함수의 극한의 개념 이해

좌극한과 우극한

함수 $f(x)$에서 x의 값이 a보다 크면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 특정한 값 b에 한없이 가까워지면 b를 함수 $f(x)$의 우극한이라고 한다. 그리고 이것의 기호는 다음과 같다.

$$\lim_{x \to a+} f(x) = b$$

함수 $f(x)$에서 x의 값이 a보다 작으면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 특정한 값 b에 한없이 가까워지면 b를 함수 $f(x)$의 좌극한이라고 한다. 그리고 이것의 기호는 다음과 같다.

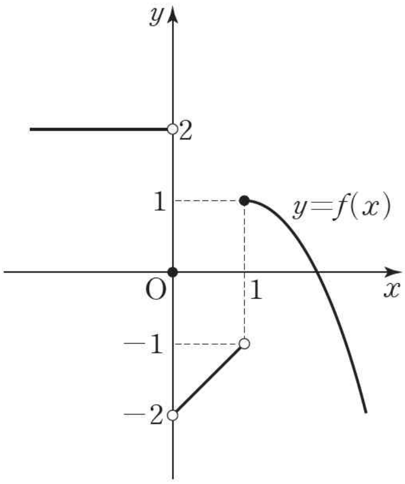
$$\lim_{x \to a-} f(x) = b$$

「실전적 이해와 탐구」

좌극한과 우극한은 한마디로 '**함수의 좌측 또는 우측으로부터 무한히 다가가는 목표 x, y좌표**'라고 이해할 수 있다. 특정 값을 향해 무한히 다가간다는 것은 특정 값에 영원히 닿지 못한다는 의미이기도 하다. 이는 '$x \neq a$'임을 내포한다.

예시 문항 - 2022학년도 수능예시문항 4번

함수 $y = f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to 0-} f(x) - \lim_{x \to 1+} f(x)$의 값은? (3점)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

함수의 극한의 존재 = 좌극한과 우극한의 일치

함수의 극한이 존재한다는 것은 '**함수의 좌측 또는 우측으로부터 무한히 다가가는 목표 y좌표**'가 특정한 값으로 동일하다는 의미이다. 이를 기호로 나타내면 다음과 같다.

$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) = b$, $\lim_{x \to a} f(x) = b$

「실전적 이해와 탐구」

기호 $\lim_{x \to a} f(x) = b$는 그 자체만으로 좌극한과 우극한이 같음을 의미한다. 따라서 특정 함수 $f(x)$에 대하여 '**$\lim_{x \to a} f(x)$의 값은?'이라는 물음만으로도 좌극한과 우극한이 같다는 전제 조건을 얻어낼 수 있다.**

또한, 함수의 극한의 존재는 이후에 배우는 함수의 연속과 헷갈리면 안된다. 극한의 존재는 함숫값과는 독립적인 개념이다. 따라서 '함수의 극한이 존재한다는 것 또는 $\lim_{x \to a} f(x) = b$'라는 기호가 조건으로 제시되면 이를 '**좌극한과 우극한이 같되 함숫값은 같아도, 같지 않아도 상관없다**'는 것으로 해석하면 된다.

함수의 극한의 개념 탐구

함수의 극한의 개념이 어떻게 출제될 수 있는가

일반적인 다항함수에서 함수의 극한은 항상 존재하기 때문에 개념의 이해도를 묻기 어렵다. 따라서 다항함수의 변형된 형태들이 주로 출제되는데 그 유형들은 다음과 같다.

1. 구간별로 정의된 함수 (3점 그래프 유형과 4점 어렵게 정의된 함수 유형으로 나뉜다.)

이 유형의 함수에서는 구간들 사이의 경계에서 좌극한과 우극한이 일치하는지 따지거나 일치하도록 조작하면 된다. 절댓값 함수 역시 절댓값이 0이 되는 지점을 기준으로 함수가 달라지기에 구간별로 정의된 함수라고 볼 수 있다.

2. 다른 수학적 개념에 의해 새롭게 정의된 함수

이 유형의 함수에서는 문제에 제시된 조건을 통해 정확하게 새로운 함수를 정의하는 것이 중요하며, 이를 식과 그래프를 동시에 이용하여 나타낼수록 좋다. 주로 새롭게 정의된 함수는 구간별로 정의된 함수가 되거나 정의역 내의 특정한 지점에서 특이점을 가지는 경우가 많다.

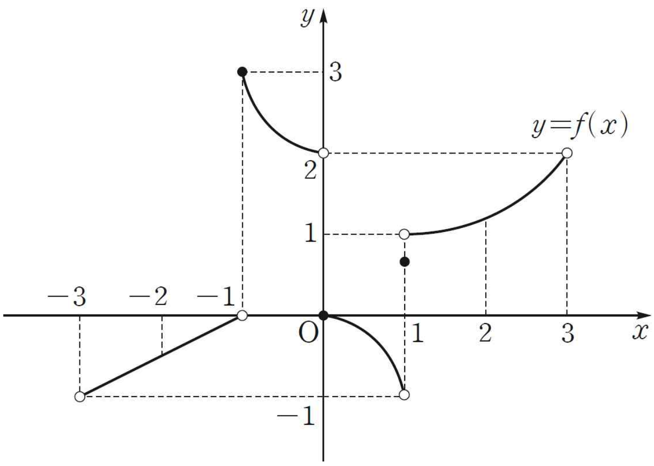
3. 합성함수(유리함수와의 합성이 자주 출제되었다. 합성함수는 이후에 따로 다룬다.)

「실전적 이해와 탐구」

이렇듯, 다항함수가 아닌 특이 함수들이 출제될 경우에 **함수의 극한이 존재함을 의미하는 조건이 제시되면, 그 정의인 '좌극한과 우극한이 같다.'를 표현하면 새로운 단서를 얻어낼 수** 있다.

예시 문항 - 2018년도 고2 11월 학력평가 나형 15번

$-3<x<3$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



부등식 $\lim_{x\to a-} f(x) > \lim_{x\to a+} f(x)$를 만족시키는 상수 a의 값은? (단, $-3<a<3$) (4점)

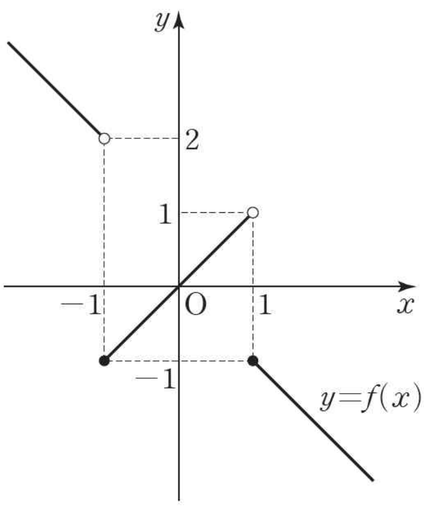
① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

합성함수의 극한: 반드시 각각의 함수의 그래프를 따로 이용한다.

