

수학II 필수 개념 정리 노트

[문제 풀 때 절대 하면 안 되는 것]

- ① 삼차함수라고 하면 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 라고 세우는 것 (절대 이런 문제 안 나온다.)
- ② 미지수가 3개 이상인 연립방정식 푸는 것

1 함수의 극한

- 극한을 구하는 방법

$x \rightarrow \infty$ 로 갈 때 : 차수 가장 큰 아이들만 살아남음

$x \rightarrow 0$ 으로 갈 때 : 차수 가장 작은 아이들만 살아남음

- 함수의 연속성 판단

$f(x)$ 가 $x = a$ 에서 연속이면

$$f(a-) = f(a+) = f(a)$$

임을 이용해서 판단한다.

이는 합성함수, 곱함수, 분수함수 모두에서 성립하는 내용이다.

- $f(x) < g(x) < h(x)$ 형태의 문제 해석

샌드위치 정리 써주라는 의미이다. 실제로 극한을 씌웠을 때 남은 것만 계산해주면 된다.

| 예제 | $\frac{1}{2}x^2 + 2x < f(x) < x^2 + 2x$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) + 5x}{2f(x) - x} \text{의 값은?}$$

| 풀이 |

구하려는 극한이 $x \rightarrow 0$ 이므로 위쪽의 식도 $x \rightarrow 0$ 으로 극한을 취하자. $x \rightarrow 0$ 은 가장 낮은 차수만 살아남으므로 $f(x) = 2x$ 처럼 생각할 수 있다.

$$\text{따라서 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) + 5x}{2f(x) - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \times 2x + 5x}{2 \times 2x - x} = \frac{5}{3}$$

- 극한 방향의 변화

기본 개념 $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a+)$ 처럼 나타낼 때,

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(-x) = f(-a-)$$
이다.

구하려는 변수에 마이너스가 취해지면, 극한의 접근 방향도 바뀐다.

- 교점의 개수와 극한의 관계

기본 개념 $f(x) = t$ 의 해의 개수를 $g(t)$ 라 하자.

이는 $y = f(x)$ 와 $y = t$ 의 교점 개수이다.

꿀팁 전수 삼차함수 $f(x)$ 가 어떤 직선과 서로 다른 두 점에서 만난다 → 접하는 것 의심하기

2 다항함수의 미분법

- 미분의 정의

$$\text{기본 개념 } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+ah) - f(x)}{h} = af'(x)$$

- 미분가능성의 판단

기본 개념 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 미분 가능하면

$$\text{① } f(a+) = f(a-) = f(a)$$

$$\text{② } f'(a+) = f'(a-) = f'(a)$$

모두 만족한다.

- 절댓값 함수의 미분 가능성

다항함수 $f(x)$ 에 대해, $|f(x)|$ 가 $f(a) = 0$ 이고, $x = a$ 에서 미분 가능하려면 적어도 $(x-a)^2$ 을 인수로 가져야 한다.

| 예제 | 사차함수 $f(x)$ 에 대해 $y = |f(x)|$ 가
 $x = 3$ 에서만 미분 불가능하고,
 $f(0) = 0, f(1) = -2$ 이다.

| 풀이 |

$f(0) = 0$ 인데 $x = 0$ 에서 미분 가능하려면 $f(x)$ 는
 x^2 을 인수로 가진다.

$x = 3$ 에서 미분 불가능하려면

$$f(x) = kx^2(x-3)(x-\alpha)$$

로 둘 수 있다. (단, $\alpha \neq 3$)

이때, $x \neq 0$ 이면 $x = \alpha$ 에서 미분 불가능하므로 모순.

따라서 $\alpha = 0$ 이고 $f(x) = kx^3(x-3)$ 이다.

$f(1) = -2$ 이므로 대입하면 $k = 1$.

따라서 $f(x) = x^3(x-3)$

- 다항함수에서의 미분의 의미

기본 개념 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n}$ 의 값이 존재하면 $f(x)$ 는 x^n 을
 인수로 가져야 한다.

