+E$

$=A+2E$ (참)

173. 정답 25

$A^2=\begin{pmatrix}1&1\\0&p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1+p\\0&p^2\end{pmatrix}$, $5A=\begin{pmatrix}5&5\\0&5p\end{pmatrix}$

$D(A^2)=p^2$, $D(5A)=25p$

$\therefore p^2=25p$ $\therefore p=0,\ 25$ $\therefore p$의 합 25

174. 정답 ③

$A^n=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}, B^n=\begin{pmatrix}1&0\\n&1\end{pmatrix}$이므로

$A^n\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n+1\\1\end{pmatrix}, B^n\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\n+1\end{pmatrix}$

$\therefore\ A=\left\{\begin{pmatrix}n+1\\1\end{pmatrix}\middle| n\text{은 자연수}\right\}$,

$B=\left\{\begin{pmatrix}1\\n+1\end{pmatrix}\middle| n\text{은 자연수}\right\}$

따라서 자연수 n, m에 대하여

ㄱ. $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n+1\\1\end{pmatrix}\in S$이면

$\begin{pmatrix}b\\a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\n+1\end{pmatrix}\in T$ (참)

ㄴ. $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n+1\\1\end{pmatrix}\in S$, $\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m+1\\1\end{pmatrix}\in S$이면

$b+d\neq 1$이므로 $\begin{pmatrix}a+c\\b+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n+m+1\\2\end{pmatrix}\notin S$ (거짓)

ㄷ. $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n+1\\1\end{pmatrix}\in S$, $\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\m+1\end{pmatrix}\in T$이면

$\begin{pmatrix}a&p\\b&q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n+1&1\\1&m+1\end{pmatrix}$이다.

이 때, $(n+1)(m+1)-1\neq 0$이므로 역행렬을 갖는다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다

175.[정답] ⑤

[해설]

집합 T의 원소 $P=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$와 집합 S의 원소 $A=(a\ b)$에 대하여

ㄱ. $PA=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}(a\ b)$

$=\begin{pmatrix}pa&pb\\qa&qb\end{pmatrix}$

이므로 $(pa)(qb)-(pb)(qa)=0$

이다. 즉 PA는 역행렬을 갖지 않는다. (참)

ㄴ. 집합 S의 원소 $B=(c\ d)$에 대하여

$PB=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}(c\ d)$

$=\begin{pmatrix}pc&pd\\qc&qd\end{pmatrix}$

이고 $PA=PB$이므로

$pa=pc,\ pb=pd$

$qa=qc,\ qb=qd\ \ (p\neq 0,\ q\neq 0)$

이다. 따라서

$a=c,\ b=d$

즉, $A=B$이다. (참)

ㄷ. $PA\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}pa&pb\\qa&qb\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}pa+pb\\qa+qb\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

이므로 $p(a+b)=1$, $q(a+b)=1$, $(a+b\neq 0)$

$p=\dfrac{1}{a+b}$, $q=\dfrac{1}{a+b}$

이다. 즉 T의 원소 $P=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{a+b}\\\dfrac{1}{a+b}\end{pmatrix}$이 존재한다. (참0

따라서 ㄱ,ㄴ,ㄷ 모두 참이다.

정답및 해설

1. 정답 ①

[출제의도] 등비수열의 일반항 구하기

[해설] 첫째 항을 a, 공비를 r이라 하면

$ar+ar^3=ar(1+r^2)=810$,

$ar^4+ar^6=ar^4(1+r^2)=30$이므로

두 식을 나누면

$\dfrac{ar^4(1+r^2)}{ar(1+r^2)}=\dfrac{30}{810}$, $r^3=\dfrac{1}{27}$, $r=\dfrac{1}{3}$

따라서 $a=3^7$

$a_{10}=3^7\left(\dfrac{1}{3}\right)^{10-1}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{1}{9}$

2. 정답②

[출제의도] 등비수열의 첫째항 구하기

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$a_1+a_2=\dfrac{5}{8}$에서, $a_1+a_1r=\dfrac{5}{8}$

$a_1a_2a_3=\dfrac{1}{8}$ 에서 $(a_1r)^3=\dfrac{1}{8}$

즉 $a_2=a_1r=\dfrac{1}{2}$

$\therefore a_1=\dfrac{5}{8}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$

3. 정답②

등비수열의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$a_1\cdot a_3\cdot a_8=a\cdot ar^2\cdot ar^7=a^3r^9=(ar^3)^3$

이므로 $(ar^3)^3=64=4^3$

$\therefore\ ar^3=4$

4. 정답 14

세 수 1, x, 5는 순서대로 등차수열을 이루므로

$2x=1+5=6$에서

$x=3$

세 수 1, y, 5는 순서대로 등비수열을 이루므로 $y^2=5$

$\therefore\ x^2+y^2=9+5=14$

5. 정답 51

6개의 수 a, b, c, d, e, f를 표와 같이 넣고, 등차중항을 이용하여 수를 구할 수 있다.

$\therefore\ a=5$, $b=6$, $c=8$, $d=10$, $e=9$, $f=13$

$\therefore\ a+b+c+d+e+f=51$

3	a	7
b	c	d
e	11	f

6. [출제의도] 등비수열의 일반항을 이해하여 식의 값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_1a_{10}=a^2r^9=9$에서

$a_1\times a_2\times\cdots\times a_{10}=a^{10}\times r^{45}=(a^2r^9)^5=9^5=3^{10}$

7. 정답 ②

세 변을 $a=b-d$, b, $c=b+d$로 놓으면 피타고라스의 정리에서

$(b+d)^2=(b-d)^2+b^2\Leftrightarrow b^2-4bd=0\Leftrightarrow b(b-4d)=0$

$\therefore\ b=4d\ (\because\ b>0)$

$a=4d-d=3d$, $c=4d+d=5d$

삼각형의 넓이$=\dfrac{1}{2}\times3d\times4d=6d^2$

8. 정답 ⑤

[출제의도] 등차수열의 일반항을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $a_1-a_2=a_3-a_4=-d$ 이므로

$T_4=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)=-2d$ (거짓)

ㄴ. $a_3-a_2=a_5-a_4=d$ 이므로

$T_5=a_1+(-a_2+a_3)+(-a_4+a_5)=a_1+2d=a_3$ (참)

ㄷ. $T_2=-d$, $T_4=-2d$, $T_6=-3d$, $\cdots$ 이므로

수열 $\{T_{2n}\}$은 공차가 $-d$인 등차수열이다. (참)

9. 정답 315

[출제의도] 등차수열의 합을 이용하여 선분의 길이의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

x좌표가 t인 점에서 선분의 길이를 $f(t)$라 하면

선분의 길이는 두 직선의 y의 값의 차이므로

$f(t)=a(t-1)-t=at-a-t=(a-1)t-a$

그러므로 주어진 14개의 선분의 길이는 등차수열을 이룬다.

따라서 구하는 선분의 길이의 합은

$\dfrac{14(3+42)}{2}=315$

[참고]

일차함수 $f(x)=ax+b$에서 x의 값들이 등차수열을 이루면 $f(x)$의 값들도 등차수열을 이룬다.

10. 정답 47

[출제의도] 등차중항을 이용하여 항의 값 구하기

$a_1+a_3=2a_2$, $a_4+a_6=2a_5$ 이므로 준식은 $a_2+a_5=17$ 이다.

$2a_1+5d=17$ 에서 공차 $d+3$

$\therefore\ a_8+a_9=2a_1+15d=2+15\times3=47$

11.정답 22

[출제의도] 등차수열 합의 최솟값 구하기

[해설] 수열 $\{a_n\}$에서 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=a+2d=40$, $a_8=a+7d=30$이고

$a=44$, $d=-2$이므로 $a_n=-2n+46$이다.

$\therefore\ a_{2n}=-4n+46$

$|a_2+a_4+\cdots+a_{2n}|=|-2n^2+44n|$

따라서 최소가 되는 자연수 n은 22이다.

12. 정답 ④

[출제의도] 등차수열의 항 구하기

$a_2=a_1+d=-1$

$a_1+2(a_1+2d)=0,\ 3a_1+4d=0$

$a_1=-4,\ d=3 \qquad \therefore a_{10}=23$

13. 정답⑤

첫째 수열은 $2a_1+d_1$, $2a_1+5d$, $2a_1+9d_1$, $\cdots$ 이므로 공차가 $d_2=4d_1$ 이고 둘째

수열은 $3a_1+3d_1$, $3a_1+12d_1$, $3a_1+21d_1$, $\cdots$ 이므로 공차가 $d_3=9d_1$ 이다.

$\therefore\ 9d_2=4d_3$

14. 정답200

첫째항을 a, 공차를 d 라 하면

$a_6+a_{11}+a_{15}+a_{20}=4a+48d=32$

$\therefore\ a=8-12d$

$$a_1+a_2+\cdots+a_{25}=\frac{25\{2(8-12d)+(25-1)d\}}{2}=200$$

15. 정답 ④

[출제의도] 등차수열의 공차 구하기

수열a_n의 첫째항을a

수열b_n의 첫째항을b라고 할 때,

$3a_n+5b_n=3a-6(n-1)+5b+15(n-1)$

$\qquad\qquad =3a+5b+9(n-1)$

$\therefore$ 수열$\{3a_n+5b_n\}$의 공차는 9

16. 정답 15

첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_1+a_3=a+(a+2d)=2a+2d=6 \qquad \cdots$ ㉠

$a_4-a_2=a+3d-(a+d)=2d=6 \qquad \cdots$ ㉡

㉡에서 $d=3$

이를 ㉠에 대입하면 $a=0$

$\therefore\ a_6=a+5d=0+5\times3=15$

17. 정답 80

$a_1=-10,\ a_7=-10+6d$

$S_7=\dfrac{7\{2\cdot(-10)+6d\}}{2}$, $a_7=S_7$ 에서 $d=4$

$$S_{10}=\frac{10\{2\cdot(-10)+9\cdot4\}}{2}=80$$

18. 정답 ④

[출제의도] 수열의 합을 이용하여 일반항 구하기

$a_n=S_n-S_{n-1}(n\geq2)$

$=2n^2+3n-\{2(n-1)^2+3(n-1)\}$

$=4n+1$

$a_1=S_1$이므로 $a_n=4n+1(n\geq1)$

19. 정답②

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$(a_1+a_2):(a_3+a_4)$

$=(a_1+a_1+d):(a_1+2d+a_1+3d)=1:2$ 에서

$2a_1+5d=4a_1+2d \qquad \therefore 2a_1=3d$

$\therefore a_1 : a_4=a_1:(a_1+3d)=a_1:3a_1=1:3$

20. 정답 ④

가위로 n번 자를 때 나뉘어진 리본의 최대 개수를 a_n이라 하면 $a_{n+1}=a_n+3$

따라서, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 4이고 공차가 3인 등차수열이므로 $a_{10}=4+(10-1)\times3=31$

21. 정답 ①

$$(\text{준식})=\frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_3}}{a_1-a_3}+\frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_5}}{a_3-a_5}+\cdots+\frac{\sqrt{a_{59}}-\sqrt{a_{61}}}{a_{59}-a_{61}}$$

$$=\frac{1}{10}(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_{61}})=\frac{1}{10}(\sqrt{400}-\sqrt{100})=1$$

22. 정답 240

[출제의도] 수열의 합 구하기

[해설] $\begin{cases} a+2d=-2 \\ a+8d=46 \end{cases}$ 이므로 $a=-18,\ d=8$이다.

$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{10}|$

$=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}-2(a_1+a_2+a_3)$

$=\dfrac{10\{(-18)\cdot 2+(10-1)8\}}{2}-2(-18-10-2)$

$=240$

23. [정답] 27

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=a+2d=2 \quad \cdots\cdots ㉠$

$a_6=a+5d \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠,㉡을 연립하여 풀면 $a=-8,\ d=5$

$\therefore\ a_8=27$

24. [출제의도] 등차수열의 성질을 이용하여 식의 값을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a, 공차를 d 라 하면

$a_2+a_4+a_6=3a+9d=30 \quad \therefore a+3d=10$

$\therefore a_1+a_7=2(a+3d)=20$

25. 정답 ③

[출제의도] 로그함수와 등차수열을 이해하고 이를 활용하여 공차를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

등차수열 p, q, r, s 의 공차를 d라 하면

$\beta=3\alpha$에서 $3^{2d}=3,\ d=\dfrac{1}{2}\ \ \therefore\ s-p=3d=\dfrac{3}{2}$

26. 정답 ⑤

[출제의도] 등차수열의 일반항을 이해하고 이를 활용할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$a_1=a$, 공차를 d라 하면

$a_1a_6=a^2+5ad=0,\ a_2a_5=4d^2=36\ \therefore\ d^2=9$

$\therefore\ a_3a_4=a^2+5ad+6d^2=54$

27. 정답 42

공차를 d 라 놓으면 $a_n=2+(n-1)d$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{10} a_n=\dfrac{10\{2\times 2+(10-1)d\}}{2}=200 \Leftrightarrow 4+9d=40\ \therefore$

$d=4$

$\therefore\ a_{11}=2+(11-1)\times 4=42$

28. 정답 196

$S_n=n^2-3n$에서

$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2-3n)-(n-1)^2+3(n-1)=2n-4(n\geq 2)$

$a_1=S_1=-2$이므로

$a_n=2n-4(n\geq 1)$

$\therefore a_{100}=196$

29. 정답19

[출제의도] 수열의 합에서 일반항 구하기

$S_n=2n^2+n+1$ 에서

$a_n=S_n-S_{n-1}(n\geq 2),\ a_1=S_1$이므로

$a_n=\begin{cases} 4n-1\ (n\geq 2) \\ \quad 4 \quad (n=1) \end{cases}$

$\therefore\ a_5=19$

30. 정답55

[출제의도] 등차수열의 합을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$\{a_n\},\ \{b_n\}$이 등차수열이므로

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10} a_k+\sum_{k=1}^{10} b_k$

$=\dfrac{10(a_1+a_{10})}{2}+\dfrac{10(b_1+b_{10})}{2}$

$=5\{(a_1+b_1)+(a_{10}+b_{10})\}=500$

$\therefore\ a_{10}+b_{10}=55$

31. 정답 ②

[출제의도] 등차수열의 합 구하기

[해설] 이 사실을 알게 된 날을 첫째 날로 하여 드므와브르가 깨어 있는 시간을 수열 $\{a_n\}$이라고 하면 a_n은

$a_1=10$(시간)이고 공차가 $-\dfrac{1}{4}$(시간)인 등차수열이다.

24시간 계속 수면하게 되는 날은 깨어 있는 시간이

0시간이므로 $a_n=10-\dfrac{1}{4}(n-1)=0\ \ \therefore n=41$

$\therefore$ 깨어있는 시간의 합은 $\dfrac{41(10+0)}{2}=205$(시간)이다.

32. 정답100

[출제의도] 등차수열의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

주어진 등차수열의 공차를 d라 하자.

$a_2+a_4=2a_3$이므로 주어진 식을 정리하면

$a_5-a_3=2d=4$이다.

$\therefore\ d=2$

따라서 $a_1=1,\ a_{10}=1+(10-1)\times 2=19$이므로

구하는 합은 $\dfrac{10(1+19)}{2}=100$이다.

33. 정답④

[출제의도] 등차수열의 성질을 이해하여 그 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$a_m + a_n = a_{m+n}$에서

$a+(m-1)d+a+(n-1)d = a+(m+n-1)d$

$a=d,\ a_n = an\ \therefore\ \sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{10} an = 55a$

34. 정답 10

[출제의도] 등차수열과 등비수열의 성질을 이해하여 각 수열의 항을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

수열 $\{a_n\}$의 공차를 d, 수열 $\{b_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_2 = b_2$이므로 $2+d=2r$ ……㉠

$a_4 = b_4$이므로 $2+3d=2^3$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $r^3-3r+2=0$

$(r-1)^2(r+2)=0$

$\therefore r=-2\,(\because\ r\neq 1),\ d=-6$

$\therefore a_5+b_5=(2+4d)+2r^4=-22+32=10$

35. 정답 ①

$\frac{1}{a_n}=b_n$이라 하면, $\{b_n\}$은 공차가 $\frac{1}{2}$인 등차수열이다.

$b_1=1$이므로 $b_n=1+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{n+1}{2}$이다.

따라서 $a_n=\frac{1}{b_n}=\frac{2}{n+1}$이므로 $a_{20}=\frac{2}{21}$

36. 정답 ④

등차수열의 합 공식에 의해 $\frac{(n+2)(1+3)}{2}=24$이므로 $n=14$

37. 정답 19

등차수열 a_n의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_3=a+2d=5,\ \ a_6-a_4=2d=4$

$\therefore\ a=1,\ d=2$

$\therefore\ a_{10}=a+9d=1+18=19$

38. 정답 ④

[출제의도] 등차수열의 합과 일반항의 관계 이해하기

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차를 $a_1\ (a_1\neq 0)$라 하면

$S_n=ka_n$ 에서

$\frac{n\{2a_1+(n-1)a_1\}}{2}=k\{a_1+(n-1)a_1\}$

$\frac{na_1(n+1)}{2}=kna_1$

양변을 na_1 으로 나누면 $k=\frac{n+1}{2}$

두 자리 자연수 k가 최댓값 99일 때, n은 최댓값 197을 갖는다.

$\therefore$ 197

39. 정답 ③

[출제의도] 등차수열의 합의 성질 이해하기

$\{\theta_n\}$이 등차수열이므로 A_n 도 등차수열이다.

$\sum_{k=1}^{n} A_k = \frac{n(A_1+A_n)}{2} = A$

$A_1+A_n=\frac{1}{5}A$ 이므로 $n=10$

40. 정답 12

[출제의도] 등차중항의 성질 이해하기

$a_n=an+b$라 하면,

$b_n=a_{3n-2}+2a_{3n-1}+a_{3n}$

$\quad =4a_{3n-1}=12an-4a+4b$

$A_n=\frac{an(n+1)}{2}+bn$

$B_n=\frac{12an(n+1)}{2}-(4a-4b)n$

$\lim_{n\to\infty}\frac{B_n}{A_n}=12$

41. 정답:②

[출제의도] a_n 과 S_n 사이의 관계를 알고 있는가를 묻는 문제이다.

$a_7=S_7-S_6=320$

42. 정답 64

등비수열의 첫항을 a, 공비를 r이라 하면, $a>0,\ r>0$이므로

$a_2a_4=ar\times ar^3=a^2r^4=16$이므로 $ar^2=4$ … (1)

$a_3a_5=ar^2ar^4=a^2r^6=64$이므로 $ar^3=8$ … (2)

(1), (2)를 연립하면 $a=1,\ r=2$

$\therefore\ a_7=ar^6=2^6=64$

43. 정답 ①

[출제의도] 이항계수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$(x+a)^{10}$의 전개식에서 $x,\ x^2,\ x^4$의 계수는

${}_{10}\mathrm{C}_1\,a^9,\ {}_{10}\mathrm{C}_2\,a^8,\ {}_{10}\mathrm{C}_1\,a^9$

즉, $10a^9,\ 45a^8,\ 210a^6$

이 순서로 등비수열을 이루므로

$(45a^8)^2=10a^9\cdot 210a^6$

$\therefore\ a=\frac{28}{27}$

44. 정답 108

[출제의도] 등비수열의 일반항을 이용하여 항의 값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$$\frac{a_6 a_{10}}{a_5} = \frac{ar^5 \times ar^9}{ar^4} = ar^{10} = a_{11} = 36$$

$$\therefore \frac{a_{11}}{a_7} = \frac{ar^{10}}{ar^6} = r^4 = \frac{36}{12} = 3$$

$$\therefore a_{15} = ar^{14} = ar^{10} \times r^4 = 36 \times 3 = 108$$

45. 정답 25

첫째항을 a, 공비를 r이라 하면

$a_1 = a$, $a_3 = ar^2$, $a_4 = ar^3$, $a_6 = ar^5$이고

$a_1 a_6 = 25a_3$이므로

$a^2 r^6 = 25ar^2$, $ar^3 = 25$ $\quad \therefore a_4 = 25$

46. 정답 32

$a_n = ar^{n-1}$이라 하면

$2a_n - a_{n+1} = 2ar^{n-1} - ar^n = ar^{n-1}(2-r)$

$= 8 \cdot (-2)^{n-1}$

에서 $r = -2$이다.

$a(2-r) = 8$에서 $a = 2$이므로 $a_5 = 2 \cdot (-2)^4 = 32$이다.

47. 정답⑤

공비를 r 라 하면 $a+b+c = a+ar+ar^2 = \frac{7}{2}$에서

$a(1+r+r^2) = \frac{7}{2} \cdots$ ㉠

또, $abc = a \cdot ar \cdot ar^2 = 1$에서 $a^3 r^3 = (ar)^3 = 1$이고

a, r 는 실수이므로 $ar = 1 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡ 에서

$\frac{1+r+r^2}{r} = \frac{7}{2}$, $2r^2 + 2r + 2 = 7r$, $2r^2 - 5r + 2 = 0$

$(r-2)(2r-1) = 0$ $\quad \therefore r = 2$ 또는 $r = \frac{1}{2}$

㉠에서 $a = \frac{1}{2}$ 또는 $a = 2$

따라서 세 수는 $2, 1, \frac{1}{2}$이다.

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 2^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{21}{4}$$

[다른 풀이] $b^2 = ac$ 이므로 (나)에서 $b^3 = 1$ $\quad \therefore b = 1$

$b = 1$ 이므로 $ac = 1$ 이고, (가)에서 $a + c = \frac{5}{2}$ 이므로

$ab + bc = \frac{5}{2}$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = \frac{21}{4}$$

48. 정답48

[출제의도] 등비수열의 일반항과 지수법칙을 활용하여 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_1 a_2 = 6$에서 $a^2 r = 6 \cdots$ ㉠

$a_3 a_4 = 12$에서 $a^2 r^5 = 12 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $r^4 = 2$

$\therefore a_7 a_8 = ar^6 \cdot ar^7 = a^2 r^{13} = a^2 r^5 \cdot (r^4)^2$

$= 12 \times 2^2 = 48$

49. 정답 32

[출제의도] 등비수열의 공비구하기

$c_n = (3p^{n-1}) \cdot (-3q^{n-1}) = -9(pq)^{n-1}$ 이므로

$\{c_n\}$은 첫째항이 -9이고 공비가 pq인 등비수열이다.

$c_5 = 4\sqrt{2}\, c_3$ 이므로 $-9(pq)^4 = 4\sqrt{2}\,(-9)(pq)^2$ 이다.

$(pq)^2 = 4\sqrt{2}$ $\quad \therefore (pq)^4 = (4\sqrt{2})^2 = 32$

50. 정답 ②

$a_n = a_1 \cdot 2^{n-1}$, $a_{n+1} = a_1 \cdot 2^n$

$3a_{n+1} - a_n = 3a_1 \cdot 2^n - a_1 \cdot 2^{n-1}$

$= 2^{n-1} \cdot a_1(6-1)$

$= 5a_1 \cdot 2^{n-1}$

$\therefore$ 공비는 2

51. 정답 ④

[출제의도] 등비수열의 일반항을 알고 있는가를 묻는 문제이다.

$c_n = a_n b_n$이라 하면 수열 $\{c_n\}$도 등비수열이다.

$c_n = ar^{n-1}$이라 하면

$ar^3 = 3 \cdots$ ㉠, $ar^6 = 6 \cdots$ ㉡

㉡÷㉠을 계산하면

$r^3 = 2$

$\therefore a_{16} b_{16} = c_{16} = ar^{15} = ar^3 (r^3)^4 = 48$

52. 정답②

[출제의도] 등비수열의 합을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

등비수열의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4$

$= a(1 + r + r^2 + r^3 + r^4) = \frac{31}{2}$

$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 = a \cdot ar \cdot ar^2 \cdot ar^3 \cdot ar^4 = a^5 r^{10} = 32$

$\therefore\ ar^2=2$

$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}$

$=\frac{1}{a}+\frac{1}{ar}+\frac{1}{ar^2}+\frac{1}{ar^3}+\frac{1}{ar^4}$

$=\frac{1}{ar^4}(1+r+r^2+r^3+r^4)$

$=\frac{a}{(ar^2)^2}(1+r+r^2+r^3+r^4)=\frac{31}{8}$

53. 정답①

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_9=\sum_{k=1}^{9}\{2^k+(-1)^k\}$

$=\frac{2(2^9-1)}{2-1}+(-1+1)$

$+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)-1=2^{10}-3$

54. 정답 ②

$S_n=\frac{3^n-1}{2}$,$S_n+p=\frac{3^n-1}{2}+p=\frac{3}{2}\cdot3^{n-1}+\frac{2p-1}{2}$

그런데 S_n+p가 등비수열이므로 $\frac{2p-1}{2}=0$

$\therefore\ p=\frac{1}{2}$

55. 정답①

[출제의도] 등차중항과 등비중항을 이용하여 계산하기

$\frac{a^2}{2}=\frac{2+b}{2}\qquad\Rightarrow\ a^2=2+b\ \cdots①$

$b^2=(a+2)\cdot1\ \Rightarrow\ b^2=a+2\ \cdots②$

①−②에서 $a+b=-1$

①+②에서 $a^2+b^2=4+a+b=3$

56. 정답 94

$S_n=n^2+n$

$a_n=S_n-S_{n-1}(n\geq2)$이므로

$a_n=n^2+n-\{(n-1)^2+(n-1)\}$

$=2n(n\geq2)$

$a_1=S_1=2$이므로 $a_n=2n\quad(n=1,\ 2,\ \ldots)$

$\therefore a_{47}=94$

57. 정답 98

$a_n=23\times\frac{1}{100}+23\times\left(\frac{1}{100}\right)^2+23\times\left(\frac{1}{100}\right)^3+\cdots\ +23\times\left(\frac{1}{100}\right)^n$

$=\frac{\frac{23}{100}\left(1-\left(\frac{1}{100}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{100}}=\frac{23}{99}(1-10^{-2n})$

$\therefore\ a=99,\ b=1,\ c=-2\ \ \therefore\ a+b+c=98$

58. 정답 15

$1,\ x,\ y,\ z$가 등차수열이므로

$1,\ x,\ y$에서 $2x=1+y\ \cdots$ ① ($\because$ 등차중항)

$x,\ y,\ z$에서 $2y=x+z\ \cdots$ ② ($\because$ 등차중항)

$6x+z=5y\ \cdots$ ③

①, ②, ③을 연립하면 $x=3,\ y=5, z=7$

$\therefore\ x+y+z=15$

59. 정답 24

$\frac{\sqrt{3}}{4}$이 등차중항이므로 $\frac{\sin\theta+\cos\theta}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

따라서 $\sin\theta\cdot\cos\theta=\frac{1}{8}$

(준식) $=3\left|\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\right|=3\times8=24$

60. 정답 17

[출제의도] 등차중항의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$20=1-a+2+2a$

$\therefore a=17$

61. 정답②

[출제의도] 순환소수와 등비중항을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$\left(\frac{a}{90}\right)^2=\frac{1}{9}\times\frac{9}{900}$

$a^2=9$

$\therefore a=3$

62. 정답 ⑤

[출제의도] 부분 합으로 표시된 수열의 일반항 구하기

$a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\geq2)$

$a_1=S_1=4$ 이므로

$a_n=(2\cdot3^n-2)-(2\cdot3^n-2)=4\cdot3^{n-1}$

ㄱ. $a_3=36$

ㄴ. $\{a_n\}$은 첫째항이 4, 공비가 3인 등비수열이다.

ㄷ. $\{\log_{10}a_n\}$은 첫째항이 $\{\log_{10}4\}$, 공차가 $\{\log_{10}3\}$인 등차수열이다.

63. 정답 256

$a_9 = S_9 - S_8 = (2^9-1)-(2^8-1) = 256$

64. 정답 ②

$a_2 = 6,\ a^5 = 162$에서

$a_2 = ar = 6 \quad \cdots ①$

$a_5 = ar^4 = 162 \cdots ②$

②÷① $r^3 = 27$이므로 $r=3,\ a=2$

$\therefore \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} 2 \cdot 3^{k-1} = \frac{2(3^n-1)}{3-1} = 3^n - 1$

$\therefore 3^n - 1 \geqq 1000$이므로 $n=7$이다.

65. 정답 192

[출제의도] 등차수열을 이용한 행렬의 성분 구하기

[해설] 행렬 A_n의 (1, 1)성분을 a_n이라고 하면

$a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_3 = 8,\ a_4 = 13,\ a_5 = 18,\ \cdots$

$a_n = 5n-7\ (n \geqq 2)$

$A_n = \begin{pmatrix} 5n-7 & 5n-3 \\ 5n-1 & 5n+3 \end{pmatrix} (n \geqq 2)$이므로

$A_{10} = \begin{pmatrix} 43 & 47 \\ 49 & 53 \end{pmatrix}$ $\quad \therefore$ 각 성분의 합은 192

66. 정답60

[출제의도] 등차수열의 일반항과 합을 이용하여 도형 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

5개의 부채꼴의 넓이를 작은 것부터 차례로

$a-2d,\ a-d,\ a,\ a+d,\ a+2d\ (d>0)$라 하면

5개의 부채꼴의 넓이의 합은 원의 넓이이므로

$5a = 15^2\pi \quad \therefore\ a = 45\pi$

또, 주어진 조건으로부터

$(a+2d) = 2(a-2d)$ 에서 $d = \frac{a}{6} = \frac{15\pi}{2}$

따라서 가장 큰 부채꼴의 넓이는

$a+2d = 45\pi + 2 \cdot \frac{15}{2}\pi = 60\pi \quad \therefore\ k = 60$

67.정답①

[출제의도] 등차수열의 성질 이해하기

[해설] $2a_{n+1} = a_{n+2} + a_n$이므로

$a_{n+2}x^2 + (a_{n+2}+a_n)x + a_n = 0$이다.

$(a_{n+2}x + a_n)(x+1) = 0 \quad \therefore\ b_n = -\frac{a_n}{a_{n+2}}$

수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$$\frac{b_n}{b_n+1} = \frac{-\frac{a_n}{a_{n+2}}}{\frac{-a_n+a_{n+2}}{a_{n+2}}} = \frac{-a_1-(n-1)d}{2d}$$

이므로 공차는 $-\frac{1}{2}$이다.

68. 정답 ③

ㄱ. $a_n = n$이면 $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

$T_n = \frac{n^2(n^2-1)}{S_n} = 2n(n-1) = 2n^2 - 2n$

$b_n = T_n - T_{n-1}$

$= 2n^2 - 2n - \{2(n-1)^2 + 2(n-1)\}$

$= 4n - 4$ $\quad \therefore$ 참

ㄴ. 수열 a_n의 첫째항을 a_1, 수열 b_n의 첫째항을 b_1라 하면

$S_n = \frac{n\{2a_1 + (n-1)d_1\}}{2}$,

$T_n = \frac{n\{2b_1 + (n-1)d_2\}}{2}$

$S_nT_n = n^2(n^2-1)$에서 n^4의 계수를 비교하면

$\frac{d_1}{2} \times \frac{d_2}{2} = 1 \quad \therefore\ d_1d_2 = 4$ $\quad \therefore$ 참

ㄷ. $a_n = 2n$이면 $a_1 = 2 \neq 0$이다.

$S_n = n(n+1)$이므로 $T_n = n(n-1) = n^2 - n$

$b_n = T_n - T_{n-1} = 2n-2$가 돼서 b_n이 존재한다.

즉, $a_n \neq n$이면서 $a_1 \neq 0$이고 주어진 조건을 만족하는 a_n이 존재한다. $\quad \therefore$ 거짓

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ 이다.

69. 정답 ④

[출제의도] 등차수열의 뜻을 알고 이를 활용하기

세근을 $a-d,\ a,\ a+d$ 라 하면 근과 계수와의 관계에 의해

$a = 3,\ k = 15$

70. 정답 ④

$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{10A + a_n}{10A \cdot a_n} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{10A}$

$\frac{1}{a_n} = b_n$ 이라 하면

$b_1 = \frac{1}{a_1} = \frac{1}{10A}$ 이고, $b_{n+1} = b_n + \frac{1}{10A}$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $\frac{1}{10A}$, 공차가 $\frac{1}{10A}$인 등차수열이다.

$\therefore\ b_n = \frac{1}{10A} + (n-1) \cdot \frac{1}{10A} = \frac{n}{10A}$

$\therefore\ a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{10A}{n}$

$\therefore\ a_8=\dfrac{5}{4}A$

71. 정답183

$a_4=b_2=9$, $a_7=b_4=15$, $a_{10}=b_6=21$, $a_{13}=b_8=27$,

$a_{16}=b_{10}=33\cdots$

이므로 수열 $\{c_n\}$ 은 첫째항이 9 , 공차가 6 인 등차수열이다.

$\therefore\ c_{30}=9+6\cdot 29=183$

72. 정답 8

[출제의도] 등차중항의 정의와 근과 계수와의 관계를 이용하여 상수 구하기

[해설] 등차수열의 공차를 d라 하면

삼차방정식의 세 근은 $a-d,\ a,\ a+d$이다.

근과 계수와의 관계를 이용하면

$(a-d)+a+(a+d)=-3$

$(a-d)a+a(a+d)+(a-d)(a+d)=-6$

$(a-d)a(a+d)=k$ 에서

$a=-1,\ 3a^2-d^2=-6$에서 $d=\pm 3,\ k=8$이다.

73. 정답 ①

[출제의도] 등비수열의 뜻을 알고 문제해결하기

(다)에서 $\log_6 abc=3$이므로 $abc=6^3$ …… ㉠이다.

(가)에서 $a,\ b,\ c$가 등비수열을 이루므로

$b^2=ac$ …… ㉡이다.

그러므로 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면, $b=6$ …… ㉢이다.

이 때, ㉢을 ㉡에 대입하여 풀면 $ac=6^2$이다.

그러므로 (나)로부터 $6-a=1,\ 4$이므로 $a=5,\ 2$이다.

한편, $ac=6^2$에서 a는 6^2의 약수이므로 $a=2$뿐이다.

그러므로 $a=2$를 $ac=6^2$에 대입하면 $b=6,\ c=18$이다.

따라서, $a+b+c=26$이다.

74. 정답 ②

[출제의도] 등차수열과 등비수열의 성질을 이용하여 일반항을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$b_1+b_3+b_5+\cdots+b_{15}+b_{17}$

$=\log_3 a+\log_3 ar^2+\log_3 ar^4+\cdots+\log_3 ar^{14}+\log_3 ar^{16}$

$=\log_3 a^9r^{72}=9\log_3 ar^8=36$

$\therefore\ ar^8=3^4\ \cdots$㉠

$b_2+b_4+b_6+\cdots+b_{16}+b_{18}$

$=\log_3 ar+\log_3 ar^3+\log_3 ar^5+\cdots+\log_3 ar^{15}+\log_3 ar^{17}$

$=\log_3 a^9r^{81}=9\log_3 ar^9=45$

$\therefore\ ar^9=3^5\ \cdots$㉡

㉠, ㉡에서 $r=3,\ a=\dfrac{1}{81}$이므로 $a_n=3^{n-5}$이다.

$\therefore\ a_{11}=3^{11-5}=3^6$

75. 정답 18

[출제의도] 등차수열의 뜻을 알고 문제해결하기

$\overline{\mathrm{AD}}=a-d,\ \overline{\mathrm{CD}}=a,\ \overline{\mathrm{AB}}=a+d$라 하면,

$\triangle\mathrm{ABD}\sim\triangle\mathrm{ACB}$이므로 $(a+d)^2=(a-d)(2a-d)$이다.

$a^2=5ad$에서 $a>0$이므로 $a=5d$이다.

이 때, $\overline{\mathrm{AC}}=9d,\ \overline{\mathrm{BC}}=6\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{AB}}=6d$이므로

피타고라스의 정리에 의하여 $81d^2=36d^2+180$에서

$d=2\ (\because\ d>0)$

따라서, $\overline{\mathrm{AC}}=18$

76. 정답 27

첫째항이 16이고 공비가 $2^{\frac{1}{10}}$인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n을 구하면

$a_n=16\times\left(2^{\frac{1}{10}}\right)^{n-1}$

$\log a_n$의 가수를 b_n이라 하고,

$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots,\ b_{k-1},\ b_k,\ b_{k+1}+1$

이 주어진 순서로 등차수열을 이루기 때문에

첫째항과 공차를 각각 구하면 다음과 같다.

$a_1=16,$

$\log 16=4\log 2=4\times 0.301=1.204$

$\therefore\ b_1=0.204$

$a_2=16\times 2^{\frac{1}{10}},$

$\log\left(16\times 2^{\frac{1}{10}}\right)=4\log 2+\dfrac{1}{10}\log 2=4\times 0.301+\dfrac{1}{10}\times 0.301=1.2341$

$\therefore\ b_2=0.2341$

공차 $d=b_2-b_1=0.2341-0.204=0.0301$

따라서 일반항

$b_k=b_1+(k-1)\times 0.0301=0.204+(k-1)\times 0.0301$

이 때 $b_k+0.0301=b_{k+1}+1$이므로

$b_k\ge 1$이 되는 최소의 자연수보다 1 작은 수 k를 구하면 된다.

$b_k=0.204+(k-1)\times 0.0301\ge 1$

$\therefore\ k\ge 27.\times\times\times\times$

따라서 $k=27$

77. 정답 ③

[출제의도] 등비수열을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$\overline{\mathrm{CE}}=a$, $\overline{\mathrm{EB}}=ar$, $\overline{\mathrm{BD}}=ar^2$ 이라 하자.

(삼각형EBC의 넓이)$=\frac{1}{5}$(사각형 ABCD의 넓이)

$\therefore\ a=4\ \cdots$ ①

$\angle\mathrm{ABD}=\angle\mathrm{A'BD},\ \angle\mathrm{ABD}=\angle\mathrm{BDC}$

$\triangle\mathrm{DEB}$ 는 이등변 삼각형이므로 $\overline{\mathrm{DE}}=\overline{\mathrm{EB}}$

$\therefore\ r=\frac{3}{2}\ \cdots$ ②

①, ② 에 의하여

$\overline{\mathrm{CE}},\ \overline{\mathrm{EB}},\ \overline{\mathrm{BD}}$ 의 길이는 각각 4, 6, 9.

$\angle\mathrm{EDB}=\theta$ 이라 할 때, $\triangle\mathrm{DEB}$ 에서

제이코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{36+81-36}{2\times6\times9}=\frac{3}{4}$.