합성함수의 그래프를 그리는 것이 쉬운 경우를 제외하면 합성함수는 **각각의 그래프를 따로 이용한**다. 이때 **각각의 그래프에서 좌극한과 우극한의 개념을 이용하여 대응관계를 통해 최종적인 극한값을 파악한다**.

예시 문항 - 2020년도 3월 학력평가 가형 8번

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 0+} f(x-1) + \lim_{x\to 1+} f(f(x))$의 값은? (3점)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

이 문제가 합성함수의 극한을 묻는 것으로 이해하고 각각의 그래프를 따로 이용하면 아래와 같이 풀이할 수 있다.

$y=x-1$과 $y=f(x)$ 그래프를 따로 이용하여 대응관계를 활용한다.

1\. $0+ \xrightarrow{y=x-1} -1+ \xrightarrow{y=f(x)} -1$

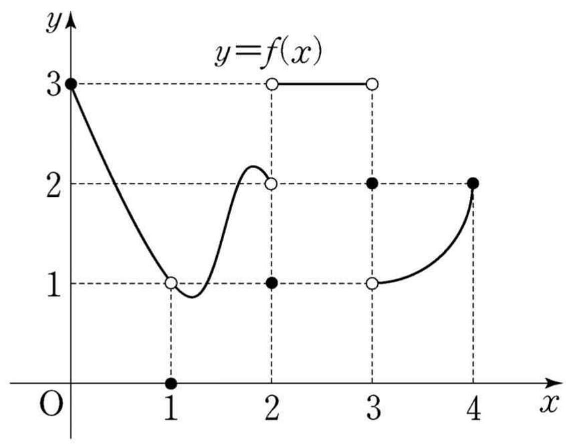
2\. $1+ \xrightarrow{y=f(x)} -1- \xrightarrow{y=f(x)} 2$

$\therefore \lim_{x\to 0+} f(f(x)) + \lim_{x\to 2+} f(f(x)) = -1+2=1$

예시 문항 - 2012학년도 9월 평가원 가형 11번

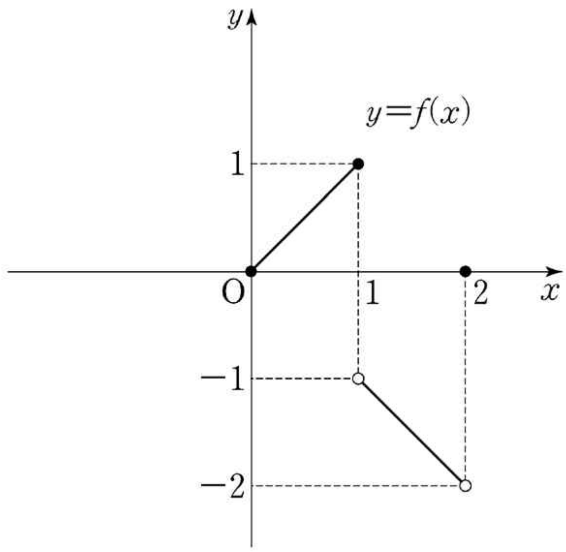
정의역이 $\{x \mid 0 \le x \le 4\}$인 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

$\lim_{x\to 0+} f(f(x)) + \lim_{x\to 2+} f(f(x))$의 값을 구하시오.



1 2014학년도 9월 평가원 A형 15번

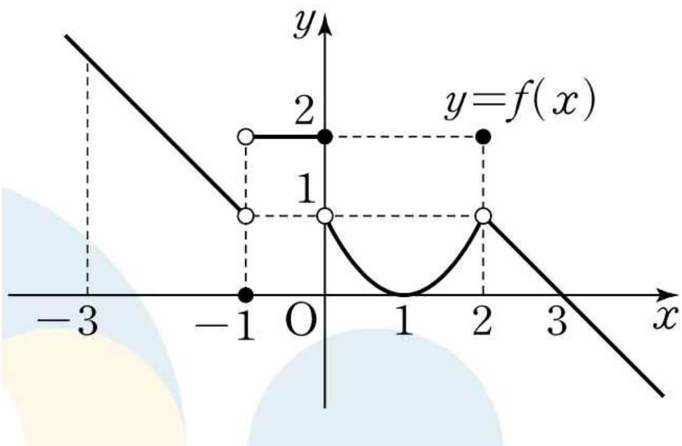
정의역이 $\{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$인 함수 $y=f(x)$의 그래프가 구간 $[0,\ 2]$에서 그림과 같고, 정의역에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이다. $\lim_{x \to -1+} f(x) + \lim_{x \to 2-} f(x)$의 값은? (4점)



① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

2 2023학년도 수능특강

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다. 정수 $a\,(-3<a<3)$에 대하여 $\lim_{x\to a}\frac{x}{f(x)}$의 값이 존재하도록 하는 모든 a의 개수는? (3점)



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3 2024학년도 수능특강

함수

$$f(x)=\begin{cases} ax+2 & (x<1) \\ 0 & (x=1) \\ 2ax^2-5 & (x>1) \end{cases}$$

에 대하여 $\lim_{x\to1} f(x)$의 값은 존재하지 않고, $\lim_{x\to1}|f(x)|$의 값은 존재할 때, 상수 a의 값은?

(3점)

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

4 2017년도 10월 학력평가 나형 17번

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to 0}|x|\left\{f\left(\frac{1}{x}\right)-f\left(-\frac{1}{x}\right)\right\}=a,\ \lim_{x \to \infty}f\left(\frac{1}{x}\right)=3$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?

(단, a는 상수이다.) (4점)

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

5 2022년도 10월 학력평가 20번

최고차항의 계수가 1이고 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(5)$의 최댓값을 구하시오. (4점)

(가) $\lim_{x \to 0} \frac{|f(x)-1|}{x}$의 값이 존재한다.

(나) 모든 실수 x에 대하여 $xf(x) \geq -4x^2+x$이다.

6 2010학년도 수능 가형 8번

실수 a에 대하여 집합

$$\{x \mid ax^2 + 2(a-2)x - (a-2) = 0,\ x\text{는 실수}\}$$

의 원소의 개수를 $f(a)$라 할 때, 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은? (3점)

[보기]

ㄱ. $\lim\limits_{a \to 0} f(a) = f(0)$

ㄴ. $\lim\limits_{a \to c+} f(a) \neq \lim\limits_{a \to c-} f(a)$인 실수 c는 2개이다.

ㄷ. 함수 $f(a)$가 불연속인 점은 3개이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

7 2012학년도 6월 평가원 나형 18번

실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 함수 $y=\left|x^2-1\right|$의 그래프와 만나는 점의 개수를 $f(t)$라 할 때, $\lim_{t\to 1-} f(t)$의 값은? (4점)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

8 2017학년도 경찰대 16번

좌표평면에서 원 $x^2+y^2=1$과 직선 $y=-\frac{1}{2}$이 만나는 점을 A, B라 하자. 점 $\mathrm{P}(0,\ t)\left(t \neq -\frac{1}{2}\right)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 점 C의 개수를 $f(t)$라 하자.