꿀팁 전수 같은 방식으로 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x-a)^n}$ 의 값이 존재
 하면 $f(x)$ 는 $(x-a)^n$ 을 인수로 갖는다.

| 예제 | 이차함수 $f(x)$ 가 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 2$ 이다.

| 풀이 |

$f(x)$ 의 최저차수는 2이므로 $f(x) = ax^2$ 으로 둘 수
 있다. 넣어서 약분하면 $a = 2$ 이므로 $f(x) = 2x^2$ 이다.

- 극한값의 분석

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-t}{x-a} = k \text{이면, } f(a) = t, f'(a) = k \text{이다.}$$

- 여러 개의 극한이 주어지고 다항함수 추론하는 문제

- ① 함수의 차수를 먼저 구한다.
- ② 최고차항의 계수/상수항을 구한다.
- ③ 주어진 조건을 활용하여 다른 항에 대한 식 세운다.

| 예제 | $f(x)$ 가 다음 조건을 모두 만족한다.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^3} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = -2, f(2) = 0$$

| 풀이 |

첫 번째 극한의 의미 : $f(x)$ 는 최고차항 계수가 1인
 삼차식이다.

두 번째 극한의 의미 : $f(x)$ 의 최저차항은 1차이고,
 그 계수는 -2 이다.

따라서 $f(x) = x^3 + ax^2 - 2x$ 로 둘 수 있다.

$f(2) = 0$ 이므로 대입하면 $a = -1$ 이다.

$$\therefore f(x) = x^3 - x^2 - 2x$$

- 극한값을 구하는 다양한 방법

→ Case 1. 미분해서 극한값을 구한다.

→ Case 2. 함수를 약분시켜서 극한값을 구한다.

- 곱함수 미분계수 빠르게 구하기

$h(x) = f(x)g(x)$ 일 때, $f(a) = 0$ 이라 하자.

이때,

$$h'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a) = f'(a)g(a)$$

이다.

| 예제 | $f(x) = (x-99)(x^3 + x^2 + x + 1)$ 이다.

| 풀이 | $f'(99) = 99^3 + 99^2 + 99 + 1$

- 미분계수를 통한 계수 추론

$$f(0) = a, f'(0) = b \text{이면}$$

$$f(x) = \dots + bx + a$$

형태로 둘 수 있다.

$$\text{마찬가지로, } f(k) = a, f'(k) = b \text{이면}$$

$$f(x) = \dots + b(x-k) + a$$

형태로 둘 수 있다.

- 모르는 다항함수의 추론 방법

삼차함수가 되었든, 사차함수가 되었든 개형만 정해지면 일단 제발 그려라. (* 이는 함수를 직관적으로 이해하기 위함임)
그러서 **모르는 항(x 절편, 각 항의 계수가)만 미지수로 두면** 무조건 풀린다.

| 예제 | 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 f 에 대해

$$g(x) = f(x) + |f'(x)|$$

$$(가) f(0) = g(0) = 0$$

$$(나) f(x) = 0 \text{은 양의 실근 갖는다.}$$

$$(다) |f(x)| = 4 \text{의 서로 다른 실근의 개수 } 3$$

| 풀이 |

① 준 식에 (가) 조건을 대입하면 $f'(0) = 0$ 이므로,
(나)에 의해 $y = f(x)$ 는 다음과 같이 나타난다.
(다)에서 $f(x) = \pm 4$ 여야 하는데, $f(x) = 4$ 의 해가 하나이므로 $f(x) = -4$ 의 해가 2개. 삼차함수가 2개의 점과 만나는 경우는 only 접하는 경우.

② 따라서 $f(x)$ 는 $y = -4$ 와 접함.