$\triangle\mathrm{ABD}$ 에서 제이코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AD}}^2=10^2+9^2-2\times9\times10\times\cos\theta$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{46}$

78. 정답 ⑤

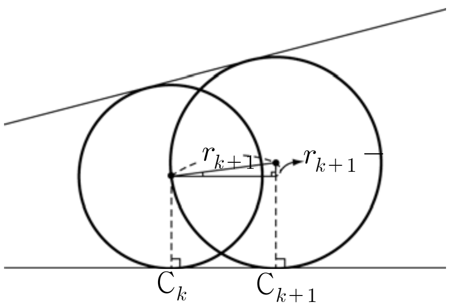
[출제의도] 등차수열과 등비수열의 일반항 추론하기

(가) 등차 (나) $\frac{1}{2}(n+1)^2$ (다) $\frac{n(n+1)}{2}$

79. 정답 512

[출제의도] 등비수열의 항의 값 구하기

[해설] 원 C_k의 반지름을 r_k, 넓이를 S_k, 원 C_{k+1}의 반지름을 r_{k+1}, 넓이를 S_{k+1}이라 하면,



$$\frac{r_{k+1}-r_k}{r_{k+1}}=p(\text{상수}),\ r_{k+1}=\frac{1}{1-p}r_k$$

수열 $\{r_k\}$가 등비수열이므로 수열 $\{S_k\}$도 등비수열이고,

$\{S_k\}$의 공비를 a라 하면

$S_1=1,\ S_5=a^4=4$이므로 $a^2=2$

$\therefore S_{19}=a^{18}=2^9=512$

80. 정답 ④

[출제의도] 등비수열의 합 구하기

$\angle\mathrm{A}_{10}\mathrm{OB}=\frac{\pi}{2}-\angle\mathrm{A}_{10}\mathrm{OA}$

$\angle\mathrm{A}_{10}\mathrm{OA}$

$=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\times\frac{1}{3}+\frac{\pi}{6}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+\frac{\pi}{6}\times\left(\frac{1}{3}\right)^9$

$=\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{3^{10}}\right)$

$\therefore\angle\mathrm{A}_{10}\mathrm{OB}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{3^{10}}\right)=\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1}{3^{10}}\right)$

81. 정답 ④

[출제의도] 등비수열의 일반항을 이용하여 도형 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

도형 S_1의 넓이는 12개의 합동인 작은 정삼각형의 넓이의 합과 같고, 작은 정삼각형의 한 변의 길이는 2이므로 S_1의 넓이는

$12\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot2^2=12\sqrt{3}$

또한, S_n과 S_{n+1}은 닮은 도형이고 닮음비가 2 1이므로 넓이의 비는 4 1이다.

따라서 S_{10}의 넓이는

$12\sqrt{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^9=3\sqrt{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^8=\frac{3\sqrt{3}}{2^{16}}$이다.

82. 정답 27

[출제의도] 등비수열을 이용한 수학외적문제 해결하기

수열 $a,\ b,\ c$의 공비를 r이라고 하면

$b=ar,\ c=ar^2$

그러므로 $3^a,\ 9^b,\ 27^c$은 $3^a,\ 9^{ar},\ 27^{ar^2}$이고

두 수열의 공비가 같으므로

$\frac{9^{ar}}{3^a}=\frac{27^{ar^2}}{9^{ar}}=r$

즉, $3^{2ar-a}=3^{3ar^2-2ar}=r\quad\cdots$ ㉠

$2ar-a=3ar^2-2ar$

$a(3r^2-4r+1)=0$

$\therefore\ r=\frac{1}{3}\quad(\because a>0,\ r\neq1)\ \cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $a=3$

$t_A=\frac{3^3}{3}=9,\ t_B=\frac{9^1}{1}=9,\ t_C=\frac{27^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}=9$

$\therefore t_A+t_B+t_C=27$

83. 정답 ③

[출제의도] 등비수열과 수열의 극한의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $S_1=a_1$이므로 $pa_1+1=a_1$

$\therefore\ a_1=\frac{1}{1-p}$ (참)

ㄴ. $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(pa_n+1)-(pa_{n-1}+1)=pa_n-pa_{n-1}$

$\therefore\ a_n=\dfrac{p}{p-1}a_{n-1}\ (p\neq 1)$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다. (참)

ㄷ. $p=\dfrac{2}{3}$ 이면 $\dfrac{p}{p-1}=-2<-1$이므로

등비수열 $\{a_n\}$은 발산한다. (거짓)

84. 정답 ①

[출제의도] 등차수열의 합을 이용하여 공차 추론하기

[해설]

(가) $\boxed{8+(8n-2)d}$

(나) $\boxed{(1-8k)d}$

(다) $\boxed{4}$

85. 정답 13

[출제의도] 등차수열의 합을 구하는 방법을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

(가)와 (나)에서

$a_1+a_2+a_3+a_4=26,\ a_{n-3}+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n=134$

이므로

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_{n-3}+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n=160$

$4(a_1+a_n)=160 \quad \therefore\ a_1+a_n=40$

한편, $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=260$ 이므로 $\dfrac{40n}{2}=260$

$\therefore\ n=13$

86. 정답375

선미가 매일 푸는 문제수는 공차가 d 인 등차수열이므로

$x=15+(15+d)+(15+2d)+\cdots+(15+8d)+24$

$=30+(30+d)+(30+2d)+\cdots+(30+6d)+39$

즉, $\dfrac{9(15+15+8d)}{2}+24=\dfrac{7(30+30+6d)}{2}+39$

$9(15+4d)+24=7(30+3d)+39$ 에서

$15d=90 \quad \therefore d=6$

따라서 수학 책의 문제 수는

$x=9(15+4d)+24=9(15+4\cdot 6)+24=375$

87.정답①

점 A 의 좌표를 $(-1,0)$이라 놓고 풀어도 일반성을 잃지 않는다. 직선 AB 의 기울기를 m 이라 하면, 점 B 의 좌표는 $(0,\ m)$, 점 C 의 좌표는 $(m^2,\ 0)$, 점 D 의 좌표는 $(0,\ -m^3)$, 점 E 의 좌표는 $(-m^4,0)$이다.

그런데 $\overline{AO}$, $\overline{OC}$, $\overline{EA}$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\overline{OC}=\overline{AO}+\overline{EA}$ 즉, $2m^2=1+(m^4-1)$

따라서 $m^4=2m^2$에서 $m>0$이므로 $m=\sqrt{2}$

88.정답 ④

[출제의도] 수열의 합을 이용하여 문제를 해결할 수 있다.

S중 가장 작은 수는 $1+3+...+19=100$

S중 가장 큰 수는 $81+83+...+99=900$

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 100 , 마지막항이 900 이고, 공차가 2 인 등차수열을 이룬다. 따라서 구하는 값은

$a_{100}=100+99\times 2=298$

89.정답 ④

[출제의도] 평면도형에서 등차수열을 발견할 수 있다.

$\overline{BC}=\overline{DE}$, $\overline{CM}=\overline{EN}$,

$\angle BCM=\angle DEN=30°$이므로

$\triangle BCM\equiv\triangle DEN \quad \therefore \quad \angle CBM=\angle EDN$

$\angle BND=\angle BNC+\angle CND$

$=(\angle BCN-\angle CBM)+(\angle CED+\angle EDN)$

$=(90°-\angle CBM)+(30°+\angle EDN)=120°$

따라서 $\angle BCD=240°$를 중심각으로 하는 원을 생각하면 $\angle BND=120°$는 원주각이 되므로 점 N은 그 원 위에 있다.

즉 점 N은 점 C를 중심으로 하고 $\overline{CB}=\overline{CD}$를 반지름으로 하는 원 위에 있다.

$\therefore \overline{CB}=\overline{CN}=\overline{CD}$

$\therefore \angle BNC=45°,\ \angle CND=75°$

$\angle DNE=105°$

즉, $\angle BNC$, $\angle CND$, $\angle DNE$ 는 공차가 $30°$인 등차수열을 이룬다.

90. 정답 ⑤

공차가 3인 등차수열의 일반항은

$a_n=3n+b$ (단, b는 상수)

ㄱ. $3a_n=9n+3b$이므로 공차가 9인 등차수열 $\therefore$참

ㄴ. $a_{2n-1}=3(2n-1)+b=6n-3+b$이므로 공차가 6인 등차수열 $\therefore$참

ㄷ. $2a_{2n}-a_{2n-1}=2(3\cdot 2n+b)-\{3(2n-1)+b\}$

$=6n+3+b$이므로 공차가 6인 등차수열 $\therefore$참

91. 정답 ⑤

[해설] 접선 l과 선분 AB가 이루는 예각의 크기가 $18°$이므로 $\angle AOC=36°$이다.

$\angle OAC=\alpha$, $\angle ACO=\beta$라 하면, $\alpha+\beta=144°$이고, 가장 긴 변이 선분 OA이므로 가장 큰 각은 β이다.

(ⅰ) $36°$, α, β의 순서로 등차수열을 이루는 경우

$2\alpha=\beta+36°=(144°-\alpha)+36°=180°-\alpha$

$\therefore\ \alpha=60°,\ \beta=84°$

(ii) α, $36°$, β의 순서로 등차수열을 이루는 경우
$\alpha+\beta=72°$가 되므로 모순이다.
(i), (ii)에 의해 $\beta=84°$

92. ①
가장 안쪽의 정육각형 모양의 토지의 넓이를 a로 놓으면
인접한 흰
부분의 넓이는 $3a$이다.
또 인접한 어두운 부분의 넓이는 $5a$이고, 이에 인접한 흰
부분의 넓이는
$7a$이다.
그러므로 어두운 부분의 넓이의 합은

$$a+5a+9a+\cdots+41a=\frac{11(a+41a)}{2}=231a$$

흰 부분의 넓이의 합은

$$3a+7a+11a+\cdots+39a=\frac{10(3a+39a)}{2}=210a$$

그런데 어두운 부분의 넓이의 합이 231이므로 구하는 부분의 넓이의 합은 210이다.

93. 정답①
$2+3\cdot2+\ldots+n(n-1)$

$$=\sum_{k=2}^{n}k(k-1)=\sum_{k=1}^{n}k(k-1)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=\boxed{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}-\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\frac{2d\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}\right\}}{n(n+1)}$$

$$=\boxed{\frac{2d}{3}}(n-1)$$

$$\frac{a_1+2a_2+\ldots+na_n}{1+2+\ldots+(n+1)}$$

$$=\frac{a_1+2a_2+\ldots+na_n}{1+2+\ldots+n}\cdot\frac{1+2+\ldots+n}{1+2+\ldots+(n+1)}$$

$$=\boxed{\frac{n}{n+2}}b_n$$

94. 정답 ④
$\overline{PQ}=x$, $\overline{QR}=y$, $\overline{RC}=z$라 하면
x,y,z가 이 순서대로 등차수열을 이루므로
$\boxed{2y=x+z}$ ……㉠
$\overline{PQ}//\overline{AC}$이고 $\overline{AB}//\overline{RQ}$이므로
$x+z=40$ ……㉡
$x+z=40$ --------㉡
$\triangle ABC \backsim \triangle RQC$이므로
$\boxed{2y=3z}$ ……㉢
㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 x,y,z를 구할수있다.
따라서 사각형 APQR의 둘레의 길이는 $\boxed{\frac{280}{3}}$ 이다.

95.정답 ②
[출제의도] 등비수열을 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있다.
$80\times0.96^n<64\times0.99^n$
양변에 상용로그를 취하면
$\log80+n\{\log9.6-1\}<\log64+n\{\log9.9-1\}$

$$n>\frac{1-3\log2}{\log9.9-\log9.6}=\frac{1-0.9030}{0.9956-0.9823}$$

$$=\frac{0.0970}{0.0133}\fallingdotseq7.29$$

따라서 8년 후 즉, 2011년에 처음으로 작아진다.

96. 정답④
ㄱ. 수열 $\{a_n\}$이 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열이면
$a_n=ar^{n-1}$이고
$b_n=a_{n+1}-a_n=ar^n-ar^{n-1}=a(r-1)r^{n-1}$이다.
따라서, $\{b_n\}$은 첫째항이 $a(r-1)$, 공비가 r인
등비수열이다.
∴ 참
ㄴ. (반례) $a_n=2^{n-1}+1$이면 수열 $\{b_n\}$은 등비수열이지만
수열 $\{a_n\}$은 등비수열이 아니다. ∴ 거짓
ㄷ. $\{a_n\}$이 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열이면
$a_n=ar^{n-1}$이고, $\{b_n\}$은 첫째항이 $a(r-1)$, 공비가
r인 등비수열이므로 수열 $\{a_n\cdot b_n\}$은 첫째항이 $a^2(r-1)$,
공비가 r^2인 등비수열이다.
∴ 참

97. 정답 ③

$$A=\frac{a(r^n-1)}{r-1},\ B=\frac{ar^n(r^n-1)}{r-1},\ C=\frac{ar^{2n}(r^n-1)}{r-1}$$

이므로 A, B, C는 공비가 $\boxed{(가)\ r^n}$인 등비수열이고
A, B, C를 $B^2=AC$에 대입하여 정리하면

$$(q-p)^2=p(S_{3n}-q)\quad\therefore S_{3n}=\boxed{(나)\ \frac{p^2-pq+q^2}{p}}$$

98. 정답 28

[출제의도] 여러 가지 수열의 규칙을 추측할 수 있다.

수열의 각 항을 차례로 구해 보면

$$1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ \frac{9}{2}\,,\ 6\,,\ 8\,,\ 10\,,\ \cdots$$

여기서 $a_{2n-1}(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$을 구해보면

$1,\quad 3,\quad 6,\quad 10,\ \ldots$

$$a_{2n-1}=1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k \quad (n\geq 2)$$

$$=1+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\therefore\ a_{13}=a_{2\cdot 7-1}=\frac{7\cdot 8}{2}=28$$

99. 정답 ④

$\overline{EC}=a$ 라고 하면 $\triangle GEC$의 넓이$=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$,

$\triangle AGH$의 넓이$=\dfrac{1}{2}a(4-a)\sin 60°=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a(4-a)$, $\triangle DEF$의 넓이$=\dfrac{\sqrt{3}}{4}r^2$

$\dfrac{\sqrt{3}}{4}a(4-a)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2r$ ⋯㉠, $\dfrac{\sqrt{3}}{4}r^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}ar(4-a)$ ⋯㉡

㉠에서 $4-a=ar$, ㉡에서 $r=a(4-a)$

따라서 $r=a^2r$ 이다. $\therefore\ a=1\,,\ r=3$

100. 정답⑤

A, B, C가 자연수이면서

$[\log A]+[\log B]+[\log C]=0$을 만족하는

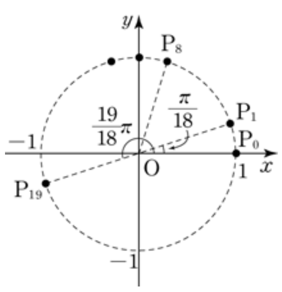
A, B, C는 모두 한자리 자연수

$2\log B=\log A+\log C$에서 $B^2=AC$

등비수열을 이루는 한자리 자연수들은 1, 2, 4와 1, 3, 9과 2, 4, 8과 4, 6, 9이다. 그 중 합이 최대인 것은 4, 6, 9 이므로 이들의 합은 19

101. 정답②

점 $P_n(a_n\,,\,b_n)$을 좌표평면에 나타내면



$a_n=b_n$ 을 만족하는 점 P_n 은 $y=x$ 의 그래프 위의 점이다.

이 때, $y=x$ 의 그래프는 x 축의 양의 방향과 이루는 각이 $\dfrac{\pi}{4}$ 이다.

그러나 $\dfrac{\pi}{18}t=\dfrac{\pi}{4}$ 를 만족하는 자연수 t 가 존재하지 않으므로

$a_n=b_n$ 을 만족하는 n 은 존재하지 않는다. 그리고

$c_1=a_{18}=-1$,

$c_2=a_{36}=1$

따라서 수열 $\{c_k\}$는 $-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots$이다.

즉, 공비가 -1인 등비수열이다.

102. 정답 ⑤

[출제의도] 상용로그의 지표의 뜻과 주어진 수열의 항을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\log 2^{201}=201\log 2=201\cdot 0.3010=60.5010$ 이므로

2^{201}은 61자리의 자연수이다.

따라서 $1\leq k\leq 60$ 인 모든 자연수 k에 대하여 2^n이 k자리의 수이고, 2^{n+1}이 $k+1$자리의 수인 자연수 n이 반드시 하나씩 대응한다.

따라서 $a_{n+1}>a_n$을 만족하는 자연수 n의 개수는 60이므로

$b_n=1$을 만족하는 자연수 n의 개수는 60이고, 나머지 n에 대해서는 $b_n=0$이다.

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{200}b_k=60$$

103. 정답 74

$1=1_{(2)}$, $2=10_{(2)}$, $3=11_{(2)}$, $4=100_{(2)}$,

$5=101_{(2)}$, ⋯, $20=10100_{(2)}$ 이므로

$a_1=1$, $a_2=a_3=2$, $a_4=a_5=a_6=a_7=3$,

$a_8=a_9=\cdots=a_{15}=4\quad a_{16}=a_{17}=\cdots=a_{20}=5$

따라서, 첫째항부터 제 20 항까지의 합은

$1+2\times 2+3\times 4+4\times 8+5\times 5=1+4+12+32+25=74$

104. 정답 ③

[출제의도] 등차중항과 등비중항을 이용하여 이차함수의 그래프를 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $a,\ b,\ c$가 이 순서로 등차수열을 이루므로

$2b=a+c$

$\therefore\ f(1)=a+2b+c=2b+2b=4b$ (참)

ㄴ. 이차방정식 $ax^2+2bx+c=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(2b)^2-4ac=(a+c)^2-4ac=(a-c)^2>0\ (\because\ a\neq c)$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다. (참)

ㄷ. $a,\ b,\ c$가 이 순서로 등비수열을 이루므로

$b^2=ac$에서 $\dfrac{D}{4}=b^2-ac=0$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축에 접한다. (거짓)

105. 정답 301

[출제의도] 수열의 합과 일반항과의 관계를 이용하여 부분분수의 합 구하기

[해설] $a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1(n\geqq 2)$

$a_1=S_1=1$이므로 $a_n=2n-1$ $(n\geqq 1)$

$$\frac{1}{a_na_{n-1}}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{100}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{199}-\frac{1}{201}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{201}\right)=\frac{100}{201}$$

$\therefore$ $m+n=301$

106. 정답④

$$0.6\left\{a\times 16b+\frac{3}{2}a\times 8b+\left(\frac{3}{2}\right)^2a\times 4b\right.$$

$$\left.+\left(\frac{3}{2}\right)^3a\times 2b+\left(\frac{3}{2}\right)^4a\times b\right\}$$

$$=0.6\times\frac{16ab\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^5\right\}}{1-\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{192}{5}ab\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^5\right\}$$

107. 정답 ①

[출제의도] 등비수열의 일반항과 지수법칙을 활용하여 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

케이크의 제 1 단의 부피를 a 라 하고 각 단의 부피가 r 배씩 감소한다고 하면

$p=ar$, $q=ar^3$ 이므로 $\frac{q}{p}=r^2$ $\therefore$ $r=\sqrt{\frac{q}{p}}$

따라서 케이크의 제 8 단의 부피는

$$ar^7=ar^3r^4=q\left(\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^4=\frac{q^3}{p^2}$$

108. 정답 ⑤

[출제의도] 등비수열의 합을 이용하여 도형 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$a_1=1+\frac{1}{3}\times 2=1+\frac{2}{3},$$

$$a_2=a_1+\left(\frac{1}{3}\right)^2\times 2^2=1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2,$$

$$a_3=a_2+\left(\frac{1}{3}\right)^3\times 2^3=1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3,$$

$\cdots$

$$\therefore\ a_{20}=1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^{20}$$

$$=\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{21}}{1-\frac{2}{3}}=3\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{21}\right\}$$

109. 정답 729

[해설] 빨간색이 칠해진 부분에 쓰여진 수 $(4n-3)$꼴

파란색이 칠해진 부분에 쓰여진 수 (3^m)꼴

빨간색과 파란색이 겹쳐 칠해지는 부분에 쓰여진 수 (9^k)꼴이므로 9, 81, 729(단, k, m, n은 자연수)

$\therefore$ 가장 큰 수는 729

110. 정답 ④

첫째항부터 제19항까지는 공비가 1.08인 등비수열이고, 제20항부터 제28항까지의

각 항은 $\frac{2}{3}\times 1.08^{18}a$

$$a+1.08a+1.08^2a+...+1.08^{18}a+9\times\left(\frac{2}{3}\times 1.08^{18}a\right)$$

$$=\frac{a(1.08^{19}-1)}{1.08-1}+6\times 1.08^{18}a$$

$1.08^{18}=4$로 계산하면

$$\frac{3.32}{0.08}a+24a=\frac{131}{2}a$$

111. 정답 ①

[출제의도] 수열의 규칙성을 파악하여 위치 나타내기

[해설] 3과 4의 최소공배수인 12마다 6개의 항이 주기적으로 남게 되고, $2007=6\times 335-3$이므로

$a_{6n-3}=12n-7$

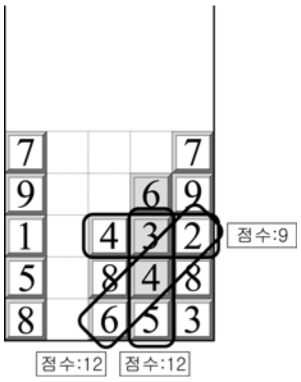
$a_{2007}=12\times 335-7=4013$이고

4013은 402행 3열의 수이다.

$\therefore$ $402+3=405$

112. 정답 33

[출제의도] 등차수열의 성질을 이용하여 수학외적 문제해결하기



∴ (득점의 최댓값) $=12+12+9=33$

113. 정답100

[출제의도] 등비수열의 성질을 이용하여 수학외적 문제해결하기

$a+b=100$ ⋯㉠

흘려 내린 물의 양을 M이라 할 때,

B, C, D 물의 양은 차례대로

$M\left(\frac{a}{100}\right)^2\left(\frac{b}{100}\right)$, $M\left(\frac{a}{100}\right)\left(\frac{b}{100}\right)^2$,

$M\left(\frac{a}{100}\right)\left(\frac{b}{100}\right)$

B, C, D가 등비수열을 이루므로

$\left\{\left(\frac{a}{100}\right)\left(\frac{b}{100}\right)^2\right\}^2=\left\{\left(\frac{a}{100}\right)^2\left(\frac{b}{100}\right)\right\}\left\{\left(\frac{a}{100}\right)\left(\frac{b}{100}\right)\right\}$

$b^2=100a$ ⋯㉡

㉠, ㉡에 의해

$b=50\sqrt{5}-50$

따라서 $p=50$, $q=50$

∴ $p+q=100$

114. 정답19

[출제의도] 등차수열의 성질을 이용하여 수학외적 문제해결하기

반지름의 길이가 a, c, b순으로 등차수열을 이루고,

$a:b=3:1$이므로 $a=3k$, $b=k$, $c=2k$

높이는 $4k$

높이가 $2k$일 때의 커피잔 A의 부피는

$V_A=\frac{1}{3}\times\pi(2k)^2\times 4k-\frac{1}{3}\times\pi k^2\times 2k=\frac{14}{3}\pi k^3$

커피잔 B의 부피는 $V_B=\pi\times(2k)^2\times 2k=8\pi k^3$

따라서 $\frac{V_A}{V_B}=\frac{7}{12}=\frac{q}{p}$

∴ $p+q=19$

115. 정답 ④

[출제의도] 등비수열의 뜻과 일반항을 이용하여 원리합계를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

n회$(n=1, 2, 3, \cdots, 24)$ 입금액의 원리합계는

$10\cdot 1.008^{n-1}\cdot 1.011^{24}\cdot 1.008^{25-n}=10\cdot 1.011^{24}\cdot 1.008^{24}$

이므로 구하는 원리합계는

$10\cdot 1.011^{24}\cdot 1.008^{24}\cdot 24=374.4$ (만원)

116. 정답 ③

a_2, a_3, a_4는 이 순서로 등차수열을 이루므로 $a_3=\frac{a_2+a_4}{2}=2$

∴ $a_5=4a_3=8$

이 때, 공차를 d라 하면 $a_5=a_3+2d$이므로

$8=2+2d$ ∴ $d=3$

∴ $a_6=a_5+d=8+3=11$

117. 38

$a_2=a+d=3$ ⋯⋯⋯㉠

$a_5=a+4d=24$ ⋯⋯㉡

㉡-㉠을 하면 $3d=21$ ∴$d=7$, $a=-4$

∴$a_7=a+6d=(-4)+42$

$=38$

118. 정답 32

등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 2이므로

$a_1+a_5+a_9$

$=a_1+(a_1+4\cdot 2)+(a_1+8\cdot 2)$

$=3a_1+24$

$=45$

따라서 $3a_1=21$에서 $a_1=7$이므로

$a_1+a_{10}=a_1+(a_1+9\cdot 2)$

$=2a_1+18$

$=2\cdot 7+18$

$=32$

다른 풀이

$\{a_n\}$이 등차수열이므로

$a_1+a_9=2a_5$

∴ $a_1+a_9=\frac{2}{3}\times 45=30$

∴ $a_1+a_{10}=a_1+(a_9+2)$

$=(a_1+a_9)+2=32$

119.[정답] ①

[해설]

수열 $\{a_n\}$은 등차수열이므로 공차를 d라 하면

$d=a_3-a_2=3$

$a_1=a_2-d=-4$

따라서 첫째항부터 제 10항까지의 합을 S_{10}이라고 하면

$S_{10}=\frac{10(-8+9\times3)}{2}=95$

26. 정답 46

$a_2-a_1=3$,

$a_3-a_2=3{\cdot}2$

$a_4-a_3=3{\cdot}2^2$

$a_5-a_4=3{\cdot}2^3$

$\therefore\ a_5=a_4+24=(a_3+12)+24$

$=10+12+24=46$

27. 정답 ⑤

$a=r$, $b=r^2$, $c=r^3$ 이므로

$\log_8 c=\log_{2^3} r^3=\log_2 r$

$\log_a b=\log_r r^2=2$

따라서 $\log_8 c=\log_a b$ 에서

$\log_2 r=2$

$\therefore\ r=2^2=4$

28. 정답 ①

$S_5=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=\frac{5(2a_1+4d)}{2}=55$에서

$a_1+2d=11\cdots\cdots$㉠

$a_1+a_2=10$에서 $2a_1+d=10\cdots\cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a_1=3,\ d=4$

$\therefore\ a_{10}=a_1+(10-1)d$

$=3+9\times4=39$

29. 정답 35

공비가 r이고 $a_2=1$인 등비수열이므로 이 수열은

$\frac{1}{r},\ 1,\ r,\ r^2,\ \ldots\ldots$

이 때, $\omega=a_1a_2a_3\cdots a_{10}=r^{-1+0+1+\cdots+8}$

$=r^{35}$

이므로 $\log_r\omega=\log_r r^{35}=35$

30. 정답 ③

a, 0, b가 이 순서로 등차수열을 이루므로

$a+b=2\times0$

$\therefore\ a+b=0\ \cdots$ ㉠

$2b$, a, -7이 이 순서로 등비수열을 이루므로

$a^2=-7\times2b$

$\therefore\ a^2=-14b\ \cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면,

$a^2=-14\times(-a)$, $a^2=14a$ $\quad\therefore a=0,\ 14$

$a=0$이면 0, 0, -7이 등비수열을 이루지 않으므로 모순이다.

따라서,$a=14$

31. 정답 128

첫째항을 a, 공비를 r 라 하면

$a_3=ar^2=2$ ⋯⋯⋯㉠

$a_6=ar^5=16$⋯⋯⋯㉡

㉡÷㉠에서 $r^3=8$ $\therefore r=2$ $\therefore a=\frac{1}{2}$

$\therefore a_9=ar^8=\frac{1}{2}\cdot2^8=128$

[별해] 수열 $\{a_n\}$이 등비수열일 때,

a_3, a_6, a_9도 이 순서로 등비수열을 이루므로

$(a_6)^2=a_3\times a_9$

$\therefore\ a_9=\frac{16^2}{2}=128$

32. 정답 12

수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로 공차를 d라 하면

$a_2+a_4=8$에서 $(a_1+d)+(a_1+3d)=8$

즉, $2a_1+4d=8$

$\therefore\ a_1+2d=4$ ⋯⋯ ㉠

$a_7=52$에서 $a_1+6d=52$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$4d=48$

$\therefore\ d=12$

33. 정답 19

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2=ar=\frac{1}{2}$ ⋯⋯ ㉠

$a_5=ar^4=\frac{1}{6}$ ⋯⋯ ㉡

㉠,㉡에서 $r^3=\frac{1}{3}$

㉠의 양변을 세제곱하면

$(ar)^3=\frac{1}{8}$

따라서 $a^3\times\frac{1}{3}=\frac{1}{8}$ 이므로

$a^3=\frac{3}{8}$

$a_n a_{n+1} a_{n+2} = ar^{n-1} ar^n ar^{n+1} = a^3 r^{3n} = \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$

따라서 수열 $\{a_n a_{n+1} a_{n+2}\}$은 첫째항이 $\frac{3}{8} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{8}$이고 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이다.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1} a_{n+2} = \frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{16}$

$\therefore p+q = 16+3 = 19$

다른 풀이

공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$(a_{n+1})^2 = a_n a_{n+2}$$

이므로 수열 $\{a_n a_{n+1} a_{n+2}\}$ 즉, $\{(a_{n+1})^3\}$은 첫째항이 a_2^3, 공비가 r^3인 등비수열이다.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1} a_{n+2}$

$= \frac{a_2^3}{1-r^3} = \frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{16}$

34. 정답 16

수열 $\{S_{2n-1}\}$이 공차가 -3인 등차수열이므로

$S_{2n-1} = S_1 + (n-1) \times (-3) = -3n+3+S_1$

또, 수열 $\{S_{2n}\}$이 공차가 2인 등차수열이므로

$S_{2n} = S_2 + (n-1) \times 2 = 2n-2+S_2$

$a_8 = S_8 - S_7 = (6+S_2) - (-9+S_1) = 15 + S_2 - S_1$ 이고

$S_2 - S_1 = a_2 = 1$이므로

$a_8 = 16$

35.[정답] **15**

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 하면

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_4 = a_1 + 3d$$

$$a_9 = a_1 + 8d$$

이때 세 항 a_2, a_4, a_9는 등비수열을 이루므로 등비중항에 의해

$$(a_1+3d)^2 = (a_1+d)(a_1+8d)$$

$$a_1^2 + 6a_1 d + 9d^2 = a_1^2 + 9a_1 d + 8d^2$$

$$d(3a_1 - d) = 0$$

$$\therefore d = 3a_1 \ (\because d \neq 0)$$

즉, $a_2 = 4a_1$, $a_4 = 10a_1$ 이므로

$$r = \frac{10a_1}{4a_1} = \frac{5}{2}$$

$$\therefore 6r = 15$$

정답및 해설

1. 정답 ①

[출제의도] $\sum$ 의 정의를 알고 계산을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

(주어진 식)$=3^2+4^2+5^2+\cdots+12^2$

$=\dfrac{12\times13\times25}{6}-(1^2+2^2)=645$

2.정답 330

[출제의도] $\sum$ 의 성질을 이용하여 식을 계산할 수 있다.

$\sum_{k=1}^{10}(k^2+3k-10)-\sum_{k=1}^{10}(k^2-3k-10)$

$=\sum_{k=1}^{10}\{(k^2+3k-10)-(k^2-3k-10)\}=\sum_{k=1}^{10}6k=330$

3. 정답⑤

$\sum_{k=1}^{10}(k+1)^2-2\sum_{k=1}^{10}(k+2)+\sum_{k=1}^{10}3$

$=\sum_{k=1}^{10}\{(k+1)^2-2(k+2)+3\}$

$=\sum_{k=1}^{10}k^2=\dfrac{10\times11\times21}{6}=385$

4. 정답④

$\sum_{k=1}^{n}a_k=S_n=2n^2$ 이므로

$a_n=S_n-S_{n-1}=2n^2-2(n-1)^2=4n-2\ (n\geq 2)$

이때, $a_1=2=S_1$ 이므로 $a_n=4n-2\ (n\geq 1)$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{10}a_{2k}=\sum_{k=1}^{10}(8k-2)$

$=8\times\dfrac{10(10+1)}{2}-2\times10=420$

5.정답 465

[출제의도] 여러 가지 수열의 합 구하기

(준식)$=-1+2^2-3^2+4^2+\cdots-29^2+30^2$

$=(2^2-1)+(4^2-3^2)+\cdots+(30^2-29^2)$

$=1+2+3+\cdots+30=465$

6. 정답142

$\sum_{k=1}^{5}(2^k+5k+1)=\sum_{k=1}^{5}2^k+\sum_{k=1}^{5}5k+\sum_{k=1}^{5}1$

$=\dfrac{2(2^5-1)}{2-1}+5\cdot\dfrac{5\cdot6}{2}+5=62+75+5=142$

7. 정답 216

준식

$=\sum_{k=1}^{10}(k+1)^2-4-\sum_{k=1}^{10}(k-1)^2=-4+\sum_{k=1}^{10}4k$

$=-4+4\cdot55=216$

8. 정답 36

(준식)$=2\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}b_k+3\times10=36$

9. 정답 ⑤

$\sum_{k=1}^{9}(-1)^{k-1}\log_{10}(1.23\times10^{k+1})$

$=\sum_{k=1}^{9}(-1)^{k-1}(\alpha+k+1)$

$=(\alpha+2)-(\alpha+3)+(\alpha+4)-\cdots+(\alpha+10)$

$=6+\alpha$

10. 정답 ⑤

[출제의도] 로그를 이용하여 수열의 합을 구할 수 있다.

$f(x)=x+\log_{10}x$ 이므로

$\sum_{n=1}^{100}[f(n)]=[f(1)]+[f(2)]+\ldots+[f(100)]$

$=[1+\log_{10}1]+[2+\log_{10}2]+\ldots+[100+\log_{10}100]$

$=(1+\ldots+100)+([\log_{10}1]+\ldots+[\log_{10}100])$

$=5050+(0\times9+1\times90+2\times1)=5142$

11. 정답 30

[출제의도] $\sum$의 뜻을 알고 이를 활용하기

이차방정식 $x^2-33x+n(n+1)=0$의 두 근이 α_n, β_n 이므로 근과 계수와의 관계로부터 $\alpha_n+\beta_n=33$, $\alpha_n\beta_n=n(n+1)$ 이다.

따라서, $\dfrac{1}{\alpha_n}+\dfrac{1}{\beta_n}=\dfrac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\beta_n}=\dfrac{33}{n(n+1)}$

$=33\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$ 이므로

$\sum_{n=1}^{10}\left(\dfrac{1}{\alpha_n}+\dfrac{1}{\beta_n}\right)=33\left\{\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{11}\right)\right\}$

$=33\left(1-\dfrac{1}{11}\right)=30$ 이다.

12.정답 215

$[\sqrt[3]{x}]=n$이므로 $n \leq \sqrt[3]{x} < n+1$이다.

$n^3 \leq x < (n+1)^3$이므로 정수 x의 개수

$a_n=(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1$이다.

따라서 $\sum_{k=1}^{5} a_k=\sum_{k=1}^{5}(3k^2+3k+1)=215$이다.

13. 정답 ①

[출제의도] 진법을 활용한 수열의 합 계산하기

자연수 n을 2진법으로 나타내면

$1_{(2)}, 10_{(2)}, 11_{(2)}, 100_{(2)}, 101_{(2)}, 110_{(2)}, \cdots$

$\{a_n\}$은 1, 0, 1, 0, 1, 0,⋯

$\therefore \sum_{k=1}^{30} ka_k=1+3+5+\cdots+29=225$

14. 정답 ③

[출제의도] $\sum$의 기본성질 추론하기

ㄱ. $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$ (참)

ㄴ. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\frac{2}{n(n+1)}$ (거짓)

ㄷ. $\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{k} l\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ (참)

15. 정답 60

$=\sum_{k=1}^{3}(a_k+2a_k+1)-\sum_{k=1}^{3}(a_k^2-2a_k+1)$

$=4\sum_{k=1}^{3}a_k=4(3^2+2\times3)=60$

16. 정답①

[출제의도] 자연수의 합을 이용하여 주어진 수열의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

주어진 수열은 3의 배수를 함께 생각하면

1, 2, ❸, 4, 5, ❻, ⋯, 44, ㊺

$\sum_{k=1}^{30}a_k=\sum_{k=1}^{45}k-\sum_{k=1}^{15}3k=\frac{45\times46}{2}-3\times\frac{15\times16}{2}=675$

17. 정답 ④

[출제의도] 거듭제곱근의 뜻을 이해하고 이를 활용하여 수열의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

(ⅰ) $m=2k+1$ (k는 자연수)일 때

$\sum_{n=2}^{m} f(n)=2+1+2+1+\cdots+2+1=3k$

(ⅱ) $m=2k$ (k는 자연수)일 때

$\sum_{n=2}^{m} f(n)=2+1+2+1+\cdots+2=3k-1$

이때 $\sum_{n=2}^{m} f(n)=33$ 이므로 $k=11$ $\therefore$ $m=23$

18. 정답 ④

x좌표의 차가 k인 변 AB를 택하는 경우의 수는 점 A의 x좌표가 $x=0$부터 $x=(n-k+1)$까지 가능하므로

$(n-k+1)+1=n-k+2$ ◀ (가)

마찬가지로, 점 A의 y좌표는

$y=0$부터 $y=(n-k)$까지 가능하므로

$(n-k)+1=n-k+1$ ◀ (나)

$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\{(n+1)(n+2)-(2n+3)k+k^2\}$

$=n(n+1)(n+2)-(2n+3)\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$=\frac{n(n+1)}{6}(2n+4)$

$=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ ◀ (다)

19.정답 ①

$\sum_{k=n-m+1}^{n+m} a_k$를 P라 하면, 항수는 $2m$개이다.

$P=(a_{n-m+1}+a_{n-m+2})$

$+(a_{n-m+3}+a_{n-m+4})+\ldots$

$+(a_{n+m-3}+a_{n+m-2})+(a_{n+m-1}+a_{n+m})$

$=(n-m+1)+(n-m+3)+\ldots$

$+(n+m-3)+(n+m-1)$

따라서, (가)$=n+m-1$

P는 첫째항이 $n-m+1$이고 공차가 2, 항수가 m인 등차수열의 합이므로

$p=\frac{m(n-m+1+n+m-1)}{2}$

$=mn$

따라서, (나)$=m$, (다)$=mn$

20. 정답 ④

(가) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$

(나) $n(n+1)$

(다) $\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

21. 정답 ⑤

[출제의도] 조합의 성질을 이용하여 증명할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)(k+3)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+3)!}{(k-1)!}$,

$4!\left\{\frac{4!}{4!0!}+\frac{5!}{4!1!}+\cdots+\frac{(n+3)!}{4!(n-1)!}\right\}=4!\sum_{k=1}^{n}{}_{k+3}\mathrm{C}_4$,

${}_4\mathrm{C}_4+{}_5\mathrm{C}_4+\cdots+{}_{n+3}\mathrm{C}_4={}_{n+4}\mathrm{C}_5$

22. 정답 156

$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(4k-3)$

$=3+4\times\frac{n(n-1)}{2}-3n+3$

$=2n^2-5n+6$

$\therefore a_{10}=2\times10^2-5\times10+6$

$=156$

23. 정답 ⑤

$a_1+a_2=1+2$

$a_3+a_4=1+2+3+4$

$a_5+a_6=1+2+3+4+5+6$

$a_7+a_8=1+2+3+4+5+6+7+8$

$a_9+a_{10}=a_{11}+a_{12}=a_{13}+a_{14}$

$=1+2+\cdots+10=55$

$\therefore \sum_{n=1}^{14}a_n=3+10+21+36+55+55+55$

$=235$

[다른풀이] 1번째줄, 2번째줄에 있는 전구는 14초가 될 때까지 모두 7번씩 켜지고 전구의 개수는 3개 이므로 3×7
3번째 줄, 4번째 줄에 있는 전구는 모두 7개가 있고 켜지는 횟수는 모두 6번씩이므로 7×6
이와 같은 방법으로

$\sum_{n=1}^{14}a_n=3\times7+7\times6+11\times5+15\times4+19\times3=235$

24. 정답 ①

그림에서 점 P_n의 좌표는

$n=4k$ 또는 $4k+1$일 때, 직선 $y=\frac{3}{4}x$위에 있고,

$n=4k+2$ 또는$4k+3$일 때, x축 위에 있다. (단, k는 정수)

$25=4\cdot6+1$로 나타낼 수 있으므로, 점 P_{25}는 반지름이 13인 원과 직선 $y=\frac{3}{4}x$와의 교점이다.