(가) C는 A나 B가 아닌 원 위의 점이다. (나) A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는 A, B, P를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이와 같다.

$f(a)+\lim_{t \to a-} f(t)=5$이고 $\lim_{t \to 0-} f(t)=b$일 때, $a+b$의 값은? (4점)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

9 2018년도 고2 6월 학력평가 가형 30번

양의 실수 k와 함수 $f(x)=ax(x-b)$ (a, b는 자연수)에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<b) \\ kf(x-b) & (x\geq b) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(6)=-8$ (나) 방정식 $\lvert g(x)\rvert=b$의 서로 다른 실근의 개수는 5이다.

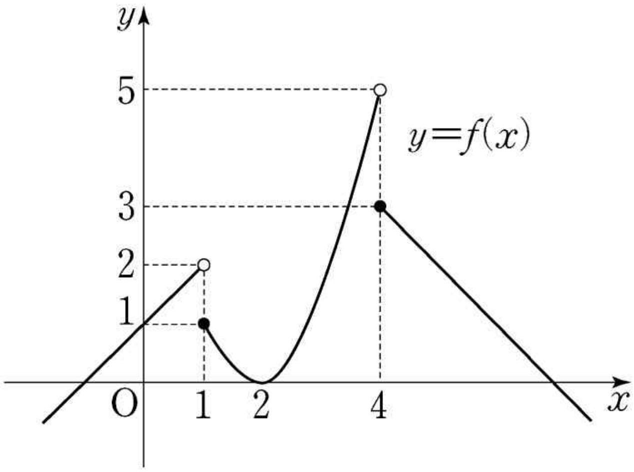
실수 m에 대하여 직선 $y=mx-1$이 함수 $y=\lvert g(x)\rvert$의 그래프와 만나는 점의 개수를 $h(m)$이라 하자.

함수 $h(m)$에 대하여 $\lim_{m\to t-}h(m)+\lim_{m\to t+}h(m)=6$을 만족시키는 모든 실수 t의 값의 합은 $p+q\sqrt{14}$이다. $12(p+q)$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 유리수이다.) (4점)

10 2011학년도 6월 평가원 가형 7번

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{t\to\infty} f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)+\lim_{t\to\infty} f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)$의 값은? (3점)

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

함수의 극한의 성질 이해

수렴하는 함수들 사이의 사칙연산 결합과 분리

$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha, \lim_{x \to a} g(x) = \beta$ 즉, $f(x)$와 $g(x)$가 각각 α와 β로 수렴할 때,

① $\lim_{x \to a} cf(x) = c\lim_{x \to a} f(x) = c\alpha$

② $\lim_{x \to a} \{f(x) + g(x)\} = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = \alpha + \beta$

③ $\lim_{x \to a} \{f(x) - g(x)\} = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) = \alpha - \beta$

④ $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \times \lim_{x \to a} g(x) = \alpha\beta$

⑤ $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ (단, $\beta \neq 0$)

「실전적 이해와 탐구」

각각의 함수가 '**동일한 x좌표로 수렴할 때 극한값이 수렴한다면**' 사칙연산을 자유자재로 분리, 결합할 수 있다. 따라서, **특정 함수들의 극한값이 제시된다면 이를 수렴하는 덩어리로 인식**하는 것이 중요하다. 그리고 그 **수렴하는 덩어리 채로 사칙연산의 결합과 분리에 이용될 수 있음을 활용**해야 한다. 만약 **동일한 x좌표로 수렴하지 않는다면, 평행이동을 통해 이를 조정**해야 한다. 이를 통해 **수렴하는 극한끼리 결합하거나 복잡한 식 내에서 이들을 분리**해내어 풀이에 필요한 조건을 얻어내면 된다. 참고로 함수의 극한의 성질을 묻는 것이 의도인 문제는 대부분 다항함수가 아니라 그냥 '함수 ~는'으로 시작하는 경우가 많다.

예시 문항 - 2014학년도 6월 모의평가 A형 9번

함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - 3}{x - 2} = 5$$

일 때, $\lim_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{\{f(x)\}^2 - 9}$ 의 값은?

① $\dfrac{1}{18}$ ② $\dfrac{1}{21}$ ③ $\dfrac{1}{24}$ ④ $\dfrac{1}{27}$ ⑤ $\dfrac{1}{30}$

함수 $f(x)$가 수렴한다거나 다항함수라는 조건이 없으므로 $f(2) = 3$이라고 생각하면 안된다. 함숫값의 존재 유무는 알 수 없고 극한값인 $\lim_{x \to 2} \{f(x) - 3\} = 0$과, $\dfrac{f(x) - 3}{x - 2} = g(x)$라 할 때 $g(x)$의 극한값인 $\lim_{x \to 2} g(x) = 5$만을 알 수 있다. 따라서 아래의 식을 변형하여 위의 조건들과 연결하면 $\lim_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{\{f(x) - 3\}\{f(x) + 3\}} = \lim_{x \to 2} \left\{ \dfrac{1}{g(x)} \times \dfrac{1}{\{f(x) - 3\} + 6} \right\} = \dfrac{1}{5} \times \dfrac{1}{0 + 6} = \dfrac{1}{30}$이다.

11 2018학년도 수능 나형 25번

함수 $f(x)$가 $\lim_{x \to 1}(x+1)f(x)=1$을 만족시킬 때, $\lim_{x \to 1}(2x^2+1)f(x)=a$이다. $20a$의 값을 구하시오. (3점)

12 2024학년도 수능특강

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $\lim_{x \to 0}\{xf(x)-(x^2+2)\}=1$, $\lim_{x \to 0}\left\{\frac{g(x)}{x}+\frac{1}{x^2+1}\right\}=3$

을 만족시킬 때, $\lim_{x \to 0}\{3f(x)g(x)-xf(x)\}$의 값을 구하시오. (3점)

13 2023학년도 수능완성

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-3}{x} = 2$

(나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\{f(x)-3\} = x^2\{f(x)+5\}$

$\lim_{x \to 0} \frac{6xg(x)+f(x)g(x)}{2x+g(x)}$의 값은? (4점)

① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

14 2013학년도 6월 평가원 나형 9번

함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x \to 2}\frac{f(x-2)}{x^2-2x}=4$일 때, $\lim_{x \to 0}\frac{f(x)}{x}$의 값은? (3점)

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

15 자작 문항

다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x), h(x)$를

$$g(x)=\frac{f(x-2)}{(x-3)f(x)},\ h(x)=\frac{f(x-3)}{f(x-4)f(x-1)}$$

과 같이 정의할 때, $\lim_{x \to 3} g(x)=8$과 $\lim_{x \to 4} h(x)=2$를 만족시킨다. $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$의 값을 구하시오. (4점)

샌드위치 정리의 이해

어떻게 부등식의 좌우의 극한값이 같을 수 있는지 따질 것

$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha, \lim_{x\to a} g(x) = \beta$($\alpha, \beta$는 실수)일 때, a에 가까운 모든 실수 x에 대하여

① $f(x) \le g(x)$이면 $\alpha \le \beta$이다.