즉, $f(x)$ 의 극솟값이 -4 이다.

$$f(x) = x^2(x - \alpha) \text{라 두면, 극솟값은 } x = \frac{2}{3}\alpha \text{에서}$$

가지므로 대입하면 $\alpha = 3$ 일 때 성립한다.

$$\text{따라서 } f(x) = x^2(x - 3)$$

- 절댓값 함수를 대하는 자세 (매우 중요)

기본 개념 절댓값 함수는 무조건 그 안이 0보다 크거나 같을 때, 0보다 작을 때로 구분

꿀팁 전수

$$y = f(x) + |f(x)| :$$

$f(x) < 0$ 이면 $y = 0$ 이므로 $f(x) < 0$ 인 부분에 대해서는 전부 잘려서 0이 되고, $f(x) > 0$ 인 부분만 2배 해서 놔두는 함수이다.

$$y = f(x) - |f(x)| :$$

$f(x) \geq 0$ 이면 $y = 0$ 이므로 $f(x) \geq 0$ 인 부분에 대해서는 전부 잘려서 0이 되고, $f(x) < 0$ 인 부분만 2배 해서 놔두는 함수이다.

변형으로 $y = f(x) + |f(x) - x|$ 이런 함수도 나올 수 있다만, 결국은 그냥 0보다 크면, 0보다 작으면 으로 나눠서 함수의 특성을 파악하면 끝이다.

- 최솟값과 극대/극소

어떤 함수가 연속일 때, 최솟값 또는 최댓값을 가지면 그 점에서 $f' = 0$ 도 성립한다. (주의 : $f' = 0$ 이라고 최솟값 또는 최댓값인 것은 아니다.)

- 함수의 극대/극소 판단

주의 : $f'(x) = 0$ 이라고 무조건 극대/극소인 게 아님

① $f'(x) = 0$ 인 점 주위에서 +에서 -로 가면 **극대**

② $f'(x) = 0$ 인 점 주위에서 -에서 +로 가면 **극소**

| 예제 | $f(a) = 0, f'(a) = 0$ 일 때, $f(x)$ 는

$x = a$ 에서 극값은 아니다.

| 풀이 | $(x - a)^2$ 만을 인수로 가지면 다시 뒤집히는

형태이기 때문에 모순.

따라서 적어도 $(x - a)^3$ 을 인수로 가져야 함.

- 그래프 그리기

꿀팁 전수

대부분의 미분 문제는 일단 그래프 그리기를 전제로 해서 시작한다. 삼차함수에서 도함수가 0이라던지, 영점이 존재하던지 하는 정보가 있으면 일단 그래프 보고 시작하는 게 나은 경우가 많다. **제발 내가 바로 이해되는 함수가 아니면 그래프 좀 그리자.**

기본 개념

그래프를 그릴 때는 극댓값, 극솟값과 필요 시 절편 정도만 표시해주면 된다. x 축, y 축은 가능한 나중에 그리는 것이 좋다. 미리 그려 놓으면 나중에 함수 개형이 바뀌었을 때 대처가 어렵다.

꿀팁 전수

다시 한 번 강조하지만 내가 모르는 함수는 가능한 그래프를 그려서 직관적으로 이해하려고 노력해보자.

- 곱함수의 미분 가능성

기본 개념

$h(x) = f(x)g(x)$ 는 $x = a$ 에서 미분 가능한데, $g(x)$ 는 $x = a$ 에서 미분 불가능하면 다음과 같다.

미분 가능하다 치고 실제로 양변 미분하면

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

이다. 그런데 실제로는 $g'(a)$ 가 존재하지 않으므로, 영향력이 없도록 만들어 주어야 한다.

그러려면 $f(a) = 0$ 이어야 한다.

(엄밀하게 설명하면 $f(a) \neq 0$ 이면 $g'(a+) \neq g'(a-)$ 이므로 $h'(a+) = h'(a-)$ 이려면 $f(a) = 0$ 이라고도 설명할 수 있다.)

