2023 MINIRING CURRICULUM

FIRST STORY

미적분

첫번째 이야기. 2023학년도 기출

“

나는 생각한다
고로 배고프다

”

STORY 01 2023학년도 교육청 & 평가원 기출문제

이번주 띵언 | 나는 먹는다. 고로 살찐다.

001 [2022학년도 3월 미적분 28번]

자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 A_n을 다음 규칙에 따라 정한다.

> (가) A_1은 원점이다.
> (나) n이 홀수이면 A_{n+1}은 점 A_n을 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 점이다.
> (다) n이 짝수이면 A_{n+1}은 점 A_n을 y축의 방향으로 $a+1$만큼 평행이동한 점이다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_{2n}}}{n}=\frac{\sqrt{34}}{2}$ 일 때, 양수 a의 값은? [4점]

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ 2 ④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

PICK

결국 어떤 방식으로든 극한을 구하려면 식을 구해야 한다.
점의 위치 변화 양상을 관찰하고 식을 세워보자.

002 [2022학년도 3월 미적분 29번]

실수 t에 대하여 직선 $y=tx-2$가 함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x^{2n+1}-1}{x^{2n}+1}$$

의 그래프와 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=a$에서 불연속인 모든 a의 값을 작은 수부터 크기 순으로 나열한 것을 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m$(m은 자연수)라 할 때, $m\times a_m$의 값을 구하시오. [4점]

PICK

지수로 된 극한은 밑이 다음의 다섯 경우인 경우로 나뉜다.

$a>1,\ a=1,\ -1<a<1,\ a=-1,\ a<-1$

불연속인 점을 지날 때 빼먹는 경우가 없는지 확인하자.

003 [2022학년도 3월 미적분 30번]

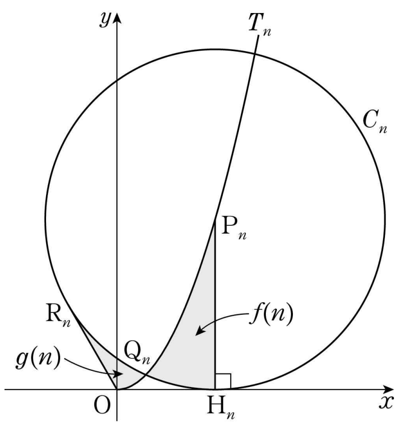
그림과 같이 자연수 n에 대하여 곡선

$$T_n : y = \frac{\sqrt{3}}{n+1}x^2 \ (x \geq 0)$$

위에 있고 원점 O와의 거리가 $2n+2$인 점을 P_n이라 하고, 점 P_n에서 x축에 내린 수선의 발을 H_n이라 하자.
중심이 P_n이고 점 H_n을 지나는 원을 C_n이라 할 때, 곡선 T_n과 원 C_n의 교점 중 원점에 가까운 점을 Q_n, 원점에서 원 C_n에 그은 두 접선의 접점 중 H_n이 아닌 점을 R_n이라 하자.
점 R_n을 포함하지 않는 호 $\mathrm{Q}_n\mathrm{H}_n$과 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{H}_n$, 곡선 T_n으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(n)$, 점 H_n을 포함하지 않는 호 $\mathrm{R}_n\mathrm{Q}_n$과 선분 OR_n, 곡선 T_n으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(n)$이라 할 때,

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)-g(n)}{n^2} = \frac{\pi}{2}+k$이다. $60k^2$의 값을 구하시오.

(단, k는 상수이다.) [4점]

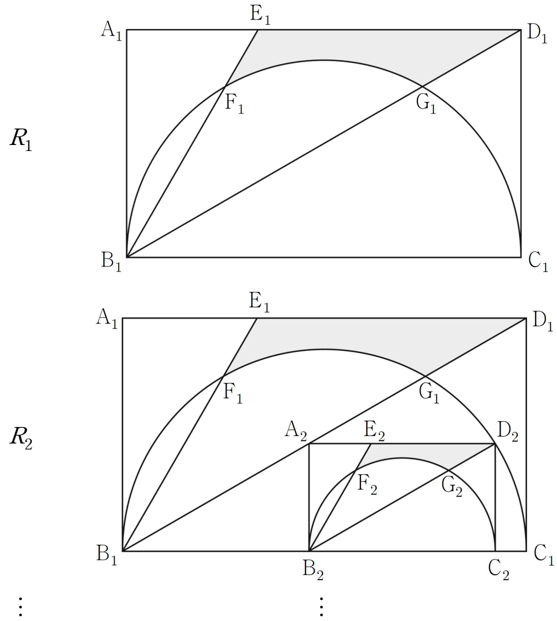


PICK

극한 $f(n)+g(n)$을 구할 때는 도형을 붙이고 떼는 방법, $f(n)-g(n)$을 구할 때는 겹치는 부분을 포함해서 생각하는 방법이 있다.
O, Q_n, H_n으로 둘러싸인 부분을 포함하여 $f(n)-g(n)$의 넓이를 구하는 방법을 고찰해보자.

004 [2022학년도 4월 미적분 28번]

그림과 같이 $\overline{\mathrm{A_1B_1}}=2$, $\overline{\mathrm{B_1C_1}}=2\sqrt{3}$인 직사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$이 있다. 선분 $\mathrm{A_1D_1}$을 $1:2$로 내분하는 점을 $\mathrm{E_1}$이라 하고 선분 $\mathrm{B_1C_1}$을 지름으로 하는 반원의 호 $\mathrm{B_1C_1}$이 두 선분 $\mathrm{B_1E_1}$, $\mathrm{B_1D_1}$과 만나는 점 중 $\mathrm{B_1}$이 아닌 점을 각각 $\mathrm{F_1}$, $\mathrm{G_1}$이라 하자.
세 선분 $\mathrm{F_1E_1}$, $\mathrm{E_1D_1}$, $\mathrm{D_1G_1}$과 호 $\mathrm{F_1G_1}$로 둘러싸인 모양의 도형이 색칠하는 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 선분 $\mathrm{B_1G_1}$ 위의 점 $\mathrm{A_2}$, 호 $\mathrm{G_1C_1}$ 위의 점 $\mathrm{D_2}$와 선분 $\mathrm{B_1C_1}$ 위의 두 점 $\mathrm{B_2}$, $\mathrm{C_2}$를 꼭짓점으로 하고 $\overline{\mathrm{A_2B_2}}:\overline{\mathrm{B_2C_2}}=1:\sqrt{3}$인 직사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$를 그린다. 직사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은? [4점]



① $\frac{169}{864}(8\sqrt{3}-3\pi)$ ② $\frac{169}{798}(8\sqrt{3}-3\pi)$
③ $\frac{169}{720}(8\sqrt{3}-3\pi)$ ④ $\frac{169}{864}(16\sqrt{3}-3\pi)$
⑤ $\frac{169}{798}(16\sqrt{3}-3\pi)$

PICK

도형에 관한 무한등비급수 문제는 제1항과 공비만 구하면 끝난다.
대부분의 경우는 제1항을 구하는 것이 어렵다는 사실에 유념하자.
공비는 가장 편한 아이의 길이비로 구하면 된다.
예를 들어, 위의 경우 $\overline{\mathrm{A_2B_2}}$의 길이가 상대적으로 구하기 쉽기 때문에 이에 대응하는 $\overline{\mathrm{A_1B_1}}$과의 길이비를 통해 닮음비를 구할 수 있을 것이다.

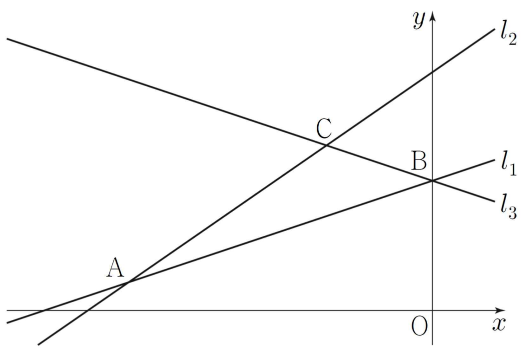
005 [2022학년도 4월 미적분 29번]

그림과 같이 좌표평면 위의 제2사분면에 있는 점 A를 지나고 기울기가 각각 m_1, m_2 $(0 < m_1 < m_2 < 1)$인 두 직선을 l_1, l_2라 하고, 직선 l_1을 y축에 대하여 대칭이동한 직선을 l_3이라 하자.

직선 l_3이 두 직선 l_1, l_2와 만나는 점을 각각 B, C라 하면 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\overline{\text{AB}} = 12$, $\overline{\text{AC}} = 9$
>
> (나) 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는 $\dfrac{15}{2}$이다.

$78 \times m_1 \times m_2$의 값을 구하시오. [4점]



PICK

외접원의 반지름은 결국 사인법칙을 쓰라는 의미이다.
그럼 $\overline{\text{BC}}$의 길이도 구할 수 있고, m_1, m_2을 구할 수 있다.
각 B, 각 C이 어떤지 잘 관찰해보자.

006 [2022학년도 4월 미적분 30번]

함수 $f(x) = a\cos x + x\sin x + b$와 $-\pi < \alpha < 0 < \beta < \pi$인 두 실수 α, β가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$
>
> (나) $\dfrac{\tan\beta - \tan\alpha}{\beta - \alpha} + \dfrac{1}{\beta} = 0$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2} = c$일 때, $f\left(\dfrac{\beta-\alpha}{3}\right) + c = p + q\pi$이다.

두 유리수 p, q에 대하여 $120 \times (p+q)$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이고, $a < 1$이다.) [4점]

PICK

극한값이 존재한다는 것 역시 출제자가 파 놓은 숨은 조건임을 유의하자. 아무렇지 않아 보여도 은근히 중요하다.
어떤 방정식의 해가 $x = \alpha$일 때, $x = -\alpha$도 해가 될 수 있다.
이러한 조건은 매우 강력한 요소가 되므로 주의하자.