② $f(x) \le h(x) \le g(x)$이고 $\alpha = \beta$이면 $\lim_{x\to a} h(x) = \alpha = \beta$이다.

「실전적 이해와 탐구」

일단은 샌드위치 형태의 부등식 구조가 나왔음을 인식한다. 그리고 중간의 함수를 기준으로 부등식의 좌우의 함수들은 특정한 값으로 수렴해야 한다. 그렇다면, 어떻게 수렴할 수 있는가? **첫 번째는** $\lim_{x\to a} f(x) = b$**처럼 특정한** x**값으로 다가가며 수렴하는 것**이다.

두 번째는 $\lim_{x\to\infty} \frac{bx^n + \cdots}{ax^n + \cdots} = \frac{b}{a}$**처럼 유리식에서 최고차항 간의 계수 비가 수렴하는 것**이다. 이 두 가지 경우를 이용하여 중간의 함수의 극한값을 찾아내면 된다. 두 번째 경우를 이용하고 싶을 때는 **부등식 좌우의 함수와 최고차항의 차수가 동일한 함수** x^n**으로 부등식 전체를 나누면** 언제든지 얻고자 하는 극한값을 얻을 수 있다.

예시 문항 - 자작 문항

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $|f(x) - 3x^2| < 4$을 만족시킬 때,

$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^2+x+1}$의 값을 구하시오.

절대부등식을 풀면 $3x^2 - 4 < f(x) < 3x^2 + 4$이다. 그러므로 각 변을 x^2+x+1로 나눈 $\frac{3x^2-4}{x^2+x+1} < \frac{f(x)}{x^2+x+1} < \frac{3x^2+4}{x^2+x+1}$도 성립한다. 따라서, 샌드위치 정리에 의해

$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-4}{x^2+x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+4}{x^2+x+1} = 3 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^2+x+1}$이 성립하여 답은 3이다.

16 2023학년도 수능완성

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$-x^2+3 \le \frac{f(x)}{g(x)} \le 2x^2-6x+6$$

을 만족시킬 때, $\lim_{x \to 1} \frac{3f(x)g(x)}{\{f(x)\}^2+2\{g(x)\}^2}$의 값은? (3점)

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

17 2015년도 고2 11월 학력평가 가형 27번

다항함수 $f(x)$는 양의 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $2x^2-5x \leq f(x) \leq 2x^2+2$

(나) $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x^2+2x-3} = \frac{1}{4}$.

$f(3)$의 값을 구하시오. (4점)

18 2024학년도 수능특강

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $\frac{x-1}{3x^2+2}<\frac{f(x)}{x^2+1}<\frac{x+4}{3x^2+1}$을 만족시킬 때,

$\lim_{x\to\infty}\frac{4x+3f(x)}{2x-f(x)}$의 값을 구하시오. (3점)

19 2023학년도 수능특강

다항함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오. (4점)

(가) 모든 양의 실수 x에 대하여 $2x^2-3x \le f(x)-x^3 \le 2x^2+3$

(나) $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-2}{x-1}=5$.

함수의 극한의 부정형의 종류

제시된 함수의 극한이 어떤 부정형인지 파악하는 것이 부정형 조건 해석의 첫걸음

1. $\frac{0}{0}$꼴

$f(x), g(x)$가 다항함수 또는 무리함수이고 $\lim_{x\to a} f(x)=0, \lim_{x\to a} g(x)=0$일 때, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$는

① $f(x), g(x)$가 모두 다항함수이면 $x-a$를 모두 약분한다.

② $f(x)$ 또는 $g(x)$가 무리함수이면 유리화하여 $x-a$를 모두 약분한다.

이렇게 0으로 수렴하는 인수를 모두 소거한 이후, x에 a를 대입하면 극한값이 결정된다.

$(x-a)$ 인수를 약분 가능한 것은 $x\to a$는 x가 a로 무한히 다가가지만 절대 a가 되지 않음 즉, $x\neq a$임을 내포하기 때문이다. 따라서 $(x-a)$는 0이 아니므로 약분해도 결괏값에 영향을 주지 않는다.

예시 문항 - 2005학년도 6월 모의고사 가형 18번

$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2-3}-1}{x-2}$의 값을 구하시오.

정의역의 수렴값 2를 함수에 대입하면 분모가 0으로 수렴하고 분자도 0으로 수렴함을 알 수 있다. 따라서 $\frac{0}{0}$꼴이므로 분자를 유리화하면 $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2-3}+1)}$이고, 분모와 분자의 $(x-2)$인수를 모두 약분한 후 $x=2$ 대입 시, $\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2-3}+1}=\frac{2+2}{1+1}=2$이다.

2. $0\times\infty$꼴

$\lim_{x\to a} f(x)=0, \lim_{x\to a} g(x)=\infty$ 즉, 하나는 0으로 수렴하고 나머지 하나는 무한대로 발산할 때, $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$의 극한값이 존재하는 함수 $f(x), g(x)$가 존재할 수 있다. 그 이유를 직관적으로는 $0\times\infty=0\times\frac{\text{상수}}{0}=\frac{0}{0}$, 즉 $\frac{0}{0}$꼴과 동치가 되는 경우이기 때문이라고 해석할 수 있다.

$ex)$ $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(1-\frac{1}{x+1})=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+1}=1$

▷ $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty, \lim_{x\to 0}(1-\frac{1}{x+1})=0$이다. 하지만 둘의 곱함수의 극한값은 존재한다. 그 이유는 곱함수의 극한 $\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(x+1)}$은 위에서 설명한 $\frac{0}{0}$꼴이기 때문이다.

3. $\frac{\infty}{\infty}$꼴

$f(x), g(x)$가 모두 다항함수 또는 무리함수이고 $\lim_{x\to\infty}|f(x)|=\infty$, $\lim_{x\to\infty}|g(x)|=\infty$일 때,

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$는 아래와 같은 방식으로 극한값을 계산한다.

① 분모 $g(x)$의 최고차항으로 분모와 분자를 동시에 나누어서 $\lim_{x\to 0}\frac{c}{x^n}=0$($c$는 상수)의 극한의 성질을 이용한다.

이를 분석하여 정리한 결과는 아래와 같다.