- 각종 미분 스킬들

$$\frac{d}{dx}(x-a)^n = n(x-a)^{n-1}$$

$f(x) = f(-x)$ 일 때, $f'(x) = -f'(-x)$ (좌우 대칭)

$f(x) = -f(-x)$ 일 때, $f'(x) = f'(-x)$ (원점 대칭)

- 접선의 방정식

어떤 상황이든 접점의 좌표를 $(t, f(t))$ 라 두고 시작한다. 그 접선의 방정식이 지나는 점에 식을 대입해서 t 를 구한다.

| 예제 | $(0, 4)$ 에서 $y = x^3 - x + 2$ 에 그은 접선?

| 풀이 |

접점을 $(t, t^3 - t + 2)$ 라 하면 $y' = 3x^2 - 1$ 이므로 접선의 방정식은

$$y = (3t^2 - 1)(x - t) + (t^3 - t + 2)$$

이다. $(0, 4)$ 지나므로 대입하면

$$-t(3t^2 - 1) + t^3 - t + 2 = 4$$

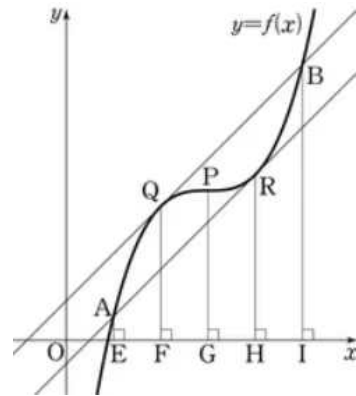
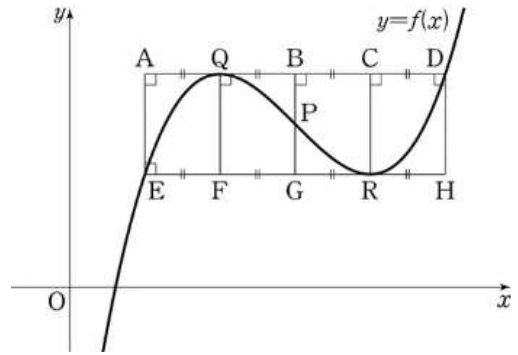
$$-2t^3 + 2 = 4$$

$$t = -1$$

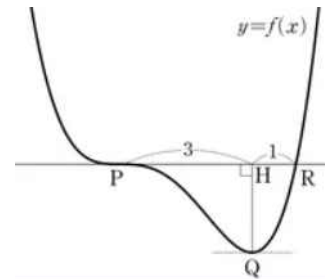
이고, 따라서 접선의 방정식은 $y = 2x + 4$ 이다.

- 삼차함수와 사차함수에서의 길이비

① 삼차함수에서는 다음 길이비가 성립



② 사차함수에서는 다음 길이비가 성립



- 주기함수에서의 연속성 & 미분 가능성

$[0, k)$ 에서 $f(x) = g(x)$ 인 미분 가능 함수 $f(x)$ 가 $f(x) = f(x+k)$ 을 만족시키면

$$g(0) = g(k-), \quad g'(0) = g'(k-)$$

을 만족시킨다.

| 예제 | $0 \leq x < 2$ 에서 최고차항 계수가 1인

사차함수의 일부인 $f(x)$ 에 대해 $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ 이고, $f(x) = f(x+2)$ 이다.

| 풀이 | 사차함수를 $g(x)$ 라 하자. $f(x)$ 가 $x = 2$ 에서 연속이기 위해

$$g(2) = g(0) = 0, \quad g'(2) = g'(0) = 0$$

$$\text{따라서 } g(x) = x^2(x-2)^2$$

3

다항함수의 적분법

- 적분의 정의

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

- 넓이와 관련된 유명한 공식들

$$\textcircled{1} \int_0^a kx^2 dx = \frac{ka^3}{3} \quad (\text{이차함수 적분})$$

$$\textcircled{2} \left| \int_a^\beta a(x-\alpha)(x-\beta) dx \right| = \frac{|a|(\beta-\alpha)^3}{6} \quad (\beta > \alpha)$$

③ 임의의 일차함수 $y = f(x)$ 와 최고차항의 계수가 a 인 이차함수 $y = g(x)$ 가 $x = \alpha, \beta$ 에서 만날 때, 둘러싸인 넓이는 $\frac{|a|(\beta-\alpha)^3}{6}$ 이다.

| 예제 | $y = -(x-2)(x-5)$ 와 x 축이 둘러싸인 부분 넓이?

| 풀이 | $\frac{|-1| \times (5-2)^3}{6} = \frac{9}{2}$

- 절댓값이 포함된 함수의 적분 방법

마찬가지로 0보다 큰 부분, 0보다 작은 부분으로 나눠서 푼다.