또한, x축의 양의 방향과 직선 $y=\frac{3}{4}x$가 이루는 예각을 θ라 하면 점 P_{25}의 x좌표는 $13\cos\theta$이다. (단, $\tan\theta=\frac{3}{4}$)

따라서, $13\cos\theta=13\times\frac{4}{5}=\frac{52}{5}$이다.

25. 정답①

[출제의도] 수열의 규칙을 이해하여 그 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

수열 $\{a_n\}$은 1, 11, 111, 1111, 11111, ⋯

이때, a_n을 3으로 나눈 나머지는 차례로 다음과 같다.

1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, ⋯

따라서 $\sum_{n=1}^{30}b_n=\sum_{n=1}^{10}3=30$이다.

26. 정답 136

[출제의도] 여러 가지 수열 이해하기

1단계의 타일로 덮인 넓이 $a_1=1$

2단계의 타일로 덮인 넓이 $a_2=4$

3단계의 타일로 덮인 넓이 $a_3=10$

⋮

n단계의 타일로 덮인 넓이

$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}3k=\frac{3}{2}n(n-1)+1$

10단계의 타일로 덮인 넓이 $a_{10}=136$

27. 정답 13

[출제의도] 여러 가지 수열에 관한 문제해결하기

n행에 나열된 모든 자연수의 합을 S_n이라 하자.

$S_1=2+3+3\times2$

$S_2=2+2S_1=2+2^2+3\times2+3\times2^2$

$S_3=2+2S_2=2+2^2+2^3+3\times2^2+3\times2^3$

⋮

$S_n=2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n+3\times2^{n-1}+3\times2^n$ 이므로

$S_{10}=(2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{10})+(3\times2^9+3\times2^{10})$

$=\frac{2(2^{10}-1)}{2-1}+3\times2^9+3\times2^{10}$

$=2^{11}-2+3\times2^9+3\times2^{10}$

$=(4+3+6)\times2^9-2=13\times2^9-2$

따라서 $S=13\times2^9-2$ 이므로 $p=13$이다.

28. 정답④

[출제의도] 귀납적으로 정의된 수열의 일반항을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

a_k의 각 자리의 수의 합을 b_k라 하면

$a_1=2 \therefore b_1=2$

$a_2=10\cdot2+81=101 \therefore b_2=1+0+1=2$

$a_3=10\cdot101+81=1091 \therefore b_3=b_2+9$

$a_4=10\cdot1091+81=10991$ $\therefore$ $b_4=b_3+9=b_2+9\cdot2$

$a_5=10\cdot10991+81=109991$ $\therefore$ $b_5=b_4+9=b_2+9\cdot3$

…

$\therefore$ $b_{10}=b_2+9\cdot8=2+72=74$

29. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이해하고 식의 값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$a_{n+2}=3a_{n+1}-3$ …㉠, $a_{n+1}=3a_n-3$ …㉡

㉠-㉡ : $a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)$

$a_2-a_1=1$ 에서 $a_{n+1}-a_n=3^{n-1}$

$\therefore a_6-a_5=81$

30. 정답 7

[출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이해하여 문제해결하기

$a_{n+1}=a_n{}^5$ 의 양변에 5 를 밑으로 하는 로그를 취하면

$\log_5 a_{n+1}=5\log_5 a_n$ 이다. 이 때, $\log_5 a_n=b_n$ 이라 하면

$b_{n+1}=5b_n$ 이므로 $b_n=b_1\cdot5^{n-1}=5^{n-1}$ 이다.

그러므로 $\log_5 a_{10}=b_{10}=5^9$ 이므로

$\log 5^9=9(1-\log 2)=9\times0.6990=6.2910$ 이다.

따라서 $\log 5^9$ 의 지표가 6 이므로 $m=7$ 이다.

31. 정답①

주어진 점화식에 $n=2$ 를 대입하면

$a_1\cdot a_3=a_2\cdot a_4 \Leftrightarrow 2\cdot2=2a_4$ 이므로 $a_4=2$

또, $n=3$ 을 대입하면 $a_2\cdot a_4=a_3\cdot a_5 \Leftrightarrow 2\cdot2=4a_5$ 이므로

$a_5=1$

마찬가지로 $n=4,5,6,\cdots$ 를 차례대로 대입하면 구하는 수열은

1, 2, 4, 2, 1, 2, 4, 2 …, 이 수열은 1, 2, 4, 2 가 반복되는 수열이므로

$$\sum_{n=1}^{20} a_n=5\times9=45$$

32. 정답 ⑤

$a_2=\sqrt[3]{2}$ $(\because a_1=1)$

$a_3=\sqrt[3]{2}\cdot a_2=\sqrt[3]{2^2}$ $(\because a_2<2)$

$a_4=\sqrt[3]{2}\,a_3=\sqrt[3]{2^3}=2$ $(\because a_3<2)$

$a_5=\dfrac{1}{2}a_4=1$ $(\because a_4\geq2)$

⋮

따라서, 수열 $\{a_n\}$은 $1,\ \sqrt[3]{2},\ \sqrt[3]{2^2},\ 2$ 이 계속적으로 반복된다.

$112=4\times28$이므로 $a_{112}=2$

33. 정답 ④

$a_1=2$, $3a_1=6$을 5로 나눈 나머지는 1이므로

$a_2=1$, 같은 방법으로 $a_3=3$, $a_4=4$, $a_5=2$

$a_6=1$, … , $a_{13}=a_1=2, a_{40}=a_4=4$이므로

$\therefore a_{13}+a_{40}=2+4=6$

34. 정답34 개

[출제의도] 규칙성을 발견할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$(n+6)^2=n^2+12n+36$

$\quad\quad=6(2n+6)+n^2$

이므로 $a_{n+6}=a_n$이 성립한다.

또, $a_1=1$, $a_2=4$, $a_3=3$, $a_4=4$, $a_5=1$, $a_6=0$이므로

$a_n=4$를 만족시키는 자연수 n은

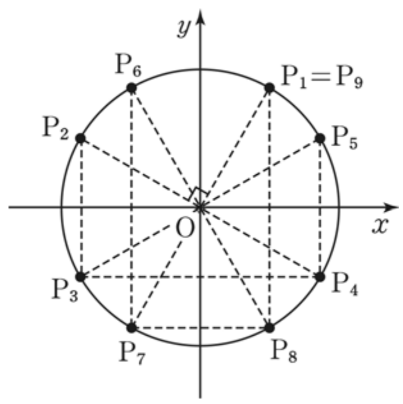
2 또는 $n=6k\pm2$ (k는 자연수)이다.

따라서 구하는 100 이하의 자연수 n은

2, 4, 8, 10, …, 94, 98, 100의 34개다.

35. 정답 ①

점 $\mathrm{P_n}$ 의 이동규칙에 따라 아래그림과 같이 나타내면



따라서 $\mathrm{P_n}$ 은 주기가 8이다.

$\therefore \mathrm{P}_{2007}=\mathrm{P}_7$ 이고 P_7은 P_1의 원점 대칭이다.

$\therefore \mathrm{P}_{2007}=\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

36. 정답 ①

$S_{n+1}-S_{n-1}=a_{n+1}+a_n$ 이므로 주어진 식은

$(a_{n+1}+a_n)^2=4a_na_{n+1}+4$

따라서 $(a_{n+1}-a_n)^2=4$

$\therefore$ $a_{n+1}-a_n=2$ $(\because$ $a_{n+1}>a_n$ $)$

$\therefore$ $a_{20}=1+2(20-1)=39$

37. 정답 ②

$a_1 = S_1 = 1^2 + 2^1 = 3$

$a_5 = S_5 - S_4 = (5^2 + 2^5) - (4^2 + 2^4) = 9 + 16 = 25$

$\therefore a_1 + a_5 = 28$

38. 정답 ⑤

$a_n = 3 + (-1)^n, b_n = \cos\frac{2n\pi}{3}, c_n = \sin\frac{2n\pi}{3}$ 라 하면

$a_{n+2} = a_n, b_{n+3} = b_n, c_{n+3} = c_n$이고

점 P_n의 x좌표 a_nb_n은 $a_nb_n = a_{n+6}b_{n+6}$,

점 P_n의 y좌표 a_nc_n은 $a_nc_n = a_{n+6}c_{n+6}$

이므로 $P_{n+6} = P_n$

따라서 $P_{2009} = P_{6\times 334+5} = P_5$

39. 정답 ④

[출제의도] 행렬 곱셈의 결합법칙을 활용한 행렬의 거듭제곱 추론하기

[해설] (가) $\boxed{1}$

(나) $\boxed{2^{n+1}}$

(다) $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}}$

40. 정답 ⑤

[출제의도] 이항정리를 이용하여 부등식을 증명할 수 있다.

(i) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$= 1 + {}_nC_1\frac{1}{n} + {}_nC_2\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \ldots + {}_nC_n\left(\frac{1}{n}\right)^n$

$\geq 1 + 1 + {}_nC_2\left(\frac{1}{n}\right)^2$

$= 2 + \frac{n-1}{2n} > 2 \quad (\because n \geq 2)$

(ii) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$= 1 + {}_nC_1\frac{1}{n} + {}_nC_2\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \ldots + {}_nC_n\left(\frac{1}{n}\right)^n$

$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)$

$+ \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$

$< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$

$k! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k \geq 2^{k-1}$ 이므로 $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 + \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$

$= 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 3$

(i), (ii)에 의하여 $n \geq 2$ 인 자연수 n 에 대하여 부등식 $2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$ 이 성립한다.

41. 정답⑤

(가) $\frac{k+1}{k+2}$, (나) 2

42.정답④

[출제의도] 수학적귀납법으로 증명하기

[해설] (가) $\boxed{\frac{1}{2}}$, (나) $\boxed{\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}}$,

(다) $\boxed{\frac{1}{k+1} - \frac{1}{2k+2}}$

43. 정답⑤

$n = k\,(k \geq 6)$일 때 성립한다고 가정하면

$\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1} = \frac{k+1}{2^{k+1}}\cdot\frac{(k+1)^k}{k^k}\cdot k^k = \frac{k+1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\cdot\left(\frac{k}{2}\right)^k$

그런데 $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k > 2$ 이고 $\left(\frac{k}{2}\right)^k > k!$ 이므로

$\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1} > \frac{k+1}{2}\cdot 2\cdot k! = (k+1)!$

44.정답 ④

(가) $\boxed{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$, (나) $\boxed{a_{k+2} + a_{k+1}}$, (다) $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$

45. 정답 ⑤

$n = k\,(k \geq 2)$일 때, $2^{k+1} > \boxed{k(k+1)} + 1$이므로

$2 \times 2^{k+1} = 2^{k+2} > 2(k^2 + k + 1)$이고, 이 때

$2(k^2 + k + 1) - \boxed{\{(k+1)(k+2) + 1\}}$

$= k^2 - k - 1 = k(k-1) - 1 \boxed{>} 0$

46. 정답②

[출제의도] 수학적귀납법을 이용하여 증명할 수 있는가를 묻는 문제이다.

(가) 1

(나) $(k+1)a_k - k$

(다) $\dfrac{1}{k+1}$

47. 정답 ③

[출제의도] 수학적귀납법을 이용하여 증명할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$S_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $T_1 = \frac{1}{2}$이므로 (*)이 성립한다.

$S_{m+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$

$+ \frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m+1} - \frac{1}{2m+2}$

$= S_m + \frac{1}{2m+1} - \frac{1}{2m+2}$

$T_{m+1} = \frac{1}{m+2} + \frac{1}{m+3} + \frac{1}{m+4} + \cdots + \frac{1}{2m+2}$

$= T_m - \frac{1}{m+1} + \frac{1}{2m+1} + \frac{1}{2m+2}$

$= T_m + \frac{1}{2m+1} - \frac{1}{2m+2}$

가정에서 $S_m = T_m$이므로 $S_{m+1} = T_{m+1}$이다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 (*)이 성립한다.

48. 정답 ①

두 실수 x, y에 대하여 $xy \leq \frac{1}{4}(x+y)^2$이므로

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k b_k}{a_k + b_k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{4}(a_k+b_k)^2}{a_k+b_k} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

이므로 (가) $\frac{1}{4}(a_k+b_k)$ (나) a_k (다) $\frac{1}{2}$

49. [출제의도] 수학적귀납법으로 부등식의 증명을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

(가) : 2, (나) : $4(k+1)^2$, (다) : $2k+1$

50. 정답34

순서도를 따라가며 a, b, c 의 값을 조사해 보면

c	a	b
	1	2
1 + 2	2	1 + 2
2 + (1 + 2) = 1 + 2·2	1 + 2	1 + 2·2
2·1 + 3·2	1 + 2·2	2·1 + 3·2
3·1 + 5·2	2·1 + 3·2	3·1 + 5·2
5·1 + 8·2	3·1 + 5·2	5·1 + 8·2
8·1 + 13·2	5·1 + 8·2	8·1 + 13·2

8·1 + 13·2 = 34 이므로 인쇄되는 c 의 값은 34 이다.

51. 정답 29

[출제의도] 순서도의 뜻을 알고 문제해결하기

$n=1$일 때, $S=20+17>0$

$n=2$일 때, $S=20+17+14>0$

$n=3$일 때, $S=20+17+14+11>0$

⋮

$n=13$일 때, $S=20+17+\cdots+(-19)=7>0$

$n=14$일 때, $S=20+17+\cdots+(-22)=-15<0$

이므로 $|S|+n=15+14=29$이다.

따라서, 인쇄되는 S의 값은 29이다.

52. 정답 39

$a=1$

$n=1$, $a=3\cdot1=3$

$n=2$, $a=3+1=4$

$n=3$, $a=3\cdot4=12$

$n=4$, $a=12+1=13$

$n=5$, $a=3\cdot13=39$

$\therefore\ a=39$

53. 정답④

[출제의도] 순서도를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$$S = \sum_{k=1}^{100} 2k = 2\left(\frac{100\times101}{2}\right) = 10100$$

54. 정답24

[출제의도] 상용로그의 값과 $\sum$의 정의를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

정의에 따라 $[\log_{10} S_n]$는 $\log_{10} S_n$의 지표와 같다.

$S_1 = 1$, $S_2 = 1+2=3$, $S_3 = 1+2+3=6$이므로

$[\log_{10} S_1] = [\log_{10} S_2] = [\log_{10} S_3] = 0$

$S_4 = 1+2+3+4=10$, $S_{13} = 1+2+3+\cdots+13 = 91$이므로

$[\log_{10} S_4] = [\log_{10} S_5] = \cdots = [\log_{10} S_{13}] = 1$

$S_{14} = 1+2+3+\cdots+14 = 105$,

$S_{20} = 1+2+3+\cdots+20 = 210$이므로

$[\log_{10} S_{14}] = [\log_{10} S_{15}] = \cdots = [\log_{10} S_{20}] = 2$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{20} [\log_{10} S_n] = 0\times3 + 1\times10 + 2\times7 = 24$$

55.정답⑤

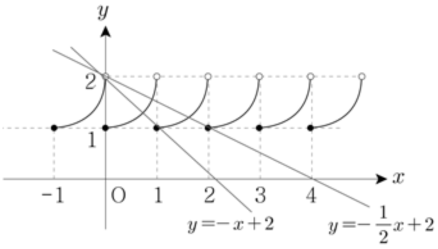
[출제의도] $\sum$의 성질을 이해하기

(준식)$=1^3+2^3+3^3+\cdots+12^3$

$=\sum_{k=1}^{12}k^3=6084$

56. 정답 65

[출제의도] 지수함수의 그래프를 이해하고 등차수열의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.



그림에서 수열 $\{a_n\}$ 은 $2, 3, 4, 5, \cdots$ 이므로 첫째항이 2 , 공차가 1 인 등차수열을 이룬다.

$\therefore \sum_{n=1}^{10}a_n=\frac{10(2+11)}{2}=65$

57. 정답 ①

$n(n+1)$은 연속한 두 자연수의 곱이므로 항상 짝수이다.

그러므로 $n(n+1)$은 $4k$ 또는 $4k+2$의 꼴의 수이다.

따라서 $n=4k-3, 4k-2, 4k-1, 4k$ 의 네가지이다.

(i) $n=4k-3$ 꼴 일 때 $a_n=-1$

(ii) $n=4k-2$ 꼴 일 때 $a_n=-1$

(iii) $n=4k-1$ 꼴 일 때 $a_n=1$

(iv) $n=4k$ 꼴 일 때 $a_n=1$

$\therefore \{a_n\}$ $-1,\ -1,\ 1,\ 1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ \cdots$

$\sum_{n=1}^{2010}na_n=\{(-1)+(-2)+3+4\}+\{(-5)+(-6)+7+8\}+\cdots$

$+\{(-2005)+(-2006)+2007+2008\}+(-2009)+(-2010)$

$=\underbrace{4+4+\cdots+4}_{4\text{가 }502\text{개}}+(-2009)+(-2010)$

$=-2011$

58. 정답②

$\sum_{n=1}^{100}n$ 의 일의 자리수는 0 이므로 $\sum_{n=1}^{100}(n!+n)$ 의 일의 자리수는

$\sum_{n=1}^{100}n!$ 의 일의 자리수와 같다. 그런데 $\sum_{n=1}^{100}n!$ 의 일의 자리수는

$1!+2!+3!+4!=33$ 의 일의 자리수와 같으므로 3 이다.

59. 정답 5

$a_m+a_{m+1}+\cdots+a_{15}$

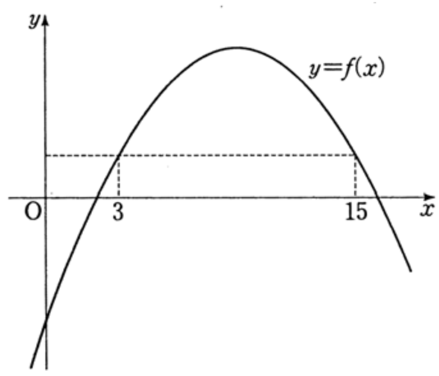
$f(15)-f(m-1)<0$

$\therefore f(15)<f(m-1)$

그림에서 $4\leqq m-1\leqq 14$

$5\leqq m\leqq 15$ 이므로

m 의 최솟값은 5



60. 정답②

(가) 19 , (나) 13^2 , (다) 18

61. 정답 ①

$a_n=n^2+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)a_k$ 에서

$a_{n-1}=(n-1)^2+\sum_{k=1}^{n-2}(2k+1)a_k$ 이므로

$\sum_{k=1}^{n-2}(2k+1)a_k=a_{n-1}-(n-1)^2$

따라서

$a_n=n^2+\sum_{k=1}^{n-2}(2k+1)a_k+(2n-1)a_{n-1}$

$=n^2+a_{n-1}-(n-1)^2+(2n-1)a_{n-1}$

$\therefore f(n)=(n-1)^2$

또 $a_n+1=2n(a_{n-1}+1)$

$=2n\cdot 2(n-1)(a_{n-2}+1)$

$\vdots$

$=n(n-1)\cdots 2\cdot 1\cdot 2^{n-2}(a_2+1)$

이므로 $g(n)=2^{n-2}$ 이다.

$\therefore f(9)\times g(9)=2^6\times 2^7=2^{13}$

62. 정답⑤

[출제의도] 등차수열에서 증명 완성하기

임의의 자연수 n 에 대하여 $a_n>0$ 이고,

$\sum_{k=1}^{n}a_k^3=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2$ 이면 $a_n=n$ 임을 증명하는 과정이다.

임의의 자연수 n에 대하여 $a_n>0$ 이고

$\sum_{k=1}^{n}a_k^3=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2$ 이므로

$a_{k+1}^3=\sum_{i=1}^{k+1}a_i^3-\sum_{i=1}^{k}a_i^3$

$=\left(\sum_{i=1}^{k+1}a_i\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{k}a_i\right)^2$

$=\left(\sum_{i=1}^{k+1}a_i-\sum_{i=1}^{k}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{k+1}a_i+\sum_{i=1}^{k}a_i\right)$

$=a_{k+1}(a_{k+1}+2\sum_{i=1}^{k}a_i)$

$\therefore a_{k+1}^{\ 2}=a_{k+1}+2\sum_{i=1}^{k}a_i$ .... ①

즉, $a_k^2=a_k+2\sum_{i=1}^{k-1}a_i$ .... ②

①과 ②에서 $a_{k+1}^{\ 2}-a_k^2=a_{k+1}+a_k$

$a_{k+1}-a_k=1$

$\sum_{k=1}^{n}a_k^3=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2$에서 $n=1$을 대입하여 정리 하면 $a_1=1$이므로 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고 공차가 1인 등차수열이다.

$\therefore\ a_n=n$

63. 정답440

$[\log_{k+1}x]=1$ 에서 $1\leqq \log_{k+1}x<2$ $\therefore$

$k+1\leqq x<(k+1)^2$

이를 만족하는 자연수의 개수가 a_k 이다.

$a_1\rightarrow 2\leqq x<4$ 2 개, $a_2\rightarrow 3\leqq x<9$ 6 개,

$a_3\rightarrow 4\leqq x<16$

12 개

$a_4\rightarrow 5\leqq x<25$ 20 개…

$\{a_k\}$ 2, 6, 12, 20

4 6 8

이 때, $a_{k+1}-a_k=b_n$ 라 하면, b_n 은 첫째항이 4 이고, 공차가 2 인

등비수열이므로 $b_n=4+2(n-1)$

$\therefore\ a_k=2+\sum_{n=1}^{k-1}(2n+2)$

$=2+2\cdot\frac{(k-1)\cdot k}{2}+2(k-1)=k^2+k$

따라서,

$\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(k^2+k)=\frac{10\cdot11\cdot21}{6}+\frac{10\cdot11}{2}$ 1

$=385+55=440$

64. [출제의도] 계차수열을 이용하여 수열의 일반항을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

T_n의 면의 개수를 a_n, 꼭짓점의 개수를 b_n이라 하면,

$b_1=4$, $b_{n+1}=3b_n$에서 $b_n=4\cdot3^{n-1}$

$a_1=4$, $a_{n+1}=a_n+b_n=a_n+4\cdot3^{n-1}$

$\therefore a_6=4+\sum_{k=1}^{5}4\cdot3^{k-1}=488$

65.정답 ②

[출제의도] 여러 가지 수열에 관한 문제 해결하기

a_n 을 n층의 정육면체의 개수라 하면

개수는1 5 13 25 ⋯

이다.

$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}4k=1+\frac{4n(n-1)}{2}=2n^2-2n+1$

$\therefore S_{10}=\sum_{n=1}^{10}(2n^2-2n+1)$

$=2\cdot\frac{10\cdot11\cdot21}{6}-2\cdot\frac{10\cdot11}{2}+10=670$

66. 정답 496

[출제의도] 귀납적으로 정의된 수열의 합 구하기

$a_1=1,\ a_2=3,\ a_3=5,\ a_4=7$이고 $a_{k+4}=2a_k$

이므로

$a_1+a_2+a_3+a_4=16,$

$a_5+a_6+a_7+a_8=2(a_1+a_2+a_3+a_4)=2\times16,$

$a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}=2^2(a_1+a_2+a_3+a_4)=2^2\times16,$

$\vdots$

$\sum_{k=1}^{20}a_k=16(1+2+2^2+2^3+2^4)=496$

67. 정답 ③

$a_n=b_n$ 이므로 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$라 하면,

$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}a_k=1+S_{n-1}$

$a_n=1+S_{n-1}$ ⋯ (1)

(1)에 $n\leftarrow n+1$을 대입하면,

$a_{n+1}=1+S_n$ ⋯ (2)

(2)−(1)하면 $a_{n+1}-a_n=S_n-S_{n-1}=a_n$

$a_{n+1}=2a_n$ 이므로 수열 $\{a_n\}$은 공비가 2인 등비수열이다.

$a_n=2^{n-1}$

$\sum_{k=1}^{6}a_k=\sum_{k=1}^{6}2^{k-1}=\frac{2^6-1}{2-1}=63$

68. 정답241

그림과 같이 제n 행에 있는 항의 수는 n 개이고

$1+2+3+\cdots+10+11=66$이므로 제66항은 제11행의 끝항이다. 각 행에 있는 첫째항은 1, 3, 9, 19, 33, ⋯ 이므로 제n 행의 첫째항은

$$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}(4k-2)=1+\frac{4n(n-1)}{2}-2(n-1)$$

$=2n^2-4n+3$

따라서 제11행의 첫째항은 $2\times11^2-4\times11+3=201$이고 각 행은 공차가 4인 등차수열이므로 제66항은

$201+10\times4=241$

69. 정답 ④

준 식$=\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\cdot\beta_n}=\sum_{n=1}^{10}\frac{-4}{-(2n-1)(2n+1)}$

$=4\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=2\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=2\left(1-\frac{1}{21}\right)=\frac{40}{21}$

70. 정답 ④

분모가 같은 것끼리 군수열로 나누면

$\left(\frac{1}{1}\right),\left(\frac{3}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right),\left(\frac{5}{5},\frac{4}{5},\frac{3}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right),\cdots,$

$\left(\frac{27}{27},\frac{26}{27},\cdots,\frac{4}{27},\cdots,\frac{1}{27}\right),\cdots$

$\frac{1}{25}$ 까지의 모든 항수는 169 개

$(=1+3+5+\cdots+25)$

따라서 $\frac{4}{27}$ 는 $169+24=193$ (번째항)

71. 정답 ④

수열의 일반항이 $a_n=(a_1-15)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+15$ 이므로

$a_{100}=(20-15)\left(\frac{1}{3}\right)^{99}+15$

72. 정답 ①

[출제의도] 수열의 귀납적 정의 이해하기

$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3a_n+1}{a_n}=3+\frac{1}{a_n}$이므로 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은

첫째항 $\frac{1}{a_1}=2$이고, 공차 3인 등차수열이다.

따라서, $\frac{1}{a_n}=2+3(n-1)=3n-1$이므로

$a_n=\frac{1}{3n-1}\quad\therefore a_{20}=\frac{1}{59}$

73. 정답 39

$a_{n+1}-a_n$

$=(-1)^n\frac{2n+1}{n(n+1)}$

$=(-1)^n\left(\frac{2n+1}{n}-\frac{2n+1}{n+1}\right)$

$=(-1)^n\left(2+\frac{1}{n}-2+\frac{1}{n+1}\right)$

$=(-1)^n\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$

즉, $a_{n+1}-a_n=(-1)^n\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$이므로

$a_{20}=2+\displaystyle\sum_{k=1}^{19}(-1)^k\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)$

$=2+\left\{-\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{19}+\frac{1}{20}\right)\right\}$

$=2+\left(-1-\frac{1}{20}\right)=1-\frac{1}{20}=\frac{19}{20}$

$\therefore\ p+q=39$

74. 정답105

주어진 점화식의 양변을 $a_na_{n+1}a_{n+2}$ 로 나누면

$\frac{1}{a_{n+2}}-\frac{2}{a_{n+1}}+\frac{1}{a_n}=0$ 이므로 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 공차가 $\frac{1}{2}$ 인 등차수열이다.

$\therefore\ \displaystyle\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{a_k}=\frac{20\cdot\left(2\cdot\frac{1}{2}+19\cdot\frac{1}{2}\right)}{2}=105$

75. 정답 ⑤

$(1),\ (1,\ 1+x),\ (1,\ 1+x,\ 1+x+x^2),\ (1,\ \cdots),\ \cdots$

n군의 항수는 n개, n군까지 항수는 $\frac{n(n+1)}{2}$ 이므로 50번째 항은 10군의 5번째 항

$f_{50}(x)=1+x+x^2+x^3+x^4$

$\therefore\ f_{50}(1)=1+1+1+1+1=5$

76. 정답650

[출제의도] 주어진 수열의 특징을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

나머지 빈 칸을 주어진 규칙에 따라 채워보면 각 행의 수들은 다음과 같은 규칙대로 나열됨을 알 수 있다.

제 2행 $(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),\cdots,(50,50)$

제 3행 $(1,0),(2,0),(3,0),(4,0),\cdots,(50,0)$

제 4행 $(1,1,1,1),(2,2,2,2),\cdots,(25,25,25,25)$

제 5행 $(1,0,1,0),(2,0,2,0),\cdots,(25,0,25,0)$

따라서 구하는 제 5행의 100개의 수들의 합은

$\displaystyle\sum_{n=1}^{25}2n=25\times26=650$

77. 정답 ④

ㄱ. $3^3=27$이므로 $a_3=7$(참)

ㄴ. $\sum_{k=1}^{5} a_{2k}=a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}$

$=4+6+6+6+0=22$(참)

ㄷ. $13^{13}=(10+3)^{13}$이므로 13^{13}의 일의 자리수와 3^{13}의 일의 자리수는 서로 같고,

$3^1=3,\ 3^2=9,\ 3^3=27,\ 3^4=81,\ 3^5=243,\ \cdots$ 이므로 3^n의 일의 자리수는 3, 9, 7, 1, 3, $\cdots$ 으로 반복되어 13^{13}의 일의 자리수는 3이다. 이와 같은 방법으로 23^{23}의 일의 자리수는 7이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

78. 정답⑤

[출제의도] 귀납적으로 정의된 수열의 성질을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $p=q$일 때 주어진 식의 양변을 p로 나누면

$a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{p}$이다.

따라서 수열 $\{a_n\}$은 공차가 $\dfrac{1}{p}$인 등차수열이다. (참)

ㄴ. $a_{n+1}=\dfrac{q}{p}a_n+\dfrac{1}{p}$이므로

$a_{n+1}-\alpha=\dfrac{q}{p}(a_n-\alpha)$ $\left(\text{단, } \alpha=\dfrac{1}{p-q}\right)$

따라서 수열 $\left\{a_n-\dfrac{1}{p-q}\right\}$은 첫째항이 $a_1-\dfrac{1}{p-q}$이고, 공비가 $\dfrac{q}{p}$인 등비수열이다. (참)

ㄷ. ㄴ에서 $a_n=\left(\dfrac{q}{p}\right)^{n-1}(a_1-\alpha)+\alpha$이므로

$-1<\dfrac{q}{p}<1$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

79. 정답 ⑤

[출제의도] 수열의 규칙성을 발견할 수 있는가를 묻는 문제이다.

로그의 성질에 의해 $a_na_{n+1}a_{n+2}=2$ 이므로 수열$\{a_n\}$은 $2, 3, \dfrac{1}{3}$이 반복되어 나타난다.

ㄱ. $6=3\times2$ 이므로 $a_6=\dfrac{1}{3}$(참)

ㄴ. $S_{10}=\dfrac{16\times4-10}{3}=18$(참)

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}S_{3n}=\dfrac{16}{3}$ 이다. (참)

80. 정답 30

$a_n=5n+1$

$b_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)$

$=1+\dfrac{n^2+n-2}{2}=\dfrac{n(n+1)}{2}$

a_n은 초항이 6이고 공차가 5인 등차수열이므로

a_1부터 a_{10} 중 홀수인 항은 5개이다.

$b_1=1,\ b_2=1+2,\ b_3=1+2+3,\ \cdots\cdots$이므로

b_n은 홀수 2개와 짝수 2개가 반복되는 수열이다.

따라서, 10 이하인 두 자연수 $k,\ l$에 대하여 a_k와 b_l의 곱이 홀수가 되는 순서쌍 (k, l)의 개수는 $5\times6=30$

81. 정답 ④

ㄱ. 8의 양의 약수는 1, 2, 4, 8이므로

$x_8=(-1)^1+(-1)^2+(-1)^4+(-1)^8=2$ $\therefore$ 참

ㄴ. 3^m의 양의 약수 a_k는 모두 홀수이고 $(-1)^{a_k}=-1$이다.

양의 약수의 개수는 $m+1$개이므로

$x_n=x_{3^m}=(-1)(m+1)=-m-1$ $\therefore$ 거짓

ㄷ. $n=2^m\cdot5^m$의 양의 약수의 개수는 $(m+1)^2$개

그 중 홀수인 양의 약수 a_k의 개수는 $(m+1)$개이고

이 때 $(-1)^{a_k}=-1$

나머지 $(m+1)^2-(m+1)$개의 양의 약수 a_k는 짝수이므로

$(-1)^{a_k}=1$

$x_n=x_{10^m}=(-1)\times(m+1)+1\times\{(m+1)^2-(m+1)\}$

$=m^2-1$

$\therefore$ 참

82. 정답 110

$n-\dfrac{1}{2}\leqq\sqrt{k}<n+\dfrac{1}{2}$

양변을 제곱하면

$n^2-n+\dfrac{1}{4}\leqq k<n^2+n+\dfrac{1}{4}$

k는 자연수이므로 $n^2-n+1\leqq k\leqq n^2+n$

$a_n=(n^2+n)-(n^2-n+1)+1=2n$

$\therefore \sum_{n=1}^{10}a_i=\sum_{n=1}^{10}2n=2\times\dfrac{10\times11}{2}=110$

83. 정답30

[출제의도] 수열의 성질을 이해하여 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$30a_{30}-(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{29})$

$=a_{30}+(a_{30}-a_1)+(a_{30}-a_2)+\cdots+(a_{30}-a_{29})$

$=1+2\times\dfrac{1}{2}+3\times\dfrac{1}{3}+\cdots+30\times\dfrac{1}{30}=30$

84. 정답 181

제19행에 나열된 모든 자연수의 평균을 구하시오.

수열 $\{a_n\}$의 제n항을 제$(2n-1)$행에 나열된 모든 자연수의 평균이라 하자. 수열 $\{a_n\}$의 각 항은

1, 5, 13, 41, 61, $\cdots$이므로 $\{a_n\}$의 계차수열은 첫째 항이 4이고 공차가 4인 등차수열을 이룬다.

따라서 $a_n = 1+\sum_{k=1}^{n-1} 4k = 1+2n(n-1) = 2n^2-2n+1$에서

$a_{10} = 181$이므로 제19행에 나열된 수들의 평균은 181이다.

85. 정답 ③

[출제의도] 여러 가지 수열의 합 구하기

[해설] 그래프가 지나는 정사각형 내부에 있는 수들의 합을 S라 하면

$S = (1+2+3+\cdots+109)-(2+6+12+\cdots+90)$

$= \sum_{k=1}^{109} k - \sum_{k=1}^{9}(k+k^2) = 5665$

86. 정답 ④

연속된 네 개의 항이 처음으로 2, 0, 1, 0이 되는 때는 다음과 같이 자연수 1020과 1021의 각 자릿수를 나열할 때이다.

1, 2, 3, 4, $\cdots$, 1, 0, 2, 0, 1, 0, 2, 1, $\cdots$

자연수 1020이 나타날 때까지 나열된 자릿수의 개수는

한 자리 수의 자릿수 : 9(개)

두 자리 수의 자릿수 : $90\times2 = 180$(개)

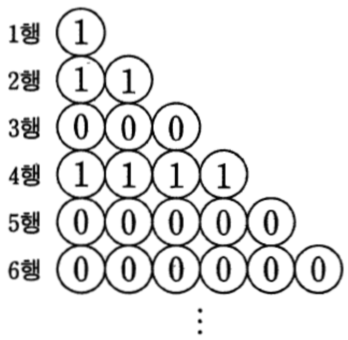
세 자리 수의 자릿수 : $900\times3 = 2700$(개)

네 자리 수의 자릿수 : $20\times4 = 80$(개)

이를 모두 더하면 $9+180+2700+80 = 2969$이다.

따라서 n의 최솟값은 $2969+3 = 2972$이다.

87. 정답 63



그림에서 주어진 이후에 숫자 1이 나열된 행은

$1+2+4 = 7$

$1+2+4+8 = 15$

$1+2+4+8+16 = 31$

$1+2+4+8+16+32 = 63$

$\cdots$

에서 8행, 16행, 32행, 64행$\cdots$이다.

따라서 32행까지 나열된 원 안에 써 넣은 모든 수의 합은

$1+2+4+8+16+32 = 63$

88. 정답 101

$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}} = a_n$이라 하면 규칙 (다)에서

$a_n = \frac{n-1}{n+1}a_{n-1}$ $\cdots$ ㉠

㉠의 n대신 2, 3, 4, $\cdots$, n을 차례로 대입하면

$a_2 = \frac{1}{3}a_1,\ a_3 = \frac{2}{4}a_2,\ a_4 = \frac{3}{5}a_3,\ \cdots\ ,\ a_n = \frac{n-1}{n+1}a_{n-1}$

위의 식을 각 변끼리 곱하여 약분하면

$a_n = a_1\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}\times\cdots\times\frac{n-2}{n}\times\frac{n-1}{n+1} = \frac{2}{n(n+1)}$

따라서 $S_n = \frac{1}{2}a_n = \frac{1}{n(n+1)}$이므로

$\sum_{k=1}^{50} S_k = \sum_{k=1}^{50}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = \frac{50}{51}$

$\therefore\ p+q = 101$

89. 정답 ①

주어진 규칙에 따라 각 항의 값을 구하면

$a_1 = 6,\ a_2 = 15 = 3a_1-3$

$a_3 = 3a_2-3$

$\cdots$

이므로 $a_{n+1} = 3a_n-3$이 성립함을 알 수 있다.

$a_{n+1}-\frac{3}{2} = 3\left(a_n-\frac{3}{2}\right)$에서

$a_n-\frac{3}{2} = \left(a_1-\frac{3}{2}\right)\cdot 3^{n-1}$

$\therefore a_n = \frac{3}{2}(3^n+1)$

따라서 $a_5 = \frac{3}{2}(3^5+1) = 366$이다.

90. 정답 ⑤

[출제의도] 수열을 이용하여 점의 좌표를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

주어진 규칙에 따라 점 A_n을 정하면

$n = 4k-2\ (k=2,\ 3,\ \cdots)$일 때, 점 A_n은 제1사분면에 있다.

$\mathrm{A}_6(3,\ 2),\ \mathrm{A}_{10}(5,\ 4),\ \mathrm{A}_{14}(7,\ 6),\ \cdots,\ \mathrm{A}_{4k-2}(2k-1,\ 2k-2)$

따라서 $\mathrm{A}_{50}(25,\ 24)$이므로 $p+q = 49$이다.

91. 정답 ④

[출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 일반항 추론하기

$\{a_n\}$: 1, 2, 4, 6, 9, $\cdots$ 이므로

$a_{2k-1} = k^2,\quad a_{2k} = k(k+1)$ 이다.