② 분자 $f(x)$와 분모 $g(x)$의 최고차항의 차수와 계수를 비교하여
- ⅰ) 분모와 분자의 차수가 같으면 최고차항의 계수 비가 극한값.
- ⅱ) 분모의 차수가 분자의 차수보다 크면 극한값은 0.
- ⅲ) 분모의 차수가 분자의 차수보다 작으면 무한대로 발산.

예시 문항 - 2011학년도 9월 모의고사 가형 5번

다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=0,\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=5$$

를 만족시킨다. 방정식 $f(x)=x$의 한 근이 -2일 때, $f(1)$의 값은?

첫 번째 극한식은 $x\to\infty$일 때, 극한값이 0이므로 분모의 차수가 분자보다 크다. 따라서 분자의 $f(x)$는 차수가 이차 이하인 다항함수이다.

4. $\infty-\infty$꼴

$f(x), g(x)$가 모두 다항함수이고, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}g(x)=\infty$이고, 최고차항의 차수와 계수가 모두 같으며, 무리식을 포함할 때 유리화 또는 통분을 이용하여 $\frac{0}{0}$꼴 또는 $\frac{\infty}{\infty}$꼴로 변형한 뒤 극한값을 계산한다.

예시 문항 - 2021학년도 6월 모의평가 가형 2번 변형

$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{9x^2+12x}-3x)$의 값은?

최고차항의 차수는 일차, 계수도 3으로 동일하다. 따라서 유리화하여 식을 정리하면 $\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2+12x-9x^2}{\sqrt{9x^2+12x}+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{12x}{\sqrt{9x^2+12}+3x}$이다. 최고차항의 계수비를 구하면 $\frac{12}{3+3}=2$이다.

「실전적 이해와 탐구」

각 부정형의 풀이법을 암기하는 것은 누구나 한다. 중요한 것은 낯선 함수의 극한이 주어졌을 때, 다음과 같이 극한의 교과서적 흐름에 따라 조건을 해석하는 것이다.

1. 함수의 극한이 수렴하는지 확인하기> 수렴한다면 극한의 정의에 의해 '좌극한=우극한'이다.

2. 수렴하는 함수의 극한이므로 그 덩어리 채로 사칙연산의 결합, 분리에 이용될 수 있다.

3. 극한으로 보냈을 때 부정형인지 확인하기> 부정형임이 확인되면 그 종류를 확정짓는다.

정의역의 특정한 값으로 수렴할 때, 곱, 몫 형태의 부정형은 $\frac{0}{0}$과 $0 \times \infty$이다.

① $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$, $\lim_{x \to a} g(x) = 0$이면 $\lim_{x \to a} f(x) = 0$

② $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha\,(\alpha \neq 0)$, $\lim_{x \to a} f(x) = 0$이면 $\lim_{x \to a} g(x) = 0$

③ $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = \alpha$, $\lim_{x \to a} |g(x)| = \infty$이면 $\lim_{x \to a} f(x) = 0$

④ $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = \alpha\,(\alpha \neq 0)$, $\lim_{x \to a} f(x) = 0$이면 $\lim_{x \to a} |g(x)| = \infty$

「실전적 이해와 탐구」

정리하자면 극한값들이 특정한 값으로 수렴하고, 0 또는 ∞가 구성요소일 때,

1. 몫으로 정의된 함수는 $\frac{0}{0}$꼴을 떠올리면 된다.

2. 곱으로 정의된 함수는 $0 \times \infty$꼴을 떠올리면 된다.

이때 곱으로 정의된 함수는 인수분해되지 않고 전개된 채로 제시되어서, 발산하는 함수에 대한 조건을 해석하여 ∞**로 발산하는 인수를 분해해야 할 수도 있다**. 아래 자작 문항으로 확인하자.

자작 문항

함수 $f(x), g(x)$가 $\lim_{x \to 1} f(x) = \infty$을 만족시키고 $\lim_{x \to 1} \{f(x)g(x) + 2f(x)\}$이 0이 아닌 값으로 수렴할 때, $\lim_{x \to 1} g(x)$의 값을 구하시오.

▶ $\lim_{x \to 1} \{f(x)g(x) + 2f(x)\}$은 수렴하면서 동시에 발산하는 함수 $f(x)$를 인수로 가지고 있는 극한이다. 따라서 인수분해를 통해 이를 $\lim_{x \to 1} f(x)\{g(x)+2\}$로 표현하면 곱으로 정의된 $\infty \times 0$꼴 부정형임을 알 수 있다. 따라서 $\lim_{x \to 1} \{g(x)+2\} = 0$이므로 $\lim_{x \to 1} g(x) = -2$이다.

[함수의 극한의 성질을 이용한 증명]

① $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \times g(x) \right\} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \times \lim_{x \to a} g(x) = \alpha \times 0 = 0$

② $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} \left\{ \frac{g(x)}{f(x)} \times f(x) \right\} = \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} \times \lim_{x \to a} f(x) = \frac{1}{\alpha} \times 0 = 0$

③ $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \left\{ f(x)g(x) \times \frac{1}{g(x)} \right\} = \lim_{x \to a} f(x)g(x) \times \lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \alpha \times 0 = 0$

④ $\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \lim_{x \to a} \left\{ \frac{1}{f(x)g(x)} \times f(x) \right\} = \lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)g(x)} \times \lim_{x \to a} f(x) = \frac{1}{\alpha} \times 0 = 0$

$\therefore \lim_{x \to a} |g(x)| = \infty$

20 2008학년도 사관학교 가형 26번

$x \neq 2$인 모든 실수 x에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 두 조건을 만족시킬 때,

$\lim_{x \to 2} \frac{4f(x) - 40g(x)}{2f(x) - g(x)}$의 값을 구하시오. (3점)

(가) $\lim_{x \to 2} \{2f(x) + g(x)\} = 1$

(나) $\lim_{x \to 2} g(x) = \infty$

21 2024학년도 수능특강

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $\lim_{x \to 1} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to 1}\{f(x)+3g(x)\}=4$

를 만족시킬 때, $\lim_{x \to 1}\frac{f(x)-g(x)}{5f(x)+2g(x)}$ 의 값은? (3점)

① $\frac{1}{13}$ ② $\frac{2}{13}$ ③ $\frac{3}{13}$ ④ $\frac{4}{13}$ ⑤ $\frac{5}{13}$

부정형을 해석하여 함수에 관한 단서 얻어내기

$\frac{0}{0}$꼴

1. 극한값이 0이 아닌 상수일 때의 함수 추론 (분모, 분자의 무한소 인수 개수 동일)

두 다항함수 $f(x), g(x)$와 자연수 n에 대하여

$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = b$일 때 $b \neq 0$이면 $f(x) = (x-a)^n g(x)$이며, $g(a) = b$이다(다항함수여서 함숫값 =극한값). 전체 극한값이 0이 아니면 분모, 분자의 0으로 수렴하는 인수의 개수가 같다.