007 [2023학년도 6월 미적분 28번]

최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases}\ln|f(x)| & (f(x)\neq 0)\\ 1 & (f(x)=0)\end{cases}$$

이고 다음 조건을 만족시킬 때, 함수 $g(x)$의 극솟값은?

[4점]

(가) 함수 $g(x)$는 $x\neq 1$인 모든 실수 x에서 연속이다.
(나) 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극대이고,
함수 $|g(x)|$는 $x=2$에서 극소이다.
(다) 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

① $\ln\frac{13}{27}$ ② $\ln\frac{16}{27}$ ③ $\ln\frac{19}{27}$ ④ $\ln\frac{22}{27}$ ⑤ $\ln\frac{25}{27}$

PICK

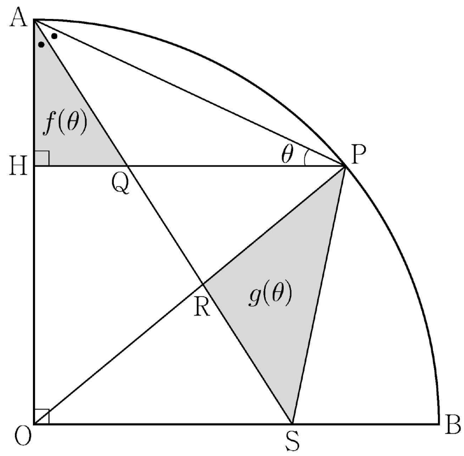
$x=k$에서 불연속 이라는 말은 그 점만 보라는 것이 아니다. $x=k$를 제외한 나머지 모든 점에서 연속이라는 점도 주목해야 한다. 또한, 실근의 개수는 특수한 케이스에 주의해야 한다. 접할 때, 변곡점에서의 접선 위를 지날 때는 특히 실근의 개수가 달라지는 주된 지점이므로 이에 유의하여 원하는 함수를 구해야 한다.

008 [2023학년도 6월 미적분 29번]

그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\angle$OAP를 이등분하는 직선과 세 선분 HP, OP, OB의 교점을 각각 Q, R, S라 하자. $\angle\mathrm{APH}=\theta$일 때, 삼각형 AQH의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PSR의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.

$\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^3\times g(\theta)}{f(\theta)}=k$일 때, $100k$의 값을 구하시오.

$\left(단,\ 0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$ [4점]



PICK

문제를 푸는데 필요한 각도를 모두 표시하고, 더 이상 각도를 구할 수 없으면 그 때는 길이를 표시하면 된다.

닮음비, 각의 이등분선 정리, 이등변삼각형, 사인법칙, 코사인법칙

등을 활용하여 내가 원하는 길이를 모두 구한 뒤, 삼각형 넓이 공식을 이용하면 된다.

009 [2022학년도 6월 미적분 30번]

양수 a에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\frac{x^2-ax}{e^x}$$

이다. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$f(x)=f'(t)(x-t)+f(t)$$

의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자.

$g(5)+\lim_{t\to 5}g(t)=5$일 때, $\lim_{t\to k-}g(t)\neq\lim_{t\to k+}g(t)$를 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

PICK

$g(5)\neq\lim_{t\to 5}g(t)$라는 사실은 굉장히 중요하다.

$(5,\ f(5))$가 특징점(극점, 변곡점, 점근선 위의 점 등)이라는 의미이기 때문이다. 극한이 존재하기 위해서는 좌극한과 우극한이 같아야 하는 점에 유의하여 주어진 조건을 만족시키는 k를 찾자.

010 [2022학년도 7월 미적분 28번]

실수 전체의 집합에서 도함수가 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(-x)=f(x)$
> (나) $f(x+2)=f(x)$

$\int_{-1}^{5}f(x)(x+\cos 2\pi x)dx=\frac{47}{2}$, $\int_0^1 f(x)dx=2$일 때, $\int_0^1 f'(x)\sin 2\pi x\,dx$의 값은? [4점]

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{3}$ ④ $\frac{5}{12}\pi$ ⑤ $\frac{\pi}{2}$

PICK

문제를 보면 느껴지겠지만, 이렇게 적분 식만 준 문제는 부분적분이나 치환적분을 활용한 문제일 가능성이 매우 높다.

$f(x)=f(-x)$일 때, 다음이 성립함에 유의하자.

$$\int_{-x}^{x}f(t)dt=2\int_0^x f(t)dt \qquad \int_{-x}^{x}tf(t)dt=0$$

반대로, $-f(x)=f(-x)$이면

$$\int_{-x}^{x}f(t)dt=0 \qquad \int_{-x}^{x}tf(t)dt=2\int_0^x f(t)dt$$

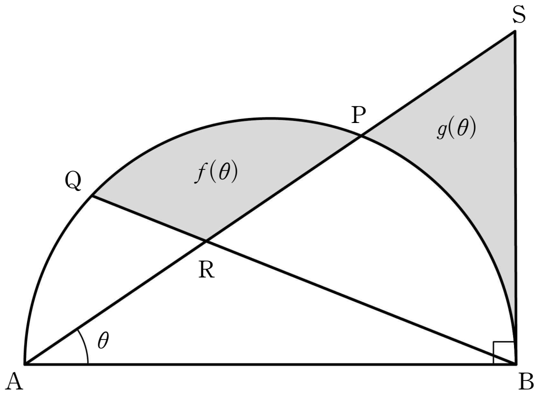
이다.

011 [2022학년도 7월 미적분 29번]

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 P가 있다. 호 AP 위에 점 Q를 호 PB와 호 PQ의 길이가 같도록 잡을 때, 두 선분 AP, BQ가 만나는 점을 R라 하고 점 B를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 직선 AP와 만나는 점을 S라 하자. $\angle \mathrm{BAP}=\theta$라 할 때, 두 선분 PR, QR와 호 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$, 두 선분 PS, BS와 호 BP로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.

$\displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)+g(\theta)}{\theta^3}$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$)

[4점]



PICK

극한 $f(n)+g(n)$을 구할 때는 도형을 붙이고 떼는 방법이 있다. 직각삼각형 등이 있는지 꼭 확인하고, 만일 그렇지 않은 경우 다음의 넓이 공식을 활용할 수 있다.
두 변의 길이와 한 각의 사인값이 주어져 있을 때는

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\theta$$

한 변의 길이와 나머지 각들의 사인값이 주어져 있을 때는

$$S=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}$$

을 사용할 수 있다. 삼각형 내에서 길이를 구할 때는 사인법칙/코사인법칙을 적극 활용하자.

012 [2022학년도 4월 미적분 30번]

최고차항의 계수가 3보다 크고 실수 전체의 집합에서 최솟값이 양수인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=e^x f(x)$$

이다. 양수 k에 대하여 집합 $\{x \mid g(x)=k,\ x\text{는 실수}\}$의 모든 원소의 합을 $h(k)$라 할 때, 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $h(k)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $h(k)$가 $k=t$에서 불연속인 t의 개수는 1이다.
(나) $\displaystyle\lim_{k\to 3e+}h(k)-\lim_{k\to 3e-}h(k)=2$

$g(-6)\times g(2)$의 값을 구하시오. (단, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}x^2e^x=0$) [4점]

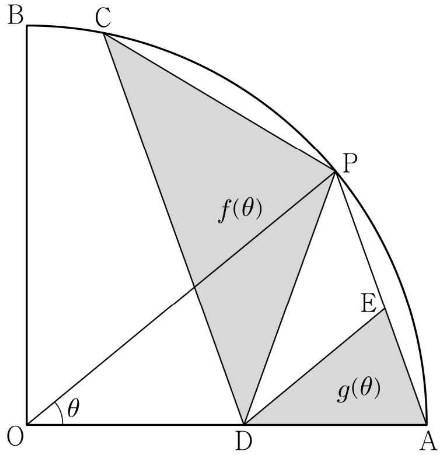
PICK

4월 모의고사 치곤 상당히 까다로운 문제이다. (정답률 : 5%)
핵심은 집합 $\{x \mid g(x)=k,\ x\text{는 실수}\}$인 원소 중에 0이 있으면 $h(k)$의 값에 영향을 미치지 않는다는 점이다.
이것이 불연속처럼 보이는 점을 연속으로 만들어 버리기 때문에 (가) 조건이 성립할 수 있다.
0이라는 숫자가 가지는 힘을 체감할 수 있는 좋은 문제이다.

013 [2022학년도 9월 미적분 28번]

그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에 대하여 $\overline{PA}=\overline{PC}=\overline{PD}$가 되도록 호 PB 위에 점 C와 선분 OA 위에 점 D를 잡는다. 점 D를 지나고 선분 OP와 평행한 직선이 선분 PA와 만나는 점을 E라 하자. $\angle POA=\theta$일 때, 삼각형 CDP의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 EDA의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.

$\lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{\theta^2 \times f(\theta)}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$

④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

PICK

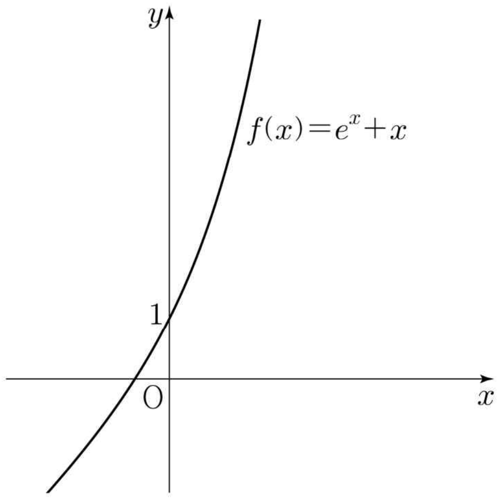
문제를 푸는데 필요한 각도를 모두 표시하고, 더 이상 각도를 구할 수 없으면 그 때는 길이를 표시하면 된다.

닮음비, 각의 이등분선 정리, 이등변삼각형, 사인법칙, 코사인법칙

등을 활용하여 내가 원하는 길이를 모두 구한 뒤, 삼각형 넓이 공식을 이용하면 된다.