$a_{n+1}-a_n = b_n$ 이라 하면

$\{b_n\}$: 1, 2, 2, 3, 3, 4,$\cdots$ 이므로
$b_n=15$ 인 n 은 28, 29 이다.
$\therefore$ $28+29=57$

92. 정답 128
$2^m \le n < 2^{m+1}$에서 $2^{m+1} \le 2n < 2^{m+2}$이므로
$a_{2n}=(m+1)^2$
$a_n+a_{2n}=m^2+(m+1)^2=2m^2+2m+1 \ge 100$이므로
$m(m+1) \ge \frac{99}{2}$이다.
따라서 $m \ge 7$이고 n의 최솟값은 $2^7=128$이다.

93. 정답 761
[출제의도] 여러 가지 수열을 이용하여 도형문제 해결하기
[해설] 한 개의 빠짐없이 썼을 때, 가장 큰 수는 탑모형의 위, 앞, 뒤, 오른쪽, 왼쪽에서 보이는 정사각형 모양의 면의 수와 같다.
위에서 보이는 면의 수$=1^2+(3^2-1^2)+\cdots+(19^2-17^2)=361$
앞, 위, 오른쪽, 왼쪽에서 보이는 면의 수
$=4\times(1+3+5+\cdots 19)=400$
이므로 보이는 면의 수는 모두 761이다.

94. 정답 88
각 정사각형에서 $y=x(x \ge 0)$ 위의 점이 출발점이다.
(0, 0) 이 출발점인 바둑돌 1
(1, 1) 이 출발점인 바둑돌 2, 3, 4, 5
(2, 2) 이 출발점인 바둑돌 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13
(3, 3) 이 출발점인 바둑돌 14, 15, 16, $\cdots$, 25
$\vdots$
(n, n) 이 출발점인 사각형에서
흰 바둑돌의 개수를 a_n 이라 하면 $a_0=1$, $a_n=4n$
(7, 3) 은 (7, 7) 에서 흰 바둑돌 중 아래로 세 번째이다.
(7, 3) 에 쓰인 번호 $=(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_6)+3$
$=(1+4\cdot1+4\cdot2+\cdots+4\cdot6)+3$
$=85+3=88$

95. 정답①
[출제의도] 수열을 이용하여 나누어진 영역의 개수를 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.
$a_1=6$, $a_2=12$, $a_3=20$, $a_4=30$, $\cdots$
$a_n=6+\sum_{k=1}^{n-1}(2n+4)=n^2+3n+2$이므로 $a_{10}=132$이다.

96. 정답 ③
P_n의 좌표를 순서대로 구해보면
$\mathrm{P}_1(1,1)$, $\mathrm{P}_2(1,2)$, $\mathrm{P}_3(2,1)$, $\mathrm{P}_4(2,2)$,
$\mathrm{P}_5(2,3)$, $\mathrm{P}_6(2,4)$, $\mathrm{P}_7(3,1)$, $\mathrm{P}_8(3,2)$, ...
x좌표가 동일한 것들을 묶어서 군수열로 표시하면
$(\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2),(\mathrm{P}_3,\mathrm{P}_4,\mathrm{P}_5,\mathrm{P}_6),(\mathrm{P}_7,\mathrm{P}_8,...,\mathrm{P}_{14})$, ...
이다.
각 군의 항의 수는 첫째항 2이고 공비 2인 등비수열이고,
$(10, 2^{10})$은 제10군의 마지막 항이다.
제10군까지의 항의 개수의 합이 구하는 n의 값이므로
$\therefore$ $n=\frac{2(2^{10}-1)}{2-1}=2^{11}-2$

97.정답 144
[출제의도] 수열을 이용하여 문제상황을 추측할 수 있다.
흰 바둑돌과 검은 바둑돌을 합쳐 n개가 있다고 하면 n개의 바둑돌은 맨 앞의 바둑돌이 검은 색인 경우와 앞의 두 바둑돌이 흰색−검은색인 경우 두 가지로 나눌 수 있다. 즉,
(i) 맨 앞의 바둑돌이 검은 색인 경우
● $\underbrace{\times\times\times\times\cdots\times}_{n-1\text{ 개}}$ 이므로 $n-1$ 개를 배열
하는 방법의 수 a_{n-1}
(ii) 맨 앞의 두 바둑돌이 흰색−검은색인 경우
○ ● $\underbrace{\times\times\times\cdots\times}_{n-2\text{ 개}}$ 이므로 $n-2$ 개를 배열
하는 방법의 수 a_{n-2}
따라서, $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ 가 성립한다.
이 수열을 a_1 에서 a_{10} 까지 차례로 나열하면 다음과 같다.
2 ,3 ,5 ,8 ,13 ,21 ,34 ,55 ,89 ,144
$\therefore$ $a_{10}=144$

98. 정답16
$a_{50}=a_{25}+1=(a_{13}+1)+1=a_{13}+2=(a_7+1)+2$
$=a_7+3=(a_4+1)+3=a_4+4=(a_2+1)+4$
$=a_2+5=(a_1+1)+5=16$
[참고]$a_1=10$, $a_2=11$, $a_{2n-1}=a_{2n}=a_n+1$ $(n \ge 2)$

99. 정답 ②
[출제의도] 분수식이 들어 있는 수열의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.
$a_n=\left\{\frac{3n}{2}-(n+1)\right\}\times\frac{n}{2}=\frac{n-2}{2}\times\frac{n}{2}$ $(n \ge 3)$
$\therefore$ $\sum_{n=3}^{10}\frac{1}{a_n}=4\sum_{n=3}^{10}\frac{1}{(n-2)n}$
$=2\sum_{n=3}^{10}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)$

$=2\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)\right\}$

$=2\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)$

$=\frac{116}{45}$

100. 정답⑤

[출제의도] 주어진 규칙성을 이용하여 검은 돌의 개수를 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

각 행에 있는 검은 돌의 개수를 세 행씩 묶어서 생각하면

$(1, 0, 1)$, $(2, 1, 2)$, $(3, 2, 3)$, $(4, 3, 4)$, $(5, 4, 5)$, ⋯

이므로 $a_{3k-2}+a_{3k-1}+a_{3k}=3k-1$이다.

$\therefore \sum_{n=1}^{30} a_n=\sum_{k=1}^{10}(3k-1)$

$=3\times55-10=155$

[다른 풀이]

홀수 행에 놓인 검은 돌의 개수를 차례로 나열하면 1, 1, 1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, ⋯이다.

짝수 행에 놓인 검은 돌의 개수를 차례로 나열하면 0, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 6, 6, 6, ⋯이다.

$\therefore \sum_{n=1}^{30} a_n=3(1+3+5+7+9)+3(2+4+6+8)+2\times10$

$=155$

101. 정답 10

[출제의도] 주어진 수열의 규칙성을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$n=1$일 때, $a_1=2, a_1+a_2=3 \quad \therefore\ a_2=1$

$n=2$일 때, $a_2+a_3=6 \quad \therefore\ a_3=5$

$n=3$일 때, $a_3+a_4=9 \quad \therefore\ a_4=4$

⋮

$\therefore\ a_{2n-1}-a_{2n}=1\,(n=1,2,3,\cdots)$

$\therefore\ P-Q=\sum_{n=1}^{10}(a_{2n-1}-a_{2n})=10$

102. 정답 840

[출제의도] 주어진 규칙성을 활용하여 직선들의 교점의 개수를 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

구하는 $a_{15}-a_{14}$의 값은 2단계, 4단계, 6단계, ⋯, 14단계에서 그린 직선의 총 개수와 15단계에서 그린 직선의 개수의 곱과 같다.

$\therefore\ a_{15}-a_{14}=15\times(2+4+6+\cdots+14)=840$

103. 정답 ②

[출제의도] 수열의 규칙성 추론하기

$a_1=5\times6^5+5\times6^4+5\times6^3+5\times6^2+5\times6+5$

$a_2=5\times6^5+5\times6^4+5\times6^3+5\times6^2+5\times6+4$

$a_3=5\times6^5+5\times6^4+5\times6^3+5\times6^2+5\times6+3$

$a_4=5\times6^5+5\times6^4+5\times6^3+5\times6^2+5\times6+2$

$a_5=5\times6^5+5\times6^4+5\times6^3+5\times6^2+5\times6+1$

$a_6=5\times6^5+5\times6^4+5\times6^3+5\times6^2+5\times6+0$

$a_7=5\times6^4+5\times6^3+5\times6^2+5\times6^1+5$

⋮

따라서 위와 같은 규칙에 의해서 $a_{35}=1$

104. 정답 255

[출제의도] 수열의 규칙성을 추론하여 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$b_n=2^{n-1}$이므로 $\sum_{k=1}^{8} b_k=\sum_{k=1}^{8} 2^{k-1}=255$

105. 정답 ③

$b_{2k-1}=2^{-(a_1+a_2+\ldots+a_{2k-1})}$

$b_{2k}=2^{a_2+a_4+\ldots+a_{2k}}$

a_n의 공차를 d라 하면

$b_1\times b_2=2^{-a_1+a_2}=2^d$

$b_3\times b_4=2^{-a_1-a_3+a_2+a_4}=2^{2d}$

⋮

$b_9\times b_{10}=2^{5d}$

$\therefore b_1\times b_2\times b_3\times\cdots\times b_{10} = 2^{d+2d+\cdots 5d}$

$=2^{15d}=8$

$15d=3$이므로 $d=\frac{1}{5}$

106.정답 31

$a_m=3$이므로 $\frac{m}{3^3}=a$, $\therefore m=3^3\cdot a$

(단, $\frac{m}{3^k}=a$를 만족하는 최대 정수 $k=3$이므로 a는 3 배수가 아닌 자연수)

따라서 $a_m=a_{2m}=a_{4m}=a_{5m}=a_{7m}=a_{8m}=3$이고

$a_{3m}=a_{6m}=4$, $a_{9m}=5$이다.

$\therefore a_m+a_{2m}+\cdots+a_{9m}=(3\times6)+(4\times2)+5=31$

107. 정답 171

[출제의도] 계차수열의 일반항 구하기

$3=1+1+1 \Rightarrow a_3=1$

$4=1+1+2=1+2+1=2+1+1$

$\Rightarrow a_4=3$

$5=1+1+3=1+3+1=3+1+1$

$\quad =1+2+2=2+1+2=2+2+1$

$\Rightarrow a_5=6$

$6=1+1+4=1+4+1=4+1+1$

$\quad =1+2+3=1+3+2=2+1+3$

$\quad =2+3+1=3+1+2=3+2+1$

$\quad =2+2+2$

$\Rightarrow a_6=10$

…

따라서 $a_{n+2}=1+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)=\frac{1}{2}(n^2+n)$

$\therefore a_{20}=\frac{1}{2}(18^2+18)=171$

108. 정답 ①

분리된 정육면체의 개수와 한 변의 길이는 다음 표와 같다.

	정육면체의 개수	한 변의 길이
1회 시행 후	2^3	2
2회 시행 후	2^6	1
3회 시행 후	2^9	$\frac{1}{2}$
4회 시행 후	2^{12}	$\frac{1}{4}$
5회 시행 후	2^{15}	$\frac{1}{8}$

$\therefore$ 5회 시행 후 겉넓이의 합은 $\left(\frac{1}{8}\right)^2\times6\times2^{15}=3\times2^{10}$

109. 정답150

꼭지점 C 에서 변AB에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\overline{AB}=25$이므로 $\overline{CH}=\frac{15\times20}{25}=12$

$\overline{AH}=\sqrt{15^2-12^2}=9$ 이고 P_9, Q_9 가 각각 H, C와 일치하므로 $\overline{P_9Q_9}=\overline{CH}=12$

삼각형AHC에서

$\overline{P_1Q_1}+\overline{P_2Q_2}+\overline{P_3Q_3}+\cdots+\overline{P_9Q_9}=(1+2+3+\cdots+9)\tan A$

$=\frac{4}{3}\times\frac{9\times10}{2}=60$

또, 삼각형BHC에서

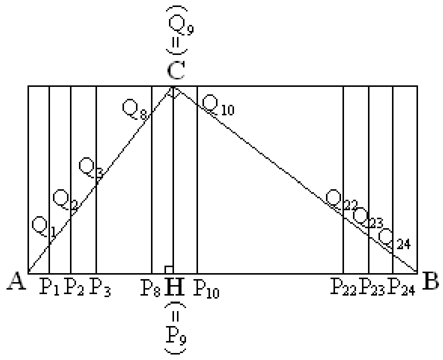
$\overline{P_{10}Q_{10}}+\overline{P_{11}Q_{11}}+\cdots+\overline{P_{24}Q_{24}}=(15+14+13+\cdots+2+1)\tan B$

$=\frac{3}{4}\times\frac{15\times16}{2}=90$

따라서

$\overline{P_1Q_1}+\overline{P_2Q_2}+\overline{P_3Q_3}+\cdots+\overline{P_{24}Q_{24}}=60+90=150$

[다른 풀이] 다음 그림에서



$(\overline{P_1Q_1}+\cdots+\overline{P_8Q_8})+\overline{P_9Q_9}+(\overline{P_{10}Q_{10}}+\cdots+\overline{P_{24}Q_{24}})$

$=\frac{1}{2}\times12\times8+12+\frac{1}{2}\times12\times15=150$

110. 199

19 행까지의 항의 총 개수는 361 개이므로 19 행의 맨 오른쪽 수는 1 이다.

따라서 20 행의 첫항은 3 이고, 항이 개수가 39 개이므로

$\therefore\ (3+5+7+9+1)\times7+(3+5+7+9)$

$=175+24=199$

111. 정답 770

수열 2, 8, 18, 32, …의 일반항은

$a_n=2+\sum_{k=1}^{n-1}(4k+2)=2n^2$

수열의 제 10항까지의 합 $\sum_{n=1}^{10}2n^2=770$

112. 정답 64개

첫 번째 －  1개,  1개,  2개

두 번째－  2개,  3개,  5개

세 번째－  3개,  5개,  8개

⋮

n 번째－  n개,  $2n-1$개,  $3n-1$개

n 번째 후 전체 구슬의 개수는

$\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}(2k-1)+\sum_{k=1}^{n}(3k-1)=n(3n+1)$

$n(3n+1)\le200$인 최대의 n을 구하면 $n=8$이다. 또한 $n=8$까지 꿴 구슬은 모두 200개이므로 구슬 의 개수는

$\sum_{k=1}^{8}(2k-1)=2\cdot\frac{8\cdot9}{2}-8=64$

113. 정답 66개

x보다 크지 않은 최대의 정수를 $[x]$라고 하면

n열에 있는 수의 개수는 $\left[\frac{20}{n}\right]$이므로

$\left[\frac{20}{1}\right]+\left[\frac{20}{2}\right]+\left[\frac{20}{3}\right]+\cdots+\left[\frac{20}{20}\right]$

$=20+10+6+5+\cdots+1=66$

114.정답 ④

$n\geqq 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2a_n-(n-1)^2a_{n-1}$

$a_n=\dfrac{n-1}{n+1}a_{n-1}$

$a_{2009}=\dfrac{2008}{2010}\times\dfrac{2007}{2009}\times\dfrac{2006}{2008}\times\cdots\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{4}\times\dfrac{1}{3}\times 1$

$=\dfrac{1}{1005\cdot 2009}$

115. 정답②

[출제의도] 계차수열을 이용하여 수열의 합 구하기

[해설] $a_1=18$

$a_2=a_1+9\cdot 2+7=a_1+25$

$a_3=a_2+12\cdot 2+9=a_2+33$

$a_4=a_3+15\cdot 2+11=a_3+41$

$\vdots$

$a_{n+1}=a_n+25+(n-1)\cdot 8\ (n\geqq 1)$

따라서 a_{10}의 값을 구하면

$a_{10}=a_1+\sum_{k=1}^{9}(8k+17)$

$=18+8\cdot\dfrac{9\cdot 10}{2}+17\cdot 9=531$

116. 정답 ②

$p_1=p-1$

$p_2=p_1-2$

$p_3=p_2-3$

$\vdots$

$p_n=p_{n-1}-n<n+1$이면 멈춘다.

$\therefore p_{n+1}-p_n=-(n+1)$

$p_n=p_1+\sum_{k=1}^{n-1}\{-(k+1)\}$

$=p-1-2-3-\ldots-n$

$=p-\dfrac{n(n+1)}{2}$

$2p_n=2p-n(n+1)=n+1$

$\therefore 2p=(n+1)^2,\quad p=\dfrac{(n+1)^2}{2}$

117. 정답 ②

다음과 같이 자연수를 나열하여 3 의 배수와 5 의 배수를 지우고 남는

수가 수열 $\{a_n\}$ 의 각 항이므로

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	⋯				

$a_{n+8}=a_n+15$ $\therefore$

$a_{100}=a_4+15\times 12=187$

118. 정답 ①

[출제의도] 수열의 규칙성을 이해할 수 있다.

어두운 정사각형 내부의 자연수의 합은 108 이고, 어두운 정사각형 내부의 한 수 a 를 오른쪽으로 m 만큼 이동하고, 아래쪽으로 n 만큼 이동하면 $a+m+10n$ 이 된다. 따라서 어두운 정사각형 내부의 9 개의 수를 오른쪽으로 m 만큼 이동하고, 아래쪽으로 n 만큼 이동하면 정사각형 내부의 자연수의 합 $S(m,n)$ 은

$S(m,n)=108+9(m+10n)=513$

$m+10n=45$, $m=45-10n$

m 과 n 은 7 이하의 자연수이므로

$m=5$, $n=4$ $\therefore$ $m+n=9$

<별해>

(가운데 수)$\times 9=513$, (가운데 수)$=57$

$\therefore$ $m=5$, $n=4$

119. 정답 ⑤

[출제의도] 조건을 만족하는 점의 규칙성을 발견할 수 있는가를 묻는 문제이다.

점 P_n의 x좌표를 x_n이라 하면

$\dfrac{{x_{n+1}}^2-{x_n}^2}{x_{n+1}-x_n}=n$에서

$x_{n+1}+x_n=n$

그런데 $x_1=1$이므로 수열 $\{x_n\}$은

$1, 0, 2, 1, 3, 2, 4, 3, 5, 4, \cdots$

이다. 따라서 자연수 n에 대하여

$x_{2n-1}=n,\ x_{2n}=n-1$

따라서 점 P_{2009} 즉, 점 $\mathrm{P}_{(2\times 1005-1)}$의 x좌표는 1005이다.

120. 정답64

$475=8\times 59+3$이므로 원 O_{60}에 있다.

원 O_1에 채워지는 수들은 l_1부터 채워지고

원 O_2에 채워지는 수들은 l_4부터 채워지고

원 O_3에 채워지는 수들은 l_3부터 채워지고

원 O_4에 채워지는 수들은 l_2부터 채워지고

⋮

$60=4\times15$에서 475는 l_2부터 채워지고, 세 번째 채워지므로 l_4에 있다.

$\therefore m+n=60+4=64$

121. 정답 ⑤

각 정사각형에서 검은 타일의 개수와 흰 타일의 개수의 차를 구해 보자.

한 변의 길이가 2 인 정사각형은 검은 타일의 개수가 흰 타일의 개수보다 2 개 많다.

한 변의 길이가 4 인 정사각형은 흰 타일의 개수가 검은 타일의 개수보다 4 개 많다.

한 변의 길이가 6 인 정사각형은 검은 타일의 개수가 흰 타일의 개수보다 6 개 많다.

...

한 변의 길이가 20 인 정사각형은 흰 타일의 개수가 검은 타일의 개수보다 20 개 많다.

따라서, 전체 타일의 개수가 400 개가 되었을 때, 흰 타일의 개수가 검은 타일의 개수보다 20 개 많다.

122. 정답 245

[출제의도] 주어진 수열의 특징을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

A_8의 마지막 수는

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+8^2=\frac{8\cdot9\cdot17}{6}=204$$

이므로 A_9의 처음 수는 205이다.

A_9의 마지막 수는

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+9^2=204+81=285$$

따라서 A_9의 정중앙에 적힌 수는

$$\frac{205+285}{2}=\frac{490}{2}=245$$

123. 정답 10

[출제의도] 수열의 일반항을 이용하여 수열의 합 구하기

$a_n=n(n+x-1)$이므로

$$\sum_{n=1}^{10}a_n=330+55x=880$$

$\therefore x=10$

124. 정답 ④

$\{a_n\}$: $1,\ 1,\ -1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ 1,\ -1, -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \cdots$

제 1항부터 6개의 항이 규칙적으로 반복되므로

$2011=6\times335+1$에서

$$\sum_{k=1}^{2011}a_k=\sum_{k=1}^{2010}a_k+a_{2011}=1\text{이다. } (\because a_{2011}=1)$$

125.정답 ①

[출제의도] 로그함수의 그래프를 이해하고 수열의 합 구하기

[해설] $\mathrm{A}_n(2^{n-1},\,0)$, $\mathrm{A}_{n+1}(2^n,\,0)$, $\mathrm{B}_n(2^n,\,n)$, $\mathrm{C}_n(2^n,\,-n)$이므로 $S_n=n\cdot2^{n-1}$이다.

$\sum_{k=1}^{10}S_k=S$라 하면

$S=1+2\cdot2+3\cdot2^2+\cdots+10\cdot2^9\cdots\cdots$①

$2S=1\cdot2+2\cdot2^2+3\cdot2^3+\cdots+10\cdot2^{10}\cdots\cdots$②

①−②를 하면

$-S=1+2+2^2+\cdots+2^9-10\cdot2^{10}=-9\cdot2^{10}-1$ 이다. 따라서 $S=9\cdot2^{10}+1$이다.

126. 정답 ①

[출제의도] 도형의 규칙성을 추론하여 수학내적 문제해결하기

$$\mathrm{S}_3=\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{3}\times3^2+\frac{2\pi}{3}\times2^2+\frac{2\pi}{3}\times1^2\right)$$

$$=\frac{\pi}{3}(3^2+2^2+1^2)$$

$$\mathrm{S}_4=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\times4^2+\frac{\pi}{2}\times3^2+\frac{\pi}{2}\times2^2+\frac{\pi}{2}\times1^2\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}(4^2+3^2+2^2+1^2)$$

⋮

$$\mathrm{S}_{20}=\frac{\pi}{20}(20^2+19^2+\cdots+1^2)$$

$$=\frac{287\pi}{2}$$

127. [정답] ④

[해설]

호의 길이를 수열로 나타내면

수열 $\{l_n\}$: $\frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ 2\pi,\ \cdots$

수열 $\{l_n\}$은 공차가 $\frac{\pi}{2}$, 첫째항이 $\frac{\pi}{2}$인 등차수열을 이룬다.

$$\sum_{k=1}^{n}l_k=\frac{n\left\{\pi+(n-1)\frac{\pi}{2}\right\}}{2}=189\pi$$

$\therefore n=27$이므로 A_{27}의 좌표는 $(14,\ 0)$이다.

$\therefore a+50=64$

128. 정답 ⑤

[출제의도] 주어진 수열의 일반항을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $<10,1>+<10,10>=2$ (참)

ㄴ. $<n+1, 2> + <n+1, n> = 2n$ 이므로

$<11, 2> + <11, 10> = 20$ (참)

ㄷ. 제 n 행의 수의 합을 S_n 라 하면 $S_{n+1} = 2S_n$

$\therefore\ <12, 3> + <12, 4> + \cdots + <12, 10>$

$= 2^{11} - 2 - 22 = 2024$ (참)

129. 정답 20

양변을 $a_n a_{n+1}$ 로 나누면 $2n = \dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n}$

$\dfrac{1}{a_n} = b_n$ 이면, $2n = b_{n+1} - b_n$, $b_1 = \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{2}$

수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 $\dfrac{1}{2}$ 이고 계차의 일반항이 $2n$ 이므로

$$b_n = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} 2k = \frac{2n^2 - 2n + 1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{2}{2n^2 - 2n + 1}$$

$p = -2,\ q = 1 \qquad \therefore\ 5p^2 q = 20$

130. 정답⑤

[출제의도] 수열의 항을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $a_6 = a_3 + 1 = (a_1 - 1) + 1 = 1$ (참)

ㄴ. $n = 2^k$ 이면

$a_n = a_{2^k} = a_{2^{k-1}} + 1 = a_{2^{k-2}} + 2 = \cdots$

$= a_{2^0} + k = k + 1$ (참)

ㄷ. $a_{2n} = a_n + 1$, $a_{2n+1} = a_n - 1$ 이므로

$a_{2n} - a_{2n+1} = 2$가 성립한다.

$\therefore\ a_{2^k} - a_{2^k+1} = 2$

따라서 $n = 2^k + 1$일 때, ㄴ을 이용하면

$a_n = a_{2^k+1} = a_{2^k} - 2 = (k+1) - 2 = k - 1$ (참)

131. 정답 ③

[출제의도] 두 개의 도형이 연결된 도형에서 패턴 찾기를 이용해 어떤 점까지의 경로의 수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$a_{n+2} = 2a_{n+1} + (a_{n+1} - a_n)$

$\Leftrightarrow a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n$

$a_1 = 3$, $a_2 = 3a_1 - 1 = 8$, $a_3 = 3a_2 - a_1 = 21$, $a_4 = 3a_3 - a_2 = 55$,

$a_5 = 3a_4 - a_3 = 144$

132. 정답 ②

[출제의도] 수열의 성질을 이용하여 부등식을 증명할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

$= \left(1 - \frac{1}{2}\right)(1 \cdot 2a_1) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)(3 \cdot 4a_2) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right)(5 \cdot 6a_3)$

$+ \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)\{(2n-1) \cdot 2na_n\}$

$= \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)(1 \cdot 2a_1)$

$+ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)(1 \cdot 2a_1 + 3 \cdot 4a_2)$

$+ \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)(1 \cdot 2a_1 + 3 \cdot 4a_2 + 5 \cdot 6a_3) + \cdots$

$+ \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)\{1 \cdot 2a_1 + 3 \cdot 4a_2 + \cdots + (2n-1) \cdot 2na_n\}$

$\geq \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)$

$+ 3\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + n\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)$

$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$

$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}$

$- 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$

$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

(가) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ (나) $n\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)$

(다) $2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$

133. 정답 ④

[출제의도] 수학적 귀납법을 이용하여 주어진 식 증명하기

(ⅰ) $n = 2$일 때,

(좌변)=(우변) $\boxed{a_1 + 2a_2}$

(ⅱ) $n = i\ (i \geq 2)$일 때, 주어진 등식이 성립함을 가정하면,

즉, $iS_i - \sum_{k=1}^{i-1} S_k = \sum_{k=1}^{i} k a_k$ 임을 가정할 때,

$(i+1)S_{i+1} - \sum_{k=1}^{i} S_k$

$= (i+1)S_{i+1} - \left(\sum_{k=1}^{i-1} S_k + S_i\right)$

$= (i+1)S_{i+1} - \left(\boxed{(i+1)S_i - \sum_{k=1}^{i} ka_k}\right)$

$= \sum_{k=1}^{i} k a_k + \boxed{(i+1)(S_{i+1} - S_i)}$

$= \sum_{k=1}^{i+1} k a_k$

134. 정답 ②

[출제의도] 수학적귀납법을 이용하여 참인 명제 증명하기

가. ka_k 나. $a_{k+1}-\dfrac{1}{k+1}$

135. 정답 ③

[출제의도] 수열의 일반항 구하기

[해설] (가) $\boxed{2n}$, (나) $\boxed{d(n^2)-1}$,

(다) $\boxed{\dfrac{d(n^2)+1}{2}}$

136. 정답③

i) $n=2$ 일 때 $\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$ 에서

$\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}$

ii) $n=k\,(k\geqq 2)$일 때, 주어진 부등식이 성립함을 가정하면

$\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{k}$

$\sqrt{k+1}-\left(\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{k}}+\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$

$=\sqrt{k+1}-\left(\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)-\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$

$=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}-\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}=\dfrac{k-\sqrt{k(k+1)}}{\sqrt{k+1}}<0$

$\therefore\ \dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{k}}+\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$

따라서 $n=k+1$ 일때도 주어진 부등식은 성립한다.

i), ii)에서 2 이상의 자연수 n 에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

137. 정답 ③

(가) $\log_2 4\sqrt{2}$, (나) $\dfrac{1}{2}$, (다) $\dfrac{k+1}{2}$

138. [정답] ④

[해설]

자연수 $n(n\geq 3)$에 대하여 $S_n=\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\dfrac{n}{(n-i)2^{i-1}}$이라 하자.

(1) $n=3$일 때, $S_3=3<4$이므로 성립한다.

(2) $n=k(k\geq 3)$일 때, $S_k<4$가 성립한다고 가정하자.

$n=k+1$일 때,

$$S_{k+1}=\sum_{i=1}^{k}\frac{k+1}{k+1-i}\times\frac{1}{2^{i-1}}$$

$$=\frac{k+1}{k}+\frac{k+1}{k-1}\times\frac{1}{2}+\frac{k+1}{k-2}\times\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{k+1}{2^{k-1}}$$

$$=\frac{k+1}{k}+\frac{1}{2}\left(\frac{k}{k-1}+\frac{k}{k-2}\times\frac{1}{2}+\cdots+\frac{k}{2^{k-2}}\right)$$

$$+\frac{1}{2k}\times\left(\frac{k}{k-1}+\frac{k}{k-2}\times\frac{1}{2}+\cdots+\frac{k}{2^{k-2}}\right)$$

$$=1+\frac{1}{k}+\frac{1}{2}S_k+\frac{1}{2k}S_k=1+\frac{1}{k}+\frac{k+1}{2k}S_k$$

그런데, $k\geq 3$, $S_k<4$이므로

$S_{k+1}=1+\dfrac{1}{k}+\dfrac{k+1}{2k}\times S_k<4$이다.

그러므로 (1), (2)에 의하여 3이상의 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

따라서 $f(k)=\dfrac{1}{2k}+\dfrac{k+1}{2k}=\dfrac{k+2}{2k}$이므로 $f(3)=\dfrac{5}{6}$이다.

139. 정답②

(가) (좌변)$=H_{2^0}=H_1=1$

(나) $H_{2^{k+1}}=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{2^k}+\left(\dfrac{1}{2^k+1}+\cdots+\dfrac{1}{2^{k+1}}\right)$

$$=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^k}+\left(\frac{1}{2^k+1}+\cdots+\frac{1}{2^k+2^k}\right)$$

$$=H_{2^k}+\sum_{l=1}^{2^k}\frac{1}{2^k+l}$$

(다) $\dfrac{1}{2^k+1}+\cdots+\dfrac{1}{2^{k+1}}$에서 항수는 2^k개 이고,

각 항은 $\dfrac{1}{2^{k+1}}$보다 크거나 같으므로

$\dfrac{1}{2^k+1}+\cdots+\dfrac{1}{2^{k+1}}\geqq 2^k\cdot\dfrac{1}{2^{k+1}}$

140. 정답 ①

(가) $2i+k^2+k-1$, (나) k^2+3k+1

141. 정답 ①

i) $n=1$ 일때, (좌변)$=1$, 우변$=1^2$ 이므로 성립한다.

ii) $n=k$일때, 성립한다고 가정하면

$k+(k+1)(+(k+2)+\cdots+(3k-2)=(2k-1)^2$

$n=k+1$ 일때 성립함을 보이자.

$(k+1)(k+2)+\cdots+\boxed{3k+1}$

$=k+(k+1)+(k+2)+\cdots+(3k-2)+\boxed{8k}$

$=(2k-1)^2+\boxed{8k}$

$=\boxed{(2k+1)^2}$

그러므로 $n=k+1$일 때도 성립한다.

i), ii)에 의해서 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

142. 정답③

[출제의도] 수학적귀납법으로 증명하기

(가) $\dfrac{1}{k+1}$, (나) $>$, (다) $2k-1$

143. 정답 ②

[출제의도] 수학적귀납법으로 행렬의 거듭제곱 증명하기

㈎ xy

㈏ $x+y-1$

㈐ $xA(0)$

144. 정답 ①

(1) $n=2$일 때, $\dfrac{3}{8}>\boxed{\dfrac{1}{4}}$

(2) $n=k(k\geq 2)$ 일 때,

$\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{2^k}\right)>1-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots\dfrac{1}{2^k}\right)$이라 가정하면

$\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{2^k}\right)\times\boxed{1-\dfrac{1}{2^{k+1}}}$

$>1-\boxed{\dfrac{1}{2^{k+1}}}\ -\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots\dfrac{1}{2^k}\right)+\dfrac{1}{2^{k+1}}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots\dfrac{1}{2^k}\right)$

$>1-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots\dfrac{1}{2^{k+1}}\right)$

따라서 $n=k+1$일 때에도 주어진 부등식은 성립한다.

그러므로 (1),(2)에 의하여 $n\geq 2$이상인 자연수 n에 대하여 주어진 부등식은 성립한다.

$\therefore$(가)$:\dfrac{1}{4}$ (나)$:1-\dfrac{1}{2^{k+1}}$ (다)$:\dfrac{1}{2^{k+1}}$

145. 정답 ①

(i) $n=1$일 때,

(좌변)$={}_1C_1=1$, (우변)$=2^0=1$

이므로 주어진 등식은 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 주어진 식이 성립한다고 가정하면

${}_kC_1+2\cdot{}_kC_2+3\cdot{}_kC_3+\cdots+k\cdot{}_kC_k=k\cdot 2^{k-1}$

이제 $n=k+1$일 때, 성립함을 보이자.

$${}_{k+1}C_1+2\cdot{}_{k+1}C_2+3\cdot{}_{k+1}C_3+\cdots+k\cdot{}_{k+1}C_k+(k+1)\cdot{}_{k+1}C_{k+1}$$

$$=\sum_{i-1}^{k+1}(i\cdot{}_{k+1}C_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{k}(i\cdot{}_{k+1}C_i)+(k+1)\cdot{}_{k+1}C_{k+1}$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\left\{i\cdot\left(\boxed{{}_kC_{i-1}+{}_kC_i}\right)\right\}+(k+1)\cdot{}_{k+1}C_{k+1}$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\{(1+i-1)\cdot{}_kC_{i-1}\}+\sum_{i=1}^{k}(i\cdot{}_kC_i)+(k+1)\cdot{}_kC_k$$

$$=\sum_{i=1}^{k}{}_kC_{i-1}+\sum_{i=1}^{k}\{(i-1)\cdot{}_kC_{i-1}\}$$

$$+\sum_{i=1}^{k}(i\cdot{}_kC_i)+k\cdot{}_kC_k+{}_kC_k$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{k}{}_kC_{i-1}+{}_kC_k\right)+\left[\sum_{i=1}^{k}\{(i-1)\cdot{}_kC_{i-1}\}+k\cdot{}_kC_k\right]$$

$$+\sum_{i=1}^{k}(i\cdot{}_kC_i)$$

$$=\boxed{\sum_{i=0}^{k}{}_kC_i}+\sum_{i=1}^{k}(i\cdot{}_kC_i)+\sum_{i=1}^{k}(i\cdot{}_kC_i)$$

$$=2^k+k\cdot 2^{k-1}+k\cdot 2^{k-1}=\boxed{(k+1)\cdot 2^k}$$

146. 정답 ②

[출제의도] 수학적귀납법을 이용하여 부등식의 귀납적 추론하기

<증명>

(i) $n=2$일 때

(좌변)$=\left(1+\dfrac{1}{1^3}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^3}\right)=\dfrac{9}{4}$

(우변) $=3-\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$ 이므로 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때 ㉠이 성립한다고 가정하면

$\left(1+\dfrac{1}{1^3}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^3}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{k^3}\right)<3-\dfrac{1}{k}$ $\cdots$ ㉡

㉡의 양변에 $1+\dfrac{1}{(k+1)^3}$ 를 곱하면

$\left(1+\dfrac{1}{1^3}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^3}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{k^3}\right)\left(1+\dfrac{1}{(k+1)^3}\right)$

$<\left(3-\dfrac{1}{k}\right)\left(1+\dfrac{1}{(k+1)^3}\right)$ $\cdots$ ㉢

㉢의 우변을 정리하면

(우변) $=3-\dfrac{k^3+3k^2+2}{k(k+1)^3}$

이 때, $\dfrac{k^3+3k^2+2}{k(k+1)^3}-\dfrac{1}{k+1}>0$

따라서 $\left(3-\dfrac{1}{k}\right)\left(1+\dfrac{1}{(k+1)^3}\right)<3-\dfrac{1}{k+1}$

그러므로 $n=k+1$ 일 때도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식은 성립한다.

147. 정답 ④

[출제의도] 수열의 합과 관련된 부등식의 증명과정을 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\triangle$ABC $\backsim$ $\triangle$ACD 이므로 $\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{AC}}$ 이다.

따라서

$1:\sqrt{k}=\overline{\mathrm{AD}}:1$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AD}}=\dfrac{1}{\sqrt{k}}=$ (가)

$\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{AB}}-\overline{\mathrm{BE}}=\overline{\mathrm{AB}}-\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{k}-\sqrt{k-1}=$ (나)

$1+\sum_{k=2}^{n}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})=1+\sqrt{n}-1=\sqrt{n}=$ (다)

148. 정답 ③

[출제의도] 수학적귀납법을 이용하여 주어진 식 증명하기

(1) $n=1$일 때,

(좌변)$=\sum_{k=1}^{1}a_k=a_1=\boxed{N\,!}$

(우변)$=\frac{N+1}{N+1}a_1=a_1=\boxed{N\,!}$

이므로 (★)이 성립한다.

(2) $n=m$일 때, (★)이 성립한다고 가정하면

$\sum_{k=1}^{m}a_k=\frac{N+m}{N+1}a_m$이다.

$n=m+1$일 때, (★)이 성립함을 보이자.

$$\sum_{k=1}^{m+1}a_k=\frac{N+m}{N+1}a_m+a_{m+1}$$

$$=\frac{N+m}{N+1}a_m+\boxed{\frac{(m+N)!}{m!}}$$

$$=\frac{1}{N+1}\times\frac{(m+N)!}{(m-1)!}+\boxed{\frac{(m+N)!}{m!}}$$

$$=\frac{1}{N+1}\left\{\boxed{\frac{(m+N+1)!}{m!}}\right\}$$

$$=\frac{N+m+1}{N+1}a_{m+1}$$

149. 정답 ⑤

$n=k$일 때 성립한다고 가정하였기 때문에

$$(k-1)a_n+\sum_{m=1}^{k-1}ma_m=0$$

따라서 $0=ka_{k+1}+\sum_{m=1}^{k}ma_m$

$$=ka_{k+1}+\sum_{m=1}^{k-1}ma_m+ka_k$$

$$=ka_{k+1}+(\boxed{1-k})\times a_k+ka_k$$

이므로 $0=ka_{k+1}+a_k$

$\therefore\ a_{k+1}=\boxed{-\frac{1}{k}}\times a_k=\frac{(-1)^k}{k!}\alpha$

따라서 (가), (나)에 알맞은 식을 곱한

$$f(k)=(1-k)\times\left(-\frac{1}{k}\right)=\frac{k-1}{k}$$

$$\therefore\ f(10)=\frac{9}{10}$$

150. 정답 ④

[해설] 순서도에 따라 인쇄되는 S의 값은 31, T의 값은 21이다.

$\therefore\ S-T=10$

151.정답④

$$S=\sum_{k=2}^{11}(k^2-k)=440$$

152.정답 ③

[출제의도] 순서도를 이용하여 수열의 합 구하기

$$S=1+3+3^2+\ldots3^9=\frac{1}{2}(3^{10}-1)$$

153. 정답 ①

[출제의도] 순서도를 이용하여 약수의 곱 추론하기

인쇄되는 S는 72 의 양의 약수의 곱이다.