2. 극한값이 0일 때의 함수 추론 (분자의 무한소 인수 개수가 더 많음)

분모의 극한값에 관계없이 전체 극한값이 0이라면 분자는 반드시 $(x-a)$를 인수로 갖는다.

즉, 두 다항함수 $f(x), g(x)$에 대하여 $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$일 때, $f(x) = (x-a)h(x)$이다.

▷ $\lim_{x \to a} g(x) = 0$일 때, $\lim_{x \to a} f(x) = 0$이므로 $f(a) = 0$ ($\frac{0}{0}$꼴을 응용한 부정형 추론)

$\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$일 때, $\frac{f(a)}{g(a)} = 0$이므로 $f(a) = 0$

다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x \to a} \frac{(x-a)^n}{f(x)} = 0$일 때, $f(x)$는 $(x-a)$인수를 $(n-1)$개까지만 가질 수 있다. 즉, 전체 극한값이 0인 경우 분자의 $(x-a)$인수 개수 > 분모의 $(x-a)$인수 개수

▷ 다항함수 $g(x)$에 대하여 $g(a) \neq 0$일 때, $f(x) = (x-a)^n g(x)$이면

$\lim_{x \to a} \frac{(x-a)^n}{f(x)} = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)^n}{(x-a)^n g(x)} = \frac{1}{g(a)} \neq 0$이므로 모순이다.

3. 극한값이 발산할 때의 함수 추론 (분모의 무한소 인수 개수가 더 많음)

두 다항함수 $f(x) = (x-a)^n g(x)$, $h(x)$에 대하여 $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{h(x)} = \infty$이면 $h(x)$는 반드시 적어도 $(n+1)$개 이상의 $(x-a)$ 인수를 가진다. 따라서 $h(x) = (x-a)^{n+1} t(x)$, 즉 분모의 0으로 수렴하는 인수의 개수가 더 많다.

▷ $g(a) \neq 0, t(a) \neq 0$일 때, $\lim_{x \to a} \frac{f(x) = (x-a)^n g(x)}{h(x) = (x-a)^{n+1} t(x)} = \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{(x-a)t(x)} = \infty$

「실전적 이해와 탐구」

$\frac{0}{0}$꼴 부정형 조건을 해석하는 방법

1. 제시된 극한의 x값으로 보내서 분모에 무한소가 존재하는지 확인한다.
2. 무한소가 존재한다면 $\frac{0}{0}$꼴 부정형이므로 극한값의 존재가 이전 페이지에서 배운 3가지 중 어떤 양상인지 분류한다. (0아닌 상수로 수렴, 0으로 수렴, 발산)
3. 0아닌 상수로 수렴할 경우 분자가 분모의 무한소 개수와 동일한 무한소를 가진다는 것을 이용한다.
4. 0으로 수렴할 경우 분자가 분모의 무한소 개수보다 더 많은 무한소를 가진다는 것을 이용한다.
5. 발산할 경우 분자가 분모의 무한소 개수보다 더 적은 무한소를 가진다는 것을 이용한다.
6. 이때, 극한이 수렴한다면 극한의 존재의 정의를 항상 염두에 두고 있으면 좋다.

$\frac{\infty}{\infty}$꼴

1. 극한값이 0이 아닌 상수일 때의 함수 추론 (차수와 계수 찾기)

다항함수 $f(x)$와 자연수 n에 대하여

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{ax^n+\cdots}=k\,(k\neq 0)$이면, $f(x)=kax^n+\cdots$이다.

따라서, 다항함수 $f(x)$의 차수와 최고차항의 계수를 알 수 있다.

2. 극한값이 0일 때의 함수 추론

다항함수 $f(x)$와 자연수 n에 대하여

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{ax^n+\cdots}=0$이면, $f(x)$는 $(n-1)$차 이하의 다항함수이다.

따라서, 다항함수 $f(x)$의 차수를 알 수 있다.

예시 문항 - 자작 문항

다항함수 $f(x)$에 대하여

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{3x^2+2x+4}=3$일 때, $f(x)$의 최고차항의 차수와 계수는?

▷ $\frac{\infty}{\infty}$꼴이 수렴하므로 차수는 분모와 동일한 이차이며, $\frac{9}{3}=3$이므로 최고차항의 계수는 9이다.

최저차항 간의 계수비와 최고차항 간의 계수비

최저차항 간의 계수비는 최저차항의 차수, 계수를 알려주며 평행이동의 영향을 받지 않는다.

다항함수 $f(x)$와 자연수 n에 대하여 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=k$일 때,

① $k\neq 0$이면 $f(x)$의 최저차항은 kx^n이다. 즉, 최저차항의 계수=극한값

② $k=0$이면 $f(x)$의 최저차항의 차수는 $n+1$이상이다. 즉, 최저차항의 차수>분모 차수

최저차항의 계수비는 평행이동된 형태인 $\lim_{x\to a}\frac{f(x-a)}{(x-a)^n}$로 제시되기도 한다. x축 방향의 평행이동은 함숫값과 극한값에 영향을 주지 않기 때문에, 이를 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}$로 읽어내는 것이 중요하다.

예시 문항 - 2012학년도 6월 모의고사 나형 5번

함수 $f(x)=x^2+ax$가 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=4$를 만족시킬 때, 상수 a의 값을 구하시오.

▷ $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2+ax}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x(x+a)}{x}=a=4$ 즉, 극한값이 0이 아니므로 최저차항 간의 계수비가 $\frac{4}{1}$이다. 앞으로 이러한 극한식이 제시되면 보자마자 a가 4임을 알아봐야 한다.

예시 문항 - 2013학년도 6월 모의고사 나형 9번

함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to2}\frac{f(x-2)}{x^2-2x}=4$일 때, $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$의 값을 구하시오.

▷ $\lim_{x\to2}\frac{f(x-2)}{x^2-2x}$은 $\lim_{x\to2}\left\{\frac{f(x-2)}{x-2}\times\frac{1}{x}\right\}=\frac{1}{2}\lim_{x\to2}\frac{f(x-2)}{x-2}$이다. 그리고 $y=\frac{f(x-2)}{x-2}$는 $y=\frac{f(x)}{x}$를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동시킨 것이므로 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to2}\frac{f(x-2)}{x-2}$이다. ∴ $\frac{1}{2}\lim_{x\to2}\frac{f(x-2)}{x-2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=4$, $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=8$이다.

최고차항 간의 계수비는 다항함수의 차수와 최고차항의 계수를 알려준다.

다항함수 $f(x)$와 자연수 n에 대하여 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{ax^n+\cdots}=k$일 때,

① $k\neq0$이면 $f(x)$는 n차함수이고 최고차항은 kax^n이다. 즉, 최고차항의 계수=극한값×a

② $k=0$이면 $f(x)$의 최고차항의 차수는 $n-1$이상이다. 즉, 최고차항의 차수<분모 차수

계수비 정리 문항: 2011학년도 9월 모의고사 가형 5번

다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=0,\ \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=5$$

를 만족시킨다. 방정식 $f(x)=x$의 한 근이 -2일 때, $f(1)$의 값은?