- 정적분을 바라보는 자세

정적분은 결국 넓이이다. 다만, 음의 구간에서는 ‘음의 넓이’, 양의 구간에서는 ‘양의 넓이’로 해석하는 것의 차이일 뿐이다.

- 범위가 주어진 함수의 정적분

$$f(x) \geq 0 \text{ 일 때, } \int_a^b f(x) dx \geq 0 \quad (\text{단, } a < b)$$

| 예제 | 방정식 $\int_0^x \{f(t)\}^2 dt = 0$ 을 풀면?

| 풀이 | $\{f(t)\}^2 \geq 0$ 이므로 $x \neq 0$ 이면

$$x > 0 : \int_0^x \{f(t)\}^2 dt > 0$$

$$x < 0 : \int_0^x \{f(t)\}^2 dt < 0$$

이다. 따라서 $x = 0$

- 자주 나오는 정적분 형태

$$g(x) = x \int_0^x f(t) dt - f(x)$$

일 때, 양변을 미분하면 $g'(x) = \int_0^x f(t) dt$

- 우함수와 기함수의 정적분

$$f(x) = f(-x) \text{ 일 때, } \int_{-a}^0 f(x) dx = \int_0^a f(x) dx$$

$$f(x) = -f(-x) \text{ 일 때, } \int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

| 예제 | $\int_{-2}^2 (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) dx$

| 풀이 |
$$\begin{aligned} &= \int_{-2}^2 (x^4 + x^2 + 1) dx \\ &= 2 \int_0^2 (x^4 + x^2 + 1) dx \\ &= 2 \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + x \right]_0^2 = \frac{332}{15} \end{aligned}$$

- 정적분으로 정의된 함수의 해석

$$f(x) = \int_a^x g(t) dt \text{의 형태로 나타낸 식에서는}$$

- ① 양변에 a 를 대입하여 $f(a) = 0$ 임을 얻는다.
- ② 양변을 미분하여 $f'(x) = g(x)$ 임을 얻는다.

| 예제 | $f(x) = \int_2^x (3t^2 + 1) dt$

| 풀이 | $f(2) = 0$ 이고, $f'(x) = 3x^2 + 1$ 을 얻는다.

- 조금 더 빠른 적분 방법

$$\int (x-a)^n dx = \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + C$$

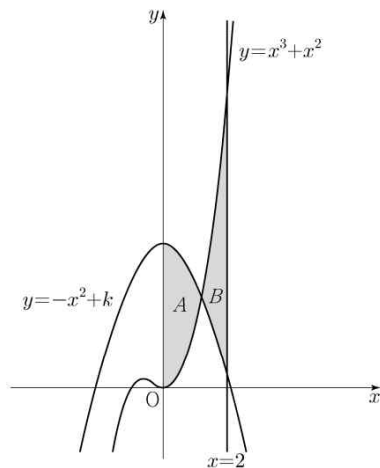
- 두 그래프 사이의 넓이

구간 $[a, b]$ 에서 두 그래프 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 사이
넓이는

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

이다.

| 예제 | $A = B$ 일 때, k 의 값은?



| 풀이 |

A 와 B 의 넓이가 같을 때,

$$\int_0^2 (x^3 + x^2) - (-x^2 + k) dx = 0$$

이다. A 는 $x^3 + x^2$ 가 $-x^2 + k$ 보다 작으므로 적분했을 때, **음의 넓이**가 되지만, B 는 $x^3 + x^2$ 가 $-x^2 + k$ 보다 크므로 적분했을 때, **양의 넓이**가 된다.

두 구간을 모두 적분하면 음의 넓이와 양의 넓이가 상쇄되어 적분값이 0이 된다.