$72=2^3\times3^2$

72 의 양의 약수는 다음과 같다.

$\times$	1	2	2^2	2^3
1	1	2	2^2	2^3
3	3	2×3	$2^2\times3$	$2^3\times3$
3^2	3^2	2×3^2	$2^2\times3^2$	$2^3\times3^2$

$\therefore\ S=2^{18}\times3^{12}$

154. 정답160

[출제의도] 순서도를 이용하여 수열의 합 구하기

[해설] 순서도에 따라 계산되는 값은 표와 같다.

N	1	2	3	4	5
S	2^1	2×2^2	3×2^3	4×2^4	5×2^5

155.정답 ③

순서도는 $a_1=5,\ a_{n+1}=2a_n+3$인 수열 $\{a_n\}$에서 a_{10}을 구하는 것과 같다.

$a_n=8\cdot2^{n-1}-3=2^{n+2}-3\quad\therefore a_{10}=4093$

156. 정답 4

A	r	S
58	0	0
29	0	
14	1	1
7	0	
3	1	2
1	1	3
0	1	4

157. 정답 ④

$a_{n+1}-\alpha=2(a_n-\alpha)$

$\therefore \alpha=-2$

$a_{n+1}+2=2(a_n+2)$에서

수열 $\{a_n+2\}$은 초항이 a_1+2이고 공비가 2인 등비수열이므로

일반항 $a_n+2=(a_1+2)2^{n-1}=4\cdot 2^{n-1}=2^{n+1}$

$\therefore a_n=2^{n+1}-2$

$\therefore a_{10}=2^{11}-2=2048-2=2046$

158. ②

(가)

① $\boxed{k(k+1)!}+\{(k+1)^2+1\}\cdot(k+1)!$

$=\{k+(k+1)^2+1\}\cdot(k+1)!$

$=\boxed{\{k^2+3k+2\}}\cdot(k+1)!$

(나)

$=(k+1)(k+2)(k+1)!$

$=(k+1)\,(k+2)!$

(다)

159. 정답 ④

(1) $n=1$일 때,

(좌변)$=\frac{1}{2}$, (우변)$=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ 이므로

(*)이 성립한다.

(2) $n=m$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m}a_k=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}-\frac{m}{m+1}$$

이다. $n=m+1$일 때, (*)이 성립함을 보이자.

수열 $\{a_n\}$의 정의에 의해

$a_{m+1}=\frac{m^2}{(m+1)(m+2)}a_m$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{m+1}a_k=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}-\frac{m}{m+1}+a_{m+1}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}-\frac{m}{m+1}+\boxed{\frac{m^2}{(m+1)(m+2)}}a_m$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}-\frac{m}{m+1}$$

$$+\frac{m^2}{(m+1)(m+2)}\cdot\frac{(m-1)^2}{m(m+1)}\cdot\cdots\cdot\frac{1^2}{2\cdot 3}a_1$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}-\frac{m}{m+1}$$

$$+\frac{m^2}{(m+1)(m+2)}\cdot\frac{(m-1)^2}{m(m+1)}\cdot\cdots\cdot\frac{1^2}{2\cdot 3}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}-\frac{m}{m+1}+\boxed{\frac{1}{(m+1)^2(m+2)}}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}-\frac{m}{m+1}+\frac{1}{(m+1)^2}$$

$$-\boxed{\frac{1}{(m+1)(m+2)}}$$

$$=\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k^2}-\left\{\frac{m}{m+1}+\frac{1}{(m+1)(m+2)}\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k^2}-\frac{(m+1)^2}{(m+1)(m+2)}$$

$$=\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k^2}-\frac{m+1}{m+2}$$

그러므로 $n=m+1$일 때에도 (*)이 성립한다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 (*)이 성립한다.

160. 정답④

[단계1]에 찍히는 점의 개수는 $(2k-1)$개이므로 [단계n]까지 찍힌 모든 점의 개수는

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$$

$n^2=100$에서 $n=10$이다.

따라서, 100번째 찍히는 점은 [단계10]에서 19번째로 찍히는 점이다.

$\therefore (p,\,q)=(18,\,19)$

$\therefore p+q=37$

161. 정답 ④

ㄱ. (반례) $p=2$이면

$a_2=a_1+1=1\neq 2a_1=0$ (거짓)

ㄴ. (가), (나)에서

$a_1=0$,

$a_2=a_1+1=1$

$a_3=a_2+1=2$

...

$a_p=a_{p-1}+1=p-1$

$\therefore\ a_1+a_2+...+a_p$

$=0+1+2+...+(p-1)=\frac{p(p-1)}{2}$ (참)

ㄷ. (다)에 $k=p$를 대입하면

$a_{p+p}=a_{2p}=a_p=p-1$,

$a_{2p+p}=a_{3p}=a_{2p}=a_p=p-1$,

...

$a_{kp}=a_p=p-1$

$\therefore\ a_p+a_{2p}+...+a_{kp}=k(p-1)$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

참고)

$p=5$일 때 수열 $\{a_n\}$은 다음과 같다.

0, 1, 2, 3, 4, 0, 1, 2, 3, 4, 0, 1, 2, 3, 4, ⋯

162. ④
A에서 B_n까지 가는 경우의 수를 a_n이라 하면 A에서 B_{n+1}까지 가는 경우의 수는 B_n을 거쳐가는 경우 a_n(가지)와 B_n을 거쳐가지 않는 경우 3가지가 있다.

$\therefore a_{n+1}=a_n+3$

$a_1=4$

$\therefore a_n=3n+1$

$a_3+a_7=10+22$

$=32$

163. 정답 ③

$$\sum_{k=1}^{m+1}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\dots+\frac{1}{m+1}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\dots+\frac{1}{m+1}\right)+\{5(m+1)-3\}\frac{1}{m+1}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\dots+\frac{1}{m+1}\right)+\frac{5m+2}{m+1}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(5k-3)\left\{\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\dots+\frac{1}{m}\right)+\frac{1}{m+1}\right\}+\frac{5m+2}{m+1}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\dots+\frac{1}{m}\right)$$

$$+\sum_{k=1}^{m}(5k-3)\frac{1}{m+1}+\frac{5m+2}{m+1}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\dots+\frac{1}{m}\right)$$

$$+\frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{m}(5k-3)+\frac{5m+2}{m+1}$$

$$=\frac{m(5m+3)}{4}+\frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{m+1}(5k-3)$$

$$=\frac{(m+1)(5m+8)}{4}$$

따라서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은 차례로 $5m+2, m, 5k-3$이다.

164. 정답 ②

$$a_{k+1}=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\dots+\frac{1}{3k+4}$$

$$=(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\dots+\frac{1}{3k+1})$$

$$+(\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4})-\frac{1}{k+1}$$

$$=a_k+(\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4})-\frac{1}{k+1}$$

한편, $(3k+2)(3k+4)=9k^2+18k+8<9k^2+18k+9=(3k+3)^2$

이므로 $\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+4}=\frac{6k+6}{(3k+2)(3k+4)}$

$$>\frac{6k+6}{(3k+3)^2}=\frac{2(3k+3)}{(3k+3)^2}=\frac{2}{3k+3}$$

165.[정답] ⑤
[해설]

$$b_{n+1}=\frac{a_1a_2\cdots a_{n+1}}{(n+1)!}$$

$$=\frac{a_1a_2\cdots a_n\times(n+1)+(n-1)!}{(n+1)!}$$

$$=\frac{a_1a_2\cdots a_n}{n!}+\frac{1}{n(n+1)}$$

$\therefore$(가)$=f(n)=\frac{1}{n(n+1)}$

b_n을 구하면

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}$$

$$=\frac{a_1}{1!}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=1+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{2n-1}{n}$$

$\therefore$(나)$=g(n)=\frac{2n-1}{n}$

따라서

$$f(13)\times g(7)=\frac{1}{13\cdot 14}\times\frac{13}{7}=\frac{1}{98}$$

166. 정답 13
등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d $(d\neq 0)$라 하면

$a_n=0+(n-1)d$에서 $\therefore\ a_{n+1}=dn$

이 때, $\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}d(k-1)\ =d\times\frac{n(n-1)}{2}$ 이고,

$a_{n+1}b_n=dn\cdot b_n=\frac{dn(n-1)}{2}$ 이어야 하므로

$b_n=\frac{n-1}{2}$ (단, $n=1,2,3,\cdots$)

$\therefore\ b_{27}=\frac{27-1}{2}=13$

167. 정답 ④

ㄱ. n행의 k번째 수를 a_k라 하면 $a_k = \left[\frac{n}{k}\right] = 1$이기위해서는

$1 \leqq \frac{n}{k} < 2,\ k \leqq n < 2k\ (\because k > 0)$

$\therefore\ \frac{n}{2} < k \leqq n$ 여기서 정수 k의 개수는

ⅰ) n이 짝수일 때, $n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2} = \left[\frac{n+1}{2}\right]$ $\left(\because\ \frac{n}{2} < k \leqq n\right)$

ⅱ) n이 홀수일 때, $n - \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \left[\frac{n+1}{2}\right]$

$\left(\because\ \frac{n-1}{2} < k \leqq n\right)$[참]

[별해] $n = 2k$ $(k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이면

$\left[\frac{2k}{k+1}\right] = \cdots = \left[\frac{2k}{2k}\right] = 1$ 이므로 값이 1인 항은 k개이다.

$n = 2k-1$ $(k = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$이면

$\left[\frac{2k-1}{k}\right] = \cdots = \left[\frac{2k-1}{2k-1}\right] = 1$이므로 값이 1인 항은 k개

따라서 제 n행에서 값이 1인 항은 $\left[\frac{n+1}{2}\right]$개 [참]

ㄴ. 100행에서 값이 3인 항은$\left[\frac{100}{k}\right] = 3$ 을 만족하는 정수 k의 개수이다.

$3 \leqq \frac{100}{k} < 4$

$\therefore\ 25 < k \leqq \frac{100}{3}$ $k = 26, 27, \ldots 33$의 8개이다. [참]

ㄷ. 3열에서 값이 5인 항은 $\left[\frac{n}{3}\right] = 5$

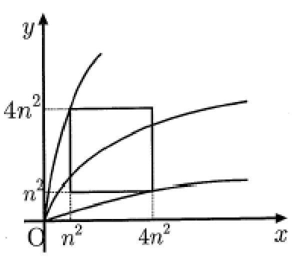
$5 \leqq \frac{n}{3} < 6$

$\therefore 15 \leqq n < 18$ $n = 15, 16, 17$의 3개이다 [거짓]

따라서 옳은 것은 ㄱ,ㄴ이다

168. 정답 ④

함수 $y = k\sqrt{x}$ 의 그래프가 정사각형 A_n과 만날 필요충분조건은 함수 $y = k\sqrt{x}$ 의 그래프가 점 $(4n^2,\ n^2)$을 지나므로 $n^2 = k\sqrt{4n^2}$ $\therefore$ $k = \frac{n}{2}$



함수 $y = k\sqrt{x}$ 의 그래프가 점 $(n^2,\ 4n^2)$을 지나므로 $4n^2 = k\sqrt{n^2}$ $\therefore$ $k = 4n$

따라서 a_n은 부등식 $\frac{n}{2} \leqq k \leqq 4n$을 만족하는 자연수 k의 개수이다.

ㄱ. $a_5 = \frac{7}{2} \times 5 + \frac{1}{2} = 18$ [거짓]

ㄴ. n이 홀수일 때

$a_n = 4n - \left(\frac{1}{2}(n+1) - 1\right) = \frac{7}{2}n + \frac{1}{2}$

$a_{n+2} = 4(n+2) - \left(\frac{1}{2}(n+3) - 1\right) = \frac{7}{2}n + \frac{15}{2}$

n이 짝수일 때

$a_n = 4n - \left(\frac{1}{2}n\right) + 1 = \frac{7}{2}n + 1$

$a_{n+2} = 4(n+2) - \left(\frac{1}{2}(n+2)\right) + 1 = \frac{7}{2}n + 8$

$\therefore a_{n+2} - a_n = 7$ [참]

ㄷ. $\sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{5} a_{2k-1} + \sum_{k=1}^{5} a_{2k}$

$= \sum_{k=1}^{5}\left(\frac{7}{2}(2k-1) + \frac{1}{2}\right) + \sum_{k=1}^{5}\left(\frac{7}{2}(2k) + 1\right)$

$= 200$ [참]

169.[정답] 100

[해설] $n = 2$일 때, $\{3, 3^3\}$이므로

$S = \{3^4\}$ 즉, $f(2) = 1$

$n = 3$일 때, $\{3, 3^3, 3^5\}$이므로

$S = \{3^4, 3^6, 3^8\}$ 즉, $f(3) = 3$

$n = 4$일 때 $\{3, 3^3, 3^5, 3^7\}$이므로

$S = \{3^4, 3^6, 3^8, 3^{10}, 3^{12}\}$ 즉, $f(4) = 5$

……

$n = k$일 때, $\{3, 3^3, \cdots, 3^{2k-1}\}$이므로

$S = \{3^4, 3^6, \cdots, 3^{4(k-1)}\}$ 즉, $f(k) = 2k-3$

$\therefore \sum_{n=2}^{11} f(n) = \sum_{n=2}^{11}(2n-3)$

$= 1 + 3 + 5 + \cdots + 19$

$= 10^2 = 100$

170.[정답] 21

[해설]

$a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = \log\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \log\frac{n(n+1)}{2}$

$= \log\frac{n+2}{n}$ $(n \geq 2)$

이때 $n = 1$이면 $a_1 = \sum_{k=1}^{1} a_k = \log 3$이므로 $a_n = \log\frac{n+2}{n}$ $(n \geq 1)$

$\therefore p = \sum_{k=1}^{20} a_{2k} = \sum_{k=1}^{20}\log\frac{2k+2}{2k} = \sum_{k=1}^{20}\log\frac{k+1}{k}$

$= \log\frac{2}{1} + \log\frac{3}{2} + \cdots + \log\frac{21}{20}$

$= \log\left(\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \cdots \times \frac{21}{20}\right)$

$= \log 21$

$\therefore 10^p = 10^{\log 21} = 21$

171.[정답] 19

[해설]

2^{n+1} 열짜리 블록의 개수는

$1, 2, 3, 4, \cdots, 2^n, \cdots, 2^{n+1}$ …… ㉠

㉠에서 1 회 시행후 홀수는 그대로 두고 짝수는 2 로 나누어 나타내면

$1, 3, 5, 7, \cdots, (2^{n+1}-1)$ …… ㉡

과

$1, 2, 3, 4, \cdots, 2^n$ …… ㉢

으로 표시된다.

시행을 모두 마쳤을 때, 남은 블록의 합은

i) ㉠은 $f(2^{n+1})$

ii) ㉡은

$$1, 3, 5, 7, \cdots, (2^{n+1}-1) = \frac{2^n(2^{n+1}-1+1)}{2} = 2^{2n} = 4^n$$

iii) ㉢은 $f(2^n)$

$\therefore f(2^{n+1}) = 4^n + f(2^n) \leftarrow$ 계차수열을 이용하자.

$$f(2^n) = f(2^1) + \sum_{k=1}^{n-1} 4^k$$

$$= 2 + \frac{4(4^{n-1}-1)}{4-1}$$

$$= \frac{4^n+2}{3}$$

$$\therefore \frac{q}{p} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{\frac{4^{n+1}+2}{3}} = \frac{3}{16}$$

$\therefore p+q = 16+3 = 19$

1. 정답 ②

$-x=t$로 놓으면

$x\to-\infty$이면 $t\to\infty$

$$\therefore \text{(주어진 식)}=\lim_{t\to\infty}\frac{-t+1}{\sqrt{t^2-t}+t}=\lim_{t\to\infty}\frac{-1+\dfrac{1}{t}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{t}}+1}=-\frac{1}{2}$$

2. 정답 ②

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-7n}{n^2+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\dfrac{7}{n}}{1+\dfrac{5}{n^2}}=2$$

3.정답④

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)(n+4)-n^2}{(n+1)(n+2)-n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+7n+12)-n^2}{(n^2+3n+2)-n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{7n+12}{3n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{7+\dfrac{12}{n}}{3+\dfrac{2}{n}}=\frac{7}{3}$$

4.정답 ⑤

[출제의도] 수열의 극한 계산하기

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{4n^2+1}-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{4+\dfrac{1}{n^2}}-1}=3$$

5. 정답④

$$\text{(주어진 식)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4-\dfrac{1}{n}}+\sqrt{4+\dfrac{1}{n}}}{1}=4$$

6. 정답 ①

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n})}{4n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\sqrt{\dfrac{n^2}{n^2}+\dfrac{2n}{n^2}}+\sqrt{\dfrac{n^2}{n^2}-\dfrac{2n}{n^2}}\right)}{\dfrac{4n}{n}}=\frac{4}{4}=1$$

7. 정답②

[출제의도] 무리식이 포함된 수열의 극한값을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2+\dfrac{1}{n}}+\sqrt{2-\dfrac{1}{n}}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

8. 정답 ③

주어진 식을 변형하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}}{\sqrt{n}}\times\frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+n)-(n^2-n)}{\sqrt{n}(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}\right)}=0$$

9. 정답 ①

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n^2+1}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\dfrac{1}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+1}=1$$

10. 정답 ②

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+3n+5}-n)(\sqrt{n^2+3n+5}+n)}{\sqrt{n^2+3n+5}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+5}{\sqrt{n^2+3n+5}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\dfrac{5}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{n^2}}+1}$$

$$=\frac{3}{2}$$

11. 정답 ②

[출제의도] 무한수열의 극한값 구하기

$$\text{(준식)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4n^2+2n}-2n\right)\left(\sqrt{4n^2+2n}+2n\right)}{\sqrt{4n^2+2n}+2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{4n^2+2n}+2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{4+\frac{2}{n}}+2}=\frac{1}{2}$$

12. 정답 ③

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n^2+1-n^2)}{\sqrt{n^2+1}+n}=\frac{1}{2}$$

13. 정답①

[출제의도] 무리식의 극한값 계산하기

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2-n+1}-\sqrt{n^2-n-1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\{(n^2-n+1)-(n^2-n-1)\}}{\sqrt{n^2-n+1}+\sqrt{n^2-n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2-n+1}+\sqrt{n^2-n-1}}$$

$$=1$$

14. 정답 ①

[출제의도] 극한값 계산하기

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}\right)}{2n}=1$$

15. 정답 ②

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+4n+11}-n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+4n+11}-n)(\sqrt{n^2+4n+11}+n)}{\sqrt{n^2+4n+11}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+11}{\sqrt{n^2+4n+11}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{11}{n}}{\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{11}{n^2}}+1}=2$$

16. 정답 ③

[출제의도] 수열의 극한을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}=\frac{1}{2}$$

17. 정답 ③

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 4^n-3^n}{4^n+3^n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{2}{4^n}}=3$$

18. 정답 ④

[출제의도] 무한수열의 극한값 구하기

2^{n-1} 으로 분모와 분자를 나누어 정리하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4+\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}}{1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}}=4$$

19. 정답 ①

[출제의도] 무한등비수열의 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 3^n-3\cdot 4^n}{2^{2n}+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n-3}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n}=\frac{0-3}{1+0}=-3$$

20. 정답 ①

[출제의도] 무한등비수열의 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 4^n+3}{4^{n+1}+2^n}=\frac{1}{2}$$

21. 정답 ④

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{5}{3^n}}{1-\frac{1}{3^n}}=6$$

22. 정답 ⑤

$$(\text{준식})=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 3+5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1+2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}=6$$

23. 정답 ①

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n-1}}{4^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{4}}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n}=\frac{1}{4}$$

24. 정답 ④

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+n+1}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=6$$

25. 정답 ②

준 식의 분모, 분자를 5^n 으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-2^n}{5^{n+1}+3^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{5+3\left(\frac{3}{5}\right)^n}=\frac{1}{5}$$

26. 정답 ①

[출제의도] 수열의 극한에 대한 성질을 이용하여 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+2}+2^{2n-1}}{4^n-3^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{9\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{1}{2}}{1-3\left(\frac{3}{4}\right)^n}=\frac{1}{2}$$

27.정답 ②

$$\lim_{n\to\infty}\left\{2+\left(-\frac{1}{5}\right)^n\right\}=2$$

28. 정답 ⑤

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2-\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}$$

29. 정답 ②

각 항을 자연수 n으로 나누면

$$\frac{2n-1}{n}<a_n<\frac{2n+4}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n}\leq\lim_{n\to\infty}a_n\leq\lim_{n\to\infty}\frac{2n+4}{n}$$

$2\leq\lim\limits_{n\to\infty}a_n\leq 2$ 이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$이다.

30. 정답③

$(n^2-1)a_n=b_n$ 라 하면 $a_n=\frac{1}{n^2-1}b_n$ 이고

$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=2006$ 이다.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}n^2+1\right)a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}n^2+1\right)\cdot\frac{b_n}{n^2-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n^2+1}{n^2-1}\cdot b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n^2+1}{n^2-1}\cdot\lim_{n\to\infty}b_n$$

$$=\frac{1}{2}\times 2006=1003$$

31. 정답18

$$\frac{(2n+4)(9n^2+1)}{n(n^2+3)}\leq a_n\leq\frac{(2n+4)(9n^2+10)}{n(n^2+3)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+4)(9n^2+1)}{n(n^2+3)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+4)(9n^2+10)}{n(n^2+3)}=18$$

이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=18$정답 18

$$\frac{(2n+4)(9n^2+1)}{n(n^2+3)}\leq a_n\leq\frac{(2n+4)(9n^2+10)}{n(n^2+3)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+4)(9n^2+1)}{n(n^2+3)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+4)(9n^2+10)}{n(n^2+3)}=18$$

이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=18$

32. [출제의도] 극한값의 성질을 이해하여 미정계수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\lim_{n\to\infty}\left(a+\frac{b}{n}\right)=a=2,\ \sum_{n=1}^{5}(2n+b)=30+5b=60$$

$\therefore\ a+b=2+6=8$

33. 정답 ⑤

[출제의도] 무한수열의 극한값 구하기

$$(\text{분모})=\left\{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}^2$$

$$=\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{n}\right)^2=\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

$$(\text{준식})=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n}{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}}{\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}=4$$

34. 정답 81

[출제의도] 수열의 극한을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(3n)^3}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}=81$$

35. 정답 ③

[출제의도] 수열의 극한의 성질을 이용하여 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$로 놓으면 $12+4\alpha=9\alpha-3\ \therefore\ \alpha=3$

36. 정답16

[출제의도] 귀납적으로 정의된 수열의 극한값 구하기

$a_n - 16 = (a_1 - 16)\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ 이므로

$a_n = -14\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} + 16$ 이다.

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = 0$이므로

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = 16$

37. 정답②

[출제의도] 수열의 극한의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$\sqrt{n^2} < \sqrt{n^2+1} < \sqrt{(n+1)^2}$

$n < \sqrt{n^2+1} < n+1$

$\therefore a_n = n$

$\lim_{n\to\infty} a_n\left(\sqrt{n^2+1} - a_n\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1} - n\right)$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} = \frac{1}{2}$

38. 정답 ④

[출제의도] 무한수열의 극한에 관한 성질을 이해하기

$3n-1 < na_n < 3n+2$의 양변을 n으로 나누면

$\frac{3n-1}{n} < a_n < \frac{3n+2}{n}$

이다. 따라서, $\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n} = 3$, $\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{n} = 3$이므로

$\lim_{n\to\infty} a_n = 3$ 이다.

39. 정답 12

[출제의도] 수열의 극한을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$f(x) = 2x^2 - 2nx + \frac{1}{2}n^2 + 6n + 1 = 2\left(x - \frac{n}{2}\right)^2 + 6n + 1$

$\therefore \mathrm{P}_n\left(\frac{n}{2},\ 6n+1\right)$

따라서 $x_n = \frac{n}{2}$, $y_n = 6n+1$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{6n+1}{\frac{n}{2}} = 12$

40. 정답 ⑤

$B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^2 & 0 \\ 0 & 4^2 \end{pmatrix}$

$B^3 = \begin{pmatrix} 3^2 & 0 \\ 0 & 4^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^3 & 0 \\ 0 & 4^3 \end{pmatrix}$

…

이므로 $B^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}$임을 알 수 있다.

$\therefore A^{-1}B^nA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3^n & -2\cdot 3^n + 2\cdot 4^n \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{b_n + c_n}{a_n + d_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{-2\cdot 3^n + 2\cdot 4^n}{3^n + 4^n}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{-2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2}{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1} = 2$

41. 정답 36

[출제의도] 수열의 극한의 성질 이해하기

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2n+3} = 2$, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{3n+1} = 3$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2n+3} \times \frac{b_n}{3n+1}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2n+3} \times \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{3n+1} = 2\times 3 = 6$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n b_n}{n^2+4}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{a_n b_n}{(2n+3)(3n+1)} \times \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)(3n+1)}{n^2+4}$

$= 6\times 6 = 36$

42. 정답 ③

[출제의도] 여러 가지 수열의 문제해결하기

ㄱ. $a_2 = 9$, $b_2 = 8$ 이므로 $a_2 + b_2 = 17$ 이다. (참)

ㄴ. $\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3a_n & 2a_n + b_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$에서 $a_{n+1} = 3a_n$ 이고

$a_1 = 3$ 이므로 $a_n = 3^n$ 이다.

이 때, $b_{n+1} = b_n + 2\cdot 3^n$ 이므로

$b_n = b_1 + 2\sum_{k=1}^{n-1} 3^k = 2 + 3(3^{n-1} - 1) = 3^n - 1$ (참)

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^n - 1}{3^n} = 1$ (거짓)

43. 정답 2

[출제의도] 무한수열의 수렴 이해하기

무한수열 $\left\{(x+2)(x^2-4x+3)^{n-1}\right\}$이 수렴하기 위해서는

(ⅰ) 첫째항이 $x+2=0$일 때, $x=-2$

(ii) 공비가 $r=x^2-4x+3$이므로
$-1<x^2-4x+3\le 1$에서 정수 x는 1, 3이다.
따라서, (i), (ii)에 의하여 정수 x는 -2, 1, 3이므로 모든 정수 x의 합은 2이다.

44. 정답 ④

[출제의도] 극한값의 성질을 이용하여 수학내적 문제 해결하기

$y=x^2$과 $y=-x+n$의 교점의 x좌표를
α_n, β_n (단, $\alpha_n<\beta_n$)라 하면 교점의 좌표는
$(\alpha_n,\ -\alpha_n+n)$, $(\beta_n,\ -\beta_n+n)$이다. … ①
또한 α_n, β_n는 $x^2+x-n=0$의 두 근이므로 $\alpha_n+\beta_n=-1$, $\alpha_n\beta_n=-n$이다. … ②
①, ② 에 의하여

$$l_n^{\,2}=2(\alpha_n-\beta_n)^2=2\{(\alpha_n+\beta_n)^2-4\alpha_n\beta_n\}=8n+2$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{l_n^{\,2}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{8n+2}{n}=8$$

45. 정답②

[출제의도] 무리식이 포함된 수열의 극한을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+\frac{n}{2}}-n\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+\frac{n}{2}}-n\right)\left(\sqrt{n^2+\frac{n}{2}}+n\right)}{\sqrt{n^2+\frac{n}{2}}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+\frac{n}{2}-n^2}{\sqrt{n^2+\frac{n}{2}}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{2n}}+1}=\frac{1}{4}$$

46. 정답 ①

[출제의도] 극한값을 구할 수 있다.

(주어진 식)

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2005(n+\sqrt{n^2-2004})}{2004(\sqrt{n^2-2005}+n)}$$

$$=-\frac{2005}{2004}$$

47. 정답②

$$(\text{준식})=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(4k-1)}-\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(4k-3)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n^2+n}-\sqrt{2n^2-n}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

48. 정답14

(주어진 식)

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{28n+13}{\sqrt{n^2+15n+13}+\sqrt{n^2-13n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{28+\frac{13}{n}}{\sqrt{1+\frac{15}{n}+\frac{13}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{13}{n}}}$$

$$=\frac{28}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=14$$

49. 정답 ②

[출제의도] 원의 성질을 이해하고 극한의 성질을 이용하여 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+3n}-2n)=\frac{3}{4}$$

50. 정답 ④

[출제의도] 수열의 극한값 구하기

$$\text{준식}=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-b)n+1}{\sqrt{n^2+an+3}+\sqrt{n^2+bn+2}}$$

$$=\frac{a-b}{2}=5\quad\therefore\ a-b=10$$

51. 정답 ③

[출제의도] 무한수열의 극한값 구하기

ㄱ. $a_n=2^n$이므로 $S_n=2^{n+1}-2$이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}-2}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right)=2$$

ㄴ. $a_n=(-1)^n$ 이면

$$S_n=\begin{cases}n\text{ 이} & 0\\ n\text{ 이} & -1\end{cases}\ \text{이므로}$$

수열 $\left\{\dfrac{S_n}{a_n}\right\}$은 1또는 0으로 진동한다.

ㄷ. $S_n=3^n-1$이므로 $a_n=2\cdot 3^{n-1}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-1}{2\cdot 3^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{3^{n-1}}\right)=\frac{3}{2}$$

∴ㄱ, ㄷ의 경우에 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{a_n}$가 존재한다.

52. 정답 ①

$p=0$, $q=3$이므로
p, q를 두 근으로 하는 이차방정식은

$(x-0)(x-3)=0$이다.

$x^2-3x=0 \quad \therefore a+b=-3$

53. 정답 ④

$$(\text{준식})=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}(3k-1)}{2n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n}{2n^2+3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{3}+\frac{1}{2n}}{2+\frac{3}{n^2}}=\frac{3}{4}$$

54. 정답③

[출제의도] 수열의 극한의 성질을 이용하여 극한 값을 구하는 문제이다.

$$(\text{준식})=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}}=\frac{1}{2}$$

55. 정답 ①

분모와 분자를 n^2 로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2005}{n^2+2005}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{2005}{n^2}}{1+\frac{2005}{n^2}}=1$$

56. 정답④

$f(x)$를 $(x-1)$로 나눈 나머지는 $f(1)=2^n+3^n+1=a_n$

$f(x)$를 $(x-2)$로 나눈 나머지는 $f(2)=4\cdot2^n+2\cdot3^n+1=b_n$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n+1}{4\cdot2^n+2\cdot3^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1+1\left(\frac{1}{3}\right)^n}{4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n+2\cdot1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

$$=\frac{1}{2}$$

57. 정답 ⑤

① 0에 수렴한다. ② $\frac{1}{2}$에 수렴한다.

③ 0에 수렴한다. ④ -1에 수렴한다.

⑤ 수렴하지 않는다.

58.정답 ①

[출제의도] 무한수열의 수렴, 발산을 판별하기

① $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n=0$

② $\lim_{n\to\infty}(-2)^n \Rightarrow -2,\ 4, -8,\ 16,\ -32, \cdots$ 이므로 발산

③ 발산

④ $\lim_{n\to\infty}(100n-n^2)=\lim_{n\to\infty}n(100-n)=-\infty$

⑤ $0,2,0,2,\cdots$ 이므로 발산

59.정답 ②

[출제의도] 무한수열의 수렴조건 알기

$-1<2x+1\leq 1 \Leftrightarrow -1<x\leq 0$

60. 정답④

[출제의도] 무한등비수열의 수렴 조건을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

주어진 수열이 수렴할 조건은

$-1<-\sin\frac{k\pi}{4}\leq 1,\ -1\leq \sin\frac{k\pi}{4}<1$

따라서 $\sin\frac{k\pi}{4}=1$ 인 10이하의 자연수 k는 2, 10이므로 구하는 자연수의 개수는 8(개)이다.

61. 정답 21

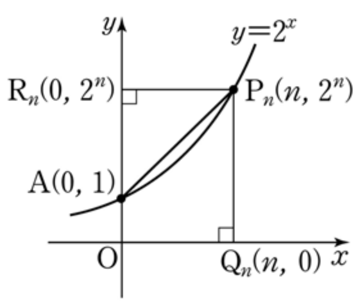
[출제의도] 무한등비수열의 극한값 구하기

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2}-\left(-\frac{1}{2}\right)+2}{\left(-\frac{1}{2}\right)^n+1}=5$$

$$f(4)=\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+2}-6\cdot4+2}{4^n+1}=16$$

$$\therefore f\left(-\frac{1}{2}\right)+f(4)=5+16=21$$

62. 정답 ①



오른쪽 그림에서

$\triangle AP_nR_n$의 넓이

$T_n=\frac{1}{2}(2^n-1)\times n$

사각형 AOQ_nP_n의 넓이

$S_n=\frac{1+2^n}{2}\times n$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{1+2^n}=1$$

63. 정답 ①

$$A^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1+\frac{1}{3}+\ldots+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} & \left(\frac{1}{3}\right)^n\end{pmatrix}$$ 이므로

$$c_n=1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} \quad \therefore \lim_{n\to\infty} c_n = \frac{3}{2}$$

64. 정답②

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n}{n^3a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n}{n^2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2a_n} = 2\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

65. 정답10

[출제의도] 수렴하는 수열의 극한에 대한 성질 이해하기

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}\left\{\left(n+\frac{1}{n}\right)^{10}-\frac{1}{n^{10}}\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{\{(n^2+1)^{10}-1\}}{n^{k+10}}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\{(n^2+1)^{10}-1\}}{n^{k+10}}$ 가 수렴하기 위해서는 $k \geqq 10$

$\therefore$ 최솟값은 10

66. 정답 54

[출제의도] 수열의 극한의 성질을 이해할 수 있다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6n+1}{n^2\cdot a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n+1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\cdot a_n}$$

$=6\cdot 9=54$

67. 정답 ③

$\frac{2a_n-3}{a_n+1}=b_n$ 으로 놓으면

$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\frac{3}{4}$, $a_n=\frac{b_n+3}{2-b_n}$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n+3}{2-b_n}=\frac{\frac{3}{4}+3}{2-\frac{3}{4}}=3$$

68. 정답②

$$A^2=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^2&0\\0&3^2\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}2^2&0\\0&3^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^3&0\\0&3^3\end{pmatrix},\ \cdots,\ A^n=\begin{pmatrix}2^n&0\\0&3^n\end{pmatrix}$$

이므로 $a_n=2^n$, $b_n=3^n$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{3a_n-2b_n}{2a_n+3b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 2^n-2\cdot 3^n}{2\cdot 2^n+3\cdot 3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n-2}{2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n+3}$$

$$=-\frac{2}{3}$$

69. 정답④

[출제의도] 극한의 성질을 이용하여 극한 구하기

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-4}{a_n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1^3+2^3+\ldots+n^3}{n^4+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2\frac{1}{n^4+1}=\frac{1}{4}$$

이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$라 하면 $\frac{\alpha-4}{\alpha+3}=\frac{1}{4}$

$\therefore \alpha=\frac{19}{3}$

70. 정답②

$a_1=S_1=1$,

$a_n=S_n-S_{n-1}\,(n\geqq 2)=(2n^2-n)-\{2(n-1)^2-(n-1)\}$

$=(2n^2-n)-(2n^2-5n+3)=4n-3$

$\therefore\ a_n=4n-3\,(n\geqq 1)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-3n}{2n^2-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{3}{n}}{2-\frac{1}{n}}=\frac{4}{2}=2$$

71. 정답 ④

$S_n=2^n+3^n$이므로

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(2^n+3^n)-(2^{n-1}+3^{n-1})$

$=2\cdot 3^{n-1}+2^{n-1}(n\geqq 2)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 3^{n-1}+2^{n-1}}{2^n+3^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}=\frac{2}{3}$$

72. 정답②

ㄱ. (반례) $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=n+1$이라 하면

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$이지만

수열 $\{b_n\}$은 발산한다. (거짓)

ㄴ. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\{(a_n-2b_n)+2b_n\}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-2b_n)+2\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0+2=2$ (참)

ㄷ. (반례) $a_n=n-\frac{1}{n}$, $b_n=n$, $c_n=n+\frac{1}{n}$이라 하면

$a_n<b_n<c_n$이고, $\lim\limits_{n\to\infty}(c_n-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0$이지만

수열 $\{b_n\}$은 발산한다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

73. 정답⑤

ㄱ. $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha \cdot 0 = 0$

ㄴ. $a_n - b_n = c_n$ 이라 놓으면 $b_n = a_n - c_n$ 이므로

$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(a_n - c_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha - 0 = \alpha$

ㄷ. $a_n - b_n = c_n$ 이라 놓으면 $b_n = a_n - c_n$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n - c_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{c_n}{a_n}\right) = 1$

74. 정답 ③

[출제의도] 무한수열의 극한에 관한 기본성질을 이해하고 추론하기

ㄱ. $-|b_n| \le b_n \le |b_n|$에서 $\lim_{n\to\infty}(-|b_n|) = \lim_{n\to\infty}|b_n| = 0$이므로

$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$이다. (참)

ㄴ. $(3n+1)a_n = c_n$라 하면 $\lim_{n\to\infty} c_n = 6$이고 $a_n = \frac{c_n}{3n+1}$ 이므로

$\lim_{n\to\infty} na_n = \lim_{n\to\infty}\frac{nc_n}{3n+1}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+1}c_n$

$= \frac{1}{3}\times 6 = 2$이다. (참)

ㄷ. (반례) $a_n = (-1)^n$, $b_n = 2(-1)^n$에 대하여

$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 2$(수렴)이지만, 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 각각 발산한다. (거짓)

75. 정답 ③

ㄱ. $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \frac{b_n}{a_n} = 0$ (참)

ㄴ. (반례) $a_n = n+1$, $b_n = n$이면 $\alpha = 1$이지만

$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 1$이다. (거짓)

ㄷ. $\frac{b_n}{a_n} = c_n$으로 놓으면 $b_n = a_n c_n$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_n c_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{c_n} = \frac{1}{\alpha}$ (참)

76. 정답 ②

[출제의도] 무한등비수열의 극한값 구하기

$6^n = 2^n \cdot 3^n$ 이므로

$T(n) = (1+2+\cdots+2^n)(1+3+\cdots+3^n)$

$= (2^{n+1}-1)\left(\frac{3^{n+1}-1}{2}\right)$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{6^n}{T(n)} = \frac{2(2^n\cdot 3^n)}{(2^{n+1}-1)(3^{n+1}-1)} = \frac{1}{3}$

77. 정답 ②

[출제의도] 여러 가지 수열의 극한값 구하기

$a_{n+2} - \frac{2}{3}a_{n+1} - \frac{1}{3}a_n = 0$

$a_{n+2} - a_{n+1} = -\frac{1}{3}(a_{n+1} - a_n)$

$\therefore a_n = a_1 + \frac{(a_2 - a_1)\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{3}{4}\cdot 8\left\{1-(-\frac{1}{3})^{n-1}\right\}\right] = 7$

78. 정답②

$a_{n+1} = 0.9a_n + 0.2b_n$ …㉠, $b_{n+1} = 0.1a_n + 0.8b_n$ …㉡

㉠+ ㉡ $a_{n+1} + b_{n+1} = a_n + b_n = \cdots = a_1 + b_1 = 10$ …㉢

㉠, ㉢에서 $a_{n+1} = 0.7a_n + 2$ …㉣, ㉡, ㉢에서

$b_{n+1} = 0.7b_n + 1$ …㉤

㉣에서 $a_n = \frac{20}{3} - \frac{8}{3}\left(\frac{7}{10}\right)^{n-1}$ 이므로 $\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{20}{3}$

마찬가지로 ㉤에서 $\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{10}{3}$ 이다.