▷ 1. 최고차항 간의 계수비가 0이므로 $f(x)$는 이차 이하의 다항함수

2. 최저차항 간의 계수비가 5이므로 $f(x)=\cdots+5x$

3. $f(x)$가 일차함수라면 $f(x)=5x$이므로 방정식 $f(x)=x$의 근은 오직 0이다.

4. 3번에 의해 $f(x)$는 이차함수이며, $f(x)=ax^2+5x$이다.

5. 방정식 $f(x)-x=0$의 한 근이 -2이므로 방정식에 대입하면 $f(-2)+2=0$, $4a-8=0$

6. 그러므로 $a=2$이고, $\therefore f(x)=2x^2+5x, f(1)=7$이다.

미분계수로 바라본 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x-a}=k$의 의미와 접선의 방정식을 통한 인수정리

$f(x)$가 다항함수일 때, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x-a}=k$는 함수의 극한의 부정형인 $\frac{0}{0}$꼴로 파악하여 $f(a)=0$임을 얻어내어 함수의 극한값을 계산할 수도 있지만, 이후 배우게 되는 미분계수의 관점을 적용하면 하나의 파생 조건을 더 얻어낼 수 있다.

$$f(a)=0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-0}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)=k$$

따라서 $f'(a)=k$라는 미분계수를 얻어내어 도함수에 대입할 수도 있다. 다만, 이때 $x=a$에서의 접선의 기울기 $f'(a)$와 함숫값 $f(a)$를 모두 알고 있으므로 다항함수 $f(x)$에서 접선의 방정식 $y=f'(a)(x-a)+f(a)$를 빼면 인수정리를 통해 설정해야 하는 미지수를 하나 줄일 수 있다.

예시 문항

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=2$를 만족시킨다면 부정형 추론과 미분계수의 개념을 통해, $f(1)=0$이고 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=2$임을 알 수 있다. 따라서, 함수 $f(x)$의 $x=1$에서의 접선의 방정식은 $f'(1)(x-1)+f(1)=2(x-1)$임을 알 수 있다. 최고차항의 계수가 1이라는 조건과 접선의 방정식을 이용하면 다음과 같은 식을 세울 수 있다.

$$f(x)-\{2(x-1)\}=(x-1)^2(x-k)$$

이를 정리하면 함수 $f(x)$를 $f(x)=(x-1)^2(x-k)+2(x-1)$라고 정리할 수 있다.
이는 함수 $f(x)$를 $f(x)=(x-1)(x^2+ax+b)$로 놓고 극한값에 대입하여 계산하는 것에 비해 미지수를 하나 단축할 수 있다는 장점이 있다.

22 2010학년도 6월 평가원 가형 19번

다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to 0+} \frac{x^3 f\left(\frac{1}{x}\right) - 1}{x^3 + x} = 5, \ \lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{3}$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오. (3점)

23 2009학년도 6월 평가원 가형 4번

다항함수 $g(x)$에 대하여 극한값 $\lim_{x \to 1} \frac{g(x) - 2x}{x - 1}$가 존재한다. 다항함수 $f(x)$가 $f(x) + x - 1 = (x - 1)g(x)$를 만족시킬 때, $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)g(x)}{x^2 - 1}$의 값은? (3점)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

24 2017년도 고2 6월 학력평가 가형 28번

다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값을 구하시오. (4점)

(가) 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-5x}{x^2-4}$의 값이 존재한다.

(나) $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{f(x)}-3x+1\right)$의 값이 존재한다.

25 2017학년도 6월 평가원 나형 18번

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - (x-a)}{f(x) + (x-a)} = \frac{3}{5}$$

을 만족시킨다. 방정식 $f(x) = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $|\alpha - \beta|$의 값은? (단, a는 상수이다.) (4점)

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

26 2024학년도 수능특강

자연수 n과 0이 아닌 상수 a에 대하여 $\lim_{x \to 0} \frac{x^n(\sqrt{x+1}-1)}{\sqrt{x^4+16}-4} = a$일 때, $a+n$의 값을 구하시오. (3점)

27 2015학년도 6월 평가원 A형 29번

다항함수 $f(x)$가

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2}=-11$, $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=-9$를 만족시킬 때, $\lim_{x\to\infty} xf\left(\frac{1}{x}\right)$의 값을 구하시오. (4점)

28 2020학년도 9월 평가원 나형 16번

다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^3} = 1, \quad \lim_{x \to -1} \frac{f(x)}{x+1} = 2$$

를 만족시킨다. $f(1) \leq 12$일 때, $f(2)$의 최댓값은? (4점)

① 27 ② 30 ③ 33 ④ 36 ⑤ 39

29 2024학년도 수능특강

다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x) - x^3}{4x^2 + x} = 1$
(나) $\lim_{x \to -1} \frac{f(x)}{(x+1)^k} = m$인 자연수 $k(k \geq 2)$와 상수 m이 존재한다.

$f(m)$의 값은? (4점)

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

30 2015학년도 6월 평가원 A형 21번

최고차항의 계수가 1인 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $g(1)=0$
>
> (나) $\lim_{x \to n} \frac{f(x)}{g(x)} = (n-1)(n-2)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ 4)$

$g(5)$의 값은? (4점)

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

31 2024학년도 수능특강

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2f(x)-g(x)}{x^3f(x)+g(x)}$의 값은? (4점)

(가) 모든 실수 x에 대하여 $\{x(f(x)\}^2-f(x)g(x)+g(x)-x^2=0$이다 (나) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=2$

① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\dfrac{4}{3}$ ⑤ $\dfrac{5}{3}$

32 2024학년도 수능특강

다음 조건을 만족시키는 두 실수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는? (4점)

(가) $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-a} = b$
(나) $\lim_{x \to 0} \left\| \frac{x^3+ax^2+bx}{x^k} \right\| = \frac{1}{2}$인 자연수 k가 존재한다.

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

33 2024학년도 수능특강

이차함수 $f(x)$와 상수 a가

$$\lim_{x \to 2}\frac{f(x)-f(0)}{x-2}=a,\ \lim_{x \to 0}\frac{2f(x+2)}{f(x)}=\frac{5}{18}a$$

를 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 최솟값이 $\frac{7}{5}$일 때, $f(5)$의 값을 구하시오. (4점)

34 2023학년도 6월 평가원 공통 22번

두 양수 a, $b\,(b>3)$과 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases}(x+3)f(x) & (x<0)\\ (x+a)f(x-b) & (x\geq 0)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킬 때, $g(4)$의 값을 구하시오. (4점)

$\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{\lvert g(x)\rvert+\{g(t)\}^2}-\lvert g(t)\rvert}{(x+3)^2}$의 값이 <u>존재하지 않는</u> 실수 t의 값은 -3과 6뿐이다.