014 [2022학년도 9월 미적분 29번]

함수 $f(x)=e^x+x$가 있다. 양수 t에 대하여 점 $(t, 0)$과 점 $(x, f(x))$ 사이의 거리가 $x=s$에서 최소일 때, 실수 $f(s)$의 값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$의 역함수를 $h(t)$라 할 때, $h'(1)$의 값을 구하시오. [4점]



PICK

이 문제의 핵심은 변수를 잘 구분하는 것이다. 어떻게든 식 세우는 건 어렵지 않을 것이다. 다만, 이후에 식을 음함수 미분하는 과정에서 s와 t를 잘 구분해야 한다.
s도 결국 $s(t)$라는 t에 대한 함수이기 때문에 이에 유념하자.

015 [2023학년도 9월 미적분 30번]

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 구간 $(0, \infty)$에서 $g(x) \geq 0$인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x \leq -3$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq f(-3)$이다.
(나) $x > -3$인 모든 실수 x에 대하여
$g(x+3)\{f(x)-f(0)\}^2 = f'(x)$이다.

$\int_{4}^{5} g(x)dx = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

PICK

도함수는 값보다도 그 부호가 더욱 중요하다. 이러한 관점에서 보면 (나) 조건이 생각보다 엄청난 것을 시사한다는 점을 알 수 있다. 종합하여 $f(x)$를 구하고, $g(x)$를 적분하면 된다.
(이걸 일일이 $f(x)$ 미분하고 대입하는 짓은 안 했길 기원한다.)

016 [2022학년도 10월 미적분 28번]

닫힌구간 $[0, 4\pi]$에서 연속이고 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $\int_{0}^{4\pi} |f(x)|dx$의 최솟값은? [4점]

(가) $0 \leq x \leq \pi$일 때, $f(x) = 1 - \cos x$이다.
(나) $1 \leq n \leq 3$인 각각의 자연수 n에 대하여
$f(n\pi + t) = f(n\pi) + f(t)$ $(0 < t \leq \pi)$
또는
$f(n\pi + t) = f(n\pi) - f(t)$ $(0 < t \leq \pi)$
이다.
(다) $0 < x < 4\pi$에서 곡선 $y = f(x)$의 변곡점의 개수는 6이다.

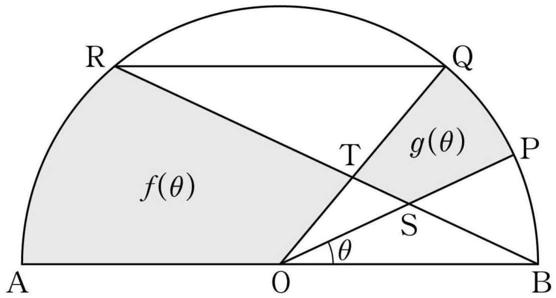
① 4π ② 6π ③ 8π
④ 10π ⑤ 12π

PICK

변곡점은 말 그대로 볼록의 방향이 바뀌는 부분이다. 식으로 해석하는 것도 나쁘지 않은 선택이긴 하지만, 그래도 그림만으로 직관적으로 판단하는 것이 실전에서는 훨씬 빠른 선택이다.

017 [2022학년도 10월 미적분 29번]

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB의 중점을 O라 하고 호 AB 위에 두 점 P, Q를 $\angle \mathrm{BOP}=\theta$, $\angle \mathrm{BOQ}=2\theta$가 되도록 잡는다. 점 Q를 지나고 선분 AB에 평행한 직선이 호 AB와 만나는 점 중 Q가 아닌 점을 R라 하고, 선분 BR가 두 선분 OP, OQ와 만나는 점을 각각 S, T라 하자. 세 선분 AO, OT, TR와 호 RA로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$라 하고, 세 선분 QT, TS, SP와 호 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{f(\theta)}=a$일 때, $80a$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



PICK

어렵기보다는 복잡하고 계산이 많은 문제에 가깝다.
원래 하던대로 넓이 더할 건 더하고 쪼갤 건 쪼개서 원하는 식을 구하면 된다. 유념하자. 각도를 먼저 다 구한 다음에 길이를 구하는 것이 훨씬 정확하다. 이 문제는 빨리 푸는 게 관건인 문제가 아니라 정확하게 푸는 것이 관건인 문제이다.

018 [2022학년도 10월 미적분 30번]

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$g(x)=\ln\{f(x)+f'(x)+1\}$$

이 있다. 상수 a와 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $g(x)>0$이고

$$\int_{2a}^{3a+x} g(t)dt=\int_{3a-x}^{2a+2} g(t)dt$$

이다.

(나) $g(4)=\ln 5$

$\int_{3}^{5}\{f'(x)+2a\}g(x)dx=m+n\ln 2$일 때, $m+n$의 값을 구하시오. (단, m, n은 정수이고, $\ln 2$는 무리수이다.)

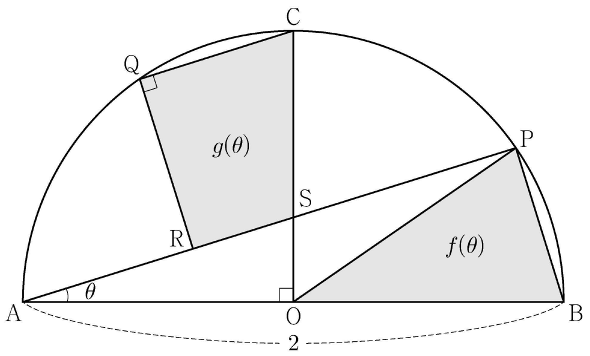
[4점]

PICK

결국 $g(x)$도 대칭함수이다. 로그를 씌웠다고 해서 함수의 성질은 크게 바뀌지 않는다. 그냥 모양만 조금 바뀔 뿐이지 극점에서의 x좌표는 동일하기 때문이다. 이 문제는 그러한 대칭성을 이용하여 문제의 조건을 해석하는 것이 관건이다. 조건 (가)에 문제 전체를 사실상 몰빵한 이유가 무엇이겠는가.

019 [2023학년도 수능 미적분 28번]

그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 $\angle AOC = \frac{\pi}{2}$인 점 C가 있다. 호 BC 위에 점 P와 호 CA위에 점 Q를 $\overline{PB} = \overline{QC}$가 되도록 잡고, 선분 AP 위에 점 R를 $\angle CQR = \frac{\pi}{2}$가 되도록 잡는다. 선분 AP와 선분 CO의 교점을 S라 하자. $\angle PAB = \theta$일 때, 삼각형 POB의 넓이를 $f(\theta)$, 사각형 CQRS의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{3f(\theta) - 2g(\theta)}{\theta^2}$의 값은? $\left(\text{단, } 0 < \theta < \frac{\pi}{4} \right)$ [4점]



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

PICK

본능에 충실하면 된다. 필요한 각도 싹 다 구하고, 나머지 길이만 차근차근 구하면 그냥 끝나는 문제이다. 마찬가지로 그냥 복잡하기만 할 뿐 난이도가 결코 어려운 문제는 아니다.

020 [2023학년도 수능 미적분 29번]

세 상수 a, b, c에 대하여 함수 $f(x) = ae^{2x} + be^x + c$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)+6}{e^x} = 1$
(나) $f(\ln 2) = 0$

함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때,

$\int_0^{14} g(x)\,dx = p + q\ln 2$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 유리수이고, $\ln 2$는 무리수이다.) [4점]

PICK

정말 역대급으로 쉬운 29번이었다. 그냥 아는 대로 풀면 된다.

021 **[2023학년도 수능 미적분 30번]**

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=e^{\sin \pi x}-1$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 합성함수 $h(x)=g(f(x))$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극댓값 0을 갖는다. (나) 열린구간 $(0,\ 3)$에서 방정식 $h(x)=1$의 서로 다른 실근의 개수는 7이다.

$f(3)=\frac{1}{2}$, $f'(3)=0$일 때, $f(2)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

PICK

28번과 29번이 쉬웠음에도 1컷 84를 만들었던 장본인이다.
$g(x)$ 자체로는 판단이 어렵기 때문에 $f(x)$를 가지고 모든 것을 판단해야 한다. 문제의 텍스트를 잘 읽을 필요가 있다.
예를 들어, '극댓값'과 '최댓값'은 엄연히 다른 개념이고, '극값'과 '극댓값'도 엄연히 다른 개념이다. 나중에 문제를 다 풀었는데 답이 2개가 나오는 아름다운 광경이 연출될 것이다. 이때, 내가 이러한 조건을 놓치지 않았는지 다시 한 번 꼭 확인해야 한다.
답이 나왔다고 툭 하고 넘어가면 안 된다. 함수의 개형 추론 문제의 경우야 개형이 하나로 정해지지만, 이러한 문제는 조건을 만족하는 수가 여러 개가 존재할 수 있기 때문에 절대 유의해야 한다.

정답 및 해설

001. ①

점 $\mathrm{A_n}$의 좌표를 $(x_n,\ y_n)$이라 하면

$x_{2n}=a+(n-1)a=an$,

$y_{2n}=0+(n-1)(a+1)=(a+1)(n-1)$

으로 나타난다. 따라서

$\overline{\mathrm{A_1A_{2n}}}^2={x_{2n}}^2+{y_{2n}}^2=a^2n^2+(a+1)^2(n-1)^2$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{A_1A_{2n}}}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{a^2n^2+(a+1)^2(n-1)^2}}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{a^2+(a+1)^2\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}$$

$$=\sqrt{2a^2+2a+1}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{A_1A_{2n}}}}{n}=\frac{\sqrt{34}}{2}$ 에서 $\sqrt{2a^2+2a+1}=\dfrac{\sqrt{34}}{2}$

이므로, 정리하면 $4a^2+4a-15=0$이다.

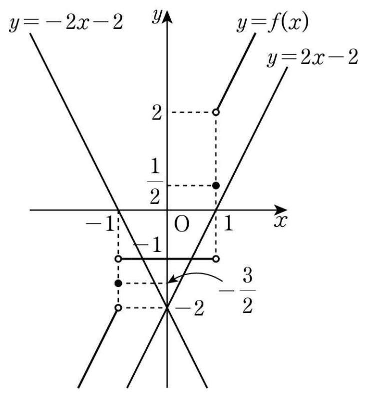
$a=-\dfrac{5}{2}$ 또는 $a=\dfrac{3}{2}$이므로 양수 a의 값은 $\dfrac{3}{2}$이다.