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} b_n}{\lim_{n\to\infty} a_n} = \frac{\frac{10}{3}}{\frac{20}{3}} = \frac{1}{2}$

79. 정답 25

(준식)$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{kn+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{n(n+1-n+1)}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{kn+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{2n}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{k+\frac{1}{n}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}{2}$

$= \sqrt{k} = 5$

$\therefore k = 25$

80. 정답12

$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5$

$= a_1 + (a_3 - a_2) + (a_5 - a_4)$

$= a_1 + 2d = 4 + 2d = 28 \quad \therefore d = 12$

$\therefore a_n = 12n - 8$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = \frac{12n-8}{n} = 12$

81. 정답 15

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{3n(2n+3)}{(2n-1)(2n+1)} - 2a_n\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3n(2n+3)}{(2n-1)(2n+1)} - \lim_{n\to\infty} 2a_n$$

그런데 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n$ 이므로 $\alpha = \frac{3}{2} - 2\alpha$ 에서 $\alpha = \frac{1}{2}$

$\therefore 30\alpha = 15$

<다른풀이>

$a_1 = 2$, $a_2 = 1 = \frac{3}{3}$, $a_3 = \frac{4}{5}$, $a_4 = \frac{5}{7}$,…이므로

$a_n = \frac{n+1}{2n-1}$ 임을 알 수 있다.

따라서 $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n-1} = \frac{1}{2}$ 에서 $30\alpha = 15$ 이다.

82. 정답④

[출제의도] 나머지 정리를 활용하여 극한값을 구하기

$(x+1)^n = (x-1)(x-2)Q(x) + ax + b$ 러 하면

$R(x) = ax+b$ 이다.

$x=1$ 을 대입하면 $2^n = a+b$

$x=2$ 을 대입하면 $3^n = 2a+b$

$\therefore a = 3^n - 2^n$, $b = -3^n + 2^{n+1}$

$R(0) = -3^n + 2^{n+1}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-3^n + 2^{n+1}}{3^n + 2^n} = -1$$

83. 정답 ②

집합 $\{k \mid 1 \le k \le 2n,\ k$는 자연수$\}$의 세 원소 a, b, c 중 두 수만 결정되면 남은 수는 자동적으로 결정된다.

$b=2$인 경우 a를 정하는 방법은 1가지

$b=3$인 경우 a를 정하는 방법은 2가지

……

$b=n$일 경우 a를 정하는 방법은 $(n-1)$가지

$b=n+1$일 경우 c를 정하는 방법은 $(n-1)$가지

$b=n+2$일 경우 c를 정하는 방법은 $(n-2)$가지

……

$b=2n-1$일 경우 c를 정하는 방법은 1가지

$\therefore$ 등차수열을 이루는 집합 $\{a, b, c\}$의 개수는 $T_n = n(n-1)$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{n^2} = 1$$

[다른풀이] $2b = a+c$이고, $a<b<c$이므로 a와 c를 결정하면 b는 자동적으로 결정된다.

$a+c$는 짝수이므로 (a, c)를 만들 수 있는 경우는

짝수 n개 중 2개를 취하는 경우 ${}_nC_2 = \frac{n(n-1)}{2}$

홀수 n개 중 2개를 취하는 경우 ${}_nC_2 = \frac{n(n-1)}{2}$

$\therefore$ 등차수열을 이루는 집합 $\{a, b, c\}$의 개수는 $T_n = n(n-1)$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{n^2} = 1$$

84. 정답 ①

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n}\left(x - \frac{k}{n}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n}\left(x^2 - \frac{2x}{n}k + \frac{1}{n^2}k^2\right)$$

$$= nx^2 - (n+1)x + \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}$$

$$= n\left(x - \frac{n+1}{2n}\right)^2 - \frac{(n+1)^2}{4n} + \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}$$

이므로

최솟값 $a_n = -\frac{(n+1)^2}{4n} + \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{(n+1)^2}{4n^2} + \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\right\}$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

85. 정답②

[출제의도] 무한등비수열이 수렴할 조건을 알고 있는가를 묻는 문제이다.

주어진 무한수열이 수렴할 조건은

$-1 < \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}x \le 1$, $-\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin\frac{\pi}{8}x \le \frac{\sqrt{2}}{2}$

이때 $0<x<16$ 일 때, $0 < \frac{\pi}{8}x < 2\pi$ 이므로 위의 부등식의 해는

$0 < \frac{\pi}{8}x \le \frac{\pi}{4}$, $\frac{3}{4}\pi \le \frac{\pi}{8}x < \frac{5}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi < \frac{\pi}{8}x < 2\pi$

따라서 구하는 자연수 x는 1, 2, 6, 7, 8, 9, 15 의 7 개이다.

86. 정답 ④

[출제의도] 무한등비수열의 공비에 따른 극한값 구하기

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n-1} - r + 2}{r^n + 1} = \begin{cases} \frac{1}{r} & (|r|>1) \\ 1 & (r=1) \\ 2-r & (|r|<1) \end{cases}$$ 이다.

따라서 ㄴ, ㄷ이 참이다.

87. 정답①

$\lim_{n\to\infty} a_n = x$ 라 하면 $a_{n+1} = 2 + \frac{1}{a_n}$ 에서

$x = 2 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$

근의 공식에 의하여 $x = 1 \pm \sqrt{2}$, $x > 2$ 이므로, $x = 1 + \sqrt{2}$

88. 정답 24

[출제의도] 무한수열의 극한값 구하기

$(2n-1)a_n=c_n$이라 하면 $a_n=\dfrac{c_n}{2n-1}$,

$(n^2+3n+2)b_n=d_n$라 하면 $b_n=\dfrac{d_n}{n^2+3n+2}$, $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=3$,

$\lim\limits_{n\to\infty}d_n=2$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)^3a_nb_n$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^3}{(2n-1)(n^2+3n+2)}\lim\limits_{n\to\infty}c_n\lim\limits_{n\to\infty}d_n$

$=4\times3\times2=24$

89. 정답②

[출제의도] 무한수열의 극한값 구하기

원 $x^2+y^2=4^n+1$위의 점 $P_n(2^n,\ 1)$에서의 접선의 방정식은 $y=-2^nx+4^n+1$이므로 점 Q_n의 좌표는 $(2^n+2^{-n},0)$이다.

삼각형OP_nQ_n의 넓이 $S_n=2^{n-1}+2^{-n-1}$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_{n+1}}{S_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+2^{-n-2}}{2^{n-1}+2^{-n-1}}=2$

90. 정답 ⑤

[출제의도] 두 수열을 수학적 귀납법으로 정의하고 두 수열의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. 산술기하평균의 성질 $\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ 이므로

$a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}\geq\sqrt{a_nb_n}=b_{n+1}$ (참)

ㄴ. $\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}=\dfrac{2}{\sqrt{a_nb_n}}=\sqrt{\dfrac{(a_n+b_n)^2}{4a_nb_n}}$

$=\sqrt{\dfrac{a_n^2+2a_nb_n+b_n^2}{4a_nb_n}}=\sqrt{\dfrac{2+\dfrac{a_n}{b_n}+\dfrac{b_n}{a_n}}{4}}$

$=\dfrac{\sqrt{\left(\sqrt{\dfrac{a_n}{b_n}}+\sqrt{\dfrac{b_n}{a_n}}\right)^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{\dfrac{a_n}{b_n}}+\sqrt{\dfrac{b_n}{a_n}}}{2}$ (참)

ㄷ. 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 수렴하므로

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_{n+1}=b$

라 하면, $a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$ 에서

$a=\dfrac{a+b}{2}\cdots$ ①

$b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$ 에서

$b=\sqrt{ab}\cdots$ ②

①, ②를 연립해서 풀면 $a=b$ 이다.(참)

91. 정답⑤

[출제의도] 수열의 극한을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

주어진 식을 이용하여 각 항을 차례로 나열하면

$1, 2, 1, 2, 1, 2, \cdots$

ㄱ. n이 홀수이면 $a_n=1$이므로 $a_{11}=1$이다. (참)

ㄴ. $a_{2n}=2$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=2$이다. (참)

ㄷ. $n=2m$ (m은 자연수)일 때

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{1}{2m}\sum\limits_{k=1}^{2m}a_k=\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{3m}{2m}=\dfrac{3}{2}$

$n=2m-1$ (m은 자연수)일 때

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{1}{2m-1}\sum\limits_{k=1}^{2m-1}a_k=\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{3m-2}{2m-1}=\dfrac{3}{2}$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=\dfrac{3}{2}$ (참)

92. 정답③

[출제의도] 수열의 극한의 성질 이해하기

$\{a_n\}: -1, 1, -1, 1, \cdots$

$\{b_n\}: 1, -1, 1, -1, \cdots$ 이므로

ㄱ. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=-1$

ㄴ. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n+b_n=0$

ㄷ. $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 모두 발산하므로 성립하지 않는다.

93. 정답④

n일 후 정오에 측정한 2호 댐의 저수량을 x_n (만톤)이라하면

$x_n\times0.98+100=x_{n+1}$

$(x_{n+1}-5000)=0.98(x_n-5000)$ ∴

$x_n-5000=(x_1-5000)0.98^{n-1}$

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=500+\lim\limits_{n\to\infty}(x_1-5000)0.98^{n-1}=5000$

따라서 측정되는 저수량은 5000 만톤에 한없이 가까워진다.

94. 정답 24

$\overline{AC_n}-\overline{OC_n}=\sqrt{n^2+48^2}-n$, $\overline{B_1D_1}=\dfrac{48}{n}$ 이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\overline{AC_n}-\overline{OC_n}}{\overline{B_1D_1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+48^2}-n}{\dfrac{48}{n}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n^2+48^2}-n)(\sqrt{n^2+48^2}+n)}{\dfrac{48}{n}(\sqrt{n^2+48^2}+n)}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{48^2}{48\left(\sqrt{1+\dfrac{48^2}{n^2}}+1\right)}=\dfrac{48}{2}=24$

95. 정답 240

[출제의도] 수열의 극한을 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$a_{n+1}=a_n\times 0.88+x$ 이므로

$a_n=a_{n-1}\times 0.88+x$

$=a_{n-2}\times 0.88^2+(1+0.88)x$

$\cdots$

$=1200\times 0.88^n+(1+0.88+0.88^2+\cdots+0.88^{n-1})x$

$=1200\times 0.88^n+\dfrac{1-0.88^n}{1-0.88}x$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(1200\times 0.88^n+\dfrac{1-0.88^n}{0.12}x\right)=\dfrac{x}{0.12}$

$\lim_{n\to\infty}a_n\leq 2000$ 에서 $\dfrac{x}{0.12}\leq 2000\quad\therefore\ x\leq 240$

따라서 구하는 x의 최댓값은 240이다.

96. 정답 25

[출제의도] 주어진 도형에서 수열의 극한값 구하기

$a_n=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{10}{n}\times\dfrac{10}{n}=\dfrac{50}{n^2}$

$\{b_n\}$ 0, 3, 7, 12, 18, $\cdots$ 에서

$b_n=0+\sum_{k=1}^{n-1}(k+2)=\dfrac{n(n-1)}{2}+2(n-1)$

$=\dfrac{n^2+3n-4}{2}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_nb_n=25$

97. 정답 ④

[출제의도] 귀납적으로 정의된 수열을 이해하고 이를 실생활문제에 적용시킬 수 있는가를 묻는 문제이다.

한없이 반복하여 남은 물과 알콜의 양에 대한 합은

$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+400$이고 극한을 취하면

$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}(\dfrac{1}{2}a_n+400)\quad\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=800.$

b_n을 n번 시행으로 남은 알콜의 양으로 정할 때

$b_{n+1}=\dfrac{1}{2}b_n+100$ 이다. 따라서 극한값을 취하면

$\lim_{n\to\infty}b_{n+1}=\lim_{n\to\infty}(\dfrac{1}{2}b_n+100)\ \therefore \lim_{n\to\infty}b_n=200$, 농도=

$\dfrac{200}{800}\times 100=$ 25%이다.

98. 정답 ③

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}t_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}t_n=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}\left\{a_n-\dfrac{2+4+6+\cdots+2n}{(2n-1)^2}\right\}=0$

$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\dfrac{n^2+n}{4n^2-4n+1}\right)=0\quad\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=\dfrac{1}{4}$

99. 정답 ⑤

P_n의 좌표를 $P_n(a_n,\ 0)$이라 하면, $A_n(a_n,\ 2-a_n)$,

$B_n\left(-\dfrac{a_n+2}{4},\ 2-a_n\right)$이므로

$P_{n+1}\left(\dfrac{a_n+2}{4},\ 0\right)$

$a_{n+1}=\dfrac{a_n+2}{4}$ 이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n$은 수렴한다.

$\lim_{n\to\infty}a_n=k$라 하면 $k=\dfrac{k+2}{4}$

$\therefore\ k=\dfrac{2}{3}$

100. 정답 ⑤

[출제의도] 무한수열의 수렴과 발산을 추론하기

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n=0$ (참)

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{5^{n+1}-3^n}{5^n+4^n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{5-\left(\dfrac{3}{5}\right)^n}{1+\left(\dfrac{4}{5}\right)^n}=5$ (참)

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+n}-n}{n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}+n}=0$ (참)

101. 정답 ②

[출제의도] 수열의 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

주어진 조건에서 $a_n=\sqrt{n^2+1}$ 이다.

$n<\sqrt{n^2+1}<\sqrt{n^2+2n+1}=n+1$이므로 $[a_n]=n$이다.

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{[a_1]+[a_2]+[a_3]+\cdots+[a_n]}{n^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2n^2}=\dfrac{1}{2}$

102. 정답:6

[출제의도] 수열의 규칙성을 파악하고 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\{a_n\}$: 4, 13, 26, 43, $\cdots$

$\{b_n\}$: 4, 10, 18, 28, $\cdots$ 이므로

$a_n=2n^2+3n-1$, $b_n=n^2+3n$ 이다.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{2n}+b_{2n}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{12n^2+12n-1}{2n^2+3n-1}=6$

103. 정답 ④

원 $x^2+y^2=n^2$에 접하고 기울기가 n이고 y절편이 양수인 직선의 방정식은

$y=nx+n\sqrt{n^2+1}$

따라서

$P_n(-\sqrt{n^2+1},0)$, $Q_n(0,n\sqrt{n^2+1})$

이므로

$l_n=\overline{P_nQ_n}$

$=\sqrt{(n^2+1)+n^2(n^2+1)}$

$=\sqrt{n^4+2n^2+1}$

$=\sqrt{(n^2+1)^2}=n^2+1$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{l_n}{2n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{2n^2}=\dfrac{1}{2}$

104. 정답 ①

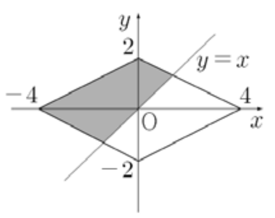
[출제 의도] 무한수열의 극한을 이해하고 이를 이용하여 극한값 구하기

$2^n(y-x)+y=1$을 y에 관하여 정리하면,

$y=\dfrac{2^n}{2^n+1}x+\dfrac{1}{2^n+1}$ 이고 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{2^n+1}=1$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n+1}=0$이므로 아래 그림과 같이 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$은 연립부등식

$\begin{cases}|x|+2|y|\le 4\\ y\ge x\end{cases}$의 영역과 같다.



따라서, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=16\times\dfrac{1}{2}=8$이다.

105. [출제의도] $\sum$의 성질을 이해하고 수열의 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(k^2+k)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

$T_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\{k^2+(2n+1)k+n^2+n\}=\dfrac{n(n+1)(7n+2)}{3}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{T_n}{S_n}=7$

106.정답 ①

[출제의도] 극한값의 성질을 이해할 수 있다.

ㄱ. $a_n<b_n$ 이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$ 이면

$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$ 이 성립한다. ∴ 참

ㄴ. 반례 $a_n=\dfrac{1}{n}$, $b_n=\dfrac{2}{n}$ 이면

자연수 n에 대하여 $a_n<b_n$ 이지만

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ ∴ 거짓

ㄷ. 반례 수열 $\{a_n\}$ 이 $1, 0, 1, 0, 1, \ldots$

수열 $\{b_n\}$ 이 $0, 1, 0, 1, 0, \ldots$

이면 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$ 이지만

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\ne 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n\ne 0$ 이다. ∴ 거짓

107. 정답 ⑤

ㄱ. 삼각형의 넓이를 $a_n=\dfrac{1}{2}\cdot n\cdot h_n=\dfrac{1}{2}$ 이므로 $h_n=\dfrac{1}{n}$

∴ 참

ㄴ. 수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면

$a_n=\dfrac{1}{2}r^{n-1}=\dfrac{1}{2}n\cdot h_n$ ...... ①

$n=2$, $h_2=\dfrac{1}{4}$ 이면 $\dfrac{1}{2}r=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot\dfrac{1}{4}$

$\therefore r=\dfrac{1}{2}$

$a_n=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ ∴ 참

ㄷ. 수열 $\{a_n\}$에서

$a_2=\dfrac{1}{2}r<\dfrac{1}{2}$ $\therefore 0<r<1$

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\cdot r^{n-1}=0$이므로

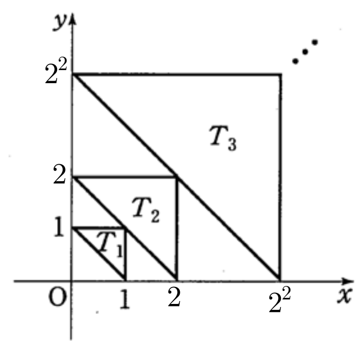
①에서 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}nh_n=0$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}n\cdot h_n=0$ ∴ 참

108. [출제의도] 무한급수의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$a_n=2n+1$ $(n\ge 1)$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2}{(2k+1)(2k+3)}=\dfrac{1}{3}$

109. 정답 12



위 그림에서 T_n의 한 변의 길이는 2^{n-1}이므로

$a_n=\frac{1}{2}\cdot(2^{n-1})^2=2\cdot 4^{n-1}$

T_n에서 세 개의 꼭지점을 제외한 각 변에 존재하는 격자점의 개수는 모두 $2^{n-1}-1$개이므로

$b_n=3(2^{n-1}-1)+3=3\times 2^{n-1}$

$$\therefore \text{(준식)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\times 3\cdot 2^{n-1}}{\frac{1}{2}\cdot 4^{n-1}+2^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{n-2}}}=12$$

(참고) T_n 위에 일일이 격자점을 그려서 세어 보면

$b_1=3,\ b_2=6,\ b_3=12,\ b_4=24,\ \cdots$

가 되어, 수열 $\{b_n\}$은 공비가 2인 등비수열임을 알 수 있다.

110. 정답 12

[출제의도] 수열의 점화식을 이용하여 수열의 극한을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

점 Q_1 의 좌표는 $\left(\frac{\sqrt{3}}{4},0\right)$ 이므로 $x_1=\frac{\sqrt{3}}{4}$

점 Q_n 의 좌표는 $(x_n,0)$ 이므로, 점 Q_n을 지나고 $\overline{AB}$에 평행한 직선의 방정식은

$$y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}x_n$$

따라서 점 R_n 의 좌표는 $\left(0,\frac{1}{\sqrt{3}}x_n\right)$ 이므로 점 R_n 을 지나고 $\overline{AB}$ 에 수직인 직선의 방정식은 $y=\sqrt{3}x+\frac{1}{\sqrt{3}}x_n$이고,

이 직선과 $\overline{AB}$ 의 교점 P_{n+1}의 x좌표가 x_{n+1}이므로

$x_{n+1}=-\frac{1}{4}x_n+\frac{\sqrt{3}}{4}$, $x_n=\frac{\sqrt{3}}{5}+\frac{\sqrt{3}}{20}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$이다.

$\therefore \lim_{n\to\infty}x_n=\frac{\sqrt{3}}{5}$이므로 $100a^2=100\times\frac{3}{25}=12$

111. 정답 ①

정삼각형 ABC가 한 바퀴 도는 동안 정삼각형의 변은 정사각형의 변 위에 8번 놓인다. 따라서, 정삼각형 ABC가 세 바퀴 도는 동안 정삼각형의 변은 정사각형의 변 위에 24번 놓인다. 이 때, 변 BC는 8번이 놓이게 되므로 3바퀴 더 돌면 8번 더 놓인다.

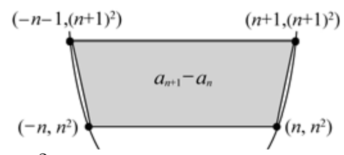
$\therefore a_{n+3}=a_n+8$

$a_{3n-2}=a_{1+3(n-1)}$

$=a_1+8(n-1)=8n-6$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_{3n-2}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{8n-6}{n}=8$$

112. [출제의도] 규칙성을 찾아 수열의 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.



$a_{n+1}-a_n=(2n+1)^2$

$$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)^2$$

$$=\frac{4n^3-n}{3}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^3}=\frac{4}{3}$$

113. 정답 30

[출제의도] 좌표평면상에서 삼각형의 넓이를 활용하여 수열의 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A_k(k,2k), B_k(2k,k)$ (단, k는 정수) 라 하면

$\overline{OB_k}=\sqrt{4k^2+k^2}=\sqrt{5}k$

$A_k(k,2k)$에서 직선 $y=\frac{1}{2}x$ 까지의 거리는

$h=\frac{|k-4k|}{\sqrt{5}}=\frac{|3k|}{\sqrt{5}}$ 이다.

따라서 삼각형의 넓이 $S_k=\frac{3}{2}k^2$ 이다.

$$\alpha=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}S_k}{n^3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{4}n(n+1)(2n+1)}{n^3}=\frac{1}{2}$$

$\therefore 60\alpha=30$

114. 정답 ②

[출제의도] 수열의 일반항을 구하여 수열의 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$a_n=1+2+3+4+\cdots+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$a_{2n}=\dfrac{(2n+1)(2n+2)}{2}=(2n+1)(n+1)$

$b_{2n}=b_{2n+1}=(n+1)^2$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{2n}}{b_{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)(n+1)}{(n+1)^2}=2$

115. 정답③

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}}=\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{1}}=\frac{1}{3}$$

116. 정답 ①

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(3n-1)}{2n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n-1}{2n^2+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n^2}}=\frac{3}{2}$$

117. 정답 ⑤

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+6n+4}-n\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+6n+4}-n)(\sqrt{n^2+6n+4}+n)}{\sqrt{n^2+6n+4}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+6n+4)-n^2}{\sqrt{n^2+6n+4}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n+4}{\sqrt{n^2+6n+4}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{4}{n}}{\sqrt{1+\frac{6}{n}+\frac{4}{n^2}}+1}=\frac{6+0}{\sqrt{1+0+0}+1}$$

$$=\frac{6}{2}=3$$

118. 정답 ②

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3+\left(\frac{1}{3}\right)^n}{2+\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\frac{3+0}{2+0}=\frac{3}{2}$$

119. 정답 15

분모, 분자를 3^n으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5\cdot 3-2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=15$$

120.[정답] ③

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a\times 6^{n+1}-5^n}{6^n+5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a\times 6-\left(\frac{5}{6}\right)^n}{1+\left(\frac{5}{6}\right)^n}=6a=4$$

$\therefore\ a=\dfrac{2}{3}$

121. 정답 ②

직선P_0P_1의 기울기가 1이므로

직선P_1P_2의 기울기는 -1이다.

점$P_1(1,1)$을 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은

$y-1=-(x-1)$ 즉, $y=-x+2$이므로

점P_2의 좌표를 구하면

$x^2=-x+2$에서 $x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0$

$x<0$이므로 $x=-2$

$\therefore\ P_2(-2,4)$

점$P_2(-2,4)$를 지나고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$y-4=x+2$ 즉, $y=x+6$이므로

점P_3의 좌표를 구하면

$x^2=x+6$에서 $x^2-x-6=0$

$(x+2)(x-3)=0$

$x>0$이므로 $x=3$

$\therefore\ P_3(3,9)$

점$P_3(3,9)$를 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은

$y-9=-(x-3)$ 즉, $y=-x+12$이므로

점P_4의 좌표를 구하면

$x^2=-x+12$에서 $x^2+x-12=0$

$(x+4)(x-3)=0$

$x<0$이므로 $x=-4$

$\therefore\ P_4(-4,16)$

이와 같은 방법으로 P_n의 좌표를 구하면

$P_{2m-1}(2m-1,\ 4m^2-4m+1)$

$P_{2m}(-2m,\ 4m^2)$

$n=2m$일 때,

$l_n=l_{2m}=\overline{P_{2m-1}P_{2m}}$

$\quad=\overline{P_{2m-1}P_{2m}}$

$\quad=\sqrt{(4m-1)^2+(4m-1)^2}$

$\quad=\sqrt{2}(4m-1)$

$\quad=\sqrt{2}(2n-1)$

$n=2m+1$일 때,

$l_n=l_{2m+1}=\overline{P_{2m}P_{2m+1}}$

$= \sqrt{(4m+1)^2+(4m+1)^2}$

$= \sqrt{2}(4m+1)$

$= \sqrt{2}(2n-1)$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}(2n-1)}{n}$

$= 2\sqrt{2}$

122. 정답 ⑤

a_n과 S_n과의 관계 $S_n = 2n+\frac{1}{2^n}$이므로

$a_n = S_n - S_{n-1} = 2n+\frac{1}{2^n}-2n+2-\frac{1}{2^{n-1}} = 2-\frac{1}{2^n}$ $(n \geq 2)$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{2^n}\right) = 2$

123. 정답 ②

$n < a_n < n+1$에서 $\sum_{k=1}^{n} k < \sum_{k=1}^{n} a_k < \sum_{k=1}^{n}(k+1)$

$\therefore \frac{n(n+1)}{2} < \sum_{k=1}^{n} a_k < \frac{n(n+1)}{2}+n$

$\therefore \frac{2n^2}{n^2+3n} < \frac{n^2}{a_1+a_2+\cdots+a_n} < \frac{2n^2}{n(n+1)}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+3n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+n} = 2$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{a_1+a_2+\cdots+a_n} = 2$

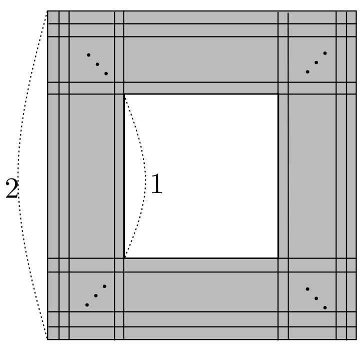
124. 정답 ②

$a_n = \overline{PQ} = \sqrt{1+(6n+3)^2} = \sqrt{9(2n+1)^2+1}$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9(2n+1)^2+1}}{n} = \sqrt{36} = 6$

125. 정답 50

[가로 방향으로 $4n$개의 정사각형을

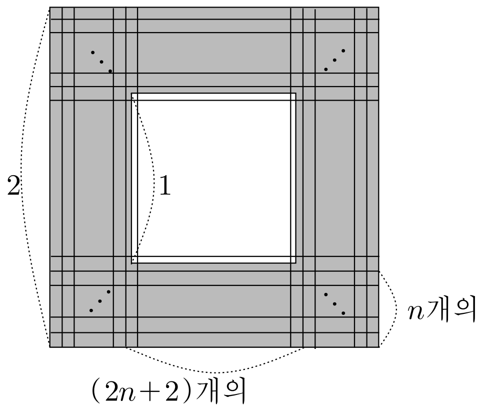


[그림1]

[그림1]과 같이 한 변의 길이가 $\frac{1}{2n}$인 작은 정사각형을 어두운 부분에 넣는 경우 가로 방향과 세로 방향에 각각 최대 $4n$(개)의 정사각형이 들어가므로

$a_{2n} = (4n)^2-(2n)^2 = 12n^2$

[가로 방향으로 $(4n+2)$개의 정사각형을



[그림2]

[그림2]와 같이 한 변의 길이가 $\frac{1}{2n+1}$인 작은 정사각형을 어두운 부분에 넣는 경우 가로 방향과 세로 방향에 각각 최대 $(4n+2)$(개)의 정사각형이 들어가므로

$a_{2n+1} = n\times(4n+2)\times2+(2n+2)\times n\times2$

$= 2n(4n+2+2n+2)$

$= 2n(6n+4) = 4n(3n+2)$

따라서

$a_{2n+1}-a_{2n} = 4n(3n+2)-12n^2 = 8n$

이고

$a_{2n}-a_{2n-1} = 12n^2-4(n-1)\{3(n-1)+2\}$

$= 12n^2-4(n-1)(3n-1)$

$= 12n^2-4(3n^2-4n+1) = 16n-4$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n+1}-a_{2n}}{a_{2n}-a_{2n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{8n}{16n-4} = \frac{1}{2} = c$

따라서 $100c = 100\times\frac{1}{2} = 50$

[다른 풀이]

다른 풀이

$a_{2n+1} = (4n+2)^2-(2n+2)^2$

$= (16n^2+16n+4)-(4n^2+8n+4)$

$= 12n^2+8n$

이므로

$a_{2n+1}-a_{2n} = (12n^2+8n)-12n^2 = 8n$

이고,

$a_{2n}-a_{2n-1} = 12n^2-12(n-1)^2-8(n-1)$

$= 12n^2-(12n^2-24n+12)-(8n-8)$

$= 16n-4$

126. [정답] ③

[해설]

삼각형 A_nOB_n에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r_n이라 하면

C_n의 좌표

는 $C_n(n-r_n,\ r_n)$

점 C_n에서 직선 $x-ny=0$까지의 거리가 r_n이므로

$$\frac{|n-r_n-nr_n|}{\sqrt{1^2+(-n)^2}}=r_n$$

$$|n-(n+1)r_n|=\sqrt{n^2+1}\times r_n$$

그런데 $\overline{A_nB_n}=1$에서 $r_n<\frac{1}{2}$이므로

$$n-(n+1)r_n>0\left(\because r_n<\frac{n}{n+1}\right)$$

따라서 $n-(n+1)r_n=\sqrt{n^2+1}\times r_n$이므로

$$r_n=\frac{n}{n+1\sqrt{n^2+1}}$$

$$\therefore S_n=\frac{1}{2}\times\overline{OA_n}\times r_n$$

$$=\frac{1}{2}\times\sqrt{n^2+1}\times\frac{n}{n+1+\sqrt{n^2+1}}$$

$$=\frac{n\sqrt{n^2+1}}{2\left(n+1+\sqrt{n^2+1}\right)}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{n^2+1}}{2n\left(n+1+\sqrt{n^2+1}\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{2\left(1+\frac{1}{n}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)}$$

$$=\frac{1}{4}$$

1. 정답②

$\log_2 2 + \log_2 \sqrt{2} + \log_2 {}^4\sqrt{2} + \log_2 {}^8\sqrt{2} + \cdots$

$= \log_2 2 + \frac{1}{2}\log_2 2 + \frac{1}{4}\log_2 2 + \frac{1}{8}\log_2 2 + \cdots$

$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

2. 정답 ①

[출제의도] 무한급수의 값을 구할 수 있다.

(주어진 식)

$= \frac{2004}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{2004}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\ldots$

$=1002$

3. 정답④

[출제의도] 무한등비급수의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2^n}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

$=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}+\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{5}{2}$

4. 정답 8

[출제의도] 무한급수의 합을 구하기

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - 2\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 8$

5. [출제의도] 무한등비급수의 합을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\sum_{n=1}^{\infty}5\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = \frac{5}{1-\frac{3}{4}} = 20$

6. 정답 ④

[출제의도] 수열의 합을 계산하여 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\sum_{k=1}^{n}(2+a_k)=2n+S_n$,

$\sum_{k=1}^{n}(2k+a_k)=n(n+1)+\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2+n+S_n$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}(2+a_k)}{\sum_{k=1}^{n}(2k+a_k)} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+S_n}{n^2+n+S_n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}+\frac{S_n}{n^2}}{1+\frac{1}{n}+\frac{S_n}{n^2}} = \frac{0+\frac{1}{2}}{1+0+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$

7. 정답 12

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+3)$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 존재하므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=-3$, $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{24a_n+2b_n^2}{2a_n-b_n^2}=\frac{24}{2}=12$이다.

8. 정답 ①

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n+1)(2n+3)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}\right)=\frac{1}{3}$

9. 정답 5

$2^a\times 3^b=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\frac{3}{4}=2^{-2}\times 3^1$

$\therefore a^2+b^2=5$

10. 정답 ①

[출제의도] 무한급수의 수렴의 성질을 이용하여 극한값 구하기

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{n^4}\right)$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{n^4}\right)=0$이다.

따라서, $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{n^4}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2}{n^4}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(n+1)^2}{4n^4}$

$=\frac{1}{4}$

11. 정답③

부분합 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n+2}{n+1}-\frac{n+3}{n+2}\right)=\frac{3}{2}-\frac{n+3}{n+2}$

$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}$ 이다.

12. 정답①

[출제의도] 무한급수의 뜻을 알고 있는가를 묻는 문제이다.

$n\geqq 2$일 때 $S_n-a_n=S_{n-1}$이므로

$S_n-a_n=S_{n-1}=\frac{n+3}{n+2}$ $(n\geqq 2)$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=1$

13. 정답 ①

[출제의도] 부분분수로 표현되는 무한급수의 합 구하기

수열의 일반항을 a_n, n항까지의 합을 S_n이라 하면

$a_n=\frac{n}{(n^2-n+1)(n^2+n+1)}$

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2-k+1}-\frac{1}{k^2+k+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{13}\right)+\right.$

$\left.\cdots+\left(\frac{1}{n^2-n+1}-\frac{1}{n^2+n+1}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n^2+n+1}\right)$ $\quad\therefore\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}$

14. 정답 ①

$(4n^2-1)x^2-4nx+1=0$

$\{(2n-1)x-1\}\{(2n+1)x-1\}=0$

$x=\frac{1}{2n-1},\ \frac{1}{2n+1}$

$\alpha_n>\beta_n$이고 n이 자연수이므로

$\alpha_n=\frac{1}{2n-1},\ \beta_n=\frac{1}{2n+1}$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n-\beta_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=1$

15. 정답1

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{n-1}{n}\right)$ 이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{n-1}{n}\right)=0$ $\quad\therefore$

$\lim_{n\to\infty}a_n=1$

16. 정답 ②

[출제의도] 수열의 극한을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$S_n=\pi r_n^2$, $S_{n+1}=2S_n$ 이므로

$\pi {r_{n+1}}^2=2\pi r_n^2$, $r_{n+1}=\sqrt{2}\,r_n$

$r_1=1$ 이므로 $r_n=(\sqrt{2})^{n-1}$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}$

$=2+\sqrt{2}$

17. 정답 15

[출제의도] 여러 가지 수열을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$p=q=1$, $r=n$ 이면 $2a_1+a_n=a_{n+2}$ 이므로

$a_{n+2}=a_n+20$

$a_1=10$ 이므로 $a_3=30$, $a_5=50$

$a_5=a_3+2a_1$ 이므로 $a_2=20$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 공차가 10 인 등차수열이다.

$a_n=10n$ ⋯①

수열 $\{b_n\}$에서 $p=1$ 을 대입하여 정리하면

$b_n=\frac{3}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}=\left(\frac{3}{5}\right)^n$ ⋯②

①, ②에 의하여

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_nb_n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10n\times(\frac{3}{5})^n}{n}$

$=10\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n=15$

18. 정답 ②

무한급수

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-\frac{3n}{n+1})$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$

이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}(a_n-\frac{3n}{n+1})=\lim_{n\to\infty}(a_n-3)=0$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=3$

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=3+\lim_{n\to\infty}b_n=0$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}b_n=-3$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{3-b_n}{a_n}=\frac{3-(-3)}{3}=2$

19. 정답⑤

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{2n^2}{2n^2+1}\right)$ 이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{2n^2}{2n^2+1}\right)=0$ 이다.

$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{2n^2}{2n^2+1}\right)=0$ 에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{2n^2+1}=1$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=1$ 이다.

20. 정답③

$\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=\frac{a}{1-r}=-1$ 에서 $a=r-1$

$-1<r<1$ 이므로 $-2<a<0$

21. 정답 11

[해설]

$(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_r a^r b^{n-r}$에서

$a_n=\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_r 3^r 2^{n-r}=(3+2)^n=5^n$이다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-2^n}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-2^n}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n$$

$$=\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}-\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}}=\frac{3}{2}-\frac{2}{3}=\frac{5}{6}=\frac{q}{p}$$

$\therefore p+q=11$

22.정답 ⑤

$a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

① $2a_n=2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ 이므로 수렴

② $a_n-b_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 이므로 수렴

③ $(-1)^n b_n=-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 이므로 수렴

④ $a_nb_n=\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$ 이므로 수렴

⑤ $\frac{b_n}{a_n}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ 이므로 발산

23. 정답③

직선의 방정식은 $y=\frac{1}{3}x+1$ 이므로 x 는 3 의 배수이다.

$x=3n$ 로 놓으면 $y=n+1$ 이다.($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)

따라서 $a_n=3n$, $b_n=n+1$ 이다.

$\frac{1}{a_nb_n}=\frac{1}{3n(n+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_nb_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{3}$$

24. 정답 ②

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$이면 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 발산한다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}a_n=3$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 발산한다

ㄴ. 무한등비급수 이고, 공비 r이 $-1<r<1$ 이므로 수렴한다.

ㄷ. $a_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ 이므로

$\sum_{n=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$=\sqrt{n+1}-1$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)=\infty$

25.정답 ③

[출제의도] 무한급수의 수렴조건 이해하기

ㄱ. 공비가 $-\frac{1}{2}$이므로 수렴한다.

ㄴ. (준식)$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$ $\therefore$수렴

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1\neq 0$ $\therefore$발산

26. 정답②

[출제의도] 무한급수의 합이 수렴을 묻는 문제로 무한급수의 합의 수렴성의 이해를 측정하는 문제이다.

ㄱ. $a_n=\frac{n-1}{2n+1}$ 이라고 하면 $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}\neq 0$ 이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{2n+1}$ 은 발산한다.

ㄴ. 무한등비급수의 공비 $r=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 로 $-1<r<1$ 이므로

무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ 은 수렴한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)$=발산

27. 정답 ①

[출제의도] 수열의 극한의 성질을 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. 두 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 모두 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0$이다. (거짓)

ㄴ. 두 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$ 이 모두 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$이다.

$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\{(a_n+b_n)+(a_n-b_n)\}=0$

$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\{(a_n+b_n)-a_n\}=0$

따라서 두 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$은 모두 수렴한다. (참)

ㄷ. (반례) $a_n=(-1)^n$, $b_n=(-1)^{n+1}$이면

$|a_n+b_n|=0$, $|a_n-b_n|=2$이므로 두 수열

$\{|a_n+b_n|\}$, $\{|a_n-b_n|\}$이 모두 수렴하지만 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$은 수렴하지 않는다. (거짓)

28. 정답 27

[출제의도] 무한등비급수의 수렴조건 구하기

주어진 무한등비급수가 수렴하기 위한 조건은

(ⅰ) $-1<1-\frac{x}{4}<1$일 때, $0<x<8$

(ⅱ) 첫째항이 0일 때, $x=-1$

$\therefore x=-1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$ 합은 27

29. 정답 4

급수가 수렴하므로 일반항은 0으로 수렴한다.