35 2009학년도 수능 가형 11번

다항함수 $f(x)$와 두 자연수 m, n이

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^m}=1,\ \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{x^{m-1}}=a,$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=b,\ \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x^{n-1}}=9$$

를 모두 만족시킬 때, 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은? (단, a, b는 실수이다.) (4점)

[보기]

ㄱ. $m \geq n$

ㄴ. $ab \geq 9$

ㄷ. $f(x)$가 삼차함수이면 $am = bn$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

36 2020학년도 수능 나형 14번

상수항과 계수가 모두 정수인 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 최댓값은? (4점)

(가) $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)g(x)}{x^3} = 2$

(나) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)g(x)}{x^2} = -4$

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

37 2020학년도 6월 평가원 나형 20번

다음 조건을 만족시키는 모든 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 최댓값은? (4점)

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x) - 4x^3 + 3x^2}{x^{n+1} + 1} = 6$, $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 4$인 자연수 n이 존재한다.

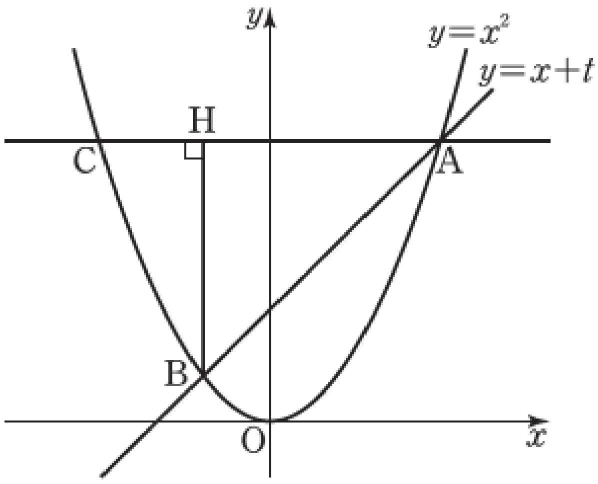
① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

38 2023학년도 9월 평가원 공통 12번

실수 $t(t>0)$에 대하여 직선 $y=x+t$와 곡선 $y=x^2$이 만나는 두 점을 A, B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=x^2$과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C, 점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\lim_{t\to0+}\frac{\overline{\mathrm{AH}}-\overline{\mathrm{CH}}}{t}$의 값은?

(단, 점 A의 x좌표는 양수이다.) (4점)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

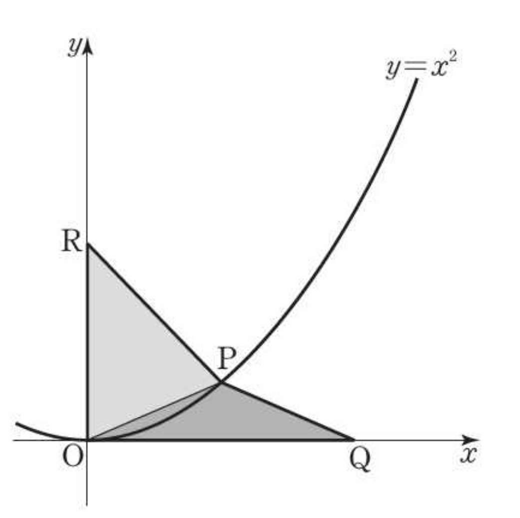


39 2017년도 4월 학력평가 나형 21번

그림과 같이 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ $(t>0)$에 대하여 x축 위의 점 Q, y축 위의 점 R가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 삼각형 POQ는 $\overline{\mathrm{PO}}=\overline{\mathrm{PQ}}$인 이등변삼각형이다.
> (나) 삼각형 PRO는 $\overline{\mathrm{RO}}=\overline{\mathrm{RP}}$인 이등변삼각형이다.

삼각형 POQ와 삼각형 PRO의 넓이를 각각 $S(t)$, $T(t)$라 할 때, $\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{T(t)-S(t)}{t}$의 값은? (단, O는 원점이다.) (4점)



① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

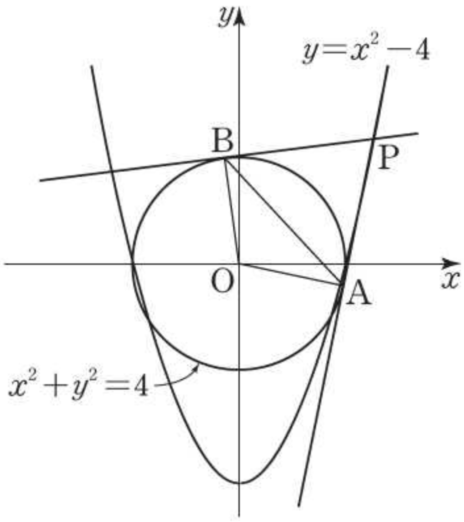
40 2021년도 10월 학력평가 공통 12번

곡선 $y=x^2-4$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ t^2-4)$에서 원 $x^2+y^2=4$에 그은 두 접선의 접점을 각각 A, B라 하자. 삼각형 OAB의 넓이를 $S(t)$, 삼각형 PBA의 넓이를 $T(t)$라 할 때,

$$\lim_{t\to 2+}\frac{T(t)}{(t-2)S(t)}+\lim_{t\to\infty}\frac{T(t)}{(t^4-2)S(t)}$$

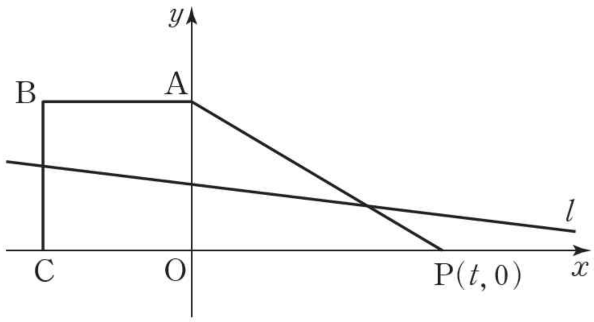
의 값은? (단, O는 원점이고, $t>2$이다.) (4점)

① 1　② $\frac{5}{4}$　③ $\frac{3}{2}$　④ $\frac{7}{4}$　⑤ 2



41 2020년도 3월 학력평가 가형 20번

그림과 같이 좌표평면 위의 네 점 O$(0,\ 0)$, A$(0,\ 2)$, B$(-2,\ 2)$, C$(-2,\ 0)$과 점 P$(t,\ 0)$ $(t>0)$에 대하여 직선 l이 정사각형 OABC의 넓이와 직각삼각형 AOP의 넓이를 각각 이등분한다. 양의 실수 t에 대하여 직선 l의 y절편을 $f(t)$라 할 때, $\lim_{t \to 0+} f(t)$의 값은? (4점)



① $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ ② $2-\sqrt{2}$ ③ $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{2+\sqrt{2}}{3}$