002.. 28

함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}-1 & (-1<x<1)\\ \dfrac{1}{2} & (x=1)\\ -\dfrac{3}{2} & (x=-1)\\ 2x & (x<-1 \text{ 또는 } x>1)\end{cases}$$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



직선 $y=tx-2$는 점 $(0,\ -2)$를 지나므로 기울기 t의 값에 따른 교점의 개수 $g(t)$를 구해 보면

$-1\le t<-\dfrac{1}{2}$ 또는 $-\dfrac{1}{2}<t\le 0$일 때 : $g(t)=0$

$t<-1$ 또는 $t=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $0<t\le 1$ 또는

$t=2$ 또는 $t\ge 4$일 때 : $g(t)=1$

$1<t<2$ 또는 $2<t<\dfrac{5}{2}$ 또는 $\dfrac{5}{2}<t<4$일 때 : $g(t)=2$

$t=\dfrac{5}{2}$일 때 : $g(t)=3$

즉 함수 $g(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값은

$-1,\ -\dfrac{1}{2},\ 0,\ 1,\ 2,\ \dfrac{5}{2},\ 4$이므로

$m=7,\ a_m=4$이다.

따라서 $m\times a_m=7\times 4=28$이다.

003. 80

점 P_n의 x좌표를 t라 하면 y좌표는 $\dfrac{\sqrt{3}}{n+1}t^2$

$\overline{\mathrm{OP}_n}=2n+2$이므로 $\sqrt{t^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{n+1}t^2\right)^2}=2n+2$에서

$t=n+1$

직각삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{OH}_n$에서 $\overline{\mathrm{OH}_n}:\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{H}_n}=1:\sqrt{3}$이므로

$\tan(\angle\mathrm{P}_n\mathrm{OH}_n)=\sqrt{3}$ 즉 $\angle\mathrm{P}_n\mathrm{OH}_n=\dfrac{\pi}{3}$

$\angle\mathrm{R}_n\mathrm{P}_n\mathrm{H}_n=2\times\angle\mathrm{OP}_n\mathrm{H}_n=2\times\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}$

점 R_n을 포함하지 않는 호 $\mathrm{Q}_n\mathrm{H}_n$과 선분 OH_n, 곡선 T_n으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $h(n)$이라 하자.

(i) 곡선 T_n과 x축 및 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{H}_n$으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $f(n)+h(n)$이므로

$$f(n)+h(n)=\int_0^{n+1}\frac{\sqrt{3}}{n+1}x^2dx=\left[\frac{\sqrt{3}}{3(n+1)}x^3\right]_0^{n+1}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}(n+1)^2\ \cdots\cdots\ ㉠$$

(ii) 점 Q_n을 포함하는 호 $\mathrm{R}_n\mathrm{H}_n$과 두 선분 OR_n, OH_n으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $g(n)+h(n)$이고, 이 값은 사각형 $\mathrm{OH}_n\mathrm{P}_n\mathrm{R}_n$의 넓이에서 중심각의 크기가 $\dfrac{\pi}{3}$인 부채꼴 $\mathrm{P}_n\mathrm{R}_n\mathrm{H}_n$의 넓이를 뺀 값과 같으므로

$g(n)+h(n)$

$$=2\times\left(\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OH}_n}\times\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{H}_n}\right)-\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{H}_n}^2\times\frac{\pi}{3}$$

$$=\sqrt{3}(n+1)^2-\frac{\pi(n+1)^2}{2}=\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right)(n+1)^2\ \cdots\cdots\ ㉡$$

㉠, ㉡에서

$f(n)-g(n)=\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)(n+1)^2$이므로

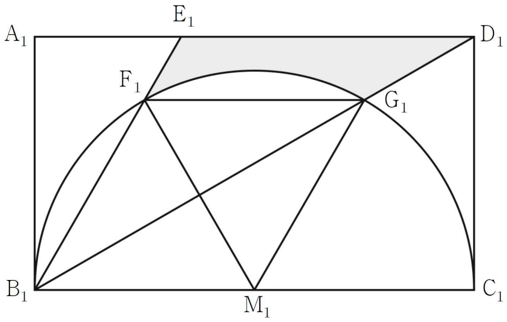
$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)-g(n)}{n^2}$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

이고, $k=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$이므로 $60k^2=60\times\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=80$

004. ②

① R_1의 넓이 구하기



선분 B_1C_1의 중점을 M_1이라 하자.

삼각형 $B_1C_1D_1$에서 $\tan(\angle C_1B_1D_1)=\dfrac{\overline{C_1D_1}}{\overline{B_1C_1}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$\angle C_1B_1G_1=\dfrac{\pi}{6}$이고 $\angle C_1M_1G_1=\dfrac{\pi}{3}$ …… ㉠

점 E_1은 선분 A_1D_1의 1 : 2 내분점이므로

$\overline{A_1E_1}=2\sqrt{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

삼각형 $A_1B_1E_1$에서 $\tan(\angle E_1B_1A_1)=\dfrac{\overline{A_1E_1}}{\overline{A_1B_1}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$\angle E_1B_1A_1=\dfrac{\pi}{6}$

$\angle G_1B_1E_1=\dfrac{\pi}{2}-\angle C_1B_1G_1-\angle E_1B_1A_1=\dfrac{\pi}{6}$에서

$\angle G_1M_1F_1=\dfrac{\pi}{3}$ …… ㉡

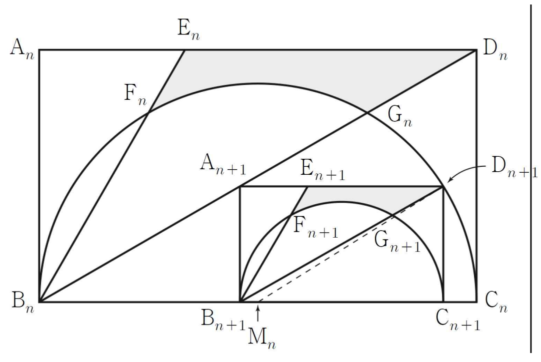
㉠, ㉡에서 두 삼각형 $B_1M_1F_1$, $F_1M_1G_1$은 모두 정삼각형이므로 $\angle F_1M_1B_1=\angle M_1F_1G_1$이 되어 두 선분 F_1G_1, B_1C_1은 서로 평행하다.

삼각형 $B_1G_1F_1$의 넓이는 삼각형 $F_1M_1G_1$의 넓이와 같고, 두 선분 B_1F_1, B_1G_1과 호 F_1G_1로 둘러싸인 부분의 넓이는 부채꼴 $F_1M_1G_1$의 넓이와 같으므로

$S_1=\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\times 2\right)-\left\{\dfrac{1}{2}\times(\sqrt{3})^2\times\dfrac{\pi}{3}\right\}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}-\dfrac{\pi}{2}$

② 공비 구하기

다음은 그림 R_{n+1}의 일부이다.



선분 B_nC_n의 중점을 M_n이라 하자.

$\overline{A_nB_n}=a_n$, $\overline{A_{n+1}B_{n+1}}=a_{n+1}$이라 하면

$\overline{A_nB_n}:\overline{B_nC_n}=1:\sqrt{3}$에서 $\overline{B_nC_n}=\sqrt{3}a_n$이고

$\overline{A_{n+1}B_{n+1}}:\overline{B_{n+1}C_{n+1}}=1:\sqrt{3}$에서 $\overline{B_{n+1}C_{n+1}}=\sqrt{3}a_{n+1}$
이다.

직각삼각형 $B_nB_{n+1}A_{n+1}$에서

$\overline{B_nB_{n+1}}=\dfrac{\overline{A_{n+1}B_{n+1}}}{\tan\dfrac{\pi}{6}}=\sqrt{3}a_{n+1}$이므로

$\overline{B_nC_{n+1}}=\overline{B_nB_{n+1}}+\overline{B_{n+1}C_{n+1}}=2\sqrt{3}a_{n+1}$

직각삼각형 $M_nC_{n+1}D_{n+1}$에서

$\overline{M_nC_{n+1}}^2+\overline{C_{n+1}D_{n+1}}^2=\overline{M_nD_{n+1}}^2$

이고 $\overline{M_nD_{n+1}}=\dfrac{1}{2}\overline{B_nC_n}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a_n$이므로

$(\overline{B_nC_{n+1}}-\overline{B_nM_n})^2+\overline{C_{n+1}D_{n+1}}^2=\dfrac{3}{4}a_n^{\,2}$

$\left(2\sqrt{3}a_{n+1}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}a_n\right)^2+a_{n+1}^{\,2}=\dfrac{3}{4}a_n^{\,2}$

$13a_{n+1}^{\,2}-6a_na_{n+1}=0$

$a_{n+1}=\dfrac{6}{13}a_n$이므로 두 사각형 $A_nB_nC_nD_n$과 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$의 닮음비가 13 : 6이고

넓이의 비는 169 : 36이다.

따라서 S_n은 첫째항이 $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}-\dfrac{\pi}{2}$이고 공비가 $\dfrac{36}{169}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\dfrac{\dfrac{4\sqrt{3}}{3}-\dfrac{\pi}{2}}{1-\dfrac{36}{169}}=\dfrac{169}{798}(8\sqrt{3}-3\pi)$$

005. 18

두 직선 l_1, l_2가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 α, β라 하면 $m_1=\tan\alpha$, $m_2=\tan\beta$이다.