$\lim_{n\to\infty}3^na_n-2=0$이르로 $\lim_{n\to\infty}3^na_n=2$이다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{6a_n+5\cdot4^{-n}}{a_n+3^{-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{6\cdot3^na_n+5\left(\frac{3}{4}\right)^n}{3^na_n+1}$이므로

주어진 식의 극한값은 $\frac{12}{3}=4$이다.

30. 정답 42

[출제의도] 무한등비급수의 수렴범위 구하기

공비가 $\frac{x-5}{5}$ 이므로 $-1<\frac{x-5}{5}<1$

$0<x<10$ 이며 $x=-3$ 일 때도 수렴하므로 수렴하는 모든 정수 x 의 합은 42 이다.

31.정답 ③

$-1<\frac{x+1}{2}\leqq1$이므로 $-3<x\leqq1$이고,

$-1<\log x<1$이므로 $\frac{1}{10}<x<10$이다.

따라서 동시에 수렴하는 x의 값의 범위는 $\frac{1}{10}<x\leqq1$이다.

32. 정답 ②

[출제의도] 무한급수의 수렴, 발산 판정하기

ㄱ. $a_n=\frac{n}{2n-1}$이고 $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}\neq0$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 발산한다.

ㄴ. $a_n=\frac{1}{1+2+\cdots+n}=\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2}{n(n+1)}$이고

$S_n=2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=2-\frac{2}{n+1}$이므로

$\lim_{n\to\infty}S_n=2$로 수렴한다.

ㄷ. $a_n=\frac{1}{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})}=\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{2}$이고

$S_n=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})$

$=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{2}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})$이므로

$\lim_{n\to\infty}S_n$은 발산하다.

33. 정답10

[출제의도] S_n과 a_n사이의 관계를 이용하여 무한급수의 합 구하기

$b_n=2^{n-1}a_n$라 하고,

$S_n=a_1+2a_2+2^2a_3+\cdots+2^{n-1}a_n=5n$ 이라 할 때,

$b_n=S_n-S_{n-1}=5\ (n\geqq2)$, $b_1=S_1=a_1=5$ 즉,

$a_n = \frac{5}{2^{n-1}}(n \geqq 1)$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{5}{1-\frac{1}{2}} = 10$

34. 정답 11

[출제의도] 근과 계수의 관계를 이용하여 무한등비급수의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$9x^2-6x-1=0$ 의 두 근은 $x=\frac{1\pm\sqrt{2}}{3}$ 이고

$|\alpha|<1,\ |\beta|<1$ 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n,\ \sum_{n=1}^{\infty}\beta^n$ 은 수렴한다.

근과 계수와의 관계에서 $\alpha+\beta=\frac{2}{3},\ \alpha\beta=-\frac{1}{9}$ 이므로

$\frac{1}{\beta-\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}(\beta^n-\alpha^n)=\frac{1}{\beta-\alpha}\left(\frac{\beta}{1-\beta}-\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)=\frac{9}{2}$

$\therefore\ p+q=2+9=11$

35.정답 32

$ar^4=2^8 \cdots ①$

$ar^7=2^5 \cdots ②$

이므로 ①÷②를 계산하면 $r^3=2^{-3}$이므로 $r=\frac{1}{2}$이다.

따라서 $a=2^{12}$

$\sum_{n=9}^{\infty}a_n$은 첫째항이 a_9이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 무한등비급수이므로

$\sum_{n=9}^{\infty}a_n=\frac{a_9}{1-\frac{1}{2}}=2^5=32$

36. 정답 18

$a=12,\ r=\frac{1}{3}$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{12}{1-\frac{1}{3}}=18$

37. 정답 10

[출제의도] 계차수열과 무한등비급수의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(a_2-a_1)(\frac{1}{2})^{k-1}$

$=-a_1+2a_2+(a_1-a_2)(\frac{1}{2})^{n-2}\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n=20\ \ \therefore \lim_{n\to\infty}a_n=0$

$\lim_{n\to\infty}\left\{-a_1+2a_2+(a_1-a_2)(\frac{1}{2})^{n-2}\right\}=0$

$\therefore\ a_2=\frac{1}{2}a_1\ a_n=(a_1-a_2)(\frac{1}{2})^{n-2}=a_1(\frac{1}{2})^{n-1}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=20=\sum_{n=1}^{\infty}a_1(\frac{1}{2})^{n-1}$

$20=\frac{a_1}{1-\frac{1}{2}}$

$\therefore\ a_1=10$

38. 정답 93

[출제의도] 무한급수의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n+2}-4^{n+2}}{6^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{5^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^n-4^2\cdot\left(\frac{4}{6}\right)^n\right\}$

$=25\cdot\frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{5}{6}}-16\cdot\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}=93$

39. 정답 ①

[출제의도] 무한등비급수에 관한 성질을 이해하고 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\{a_n\}$의 공비를 r, $\{b_n\}$의 공비를 s라 하면 (단, $r\leqq s$)

$\frac{1}{1-r}+\frac{1}{1-s}=\frac{8}{3},\ \frac{1}{1-rs}=\frac{4}{5}$

$\therefore 3(2-r-s)=8(1-r-s+rs)\cdots㉠$ $\qquad 4(1-rs)=5\cdots㉡$

㉠, ㉡을 연립하면,

$rs=-\frac{1}{4},\ r+s=0$

$\therefore r=-\frac{1}{2},\ s=\frac{1}{2}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{4}{3}$

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2=\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{4}{3}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2+2a_nb_n)$

$=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+2\times\frac{4}{5}=\frac{64}{15}$

40.정답 ⑤

[출제의도] 무한등비급수를 활용하기

(준식)$=0.3+0.02+0.002+\cdots$

$=0.3+\frac{\frac{2}{100}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{29}{90}$

41. 정답 ①

[출제의도] 순환소수를 구하여 무한급수의 합을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{2}{2^4}+\cdots$

$=2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2^3}+2\cdot\frac{1}{2^5}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$

42. 정답 12

$r=\frac{1}{5}$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{a_1}{1-r}=\frac{a_1}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{4}a_1=15$

$\therefore\ a_1=12$

43. 정답 ③

ㄱ. (반례) $a_n=3n+2,\ b_n=3n$

ㄴ. (반례) $a_n=\frac{1}{3n},\ b_n=\frac{1}{2n}$

ㄷ. 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$가 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

44. 정답 ⑤

[출제의도] 무한급수의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-1)$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}(a_n-1)=0$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=1$ (참)

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n+1)$ 이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}(b_n+1)=0$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}b_n=-1$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 은 발산한다. (참)

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-1),\ \sum_{n=1}^{\infty}(b_n+1)$ 이 모두 수렴하므로

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-1)+\sum_{n=1}^{\infty}(b_n+1)$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\{(a_n-1)+(b_n+1)\}=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 은 수렴한다. (참)

45. 정답④

[출제의도] 무한수열과 무한급수의 성질 이해하기

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 이 수렴이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이고,

$\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ (상수)이므로

$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}b_n=0\times\beta=0$ (참)

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n=\alpha,$

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-2b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}d_n=\beta$라 하면

$a_n=\frac{2c_n+d_n}{5},b_n=\frac{c_n-2d_n}{5}$에서

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2c_n+d_n}{5}=\frac{2}{5}\alpha+\frac{1}{5}\beta$

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n-2d_n}{5}=\frac{1}{5}\alpha-\frac{2}{5}\beta$ (참)

ㄷ. (반례) $a_n=(-1)^n,\ b_n=(-1)^n$

$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=1$이지만 $\lim_{n\to\infty}a_n$과 $\lim_{n\to\infty}b_n$은 모두 수렴하지 않는다. (거짓)

46. 정답①

[출제의도] 수열의 극한에 대한 성질 이해하기

ㄱ. 두 수열 $\{a_n\},\ \{b_n\}$이 수렴하고 $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n=0$ (참)

ㄴ. 수렴하는 무한급수의 일반항 a_n,b_n에 대하여

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0$ (거짓)

ㄷ. (반례) $a_n=\frac{1}{n},\ b_n=n$ 이라하면

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot n=1$ 이지만 $\lim_{n\to\infty}b_n$이 수렴하는 것은 아니다. (거짓)

옳은 것은 ㄱ

47. 정답①

$S_{n+1}=\frac{1}{2}S_n$ 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$

48. 정답 ①

[출제의도] 무한등비급수를 이용하여 문제 해결하기

점 $A_1,A_2,\cdots$에서 x축에 내린 수선의 발을 $C_1,C_2,\cdots$라 하면 n이 한없이 커질 때, A_n의 x좌표는 $\overline{OC_1}+\overline{C_1C_2}+\cdots$

$x=\frac{4}{3}+1+\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\cdots=\frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{3}{4}}=\frac{16}{3}$

49. 정답 ②

$\angle A_nA_{n-1}B_n = \frac{\pi}{4}$ 이므로

$\overline{A_nA_{n+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{A_{n-1}A_n}$

따라서 부채꼴 $A_{n-1}A_nB_n$의 중심각의 크기를 θ_n, 반지름의 길이를 r_n이라고 하면

$\theta_n = \frac{\pi}{4}$, $r_n = 4(\frac{\sqrt{2}}{2})^{n-1}$

$\therefore\ l_n = r_n\theta_n = \frac{\pi}{4}\times 4(\frac{\sqrt{2}}{2})^{n-1}$

$= \pi(\frac{\sqrt{2}}{2})^{n-1}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{\pi}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2\pi}{2-\sqrt{2}}$

$= \pi(2+\sqrt{2})$

50. 정답 ①

[출제의도] 무한급수를 활용하여 도형의 넓이의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

사각형 $B_2P_1C_1P_2$에서

$\overline{P_1C_1} = \frac{1}{3}\overline{B_1C_1} = 2\sqrt{3}$

$\overline{C_1C_2} = \frac{1}{2}\overline{AC_1} = 3$이므로

$S_1 = \overline{P_1C_1}\cdot\overline{C_1C_2} = 6\sqrt{3}$

모든 자연수 n에 대하여

$\overline{P_{n+1}C_{n+1}} = \frac{1}{2}\overline{P_nC_n}$이므로

$S_{n+1} = \frac{1}{4}S_n$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{6\sqrt{3}}{1-\frac{1}{4}} = 8\sqrt{3}$

51. 정답 ④

[출제의도] 도형의 넓이에 관한 무한급수의 합을 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

곡선 $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ 와 직선 $y = \frac{1}{2}$, $y = 1$, $y = \frac{3}{2}$, $\cdots$ 이

만나는 점의 x 좌표는 각각 $\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \cdots$ 이다.

$y = \log_{\frac{1}{4}} x$ 와 $y = \log_{\frac{1}{4}}(-x)$ 는 y 축에 대하여 대칭이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{1}{2}\left\{1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots\right\} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$

52. 정답 ②

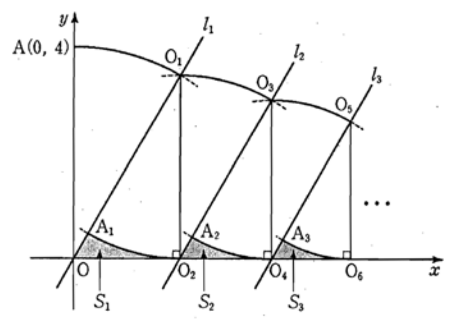
$S_1 = \frac{1}{2}\{4\pi-\pi\}\times 2 = 3\pi$이고

이후 모양의 도형은 넓이 $\frac{1}{9}$배, 개수는 2배로

변화 하므로 $\lim_{n\to\infty} S_n$은 공비가 $\frac{1}{9}\times 2 = \frac{2}{9}$인 무한등비급수가 된다.

$\therefore\ \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{3\pi}{1-\frac{2}{9}} = \frac{27\pi}{7}$

53. 정답 ②



$S_1 = \triangle OO_1O_2 -$ 부채꼴$A_1O_1O_2$

$= \frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 2 - \frac{1}{2}\times(2\sqrt{3})^2\times\frac{\pi}{6} = 2\sqrt{3}-\pi$

$S_2 = \triangle O_2O_3O_4 -$ 부채꼴$A_2O_3O_4$

$= \frac{1}{2}\times 3\times\sqrt{3} - \frac{1}{2}\times 9\times\frac{\pi}{6} = \frac{3}{4}(2\sqrt{3}-\pi)$

$S_3 = \triangle O_4O_5O_6 -$ 부채꼴$A_3O_5O_6$

$= \frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{3}}{2}\times\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\times(\frac{3\sqrt{3}}{2})^{2}\times\frac{\pi}{6}$

$= (\frac{3}{4})^2(2\sqrt{3}-\pi)$

S_1, S_2, S_3에 의해서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $2\sqrt{3}-\pi$이고 공비가 $\frac{3}{4}$인 등비수열이므로

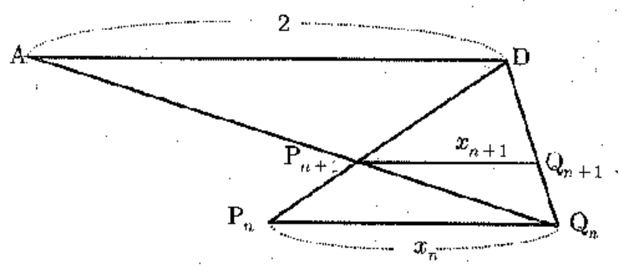
무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{2\sqrt{3}-\pi}{1-\frac{3}{4}} = 8\sqrt{3}-4\pi$

54. 정답 ①

$\triangle P_1AD \backsim \triangle P_1CB$이고 닮음비가 2 : 3이므로

$\overline{DP_1} : \overline{P_1B} = 2 : 3$이고 $\overline{P_1Q_1} \,/\!/\, \overline{BC}$이므로

$\overline{P_1Q_1} : \overline{BC} = \overline{DP_1} : \overline{DB} \Rightarrow x_1 : 3 = 2 : 5 \quad \therefore\ x_1 = \frac{6}{5}$



$x_{n+1}:\ x_n=\overline{\mathrm{DP}_{n+1}}:\ \overline{\mathrm{DP}_n}=2\ :\ (2+x_n)$

$2x_n=x_{n+1}(2+x_n)\Rightarrow x_{n+1}\cdot x_n=2(x_n-x_{n+1})$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}x_kx_{k+1}=2\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k+1})=2(x_1-x_{n+1})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}x_nx_{n+1}=\lim_{n\to\infty}S_n=2x_1=2\times\frac{6}{5}=\frac{12}{5}$$

55. 정답 ⑤

[출제의도] 무한급수의 수렴 조건 이해하기

ㄱ. $-1<\log_2 x<1\quad\therefore\frac{1}{2}<x<2$ (참)

ㄴ. $\dfrac{(x-1)\log_2 x}{1-\log_2 x}=1$, $x\log_2 x=1$

$\log_2 x=\dfrac{1}{x}$이고 $y=\log_2 x$ 와 $y=\dfrac{1}{x}$ 의 그래프는 $\dfrac{1}{2}<x<2$인 범위 내에서 반드시 한 개의 교점이 생긴다. (참)

ㄷ. $-1<\log_2 x<1$, $-2<\log_2 x-1<0$

$-1<\dfrac{\log_2 x-1}{2}<0\quad\therefore$ 수렴 (참)

56. 정답②

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{4^n}=\frac{0}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{2}{4^3}+\frac{0}{4^4}+\frac{1}{4^5}+\frac{2}{4^6}+\cdots$$

$$=\left(\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^5}+\frac{1}{4^8}+\cdots\right)+\left(\frac{2}{4^3}+\frac{2}{4^6}+\frac{2}{4^9}+\cdots\right)$$

$$=\frac{\frac{1}{4^2}}{1-\frac{1}{4^3}}+\frac{\frac{2}{4^3}}{1-\frac{1}{4^3}}=\frac{\frac{1}{16}}{\frac{63}{64}}+\frac{\frac{2}{64}}{\frac{63}{64}}=\frac{2}{21}$$

57. 정답 ①

$7a_1+7^2a_2+\cdots+7^na_n=3^n-1\quad\cdots(1)$에 $n\leftarrow n-1$을 대입하면,

$7a_1+7^2a_2+\cdots+7^{n-1}a_{n-1}=3^{n-1}-1\quad\cdots(2)$

$(1)-(2)$하면 $7^na_n=2\times3^{n-1}\Leftrightarrow a_n=\dfrac{2}{7}\times\left(\dfrac{3}{7}\right)^{n-1}$

$$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^{n-1}}=\frac{2}{7}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{7^{n-1}}=\frac{2}{7}\times\frac{1}{1-\frac{1}{7}}=\frac{1}{3}$$

58. 정답 ④

[출제의도] 무한등비급수를 활용하여 여러 가지 문제 해결하기

대각선의 길이가 a인 정사각형의 한 변의 길이는 $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$이고 정사각형의 넓이는 $\dfrac{1}{2}a^2$이다.

이때, $a_1=1$, $a_2=\dfrac{1}{3}$, $a_3=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$, $\cdots$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{1}{2}\left\{1^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^4+\cdots\right\}$$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{1}{9}}=\dfrac{9}{16}=\dfrac{q}{p}$ 이다.

따라서, $p=16$, $q=9$이므로 $p+q=25$이다.

59. 정답 15

[출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 무한급수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

수열 $\{a_n\}$은 2, 1, 2, 1, 2, 1, $\cdots$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}=\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3^3}+\frac{2}{3^5}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^6}+\cdots\right)$$

$$=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}}+\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}}$$

$$=\frac{3}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

$\therefore p+q=8+7=15$

60. 정답 ③

$a_n\cdot a_{n+1}=\left(\dfrac{1}{5}\right)^n\quad\cdots$①

$a_{n+1}\cdot a_{n+2}=\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n+1}\quad\cdots$②

②÷① $\dfrac{a_n}{a_{n+2}}=\dfrac{1}{5}$은 짝수번째항의 공비를 의미한다.

①에 $n=1$을 대입하면 $a_1\cdot a_2=\dfrac{1}{5}$이므로

$a_2=\dfrac{1}{5}$이다.($\because\ a_1=1$)

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=a_2+a_4+a_6+\cdots\cdots=\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^3+\cdots$$

$$=\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{4}$$

(다른풀이)

축차대입법에 의하여

$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ 대입하여 나열하면

$1,\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{5},\ \left(\frac{1}{5}\right)^2, \left(\frac{1}{5}\right)^2, \left(\frac{1}{5}\right)^3,\ \left(\frac{1}{5}\right)^3, \cdots$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = a_2 + a_4 + a_6 + \cdots\cdots$은 공비가 $\frac{1}{5}$인

무한등비급수이므로

$= \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{4}$

61. 정답②

$a_1 = \frac{1}{9}$, $a_2 = \frac{10}{99}$, $a_3 = \frac{100}{999}$,…이므로 $\frac{1}{a_1} = 9$, $\frac{1}{a_2} = \frac{99}{10}$,

$\frac{1}{a_3} = \frac{999}{100}$,…

따라서 $\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = \frac{9}{10}$, $\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_2} = \frac{9}{100}$,…,

$\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{9}{10^n}$ 이다.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right) = \frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}} = 1$

62. 정답 24

무한등비급수의 공비가 $\sin\theta$ 이고 $0 < \sin\theta < 1$ 이므로 무한등비급수는 수렴한다.

$\frac{\cos^2\theta}{1-\sin\theta} = \frac{18}{13}$, $\quad \frac{1-\sin^2\theta}{1-\sin\theta} = \frac{18}{13}$,

$1+\sin\theta = \frac{18}{13}$, $\quad \sin\theta = \frac{5}{13}$

$\therefore \tan\theta = \frac{5}{12}$

그러므로 $\frac{10}{\tan\theta} = 10 \times \frac{12}{5} = 24$

63. 정답③

[출제의도] 무한등비급수를 이용하여 수의 합 구하기

나열된 모든 수의 합은

$(9+0.9+0.09+0.009+0.0009+\cdots)$

$+(0.9+0.09+0.009+0.0009+\cdots)$

$+(0.09+0.009+0.0009+\cdots)$

$+(0.009+0.0009+\cdots)$

$+\cdots$

$= 10+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\cdots$

$= \frac{10}{1-\frac{1}{10}} = \frac{100}{9}$

(별해)

$S = 9+2\times0.9+3\times0.09+4\times0.009+\cdots$ …①

$0.1S = 0.9+2\times0.09+3\times0.009+\cdots$ …②

①−②에서 $0.9S = 9+0.9+0.09+0.009+\cdots$

$= \frac{9}{1-0.1} = 10$

$\therefore S = \frac{100}{9}$

64. 정답 ②

$a_n b_n - a_{n+1}b_{n+1} = 0$에서

$a_{n+1}b_{n+1} = a_n b_n = \ldots = a_1 b_1$

$\therefore b_n = \frac{a_1 b_1}{a_n}$

수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면 $r > 1$이다.

$\therefore b_2 = \frac{a_1 b_1}{a_2} = \frac{a_1 b_1}{a_1 r} = \frac{b_1}{r}$

마찬가지로 $b_3 = \frac{b_1}{r^2}$, $b_4 = \frac{b_1}{r^3}$, …

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{b_1}{1-\frac{1}{r}} \left(\because 0 < \frac{1}{r} < 1\right)$

$= \frac{b_1 r}{r-1} = \frac{b_1 \cdot \frac{a_2}{a_1}}{\frac{a_2}{a_1} - 1} = \frac{a_2 b_1}{a_2 - a_1}$

65. 정답 27

[출제의도] 등비수열의 성질을 이해하여 무한등비급수의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$r = -\frac{1}{3}$, $a_1 = 36$ 이므로

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{36}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{36}{\frac{4}{3}} = 27$

66.정답 ②

[출제의도] 무한급수의 성질을 이해할 수 있다.

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \beta$라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \{(a_n + b_n) - a_n\}$

$= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$=\beta-\alpha$ (수렴) ∴ 참

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$,

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} b_n=0$

$\lim_{n\to\infty} a_n b_n=0$ ∴ 참

ㄷ. 반례 수열 $\{a_n\}$ 이 $1, 0, 1, 0, 1, \ldots$

수열 $\{b_n\}$ 이 $0, 1, 0, 1, 0, \ldots$

이면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n=0$ (수렴)이지만

$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ 이다. ∴ 거짓

67. 정답②

ㄱ. (반례) $a_n=\dfrac{1}{n}$, $b_n=-\dfrac{1}{n}$ 이면 임의의 자연수 n 에 대하여 $a_n > b_n$ 이지만

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$

ㄴ. $\alpha-\beta=\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

$=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)>0$

($\because$ 임의의 자연수 k 에 대하여 $a_k > b_k$) ∴

$\alpha > \beta$ (참)

ㄷ. 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 과 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 의 합이 각각 존재하므로

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$ (거짓)

68. 정답 ④

수열 $\{a_n\}$의 초항을 a, 공비를 r이라 하고

수열 $\{b_n\}$의 초항을 b, 공비를 s이라 하고

ㄱ. $-1<r<1$, $-1<s<1$에서

수열 $\{a_nb_n\}$은 초항이 ab이고, 공비가 rs이므로

$-1<rs<1$에서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n$은 수렴한다. ∴ 참

ㄴ. [반례] $a_n=(-1)^{n+1}$, $b_n=(-1)^n$이면

$a_n+b_n=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=0$ ∴ 거짓

ㄷ. 수열 $\{a_n^3\}$의 공비는 r^3이므로

$-1<r^3<1$에서 $-1<r<1$

수열 $\{b_n^3\}$의 공비는 s^3이므로

$-1<s^3<1$에서 $-1<s<1$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n+\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 은 수렴한다. ∴ 참

69. 정답 ②

[출제의도] 무한수열의 성질 이해하기

ㄱ. (반례) 수열 1, 0, 1, 0, 1, 0, …에서

$\lim_{n\to\infty} a_{2n}=0$으로 수렴하지만 $\lim_{n\to\infty} a_n$은 발산한다. (거짓)

ㄴ. $\lim_{n\to\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} a_{n-1}$이므로

$\lim_{n\to\infty} a_{2n}=\lim_{n\to\infty} a_{2n-1}$ (참)

ㄷ. (반례) 수열 $-1,\ 1,\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3},\ \cdots$에서

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=0$으로 수렴하지만 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}=\infty$이므로 발산한다.

(거짓)

70. 정답②

[출제의도] 무한수열과 무한급수의 수렴, 발산을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{n}\right)=2$ 이다. (참)

ㄴ. $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$라고 하면 $b_n=2+\dfrac{1}{n}-a_n$에서

$\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{n}-a_n\right)=2-\alpha$이다. (참)

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$이므로 ㄴ에 의해

$\lim_{n\to\infty} b_n=2$이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$은 발산한다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

71. 정답 ⑤

[출제의도] 수열의 규칙성을 발견할 수 있는가를 묻는 문제이다.

로그의 성질에 의해 $a_na_{n+1}a_{n+2}=2$ 이므로 수열$\{a_n\}$은

$2, 3, \dfrac{1}{3}$이 반복되어 나타난다.

ㄱ. $6=3\times 2$ 이므로 $a_6=\dfrac{1}{3}$ (참)

ㄴ. $S_{10}=\dfrac{16\times 4-10}{3}=18$ (참)

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}S_{3n}=\dfrac{16}{3}$ 이다. (참)

72. 정답 ③

ㄱ. $2a_{n+1}+a_n=2$는

$2\left(a_{n+1}-\dfrac{2}{3}\right)=-\left(a_n-\dfrac{2}{3}\right)$이므로 수열 $\left\{a_n-\dfrac{2}{3}\right\}$는 첫째항이

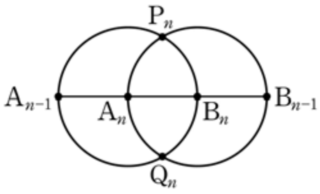
$\dfrac{1}{3}$, 공비는 $-\dfrac{1}{2}$인 등비수열이다. (참)

ㄴ. $a_n-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$, $a_n=\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+\dfrac{2}{3}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+\dfrac{2}{3}\right\}=\dfrac{2}{3}$ (참)

ㄷ. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\neq 0$이므로 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다. (거짓)

73. 정답 ④



오른쪽 그림과 같이 n번째 얻어진 도형에 있는 두 원의 반지름의 길이를 r_n이라하면

$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{P}_n}=\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{P}_n}=r_n$

이므로 $\angle \mathrm{P}_n\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n=\angle \mathrm{P}_n\mathrm{B}_n\mathrm{A}_n=\dfrac{\pi}{3}$

두 호 $\mathrm{P}_n\mathrm{A}_n\mathrm{Q}_n$, $\mathrm{P}_n\mathrm{B}_n\mathrm{Q}_n$의 길이의 합

$l_n=2\times r_n\times\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{4}{3}\pi r_n$

또 선분 $\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{B}_{n-1}$의 삼등분점이 A_n, B_n이므로

$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=\dfrac{1}{3}\overline{\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{B}_{n-1}}$

$\therefore r_n=\dfrac{1}{3}r_{n-1}$

따라서, 수열 l_n의 공비는 $\dfrac{1}{3}$, $r_1=\dfrac{8}{3}$이므로 초항

$l_1=\dfrac{4}{3}\pi\cdot\dfrac{8}{3}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n=\frac{\frac{32}{9}\pi}{1-\frac{1}{3}}=\frac{16}{3}\pi$$

74. 정답 ①

[출제의도] 규칙성을 찾아 무한급수의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

지급되는 장학금의 총액의 극한값은 첫째항이 $14\times\dfrac{6}{5}\times\dfrac{2}{5}$, 공비가 $\dfrac{6}{5}\times\dfrac{3}{5}$ 인 무한등비급수이므로

$$\frac{14\times\frac{6}{5}\times\frac{2}{5}}{1-\frac{6}{5}\times\frac{3}{5}}=\frac{\frac{14\times 12}{25}}{1-\frac{18}{25}}=24 \text{ (억 원)}$$

75. 정답④

A_1 의 한 변의 길이를 x 라고 하면 피타고라스 정리에 의해

$x=\dfrac{2}{\sqrt{5}}a$ 이므로

A_1 의 넓이$=\dfrac{4}{5}a^2$ 이다. 마찬가지 방법으로 A_2 의 넓이$=\dfrac{16}{25}a^2\cdots$

A_n 의 넓이$=\left(\dfrac{4}{5}\right)^n a^2$

따라서, 넓이의 합은 $\dfrac{\frac{4}{5}a^2}{1-\frac{4}{5}}=4a^2$ 이다.

76. 정답③

정삼각형 B_1BA_1 을 S_1, 정삼각형 $B_2B_1A_3$ 을 S_2 라 하면 정삼각형 S_1 의 한 변의 길이는 $\dfrac{1}{3}$ 이므로 S_1 의 넓이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{36}$ 이다. 또, 정삼각형 S_1 의 한 변의 길이의 2 배가 정삼각형 S_2 의 한 변의 길이의 3 배와 일치하므로 S_1, S_2 의 닮음비는 3 : 2 이고, S_1, S_2 의 넓이의 비는 9 : 4 이다. 따라서 구하는 넓이는 첫째항이 $\dfrac{\sqrt{3}}{36}\times 3$, 공비가 $\dfrac{4}{9}$ 인 무한등비급수의 합이므로 $\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{36}\times 3}{1-\frac{4}{9}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{20}$

77.정답정답 59

[출제의도] 도형의 규칙성을 파악하여 무한등비급수의 합 구하기

지름이 6인 원의 넓이를 A_0, $(A_0=9\pi)$

C_1에서 그려진 2개 원의 넓이의 합을 A_1,

C_2에서 그려진 4개의 원의 넓이의 합을 $A_2,\cdots$

C_n에서 그려진 2^n개의 원의 넓이의 합을 A_n이라 하자.

C_1에서 바깥 원을 O_1, O_1의 내부에 내접하는 두 원을 크기 순서대로 O_2, O_3라 하면

넓이의 비는 $9:4:1$이므로 $A_1=\dfrac{5}{9}A_0$이다.

C_n에서 한 원과 그 원에 내접하는 두 원의 넓이의 비가 O_1, O_2, O_3의 넓이의 비와 같으므로

$A_n=\dfrac{5}{9}A_{n-1}$이다.

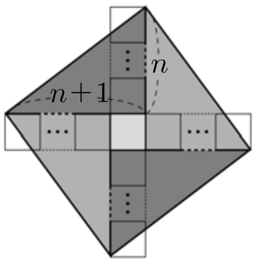
따라서 C_n에서 색칠된 부분의 넓이를 S_n이라 하면

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=A_0\left\{\dfrac{5}{9}-\left(\dfrac{5}{9}\right)^2+\left(\dfrac{5}{9}\right)^3-\left(\dfrac{5}{9}\right)^4+\cdots\right\}$

$=\dfrac{45}{14}\pi$이다. $\therefore\ p+q=59$

78.정답20

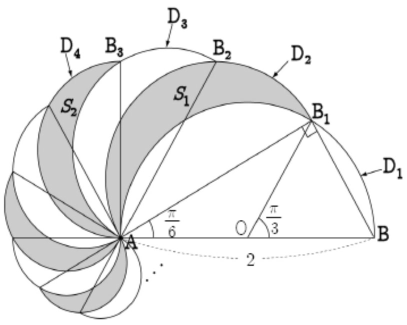
[출제의도] 도형의 규칙성을 파악하여 극한값 구하기



$S_n = 2n(n+1)+1 = 2n^2+2n+1$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\dfrac{10S_n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{10(2n^2+2n+1)}{n^2} = 20$

79.정답 ⑤



$\overline{AB}=2$이므로 $\overline{AB_1}=2\cos\dfrac{\pi}{6}=\sqrt{3}$이다.

S_1의 넓이는 반원 D_2의 넓이에서 반원 D_1의 활꼴 AB_1의 넓이를 뺀 것이다. 즉,

$$S_1=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left\{\left(\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{2}{3}\pi\right)-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin\frac{2}{3}\pi\right\}$$

$$=\frac{1}{24}\pi+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right)$$

또한, $\overline{AB_2}=\dfrac{3}{2}$이고 $\overline{AB}:\overline{AB_2}=1:\dfrac{3}{4}$이므로

$S_1:S_2=1:\dfrac{9}{16}$이다. 그러므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right)}{1-\frac{9}{16}}=\frac{4}{7}\left(\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right)\text{이다.}$$

따라서 $a=7,\ b=4$이므로 $a+b=11$이다.

80. 정답11

[출제의도] 무한등비급수를 이용한 수학내적 문제해결하기

$\triangle \mathrm{OA_1A_2}=\triangle \mathrm{OO_1A_1}+\triangle \mathrm{OO_1A_2}+\triangle \mathrm{O_1A_1A_2}$

$\dfrac{1}{2}\times2\times4=\dfrac{1}{2}\times r_1\times(6+2\sqrt{5})\ \ \therefore r_1=3-\sqrt{5}$

$\triangle \mathrm{OA_2A_3}=\triangle \mathrm{OO_2A_2}+\triangle \mathrm{OO_2A_3}+\triangle \mathrm{O_2A_2A_3}$

$\dfrac{1}{2}\times2\times1=\dfrac{1}{2}\times r_2\times(3+\sqrt{5})$

$\therefore\ r_2=\dfrac{1}{2}(3-\sqrt{5})$

따라서 $r_n=(3-\sqrt{5})\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$이다.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}r_n=6-2\sqrt{5}$이므로 $a+b=11$

81. 정답②

$\overline{OB_1}=\overline{A_1B_1}=6$ 이므로 $S_1=6^2-\dfrac{1}{4}\cdot\pi\cdot6^2=6^2\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\overline{B_1B_2}=\overline{A_2B_2}=\dfrac{6}{2}$ 이므로

$S_2=\left(\dfrac{6}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}\cdot\pi\cdot\left(\dfrac{6}{2}\right)^2=\left(\dfrac{6}{2}\right)^2\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\overline{B_2B_3}=\overline{A_3B_3}=\dfrac{6}{4}$ 이므로

$S_3=\left(\dfrac{6}{4}\right)^2-\dfrac{1}{4}\cdot\pi\cdot\left(\dfrac{6}{4}\right)^2=\left(\dfrac{6}{4}\right)^2\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)$

…

수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $6^2\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)$이고, 공비가 $\dfrac{1}{4}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{6^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)}{1-\frac{1}{4}}=12(4-\pi)$$

82. 정답②

[출제의도] 무한등비급수를 이용하여 호의 길이 구하기

$l_1=2\cdot\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2}{3}\pi,\ l_2=2\cdot\dfrac{\pi}{9}=\dfrac{2}{9}\pi,$

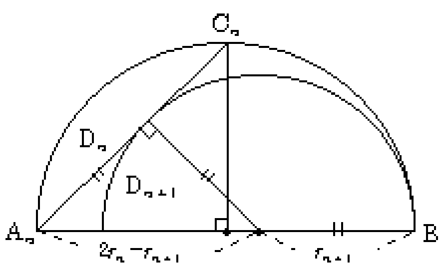
$l_3=2\cdot\dfrac{\pi}{27}=\dfrac{2}{27}\pi,\ \cdots$

따라서 $l_n=\dfrac{2}{3}\pi\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{\frac{2}{3}\pi}{1-\frac{1}{3}}=\pi$$

83. 정답 ⑤

그림과 같이 반원 D_n, D_{n+1}의 반지름을 각각 r_n, r_{n+1}라 하면,



$r_{n+1}:(2r_n-r_{n+1})=1:\sqrt{2},\ r_{n+1}=\dfrac{2}{\sqrt{2}+1}r_n$

따라서, $l_1=2\pi,\ l_{n+1}=\dfrac{2}{\sqrt{2}+1}l_n$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{2\pi}{1-\frac{2}{\sqrt{2}+1}} = 2(3+2\sqrt{2})\pi$$

84. 정답 ①

[출제의도] 도형의 넓이를 무한등비급수의 합으로 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

정육각형 H_n 의 한 변의 길이를 a_n 이라 하면

$$a_{n+1}{}^2 = \frac{a_n{}^2}{2} + \frac{a_n{}^2}{2} - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a_n\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a_n\right)\cos 30^\circ$$

$$a_{n+1}{}^2 = \left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a_n{}^2 \quad \therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{2\sqrt{3}}{3}S_1$$

85. 정답 ②

R_1의 짧은 변의 길이를 x라 하면 R_2의 긴 변과 짧은 변의 길이는 각각 x, $1-x$이고 R_1과 R_2가 닮음이므로

$x : 1 = (1-x) : x$

$x^2+x-1=0$에서 $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ $\quad (\because x>0)$

또 R_n과 R_{n+1}사이에 $1 : \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 의 닮음비가 성립하므로

$$l_{n+1} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}l_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{l_1}{1-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}l_1 \text{ 이므로}$$

$k = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ 이다.

86. 정답⑤

$\overline{\mathrm{OA_n}} = a_n$ 이라 하면 $a_n = \pi \cdot \frac{a_{n+1}}{2}$ 에서

$a_{n+1} = \frac{2}{\pi}a_n$ 이므로 $a_n = a_1 \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-1} = (6\pi-12)\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-1}$

$$\therefore \widehat{\mathrm{OA_n}} = \pi \cdot \frac{a_n}{2} = \frac{\pi}{2}(6\pi-12)\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-1}$$

따라서 구하는 값은 첫째항이 $\frac{\pi}{2}(6\pi-12)$, 공비가 $\frac{2}{\pi}$인

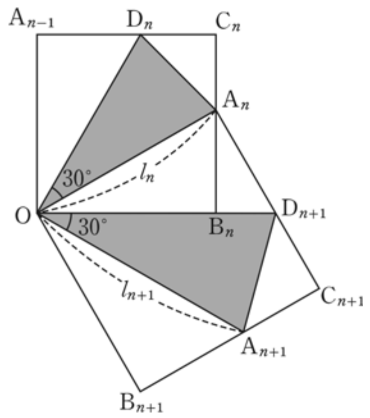
무한등비급수이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\widehat{\mathrm{OA_n}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{6\pi-12}{1-\frac{2}{\pi}} = 3\pi^2$

87. 정답 ⑤

s_n 은 공비가 $\frac{2}{3}$ 이고 첫째항이 $\frac{\pi}{3}$ 인 등비수열, t_n 은 공비가 $\frac{1}{3}$ 이고 첫째항이 $\frac{\pi}{6}$ 인 등비수열일다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(s_n - t_n) = \frac{\frac{\pi}{3}}{1-\frac{2}{3}} - \frac{\frac{\pi}{6}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}\pi$$

88. 정답③



$l_n = \overline{\mathrm{OA_n}}$, $l_{n+1} = \overline{\mathrm{OA_{n+1}}}$ 이므로

$$l_{n+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}l_n, \ = \frac{2}{\sqrt{3}}a$$

$(\because \ l_{n+1} : l_n = 2 : \sqrt{3})$

$$l_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}a\right)\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n-1} = a\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$$

$$\frac{1}{l_n} = \frac{1}{a}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l_n} = \frac{\frac{1}{a}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{a(2-\sqrt{3})} = \sqrt{3}$$

$$\therefore \ a = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}$$

89. 정답③

$S_1 = 20\pi$, $S_n = \frac{1}{4}S_{n-1} + 12\pi \ (n \geq 2)$

$S_n - 16\pi = \frac{1}{4}(S_{n-1} - 16\pi)$ 이므로

$$S_n - 16\pi = (20\pi - 16\pi)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}\pi$$

$$S_n = 16\pi + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}\pi \quad \therefore \lim_{n\to\infty}S_n = 16\pi$$

90. 정답 ④

첫 번째로 잘려진 도형중 한 조각의 넓이 t_1,

두 번째로 잘려진 도형중 한 조각의 넓이 t_2,

$\vdots$

n번째로 잘려진 도형중 한 조각의 넓이 t_n이라 하면 수열 $\{t_n\}$은 $t_1=1-\frac{\pi}{4}$이고, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이므로

$$t_n=\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

이다.