직선 l_3은 직선 l_1을 y축에 대하여 대칭이동한 직선이므로

$\angle CBA=2\alpha$, $\angle BAC=\beta-\alpha$

$\angle ACB=\pi-2\alpha-(\beta-\alpha)=\pi-(\alpha+\beta)$

삼각형 ABC의 사인법칙에 의하여

$\dfrac{9}{\sin 2\alpha}=\dfrac{12}{\sin\{\pi-(\alpha+\beta)\}}=15$ …… ㉠

$\sin 2\alpha=\dfrac{3}{5}$이고 $0<2\alpha<\dfrac{\pi}{2}$이므로

$\cos 2\alpha=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=\dfrac{4}{5}$, $\tan 2\alpha=\dfrac{3}{4}$

$\tan 2\alpha=\dfrac{\tan 2\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{3}{4}$

$3\tan^2\alpha+8\tan\alpha-3=0$

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$이므로 $m_1=\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$

㉠에서 $\sin\{\pi-(\alpha+\beta)\}=\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{4}{5}$이고

$0<\alpha+\beta<\dfrac{\pi}{2}$이므로

$\cos(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}=\dfrac{3}{5}$, $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{4}{3}$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{1}{3}+\tan\beta}{1-\frac{1}{3}\tan\beta}=\frac{4}{3}$$

이므로 $m_2=\tan\beta=\dfrac{9}{13}$

따라서 $78\times m_1\times m_2=78\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{9}{13}=18$

006. 135

$f(x)=a\cos x+x\sin x+b$에서

$f'(x)=(1-a)\sin x+x\cos x$ ... ㉠

에서, $f'(\alpha)=0$이라고 하면 $f'(-\alpha)=0$도 성립한다.

따라서 $\alpha=-\beta$이다.

조건 (나)에서 $\alpha=-\beta$를 대입하면

$$\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{\beta-\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\tan\beta+1}{\beta}=0$$

이므로, $\tan\beta=-1$이다.

따라서 $0<\beta<\pi$이므로 $\beta=\dfrac{3}{4}\pi$, $\alpha=-\dfrac{3}{4}\pi$

㉠에 $x=\dfrac{3}{4}\pi$를 대입하면

$\tan\dfrac{3}{4}\pi=\dfrac{3}{4(a-1)}\pi$이므로 $a=1-\dfrac{3}{4}\pi$ …… ㉡

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=c$에서 $\lim\limits_{x\to0}x^2=0$이므로

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}(a\cos x+x\sin x+b)=a+b=0$

$b=-a$이고

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}&=\lim_{x\to0}\frac{a(\cos x-1)+x\sin x}{x^2}\\&=\lim_{x\to0}\left\{\frac{a(\cos x-1)}{x^2}+\frac{\sin x}{x}\right\}\\&=-\frac{a}{2}+1=c\end{aligned}$$

㉡에서 $c=-\dfrac{a}{2}+1=\dfrac{1}{2}\times\left(1-\dfrac{3}{4}\pi\right)+1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{8}\pi$

따라서

$$\begin{aligned}f\left(\frac{\beta-\alpha}{3}\right)+c&=f\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\pi\\&=\frac{\pi}{2}-\left(1-\frac{3}{4}\pi\right)+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\pi\\&=-\frac{1}{2}+\frac{13}{8}\pi=p+q\pi\end{aligned}$$

에서 $p=-\dfrac{1}{2}$, $q=\dfrac{13}{8}$이므로 $120\times(p+q)=135$

007. ⑤

함수 $f(x)$는 최고차항이 양수인 삼차함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축은 적어도 한 점에서 만난다.

조건 (가)에서 함수 $g(x)$가 $x\neq1$인 모든 실수 x에서 연속이므로

$$\begin{cases}x=1\text{일 때, } f(1)=0\\ x\neq1\text{일 때, } f(x)\neq0\end{cases}\quad\cdots\cdots ㉠$$

한편,

$$g(x)=\begin{cases}\ln|f(x)| & (f(x)\neq0)\\ 1 & (f(x)=0)\end{cases}$$

이므로

$$g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}\quad(f(x)\neq0)$$

이때, 조건 (나)에서 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 극값을 가지고 ㉠을 만족해야 하므로

$f'(2)=0$ …… ㉡

한편, 조건 (다)에서 주어진 방정식 $g(x)=0$은

$\ln|f(x)|=0$

$|f(x)|=1$

$f(x)=-1$ 또는 $f(x)=1$

이때, 이 방정식이 서로 다른 세 실근을 갖고 ㉠을 만족하려면 함수 $y=f(x)$는 극값을 가져야 한다.

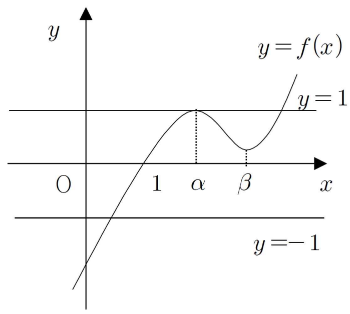
한편, ㉡으로부터 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극값을 가지므로

$f'(\alpha)=f'(\beta)=0$ $(1<\alpha<\beta)$

로 놓을 수 있다.

이때, $\alpha=2$이거나 $\beta=2$이다.

이때, 조건 (다)를 만족시키는 함수 $f(x)$의 그래프와 $g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



조건 (나)로부터 $g(x)$가 $x=2$에서 극대이고 $|g(x)|$가 $x=2$에서 극소이기 위해서는 그림 (ⅰ)과 같아야 하고 $\alpha=2$이다.

이때, 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 $\dfrac{1}{2}$이므로

$f(x)-1=\dfrac{1}{2}(x-2)^2(x-k)$ (k는 상수)

즉, $f(x)=\dfrac{1}{2}(x-2)^2(x-k)+1$이고 ㉠에서 $f(1)=0$이므로

$f(1)=\dfrac{1}{2}(1-k)+1=0$이고, $k=3$이다.

이때,

$f(x)=\dfrac{1}{2}(x-2)^2(x-3)+1$ 이므로

$$f'(x)=(x-2)(x-3)+\frac{1}{2}(x-2)^2$$
$$=\frac{1}{2}(x-2)(3x-8)$$

이때, $f'(x)=0$에서 $x=2$ 또는 $x=\frac{8}{3}$이고, $\beta=\frac{8}{3}$이다.

따라서 함수 $g(x)$는 $x=\frac{8}{3}$에서 극솟값을 갖고 그 값은

$$\ln\left|f\left(\frac{8}{3}\right)\right|=\ln\left|\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(-\frac{1}{3}\right)+1\right|=\ln\frac{25}{27}$$

008. 50

직각삼각형 AHP에서 $\angle\mathrm{APH}=\theta$이므로 $\angle\mathrm{HAP}=\frac{\pi}{2}-\theta$

한편, 삼각형 OPA는 $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OA}}=1$인 이등변삼각형이므로

$$\angle\mathrm{AOP}=\pi-2\times\angle\mathrm{HAP}=\pi-2\times\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=2\theta$$

그러므로

$$\overline{\mathrm{AH}}=1-\overline{\mathrm{OH}}=1-\overline{\mathrm{OP}}\cos2\theta=1-\cos2\theta$$

또,

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AH}}^2\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times(1-\cos2\theta)^2\times\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$$
$$\to\frac{1}{2}\times(2\theta^2)^2\times\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)=2\theta^4 \quad \cdots\cdots ㉠$$

한편, 이등변삼각형 OPA에서 점 O에서 선분 PA에 내린 수선의 발을 H′이라 하면 ㉠에서 $\angle\mathrm{H'OP}=\theta$이므로

$$\overline{\mathrm{AP}}=2\overline{\mathrm{PH'}}=2\times\overline{\mathrm{OP}}\times\sin\theta=2\sin\theta$$

삼각형 AOP에서 각의 이등분선이 선분 OP와 만나는 점이 R이므로

$$\overline{\mathrm{AO}}:\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{OR}}:\overline{\mathrm{RP}}$$
$$1:2\sin\theta=\overline{\mathrm{OR}}:1-\overline{\mathrm{OR}}$$
$$\overline{\mathrm{OR}}=\frac{1}{1+2\sin\theta}$$

이고,

$$\overline{\mathrm{PR}}=1-\overline{\mathrm{OR}}=\frac{2\sin\theta}{1+2\sin\theta}\to2\theta \quad \cdots\cdots ㉢$$

또,

$$\overline{\mathrm{OS}}=\overline{\mathrm{OA}}\tan(\angle\mathrm{SAO})=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$$

사인법칙에 의해 $\frac{\overline{\mathrm{RS}}}{\sin(\angle\mathrm{ROS})}=\frac{\overline{\mathrm{OS}}}{\sin(\angle\mathrm{ORS})}$ 이므로

$$\angle\mathrm{ORS}=\angle\mathrm{OAR}+\angle\mathrm{AOR}=\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)+2\theta=\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}\theta$$

이고,

$$\lim_{\theta\to0}\overline{\mathrm{RS}}=\lim_{\theta\to0}\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}\theta\right)}\to\sqrt{2} \quad \cdots\cdots ㉣$$

㉢과 ㉣에서

$$g(\theta)$$
$$=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{RP}}\,\overline{\mathrm{RS}}\sin(\angle\mathrm{SRP})$$
$$\to\frac{1}{2}\times2\theta\times\sqrt{2}\times\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{3}{2}\theta\right)$$
$$\to\theta \quad \cdots\cdots ㉤$$

그러므로 ㉠과 ㉤에서

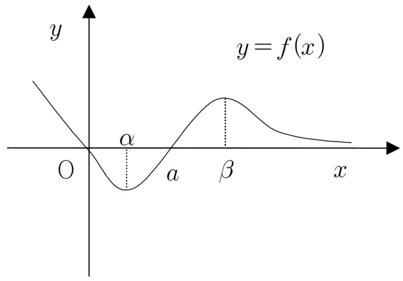
$\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^3\times g(\theta)}{f(\theta)}=\frac{1}{2}$이므로 $100k=100\times\frac{1}{2}=50$이다.

삼각함수의 극한

> $\theta\to0$일 때,
>
> $$\sin\theta\to\theta,\ \tan\theta\to\theta,\ 1-\cos\theta=\frac{1}{2}\theta^2$$
>
> 으로 근사할 수 있다.

009. 16

방정식 $f'(x)=0$의 두 근을 α, β $(0<\alpha<\beta)$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$$f''(x)=e^{-x}\{x^2-(a+4)x+2a+2\}$$

$g(t)$는 두 함수

$$y=f(x),\ y=f'(t)(x-t)+f(t)$$

의 그래프의 교점의 개수이다.

이때, 직선 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선이다.

한편, 함수 $g(x)$가 $t=a$에서 연속이면

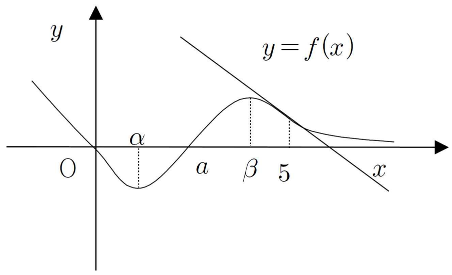
$g(a)=\lim_{t\to a}g(t)$ 이므로 $g(a)+\lim_{t\to a}g(t)$ 의 값은 짝수이어야 한다. 그런데

$$g(5)+\lim_{t\to5}g(t)=5 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이므로 함수 $g(t)$는 $t=5$에서 불연속이다.

함수 $g(t)$가 불연속이 되는 t의 값은 함수 $f(x)$가 극값을 갖는 x의 값이거나 변곡점을 갖는 x의 값이다.

따라서 다음 경우를 생각해볼 수 있다.



즉, 함수 $f(x)$는 $x=5$에서 변곡점을 갖고 이때

$$\lim_{t\to 5} g(t)=3,\ g(5)=2$$

이므로 조건을 만족시킨다.

따라서, $x=5$가 방정식 ㉡의 근이므로 대입하면 $a=\dfrac{7}{3}$

한편,

$$\lim_{t\to k-} g(t) \neq \lim_{t\to k+} g(t)$$

를 만족시키는 k의 값은 함수 $f(x)$가 극값을 갖는 x의 값이다. ㉠에 ㉢을 대입하면

$$x^2-\left(\frac{7}{3}+2\right)x+\frac{7}{3}=0$$

$$x^2-\frac{13}{3}x+\frac{7}{3}=0$$

따라서, 구하는 모든 실수 k의 값의 합은 근과 계수의 관계를 이용하면 $\dfrac{13}{3}$이므로 $p+q=3+13=16$이다.

010. ①

$$\int_{-1}^{5} f(x)(x+\cos 2\pi x)dx$$

$$=\int_{-1}^{5} xf(x)dx+\int_{-1}^{5} f(x)\cos 2\pi x\,dx \quad \cdots ㉠$$

조건 (가)에 의하여

$$\int_{-1}^{1} xf(x)dx=0,\ \int_{-1}^{1} f(x)dx=2\int_{0}^{1} f(x)dx$$

$$\int_{-1}^{5} xf(x)dx$$

$$=\int_{-1}^{1} xf(x)dx+\int_{1}^{3} xf(x)dx+\int_{3}^{5} xf(x)dx$$

$$=\int_{-1}^{1} xf(x)dx+\int_{-1}^{1} (x+2)f(x+2)dx$$

$$+\int_{-1}^{1} (x+4)f(x+4)dx$$

$$=\int_{-1}^{1} xf(x)dx+\int_{-1}^{1} (x+2)f(x)dx+\int_{-1}^{1} (x+4)f(x)dx$$

$$=3\int_{-1}^{1} xf(x)dx+6\int_{-1}^{1} f(x)dx$$

$$=12\int_{0}^{1} f(x)dx=24 \quad \cdots ㉡$$

조건 (가), (나)에 의하여 모든 실수 x에 대하여

$$f(-x)\cos 2\pi(-x)=f(x)\cos 2\pi x$$

$$f(x+2)\cos 2\pi(x+2)=f(x)\cos 2\pi x$$

$$\int_{-1}^{5} f(x)\cos 2\pi x\,dx$$

$$=\int_{-1}^{1} f(x)\cos 2\pi x\,dx+\int_{1}^{3} f(x)\cos 2\pi x\,dx$$

$$+\int_{3}^{5} f(x)\cos 2\pi x\,dx$$

$$=\int_{-1}^{1} f(x)\cos 2\pi x\,dx+\int_{-1}^{1} f(x+2)\cos 2\pi(x+2)\,dx$$

$$+\int_{-1}^{1} f(x+4)\cos 2\pi(x+4)\,dx$$

$$=\int_{-1}^{1} f(x)\cos 2\pi x\,dx+\int_{-1}^{1} f(x)\cos 2\pi x\,dx$$

$$+\int_{-1}^{1} f(x)\cos 2\pi x\,dx$$

$$=3\int_{-1}^{1} f(x)\cos 2\pi x\,dx$$

$$=6\int_{0}^{1} f(x)\cos 2\pi x\,dx$$

㉠, ㉡에 의하여

$$\int_{0}^{1} f(x)\cos 2\pi x\,dx=\frac{1}{6}\left(\frac{47}{2}-24\right)=-\frac{1}{12}$$

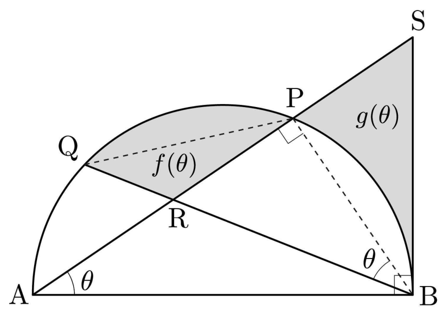
따라서

$$\int_{0}^{1} f'(x)\sin 2\pi x\,dx$$

$$=\Big[f(x)\sin 2\pi x\Big]_{0}^{1}-2\pi\int_{0}^{1} f(x)\cos 2\pi x\,dx$$

$$=-2\pi\int_{0}^{1} f(x)\cos 2\pi x\,dx=\frac{\pi}{6}$$

011. 4



호 PB와 호 PQ의 길이가 서로 같으므로 원주각의 성질에 의하여

$\angle \mathrm{PAB}=\angle \mathrm{QBP}=\theta$

$\angle \mathrm{ABS}=\angle \mathrm{APB}=\dfrac{\pi}{2}$ 이고 $\angle \mathrm{PBA}=\dfrac{\pi}{2}-\theta$ 이므로

$\angle \mathrm{SBP}=\theta$

두 삼각형 SPB, RPB는 서로 합동이므로
두 삼각형 SPB, RPB의 넓이가 서로 같다.

선분 PQ와 호 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이와 선분 PB와 호 PB로 둘러싸인 부분의 넓이가 서로 같다. 그러므로 $f(\theta)+g(\theta)$는 삼각형 QBP의 넓이와 같다.

$\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PQ}}=2\sin\theta$

$f(\theta)+g(\theta)$

$=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PB}}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\sin(\pi-2\theta)$

$=\frac{1}{2}\times(2\sin\theta)^2\times\sin2\theta$

$=2\sin^2\theta\sin2\theta$

따라서,

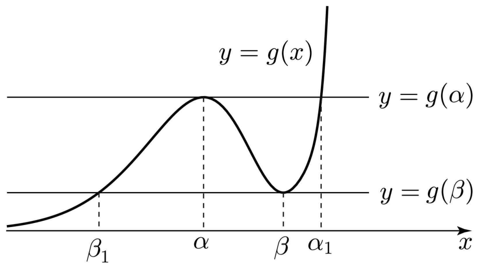
$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)+g(\theta)}{\theta^3}=2\times1^2\times2=4$

012. 129

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$g'(x)=e^x\{f(x)+f'(x)\}=e^x\{ax^2+(2a+b)x+b+c\}$

함수 $g(x)$가 극값을 갖지 않으면 조건 (가)를 만족시키지 않으므로 함수 $g(x)$는 극값을 갖는다.



함수 $g(x)$가 $x=\alpha$에서 극댓값, $x=\beta$에서 극솟값을 갖는다고 하면

$g'(x)=e^x\{a(x-\alpha)(x-\beta)\}$

함수 $h(k)$는 $k=t$ $(t\neq g(\alpha),\ t\neq g(\beta))$에서

$\lim_{k\to t-}h(k)=\lim_{k\to t+}h(k)=h(t)$

그러므로 함수 $h(k)$는

$k=t$ $(t\neq g(\alpha),\ t\neq g(\beta))$에서 연속이다.

조건 (가)에 의하여 함수 $h(k)$가 $k=t$에서 불연속인 t의 개수가 1이므로 함수 $h(k)$는

$k=g(\alpha)$에서 연속이고 $k=g(\beta)$에서 불연속

또는

$k=g(\alpha)$에서 불연속이고 $k=g(\beta)$에서 연속이다.

(i) 함수 $h(k)$가 $k=g(\alpha)$에서 연속이고 $k=g(\beta)$에서 불연속인 경우

$\lim_{k\to g(\alpha)-}h(k)=2\alpha+\alpha_1$, $\lim_{k\to g(\alpha)+}h(k)=\alpha_1$

$h(g(\alpha))=\alpha+\alpha_1$이므로

$\lim_{k\to g(\alpha)-}h(k)=\lim_{k\to g(\alpha)+}h(k)=h(g(\alpha))$에서

$2\alpha+\alpha_1=\alpha_1=\alpha+\alpha_1$이므로 $\alpha=0$이다.

함수 $h(k)$는 $k=g(\beta)$에서 불연속이므로

$\lim_{k\to g(\beta)+}h(k)-\lim_{k\to g(\beta)-}h(k)=2\beta\neq0$

조건 (나)에 의하여 $\beta=1$, $g(\beta)=3e$

$g'(0)=0$, $g'(1)=0$이므로

$g'(x)=e^x\{ax(x-1)\}$

$g(x)=e^x\{a(x^2-3x+3)\}$

$g(1)=3e$이므로 $a=3$

최고차항의 계수가 3이므로 모순

(ii) 함수 $h(k)$가 $k=g(\alpha)$에서 불연속이고 $k=g(\beta)$에서 연속인 경우

$\lim_{k\to g(\beta)-}h(k)=\beta_1$

$\lim_{k\to g(\beta)+}h(k)=2\beta+\beta_1$

$h(g(\beta))=\beta+\beta_1$이므로

$\lim_{k\to g(\beta)-}h(k)=\lim_{k\to g(\beta)+}h(k)=h(g(\beta))$에서

$\beta_1=2\beta+\beta_1=\beta+\beta_1$이므로 $\beta=0$이다.