한편, 도형 T_n에서 잘려나간 도형의 총 넓이는

$$2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)+2^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{1}{4}+\ldots$$

$$+2^n\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{1}{4^{n-1}}$$

$$=2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)+2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{1}{2}+\ldots$$

$$+2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$=\frac{2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=4\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{4-4\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\right\}$$

$$=\pi$$

91. 정답125

$S=\sum_{n=0}^{\infty}\overline{P_nQ_{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\overline{Q_nP_n}$ 이고, $x_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{n+1}}$ 이므로

$$\sum_{n=0}^{\infty}\overline{P_nQ_{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}(x_n^2-x_{n+1}^2)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+2}}+\frac{3}{4^{n+2}}\right)$$

$$=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{3}{16}}{1-\frac{1}{4}}$$

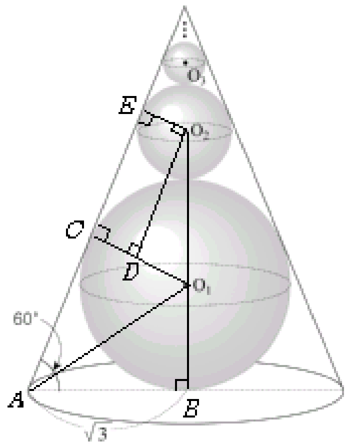
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\overline{Q_nP_n}=\sum_{n=0}^{\infty}(x_{n-1}-x_n)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

따라서 $S=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$ 이므로 $100S=125$

92. 정답②

[출제의도] 무한등비급수를 이용하여 부피의 합 구하기



구 O_1의 반지름을 r_1이라하면 $\triangle ABO_1$에서

$\angle BAO_1=30°$이므로 $\tan30°=\frac{r_1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

따라서 $r_1=1$

구 O_2의 반지름을 r_2이라하면 $\triangle O_2O_1D$에서

$\angle O_1O_2D=30°$이므로 $\sin30°=\frac{1-r_2}{1+r_2}=\frac{1}{2}$

따라서 $r_2=\frac{1}{3}$

구 V_1의 반지름 1이므로 부피는 $\frac{4}{3}\pi$

구 V_2의 반지름 $\frac{1}{3}$이므로 부피는 $\frac{4}{81}\pi$

…

따라서 첫째항이 $\frac{4}{3}\pi$이고 공비가 $\frac{1}{27}$인 무한등비급수이므로

합은 $\dfrac{\frac{4}{3}\pi}{1-\frac{1}{27}}=\frac{18}{13}\pi$

93. 정답 13

[출제의도] 무한등비급수를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.

$$10\left\{1-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4+\cdots\right\}$$

$$=10\left(1-\frac{1}{2}\right)+10\left\{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\right\}\left\{1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\cdots\right\}$$

$$=5+10\cdot\frac{4}{9}\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{4}{9}}\right)=13$$

94. 정답④

주어진 조건에서 $\overline{P_{n+1}Q_{n+1}}=\overline{P_nP_{n+1}}=\overline{P_nQ_n}\cdot\cos\theta$ 이므로

$a_{n+1}=a_n\cdot\cos\theta$

$\therefore\ \frac{a_{n+1}}{a_n}=\cos\theta$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 $a_1=\overline{P_1Q_1}=1$, 공비가 $\cos\theta$ 인 무한등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{1-\cos\theta} = 4$$

$$\therefore \ \cos\theta = \frac{3}{4}$$

95.정답 ⑤

[출제의도] 무한등비급수의 합 구하기

$$A_n = \left\{(\frac{2}{3})^{n-1} - (\frac{2}{3})^n RIGHT \cdot (\frac{2}{3})^{2n-2}\right.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{3n-3}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{8}{27}} = \frac{9}{19}$$

96.정답 ④

[출제의도] 무한등비급수를 활용하여 외적 문제 해결하기

$\overline{AB} = 2$, $\overline{AC} = 2\sqrt{2}$,

$\overline{A_1B_1} = 2\sqrt{2} - 2$, $\overline{B_1C} = \sqrt{2}(2\sqrt{2}-2)$,

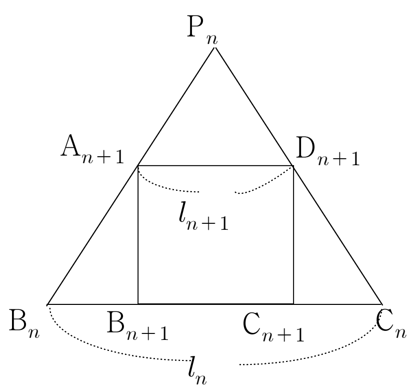
$\overline{A_2B_2} = \sqrt{2}(2\sqrt{2}-2) - (2\sqrt{2}-2) = 2(\sqrt{2}-1)^2$

구하는 값은 초항이 2, 공비가 $\sqrt{2}-1$인 무한등비급수이므로

$$(\text{준식}) = \frac{2}{1-(\sqrt{2}-1)} = 2 + \sqrt{2}$$

97. 정답⑤

[출제의도] 무한등비급수를 이용하여 도형의 넓이의 합 구하기



$\triangle P_nB_nC_n$의 높이는

$\frac{\sqrt{3}}{2} l_n = l_{n+1} + \frac{\sqrt{3}}{2} l_{n+1}$이므로

$$\frac{l_{n+1}}{l_n} = \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} - 3$$

따라서 첫째항은 16이고, 공비는 $(2\sqrt{3}-3)^2$ 인 무한등비급수의 합이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{16}{1-(2\sqrt{3}-3)^2} = 6\sqrt{3} + 10$$

98. 정답 ④

[출제의도] 수열의 극한에 대한 성질을 활용하여 도형과 관련된 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$S_1 = 1 - \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{\sqrt{3}} \times 2 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \times \frac{\pi}{6}$$

$$= 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{9}$$

$$r = \frac{(\text{정사각형}\ OA_2B_2C_2\text{대각선})^2}{(\text{정사각형}\ OA_1B_1C_1\text{대각선})^2} = \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}{(\sqrt{2})^2} = \frac{2}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n = \frac{S_1}{1-r} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{9}}{1-\frac{2}{3}}$$

$$= 3 - \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

99. 정답 ⑤

[출제의도] 도형의 규칙성을 파악하여 극한값 구하기

n단계에서 색칠하는 부분의 넓이를 a_n이라 하면

$$a_1 = \frac{1}{4}\pi(1^2 - 0^2) + \frac{3}{4}\pi(2^2 - 1^2)$$

$$a_2 = \frac{1}{4}\pi(3^2 - 2^2) + \frac{3}{4}\pi(4^2 - 3^2)$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{1}{4}\pi\{(2n-1)^2 - (2n-2)^2\}$$

$$+ \frac{3}{4}\pi\{(2n)^2 - (2n-1)^2\}$$

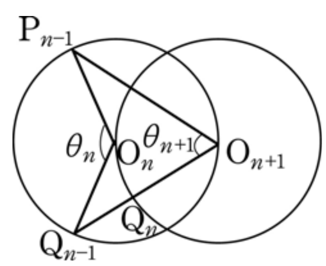
$$S_n = \frac{1}{4}\pi\left\{\sum_{k=1}^{n}(4k-3)\right\} + \frac{3}{4}\pi\left\{\sum_{k=1}^{n}(4k-1)\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\pi(2n^2 - n) + \frac{3}{4}\pi(2n^2 + n)$$

$$= \frac{\pi}{2}(4n^2 + n)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2}(4n^2+n)}{n^2} = 2\pi$$

100. 정답 ②



오른쪽 그림에서

$\angle P_{n-1}O_nQ_{n-1} = \theta_n \ (n \geq 2)$

$\angle P_nO_{n+1}Q_n = \theta_{n+1}$이라고 하면

$$\theta_{n+1} = \frac{1}{2}\theta_n$$

$$\left(\because (\text{원주각}) = \frac{1}{2}(\text{중심각})\right)$$

$$\therefore S_{n+1} = \frac{1}{2} S_n$$

$\angle P_1O_2Q_1 = \frac{2}{3}\pi$ 이므로

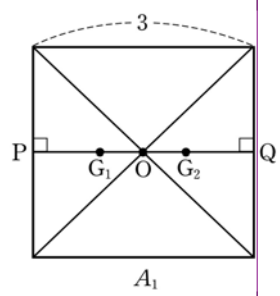
$$S_1 = \frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{2}{3}\pi = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{\pi}{3}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\pi$$

101. 정답 ⑤

오른쪽 그림과 같이 대각선의 교점을 O, 무게중심을 G_1, G_2라고 하면

P, G_1, O, G_2, Q 는 일직선 위에 있고, $\overline{PQ} = 3$이다.



$\overline{G_1G_2} = \frac{2}{3}\overline{PQ} = 2$

A_1과 A_2의 대각선의 길이의 비가 $3\sqrt{2} : 2$이므로 넓이의 비는 $(3\sqrt{2})^2 : 2^2$이다.

첫째항 $S_1 = 9$이고, 공비 $r = \frac{2}{9}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{9}{1-\frac{2}{9}} = \frac{81}{7}$$

102. 정답③

[출제의도] 등비수열의 합과 수열의 극한을 이용하여 도형 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

정사각형의 넓이를 a^2이라 하면 정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$이므로

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \left(1-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)(1+3+3^2+\cdots+3^{n-1})$$

$$= \left(1-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\cdot\frac{3^n-1}{3-1} = \frac{4-\sqrt{3}}{8}(3^n-1)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{8(a_1+a_2+\cdots+a_n)}{3^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}(4-\sqrt{3})\cdot\frac{3^n-1}{3^n} = 4-\sqrt{3}$$

103. 정답 ①

$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^k} = \frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4} + 3\cdot\frac{1}{8} + \cdots$은 <그림1>의 좌표평면 위의 그림의 넓이를 세로로 분할하여 위에서부터 생기는 직사각형의 넓이의 합으로 표현한 것이다. 그런데 같은 넓이를 <그림2> 처럼 가로로 분할하여 오른쪽부터 생기는 직사각형의 넓이의 합으로 표현하면

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \quad \therefore (가) = 2$$

<그림3>에서

(세로로 분할한 직사각형 넓이의 합)

$= (r-r^2)\cdot 1 + 2(r^2-r^3)\cdot 1 + 3(r^3-r^4)\cdot 1 + \cdots$

$= (1-r)(r+2r^2+3r^3+4r^4+\cdots)$

$= (1-r)\sum_{k=1}^{\infty} kr^k = r + r^2 + r^3 + \cdots = \frac{r}{1-r}$

$\therefore (나) = 1-r \quad (다) = \frac{r}{(1-r)^2}$

104. 정답①

[출제의도] 무한등비급수의 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$S_1 = \pi - \left\{\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)\right\} = \frac{\pi+1}{2}$$

원 C_n 의 지름의 길이를 l_n이라 하면

$l_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}l_n$이므로

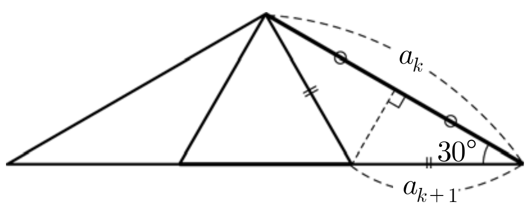
$$S_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 S_n = \frac{1}{2}S_n$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{\pi+1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \pi + 1$$

105. 정답 ⑤

[출제의도] 무한등비급수의 합 구하기

k번째 만들어진 정육각형 H_k와 $k+1$번째 만들어진 정육각형 H_{k+1}의 한 변의 길이를 각각 a_k, a_{k+1}이라 하면



$a_{k+1}\cos 30^\circ = \frac{1}{2}a_k \qquad \therefore a_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{3}}a_k$

길이의 비가 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 이므로 넓이의 비는 $\frac{1}{3}$이고 첫 번째 과정에서 생기는 6개의 정삼각형의 넓이의 합은

$6\times\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3})^2 = \frac{9}{2}\sqrt{3}$ 이다. 모든 정삼각형의 넓이의 합은 첫째항이 $\frac{9}{2}\sqrt{3}$이고, 공비가 $\frac{1}{3}$인 무한 등비급수의 합이므로

$$\therefore \frac{\frac{9}{2}\sqrt{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{27}{4}\sqrt{3}$$

106. 정답 ⑤

[출제의도] 무한등비급수의 합을 적용한 문제 해결하기

n번째 그린 정사각형을 A_n, A_n의 외접원을 O_n, 원 O_n의 반지름의 길이를 R_n, O_n의 내부와 A_n의 외부에서 접하는 최대원의 넓이를 T_n, 반지름의 길이를 r_n이라 하면

$$R_1=1,\ R_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}R_n,\quad \therefore R_n=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$$

$$r_n=\frac{R_n-\frac{1}{\sqrt{2}}R_n}{2}=\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}R_n=\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{n-1}$$

$$T_n=\pi\left\{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}\right\}^2=\pi\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}4T_n=4\pi\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$=4\pi\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{8}\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=(3-2\sqrt{2})\pi$$

107. 정답 ⑤

직각삼각형 $P_1O_1C_1$에서 $\angle O_1=\frac{\pi}{6}$이고, $\overline{O_1C_1}=1$이므로

$$\overline{O_1P_1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S_1=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{16}$$

$\overline{A_1O_1}=\sqrt{3}$, $\overline{O_1O_2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $\overline{A_1O_2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 즉, 삼각형 $A_1O_2C_2$와 $A_1O_1C_1$는 닮음비가 $1:2$인 닮음삼각형. 따라서,

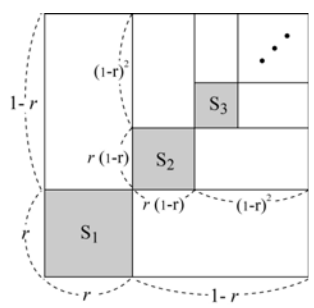
$$S_2=\frac{1}{4}S_1$$

$\{S_n\}$은 $S_1=\frac{\pi}{16}$, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열

$$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{\pi}{16}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{\pi}{12}$$

108. 정답 10

[출제의도] 무한등비급수의 합 계산하기



$$S_1=r^2,\ S_2=r^2(1-r)^2,\ S_3=r^2(1-r)^4\cdots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}S_k=\frac{r^2}{1-(1-r)^2}=\frac{r}{2-r}=\frac{1}{7}$$

$\therefore r=\frac{1}{4}$ 이므로 $m:n=r:1-r=1:3$

따라서 $m^2+n^2=10$

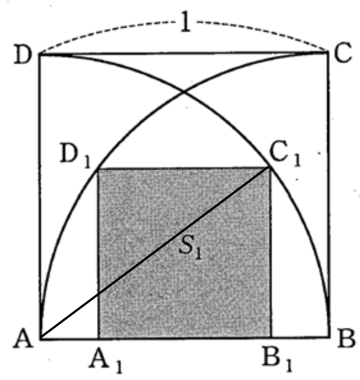
109. 정답 27

[출제의도] 무한등비급수의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

선분 A_nH_n의 길이는 $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 이므로 $S_n=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

$a=\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\sqrt{3}}{9}$이므로 $\frac{1}{a^2}=27$이다.

110. 정답 ②



위 그림에서 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 한 변의 길이를 a라 하면

$$\overline{AA_1}=\frac{1-a}{2}$$

$\overline{AB_1}^2+\overline{B_1C_1}^2=\overline{AC_1}^2$이므로 $\left(\frac{1-a}{2}+a\right)^2+a^2=1$

전개하여 정리하면 $5a^2+2a-3=0$

$(5a-3)(a+1)=0\qquad\therefore a=\frac{3}{5}$

따라서 $S_1=a^2=\frac{9}{25}$

정사각형 $A_1B_1C_1D_1$과 $A_2B_2C_2D_2$의 닮음비는
정사각형 ABCD와 $A_1B_1C_1D_1$의 닮음비와 같고

그 값은 $1:\frac{3}{5}$이다.

따라서 넓이의 비는 $1:\frac{9}{25}$이다. 그러므로 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n$은 첫째항 $\frac{9}{25}$이고 공비가 $\frac{9}{25}$인 무한등비급수가 된다.

$$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{9}{25}}{1-\frac{9}{25}}=\frac{9}{16}$$

111. 정답 ①

[출제의도] 등차수열의 합과 무한등비급수를 실생활에 적용시킬 수 있는가를 묻는 문제이다.

i) 올라가면서 움직인 거리의 합은 공차가 $\frac{5\pi}{18}$ 이고 항의 개수가 17 인 등차수열의 합이다.

$5\frac{\pi}{18}+5\frac{2\pi}{18}+5\frac{3\pi}{18}+\cdots+5\frac{17\pi}{18}=\frac{85\pi}{2}$

ii) 내려오면서 움직인 거리의 합은 첫째항이 $\frac{9}{2}\pi$ 이고 공비가 $\frac{9}{10}$ 인 무한등비급수이다. $\dfrac{5\pi\times\frac{9}{10}}{1-\frac{9}{10}}=45\pi$

$\therefore\ \frac{85\pi}{2}+45\pi=87.5\pi$

112. 정답①

[출제의도] 도형의 넓이에 관한 무한급수의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

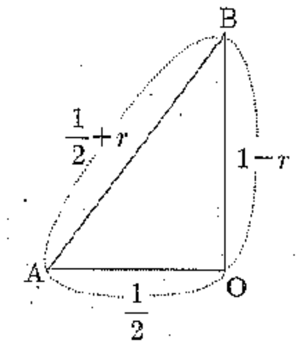
$\overline{DP_1}=2$, $\triangle DP_1D_1 \backsim \triangle BCD_1$이므로 $\overline{DD_1}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$

$\therefore\ S_1=\frac{8}{3}$

한편, 정사각형 $BC_1D_1A_1$의 한 변의 길이는 $\frac{8}{3}$ 이므로 각 정사각형의 넓이는 공비가 $\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$ 인 등비수열을 이룬다.

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{24}{5}$

113. 정답 ③



원 O_1, A_1, B_1의 중심을 각각 O, A, B라 하면 R_1의 내부의 큰 원의 반지름은 $\frac{1}{2}$이고, 작은 원의 반지름을 r이라 하면

$\left(\frac{1}{2}+r\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+(1-r)^2$

이므로 $r=\frac{1}{3}$이다.

따라서 R_1의 어두운 부분의 넓이는 $\frac{13}{18}\pi$이다.

넓이의 합 S_n은 공비가 $\frac{13}{18}$인 등비수열이므로

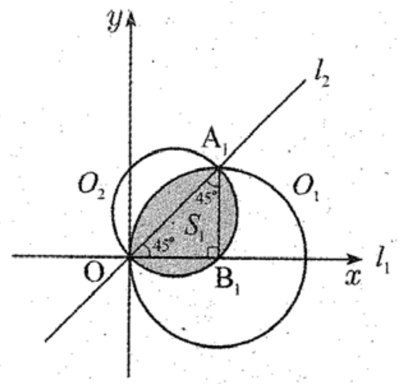
$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{13}{18}\pi}{1-\frac{13}{18}}=\frac{13}{5}\pi\text{이다.}$$

114. 정답 ④

[출제의도] 도형의 넓이에 관한 무한급수의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

원 O_1과 직선 l_2의 한 교점을 A_1, 원 O_1의 중점을 $B_1(3,\ 0)$이라 하면 삼각형 A_1OB_1은 직각이등변삼각형이므로 $\overline{OA_1}=3\sqrt{2}$

$S_1=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{9}{4}\pi-\frac{9}{2}=\frac{9}{2}(\pi-1)$



같은 방법으로 원 O_2와 직선 l_3의 한 교점을 A_2, 원 O_2의 중심을 B_2라 하면 삼각형 A_2OB_2는 직각이등변삼각형이므로 $\overline{OA_2}=3$

$S_2=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{\pi}{4}\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{9}{4}(\pi-1)$

$\cdots$

$S_n=\frac{9}{2^n}(\pi-1)$

수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{9}{2}(\pi-1)$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{9}{2}(\pi-1)}{1-\frac{1}{2}}=9(\pi-1)$$

115. 정답 ⑤

[출제의도] 무한등비수열의 극한을 이해하고 이를 활용하여 극한값 구하기

$\triangle C_1OQ_1$에서 $\angle C_1OQ_1=30^\circ$ 이고 $\overline{OC_1}=2$이므로 $\overline{C_1Q_1}=1$이다. 이 때, 원 C_n의 반지름의 길이를 r_n, 원 C_{n+1}의 반지름의 길이를 r_{n+1}이라 하면, $r_1=1$이고

$\sin 30^\circ=\frac{r_{n+1}-r_n}{r_{n+1}}=\frac{1}{2}$에서 $r_{n+1}=2r_n$이므로 $S_{n+1}=4S_n$이 된다.

$S_1=2\times\triangle C_2C_1B_1=\frac{\sqrt{15}}{2}$ 이므로 $S_n=\frac{\sqrt{15}}{2}4^{n-1}$이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{4^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{15}}{8}4^n}{4^n+3^n}=\frac{\sqrt{15}}{8}$ 이다.

116. 정답 ②

색칠된 직사각형을 모두 모으면 닮은 직사각형이 된다.

$S_1=\left(5\times\frac{3}{4}\right)\left(4\times\frac{4}{5}\right)=20\times\frac{3}{5}=12$

$S_2 = \left(5\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\right)\left(4\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\right) = 20\times\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{5}$

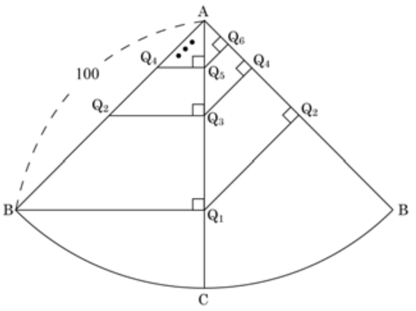
$\vdots$

$S_n = 20\times\left(\frac{3}{5}\right)^n$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{12}{1-\frac{3}{5}} = 30$$

117. 정답 200

[출제의도] 무한등비급수의 합을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기



$\angle BAC = 45^\circ$ 이므로

$l_1 = 50\sqrt{2}$, $l_2 = 50$, $l_3 = 25\sqrt{2}$, $\cdots$

따라서, $l_n = 50\sqrt{2}\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$ 이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{50\sqrt{2}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = 100+100\sqrt{2}$$

$\therefore\ a+b = 200$

118. 정답 25

[출제의도] 도형의 성질과 극한을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

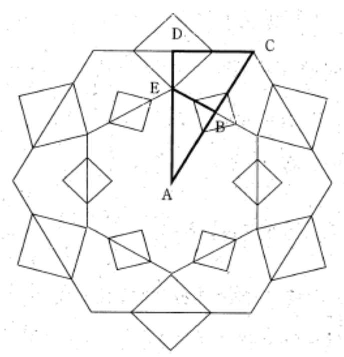
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n^2M}{(6n+3)^2}+\frac{(2n+1)^2M}{(6n+3)^2}+\frac{(3n+2)^2M}{(6n+3)^2}\right\}$$

$= \frac{7}{18}M$

$\therefore\ p+q = 25$

119. 정답 ①

[해설]



그림과 같이 $\triangle ACD \backsim \triangle AEB$이다.

$\overline{CD} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\angle ACD = 60^\circ$, $\overline{AD} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $\overline{DE} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$\therefore\ \overline{AE} = \frac{2\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

주어진 정육각형과 첫 번째 만들어진 정육각형의 닮음비는

$1 : \frac{2\sqrt{3}-1}{4}$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty} l_n = 6\times\frac{2}{1-\frac{2\sqrt{3}-1}{4}} = \frac{48(5+2\sqrt{3})}{13}$$

120. 정답16

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{4^n} = 2$에서 무한급수의 합이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{4^n} = 0$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{4^n}+4-\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\frac{1}{4}+3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

$$= \frac{4}{\frac{1}{4}} = 16$$

121. 정답 16

두 무한등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공비를 r라 하자.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-r} = 8$ $\cdots$ ㉠

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{b_1}{1-r} = 6$ $\cdots$ ㉡

㉠$-$㉡에서

$\frac{a_1-b_1}{1-r} = 2$

$a_1-b_1 = 1$ 이므로 $\frac{1}{1-r} = 2$, $1-r = \frac{1}{2}$

$\therefore\ r = \frac{1}{2}$

㉠에서

$a_1 = 8(1-r) = 8\cdot\frac{1}{2} = 4$

㉡에서

$b_1 = 6(1-r) = 6\cdot\frac{1}{2} = 3$

따라서 수열 $\{a_nb_n\}$은 첫째항이

$a_1b_1 = 4\cdot 3 = 12$ 이고, 공비가 $r^2 = \frac{1}{4}$ 인 등비수열이다.

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n = \frac{12}{1-\frac{1}{4}} = \frac{12}{\frac{3}{4}} = 16$$

122. 정답 ②

$1st$ a_n의 범위가 주어진 상황에서 $a_1+a_2+\cdots+a_n$을 알아야 함에 착안!

$n<a_n<n+1$이므로

$$\sum_{k=1}^{n}k<\sum_{k=1}^{n}a_k<\sum_{k=1}^{n}(k+1)$$

$2nd$ 자연수의 거듭제곱의 합을 이용해서 부등식의 각 변을 n에 관한 식으로~!

$$\frac{n(n+1)}{2}<\sum_{k=1}^{n}a_k<\frac{n(n+1)}{2}+n$$

$$\frac{n^2+n}{2}<a_1+a_2+\cdots+a_n<\frac{n^2+3n}{2}$$

$$\frac{2}{n^2+3n}<\frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}<\frac{2}{n^2+n}$$

$$\therefore \frac{2n^2}{n^2+3n}<\frac{n^2}{a_1+a_2+\cdots+a_n}<\frac{2n^2}{n^2+n}$$

$3rd$ 위 시기의 양변에 $\lim_{n\to\infty}$를 취해!

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+3n}\leq\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\leq\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+n}$$

여기서 $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+n}=2$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{a_1+a_2+\cdots+a_n}=2$$

다른 풀이

조건을 만족하는 수열 $\{a_n\}$을 임의로 잡아서 풀어보자

$n<a_n<n+1$이므로 $a_n=a+\frac{1}{2}$이라 하면

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\left(k+\frac{1}{2}\right)=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n}{2}=\frac{n^2+2n}{2}$$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{a_1+a_2+\cdots+a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sum_{k=1}^{\infty}a_k}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\frac{n^2+2n}{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+2n}=2$$

123. 정답 ③

$1st$ 무한등비수열$\{a_n\}$의 일반항을 $a_n=a_1r^{n-1}$(단, $a_1\neq0$)이라 하자.

ㄱ, 무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하면 $-1<r<1$이지?

그림 $a_{2n}=a_1r^{2n-1}=a_1r\cdot(r^2)^{n-1}$에서 공비는 r^2이고

$0\leq r^2<1$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$도 수렴해(참)

ㄴ, 무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 발산하면 $r\leq-1$또는 $r\geq1$이지?

ㄱ에서 a_{2n}의 공비는 r^2이고, $r^2\geq1$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$은 발산해 (참)

ㄷ, [반례] $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$이라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1\text{로 수렴해.}$$

그런데 $\lim_{n\to\infty}\left(a_n+\frac{1}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}\neq0$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+\frac{1}{2}\right)$은 발산해.

즉, 무한등비급수$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴해도 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+\frac{1}{2}\right)$은 발산할 수 있어.

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이야.

124. 정답 ⑤

$a_n=\frac{1}{2^{n-1}}cos\frac{(n-1)\pi}{2}$, $b_n=\frac{1+(-1)^{n-1}}{2^n}$이지?

$1st$ ㄱ은 a_n의 n대신 $3k$를, ㄴ은 $a_{n,}\ _{b_n}$의 n대신 $4k-1$을 대입해,

ㄱ, $a_{3k}=\frac{1}{2^{3k-1}}cos\frac{(3k-1)\pi}{2}$

여기서 $k=2$를 대입하면 $a_6=\frac{1}{2^5}cos\frac{5\pi}{2}=\frac{1}{2^5}\cdot0=0$

즉, 모든 자연수 k에 대하여 $a_{3k}<0$은 아니야. (거짓)

ㄴ, $a_{4k-1}=\frac{1}{2^{4k-2}}cos\frac{(4k-2)\pi}{2}=\frac{1}{2^{4k-2}}cos(2k-1)\pi=-\frac{1}{2^{4k-2}}$

$b_{4k-1}=\frac{1+(-1)^{4k-2}}{2^{4k-1}}=\frac{1+1}{2^{4k-1}}=\frac{1}{2^{4k-2}}$

$\therefore a_{4k-1}+b_{4k-1}=-\frac{1}{2^{4k-2}}+\frac{1}{4^{4k-2}}=0$ (참)

$2nd$ 수열$\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 첫째항과 공비를 알아내야 ㄷ의 무한등비급수의 합을 알 수 있지?

ㄷ, $\{a_n\}$: 1, 0, $-\frac{1}{2^2}$, 0, $\frac{1}{2^4}$, 0, $\cdots$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2^2}\right)}=\frac{1}{\frac{5}{4}}=\frac{4}{5}$$

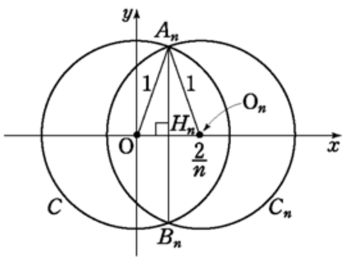
$\{b_n\}$: 1, 0, $\frac{1}{2^2}$, 0, $\frac{1}{2^4}$, 0, $\cdots$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{1-\frac{1}{2^2}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{3}{5}\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이야.

125. 정답19



$\triangle \mathrm{A}_n\mathrm{O}\mathrm{O}_n$은 이등변삼각형이고,

$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n} \perp \overline{\mathrm{O}\mathrm{O}_n}$

이므로 $\overline{\mathrm{OH}_n} = \frac{1}{n}$

$$\frac{1}{2}l_n = \overline{\mathrm{A}_n\mathrm{H}_n} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{n^2-1}{n^2}} = \frac{\sqrt{n^2-1}}{n}$$

$$nl_n = 2\sqrt{n^2-1}$$

$$\therefore (nl_n)^2 = 4(n^2-1) = 4(n-1)(n+1)$$

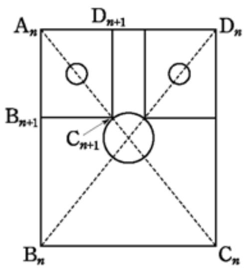
$$\therefore \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(nl_n)^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)(n+1)}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right\}$$

$$= \frac{1}{8} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{16}$$

126. 정답⑤



□$\mathrm{AB}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$과

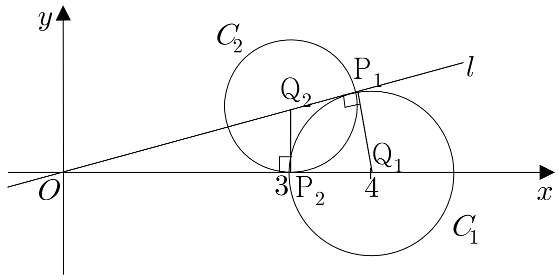
□$\mathrm{AB}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{D}_{n+1}$에서

두 사각형은 닮은 도형이고 대각선의 길이의 비가 $10:4$이므로 넓이의 비는 $5^2 : 2^2$이다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \pi + 4\times\left(\frac{2}{5}\right)^2\pi + 4^2\left(\frac{2}{5}\right)^4\pi + \cdots$$

$$= \frac{\pi}{1-\frac{16}{25}} = \frac{25}{9}\pi$$

127. 정답 ③



원 C_1, C_2의 중심을 각각 Q_1, Q_2라 하자.

$\triangle OP_1Q_1$에서 $\overline{OP_1} = \sqrt{4^2-1^2} = \sqrt{15}$

이고, $\triangle OP_1Q_1 \backsim \triangle OP_2Q_2$이므로

$\overline{OP_1} : \overline{P_1Q_1} = \overline{OP_2} : \overline{P_2Q_2}$

$\sqrt{15} : 1 = 3 : \overline{P_2Q_2}$

$\therefore \overline{P_2Q_2} = \frac{3}{\sqrt{15}}$

따라서, $\triangle OP_1Q_1$과 $\triangle OP_2Q_2$의 닮음비는

$\overline{P_1Q_1} : \overline{P_2Q_2} = 1 : \frac{3}{\sqrt{15}}$

이므로 넓이의 비는 $1 : \frac{9}{15} = 1 : \frac{3}{5}$이다.

원 C_1의 넓이는 $S_1 = \pi$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = S_1 + S_2 + S_3 + \cdots$$

$$= S_1 + \frac{3}{5}S_1 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 S_1 + \cdots$$

$$= \frac{S_1}{1-\frac{3}{5}}$$

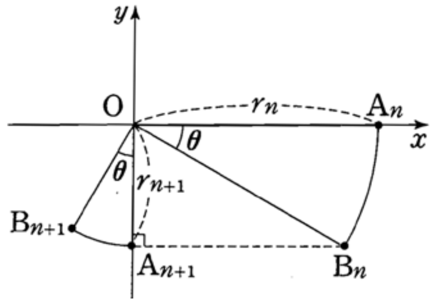
$$= \frac{5}{2}S_1$$

$$= \frac{5}{2}\pi$$

128. 정답 ⑤

$1st$ 부채꼴의 반지름의 길이를 r_n이라 하고 $\{r_n\}$의 일반항부터 구해.

문제를 일반화해서 그림으로 나타내면 다음과 같다.



부채꼴 OA_nB_n의 반지름의 길이를 r_n이라 하면

$\triangle OB_nA_{n+1}$에서 $\cos(\angle B_nOA_{n+1}) = \frac{\overline{OA_{n+1}}}{\overline{OB_n}}$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{r_{n+1}}{r_n}$ $\qquad \therefore r_{n+1}=r_n\sin\theta$

그런데 $r_1=8$이고 $\{r_n\}$의 공비가 $\sin\theta$이므로

$r_n=8\sin^{n-1}\theta$

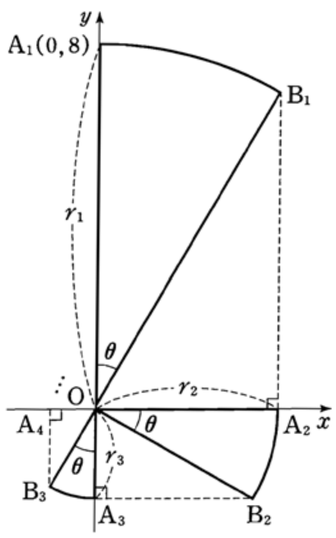
2nd 다음은 l_n의 일반항!

$\therefore l_n=r_n\theta=(8\sin^{n-1}\theta)\times\theta=8\theta\sin^{n-1}\theta$

3rd $\sum_{n=1}^{\infty}l_n=12\theta$임을 이용해서 $\sin\theta$의 값을 구하면돼.

$\sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{8\theta}{1-\sin\theta}=12\theta$에서

$1-\sin\theta=\frac{2}{3} \qquad \therefore \sin\theta=\frac{1}{3}$



다른 풀이

부채꼴 OA_nB_n의 반지름의 길이를

r_n이라 할 때, r_1, r_2, r_3, …를

차례로 구해서!

먼저 $A(0,\ 8)$이므로 $r_1=8$이야.

다음 $\triangle OB_1A_2$에서

$\overline{OA_2}=\overline{OB_1}cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$이므로

$r_2=\sin\theta$

또, $\triangle OB_2A_3$에서 $\overline{OA_3}=\overline{OB_2}cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$이므로

$r_3=8\sin\theta\cdot\sin\theta=8\sin^2\theta$

$\vdots$

$\therefore r_n=8\sin^{n-1}\theta$

129. 정답 13

1st S_1, S_2, S_3, …을 차례로 구하여 S_n을 유추해.

한 변의 길이가 n인 정사각형에서 한 변의 길이가 $\frac{n}{2}$인 정사각형을 잘라낸 후 남은 凹모양의 도형의 넓이는 한 변의 길이가 n인 정사각형의 넓이의 $\frac{3}{4}$이지?

또, 凹모양의 위쪽 양 끝네 이러한 도형을 계속 붙여 나가므로 새로 생기는 凹모양의 도형의 개수는

1, 2, 4, 8, …, 2^{n-1}, …개야.

$S_1=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$, $S_2=\frac{3}{4}+2\cdot\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2$

$S_3=\frac{3}{4}+2\cdot\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2+2^2\cdot\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4+\cdots+2^{n-1}\cdot\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{2(n-1)}$

$=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{8}+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{8}\right)^2+\cdots+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{3}{4}\left(\frac{1}{8}\right)^{k-1}\right\}$

2nd

$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{3}{4}\left(\frac{1}{8}\right)^{k-1}\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{3}{4}\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}\right\}=\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{6}{7}=\frac{q}{p}$

$\therefore p=7,\ q=6$ ($\because p$와 q는 서로소인 자연수)

따라서 $p+1=7+6=13$이야.

130. 정답 ④

원 O_2의 반지름의 길이를 r라 하면

$\overline{A_1C_2}+\overline{A_2C_1}-\overline{A_2C_2}=\overline{A_1C_1}$

이므로

$3\sqrt{2}+3\sqrt{2}-2r=6$

$\therefore\ r=3\sqrt{2}-3$

따라서 반복되어지는 도형의 닮음비는

$3:(3\sqrt{2}-3)=1:(\sqrt{2}-1)$

이므로 넓이의 비는

$1:(\sqrt{2}-1)^2=1:(3-2\sqrt{2})$

그러므로 수열 $\{S_n+T_n\}$은 공비가 $3-2\sqrt{2}$인 등비수열이다.

이 때 첫째항 S_1+T_1의 값은

$\pi\cdot3^2-2\times\left\{\frac{1}{2}\cdot(3\sqrt{2})^2\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cdot(3\sqrt{2})^2\right\}$

$=18$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}(S_n+T_n)=\frac{18}{1-(3-2\sqrt{2})}=\frac{18}{2\sqrt{2}-2}=\frac{9}{\sqrt{2}-1}=9(\sqrt{2}+1)$$

131.[정답] ②

[해설]

문제의 그림에서 $\overline{M_1M_2}=1$, $\overline{B_2M_2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore\ \overline{A_1B_2}=1-\frac{1}{\sqrt{3}}$

$S_1=2\times\left(\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\times1\right)=1-\frac{1}{\sqrt{3}}$

또, 그림에서 나타나는 직사각형들은 모두 닮음이고 닮음비를 구하면

$\overline{B_nC_n}:\overline{B_{n+1}C_{n+1}}=1:\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ 넓이비 $S_n : S_{n+1} = 1 : \frac{1}{3}$

따라서, S_n은 첫항이 $1-\frac{1}{\sqrt{3}}$, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$$