함수 $h(k)$는 $k=g(\alpha)$에서 불연속이므로

$\lim_{k\to g(\alpha)+}h(k)-\lim_{k\to g(\alpha)-}h(k)=-2\alpha\neq0$

조건 (나)에 의하여 $\alpha=-1$, $g(\alpha)=3e$

$g'(0)=0$, $g'(-1)=0$이므로

$g'(x)=e^x\{ax(x+1)\}$

$g(x)=e^x\{a(x^2-x+1)\}$

$g(-1)=3e$이므로 $a=e^2$

$g(x)=e^{x+2}(x^2-x+1)$

따라서 $g(-6)\times g(2)=43e^{-4}\times3e^4=129$

013. ④

$\overline{\mathrm{PA}}$의 중점을 M이라 하면 $\angle\mathrm{AOM}=\frac{\theta}{2}$이므로

$\overline{\mathrm{AM}}=\sin\frac{\theta}{2}$이다.

$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PC}}=\overline{\mathrm{PD}}=2\sin\frac{\theta}{2}$

삼각형 OAP와 삼각형 PAD는 닮음이므로

$\frac{\overline{\mathrm{PA}}}{\overline{\mathrm{OA}}}=\frac{\overline{\mathrm{DA}}}{\overline{\mathrm{PA}}}$, $\overline{\mathrm{DA}}=4\sin^2\frac{\theta}{2}$ 이다.

$\therefore g(\theta)=\frac{1}{2}\times\left(4\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^2\times\sin\theta=8\sin^4\frac{\theta}{2}\sin\theta$

$\angle\mathrm{OPD}=\angle\mathrm{OPA}-\angle\mathrm{DPA}=\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)-\theta=\frac{\pi}{2}-\frac{3}{2}\theta$

이고, $\angle\mathrm{OPC}=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$ 이므로

$\angle\mathrm{DPC}=\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3}{2}\theta\right)+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)=\pi-2\theta$

$\therefore f(\theta)=\frac{1}{2}\times\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\times\sin(\pi-2\theta)=2\sin^2\frac{\theta}{2}\sin2\theta$

$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2\times f(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{8\sin^4\frac{\theta}{2}\sin\theta}{2\theta^2\times\sin^2\frac{\theta}{2}\sin2\theta}=\frac{1}{2}$

014. 3

점 $(t,0)$과 점 $(x,f(x))$사이의 거리가 최소일 때, 두점 $(t,0)$, $(x,f(x))$를 지나는 직선과 점 $(x,f(x))$에서의 곡선 $y=f(x)$의 접선은 서로 수직이다.

이때 $x=s$이므로

$\dfrac{f(s)}{s-t}\times f'(s)=-1,\ t=s+f(s)\times f'(s)\ \cdots ㉠$

$h(1)=a$로 놓으면 $g(a)=1$이고, $h'(1)=\dfrac{1}{g'(a)}$이다

$t=a$일 때, $s=b$라 하면 $g(a)=f(b)=1$에서

$e^b+b=1,\ b=0$

㉠에서 $a=0+f(0)\times f'(0)=2$ 이다.

㉠의 양변을 s에 대하여 미분하면

$$\frac{dt}{ds}=1+f'(s)\times f'(s)+f(s)\times f''(s)$$
$$=1+(e^s+1)^2+(e^s+s)e^s$$

이므로 $t=2,\ s=0$일 때 $\dfrac{dt}{ds}=6$이다.

$g(t)=f(s)$의 양변을 s에 대하여 미분하면

$g'(t)\times\dfrac{dt}{ds}=f'(s)$ 이므로

$g'(2)\times 6=f'(0),\ g'(2)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

$\therefore h'(1)=\dfrac{1}{g'(2)}=3$

015. 283

$x>0$일 때, $g(x)\geq 0$이므로 $x=-3$일 때

$g(x+3)\geq 0$이다.

따라서 조건 (나)에서 $x>-3$일 때 $f'(x)\geq 0$이다.

또, 조건 (가)에서 $f(x)\geq f(-3)$이므로

함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극소이면서 최소이다.

조건 (나)에 $x=0$을 대입하면 $f'(0)=0$이므로

$f'(x)=4x^2(x+3)=4x^3+12x^2$

$f(x)=x^4+4x^3+C$ (단, C는 적분상수)

$\therefore \displaystyle\int_4^5 g(x)dx=\int_1^2 g(x+3)dx=\int_1^2\frac{f'(x)}{\{f(x)-f(0)\}^2}dx$

$f(x)-f(0)=t$로 치환하면

$f(1)-f(0)=5,\ f(2)-f(0)=48$

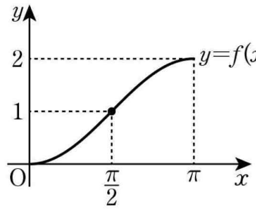
$f'(x)dx=dt$ 이므로

$$\int_1^2\frac{f'(x)}{\{f(x)-f(0)\}^2}dx$$
$$=\int_5^{48}\frac{1}{t^2}dt=\left[-\frac{1}{t}\right]_5^{48}$$
$$=-\frac{1}{48}+\frac{1}{5}=\frac{48-5}{240}=\frac{43}{240}$$

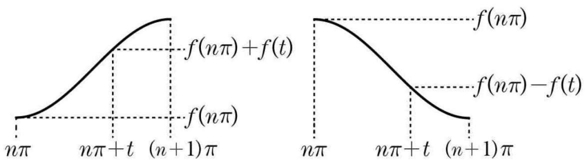
$\therefore p+q=240+43=283$

016. ②

조건 (가)에서 점 $\left(\dfrac{\pi}{2},\ f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

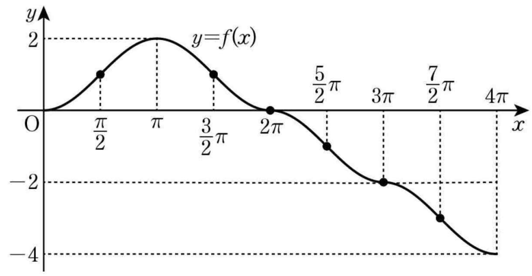


조건 (나)에 의하여 $n\pi<x\leq(n+1)\pi$에서 곡선의 모양은 다음 두 가지 중 하나이다.



$0<x<4\pi$에서 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 개수가 6인 경우는 다음과 같다.

(i) 함수 $y=f(x)$가 $x=\pi$에서 극대일 때

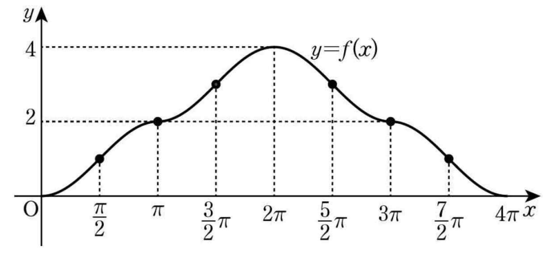


위 그림에서 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은

x 좌표가 $\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi,\ 2\pi,\ \dfrac{5}{2}\pi,\ 3\pi,\ \dfrac{7}{2}\pi$인 점이다.

$$\int_0^{4\pi}|f(x)|dx=4\int_0^{\pi}f(x)dx+\pi\times 2$$
$$=4\int_0^{\pi}(1-\cos x)dx+2\pi$$
$$=\left[x-\sin x\right]_0^{\pi}+2\pi=6\pi$$

(ii) 함수 $y=f(x)$가 $x=2\pi$에서 극대일 때

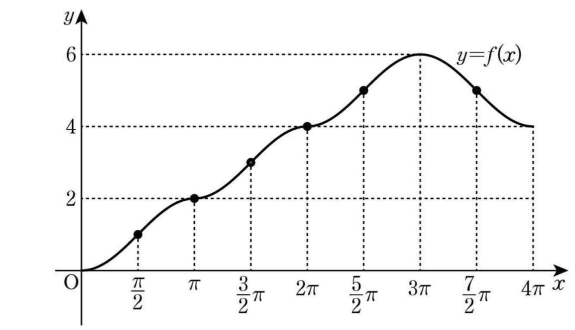


위 그림에서 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은

x 좌표가 $\dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{5}{2}\pi,\ 3\pi,\ \dfrac{7}{2}\pi$인 점이다.

$$\int_0^{4\pi}|f(x)|dx=4\int_0^{\pi}f(x)dx+2\pi\times 2=8\pi$$

(iii) 함수 $y=f(x)$가 $x=3\pi$에서 극대일 때



위 그림에서 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은

x 좌표가 $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3}{2}\pi$, 2π, $\frac{5}{2}\pi$, $\frac{7}{2}\pi$인 점이다.

$$\int_0^{4\pi}|f(x)|dx=4\int_0^{\pi}f(x)dx+2\pi\times5=14\pi$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 최솟값은 6π이다.

017. 20

$\angle\mathrm{RBO}=\angle\mathrm{BRQ}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{BOQ}=\theta$이므로

$$\angle\mathrm{OST}=2\theta,\ \angle\mathrm{OTS}=\pi-3\theta$$

삼각형 OBS에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{OS}}}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin(\pi-2\theta)},\ \overline{\mathrm{OS}}=\frac{\sin\theta}{\sin2\theta}\to\frac{1}{2}$$

삼각형 OBT에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{OT}}}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin(\pi-3\theta)},\ \overline{\mathrm{OT}}=\frac{\sin\theta}{\sin3\theta}\to\frac{1}{3}$$

$\angle\mathrm{ROA}=2\times\angle\mathrm{RBA}=2\theta$, $\angle\mathrm{TOR}=\pi-4\theta$

$f(\theta)$

=(부채꼴 ORA의 넓이)+(삼각형 OTR의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times1^2\times2\theta+\frac{1}{2}\times1\times\overline{\mathrm{OT}}\times\sin(\pi-4\theta)\to\theta+\frac{2\theta}{3}=\frac{5}{3}\theta$

$g(\theta)$

=(부채꼴 OPQ의 넓이)−(삼각형 OST의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times1^2\times\theta+\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OS}}\times\overline{\mathrm{OT}}\times\sin\theta$

$\to\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\theta=\frac{\theta}{2}-\frac{\theta}{12}=\frac{5}{12}\theta$

따라서 $a=\frac{1}{4}$이므로 $80a=80\times\frac{1}{4}=20$

018. 12

함수 $g(x)$의 한 부정적분을 $G(x)$라 하자.

조건 (가)의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g(3a+x)=g(3a-x)$ …… ㉠

이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=3a$에 대하여 대칭이다.

$$\int_{2a}^{3a+x}g(t)dt=\int_{3a-x}^{2a+2}g(t)dt=\int_{3a-x}^{4a}g(t)dt+\int_{4a}^{2a+2}g(t)dt$$

$\int_{2a}^{3a+x}g(t)dt=\int_{3a-x}^{4a}g(t)dt$에서 $\int_{4a}^{2a+2}g(t)dt=0$

조건 (가)에서 $g(x)>0$이므로 $2a+2=4a$, $a=1$

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$h(x)=f(x)+f'(x)+1$라 하자.

함수 $y=g(x)$가 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로 $h(x)$도 $x=3$에 대하여 대칭이다.

따라서 $h(x)=(x-3)^2+p$로 둘 수 있다.

조건 (나)에서 $h(4)=5$이므로 $q=4$이다.

$h(x)=x^2-6x+13$에서

$h'(x)=f'(x)+f''(x)=f'(x)+2$

$$\int_3^5\{f'(x)+2a\}g(x)dx$$

$$=\int_3^5\{f'(x)+2\}g(x)dx=\int_3^5h'(x)\ln h(x)dx$$

$$=\Big[h(x)\ln h(x)\Big]_3^5-\int_3^5\left\{h(x)\times\frac{h'(x)}{h(x)}\right\}dx$$

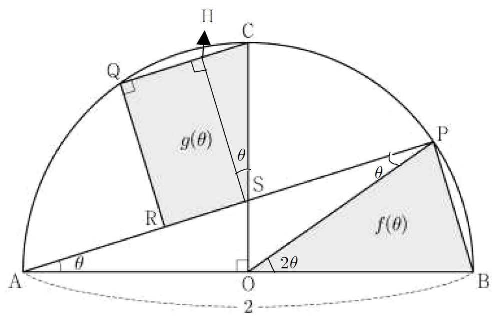
$=h(5)\ln h(5)-h(3)\ln h(3)-\{h(5)-h(3)\}$

$=8\ln8-4\ln4-(8-4)$

$=-4+16\ln2$

따라서 $m=-4$, $n=16$이므로 $m+n=12$이다.

019. ②



$\angle\mathrm{OAP}=\angle\mathrm{OPA}=\theta$, $\angle\mathrm{BOP}=2\theta$

따라서 $f(\theta)=\frac{1}{2}\sin2\theta\to\theta$이다.

또한, $\overline{\mathrm{OA}}=1$에서 $\overline{\mathrm{OS}}=\tan\theta$이므로 $\overline{\mathrm{CS}}=1-\tan\theta$

이때, $\angle\mathrm{BOP}=\angle\mathrm{COQ}=2\theta$이고 삼각형 OCQ는

이등변삼각형이므로 $\angle\mathrm{SCQ}=\frac{\pi}{2}-\theta$이다.

또한, $\angle\mathrm{CSR}=\theta+\frac{\pi}{2}$이므로 $\angle\mathrm{QRS}=\frac{\pi}{2}$이다.

따라서 점 S에서 변 CQ에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\angle\mathrm{CSH}=\theta$이므로

$\overline{\mathrm{SH}}=\overline{\mathrm{RQ}}=(1-\tan\theta)\cos\theta$

$\overline{\mathrm{CH}}=(1-\tan\theta)\sin\theta$

이고

$\overline{\mathrm{CQ}}=\overline{\mathrm{BP}}=2\sin\theta$

$\overline{\mathrm{RS}}=\overline{\mathrm{QH}}=\overline{\mathrm{CQ}}-\overline{\mathrm{CH}}$

$\quad=2\sin\theta-(\sin\theta-\sin\theta\tan\theta)$

$= \sin\theta + \sin\theta\tan\theta$

따라서

$$g(\theta)$$
$$= \frac{1}{2} \times (\overline{CQ} + \overline{RS}) \times \overline{QR}$$
$$= \frac{1}{2} \times (2\sin\theta + \sin\theta + \sin\theta\tan\theta) \times (1 - \tan\theta)\cos\theta$$
$$\to \frac{1}{2}(3\theta + \theta^2)(1-\theta) = \frac{1}{2}(3\theta - 2\theta^2 - \theta^3)$$

이므로

$$3f(\theta) - 2g(\theta)$$
$$\to 3\theta - (3\theta - 2\theta^2 - \theta^3) = 2\theta^2 + \theta^3$$

따라서

$$\lim_{\theta\to 0+} \frac{3f(\theta) - 2g(\theta)}{\theta^2} = \lim_{\theta\to 0+} \frac{2\theta^2 + \theta^3}{\theta^2} = 2$$

이다.

근사의 요령

> 이 문제는 $1-\tan\theta$를 1로 근사하지 않고 $1-\theta$로 근사해야만 정상적인 답안이 나온다.
>
> 만약 이 문제가 $g(\theta)$ 하나에 대한 극한이었다면 굳이 그렇게 안 계산하고 1로 계산해도 문제가 안 될 것이다. 하지만 이 경우는 여러 식이 덧셈이나 뺄셈으로 연결되어 있으므로, 중간에 일부 항이 없어질 수 있다. 따라서 $1-\theta$로 근사하는 것이 옳다.

020. 26

조건 (가)에서 분모가 0으로 가면 분자도 0으로 가야 하므로 $\lim_{x\to\infty} f(x) = -6$에서, $c = -6$이다.

$f(x) = ae^{2x} + be^x - 6$을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)+6}{e^x} = \lim_{x\to -\infty}(ae^x + b) = 1$$

이므로 $b = 1$이다.

$$f(x) = ae^{2x} + e^x - 6$$

조건 (나)에서

$$f(\ln 2) = ae^{2\ln 2} + e^{\ln 2} - 6 = 4a + 2 - 6 = 0$$

이므로 $a = 1$이고, $f(x) = e^{2x} + e^x - 6$이 된다.

따라서

$$g(0) = \ln 2,\ g(14) = \ln 4$$

이므로

$$\int_0^{14} g(x)\,dx = \int_{\ln 2}^{\ln 4} tf'(t)\,dt$$
$$= \Big[tf(t)\Big]_{\ln 2}^{\ln 4} - \int_{\ln 2}^{\ln 4} f(t)\,dt$$
$$= 14\ln 4 - \int_{\ln 2}^{\ln 4}(e^{2t} + e^t - 6)\,dt$$
$$= 14\ln 4 - \left[\frac{1}{2}e^{2t} + e^t - 6t\right]_{\ln 2}^{\ln 4}$$
$$= 34\ln 2 - 8$$

따라서 $p = -8$, $q = 24$이므로 $p + q = 26$이다.

역함수의 적분법

> $$\int_\alpha^\beta f^{-1}(x)dx = \int_{f^{-1}(\alpha)}^{f^{-1}(\beta)} xf'(x)dx$$

021. 31

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a > 0$, b, c, d는 상수)라 하면

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ 이므로

$f(3) = 27a + 9b + 3c + d = \frac{1}{2}$ …… ㉠

$f'(3) = 27a + 6b + c = 0$ …… ㉡

조건 (가)에서

$h(0) = g(f(0)) = g(d) = e^{\sin\pi d} - 1 = 0$

$e^{\sin\pi d} = 1$, $\sin\pi d = 0$

따라서, d는 정수이다. 또한,

$g'(x) = e^{\sin\pi x} \times \pi\cos\pi x$

$h'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$

이므로

$h'(0) = g'(f(0)) \times f'(0) = g'(d) \times c$

$= e^{\sin\pi d} \times \pi\cos\pi d \times c = \pi\cos\pi d \times c = 0$

그런데, $\cos\pi d \neq 0$이므로 $c = 0$

따라서, ㉠, ㉡에서

$27a + 9b + d = \frac{1}{2}$ …… ㉢, $9a + 2b = 0$ …… ㉣

이고 $a > 0$이므로 $b < 0$이고 ㉠−㉡에서

$3b + d = \frac{1}{2}$이므로 $d > 0$

즉, d는 자연수이다.

따라서 $f'(0) = c = 0$이므로 함수 $f(x)$는 $x = 0$에서 극댓값이 $f(0) = d$, $x = 3$에서 극솟값이 $\frac{1}{2}$이다.

즉, $0 < x < 3$에서 $f(3) < f(x) < f(0)$이므로

$\frac{1}{2} < f(x) < d$

그런데 조건 (나)에 의하여 열린구간 $(0, 3)$에서 방정식

$h(x) = g(f(x)) = e^{\sin\pi f(x)} - 1 = 1$

즉, $e^{\sin\pi f(x)} = 2$, $\sin\pi f(x) = \ln 2$가 서로 다른 실근의 개수가 7이고 함수 $y = \sin\pi t$의 주기는 2이므로 $d = 8$이다.

㉢, ㉣에서 $a = \frac{5}{9}$, $b = -\frac{5}{2}$이므로

$f(x) = \frac{5}{9}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 8$

따라서 $f(2) = \frac{40}{9} - 10 + 8 = \frac{22}{9}$

즉, $p = 9$, $q = 22$이므로 $p + q = 31$