[파급효과] 2024학년도 대학수학능력시험 3월 모의평가 정답표

공통 과목						선택 과목											
						확률과 통계			미적분			기하					
문항 번호	정답	배점	문항 번호	정답	배점	문항 번호	정답	배점	문항 번호	정답	배점	문항 번호	정답	배점			
1	④	2	12	③	4	23	①	2	23	①	2	23	③	2			
2	①	2	13	②	4	24	⑤	3	24	⑤	3	24	④	3			
3	⑤	3	14	④	4	25	②	3	25	②	3	25	⑤	3			
4	③	3	15	⑤	4	26	③	3	26	③	3	26	①	3			
5	②	3	16	4	3	27	④	3	27	④	3	27	②	3			
6	⑤	3	17	32	3	28	①	4	28	④	4	28	④	4			
7	②	3	18	3	3	29	135	4	29	49	4	29	18	4			
8	①	3	19	2	3	30	91	4	30	62	4	30	108	4			
9	①	4	20	40	4												
10	⑤	4	21	7	4												
11	③	4	22	44	4												

[파급효과] 2024학년도 대학수학능력시험 3월 모의평가 수학 영역 해설지

by 김익성T

공통 1번

1. $3^{4+2\sqrt{2}} \times 9^{2-\sqrt{2}} = 9^{2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}} = 3^8$.

공통 2번

1. $f'(x) = x^3 + x^2 + 1$ 이므로 $f'(2) = 13$.

공통 3번

1. θ가 제2사분면의 각이므로 $\sin\theta = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{10}}{10}$에서
   $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

공통 4번

1. $\lim\limits_{x \to -2-} f(x) = -2$, $\lim\limits_{x \to 2-} f(x) = 2$, $f(2) = 1$ 이므로
   $\lim\limits_{x \to -2-} f(x) \times \lim\limits_{x \to 2-} f(x) + f(2) = -3$.

공통 5번

1. $\sum\limits_{n=1}^{5} n = 15$, $\sum\limits_{n=1}^{5} \dfrac{1}{n(n+1)} = \sum\limits_{n=1}^{5} \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right) = \dfrac{5}{6}$ 이므로 $\sum\limits_{n=1}^{5} n \times \sum\limits_{n=1}^{5} \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{25}{2}$.

공통 6번

1. $\displaystyle\int_{-3}^{3} (2x^3 + |x|)dx + \int_{-1}^{1} (6x^3 + |3x|)dx = 2\int_{0}^{3} |x|dx + 2\int_{0}^{1} |3x|dx = 12$.

공통 7번

1. $n^2-11n+24=(n-3)(n-8)$ 이므로 n 의 홀짝 여부와 부호에 따라 $f(n)\ (2\le n\le 10)$ 을 조사하면 다음 표와 같다.

n	$f(n)$
2, 10	2
3, 8	1
4, 6	0
5, 7, 9	1

따라서 $\sum_{n=2}^{10} f(n)=2\times 2+1\times 2+0\times 2+1\times 3=9$.

공통 8번

1. 두 함수 $y=|x|$, $y=-x^2+2$ 의 그래프는 모두 y 축에 대하여 대칭이고, 방정식 $-x^2+2=|x|$ 의 실근은 -1, 1 이므로 색칠된 부분의 넓이는 $2\int_0^1\{-x^2+2-x\}dx=\frac{7}{3}$.

공통 9번

1. 등비수열 $\{a_n\}$ 을 $a_n=a_1\times r^{n-1}$ 이라 하자.
   $S_n=\frac{a_1(r^n-1)}{r-1}=\frac{a_1r^n}{r-1}-\frac{a_1}{r-1}$ 이므로 수열 $\{S_n+2\}$ 가 공비가 3 인 등비수열인 것에서
   $r=3$, $\frac{a_1}{r-1}=\frac{a_1}{2}=2$ 가 성립한다.

2. 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항과 공비는 각각 4, 3 이므로 $a_3=36$.

공통 10번

1. 로그의 밑 변환 공식을 활용하여 밑을 2 로 통일해보면
   $\log_2 x+\frac{21\log_2 x}{\log_2 2x}-16=0 \Leftrightarrow \log_2 x+\frac{21\log_2 x}{1+\log_2 x}-16=0 \Leftrightarrow (\log_2 x)^2+6\log_2 x-16=0$
   $\Leftrightarrow (\log_2 x+8)(\log_2 x-2)=0$ 이므로 주어진 로그방정식의 해는 $x=2^{-8}$ 또는 $x=2^2$.

공통 11번

1. $g(2)=0$ 이므로 열린구간 $(0,\,4)$ 에서 미분가능한 함수 $g(x)$ 는 $x=2$ 에서 최솟값 0 을 갖는다.
   $g'(x)=f(x)|f(x)|$ 에서 $g'(2)=0$ 이므로 $f(2)=0$ 이고, 직선 $y=f(x)$ 의 x 절편은 2 이다.

2. 함수 $g(x)$ 는 직선 $y=f(x)$ 의 기울기의 부호에 따라 다음 두 가지 경우로 분류할 수 있다.

   i) 직선 $y=f(x)$ 의 기울기가 음수일 때

$$g(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_2^x \{f(t)\}^2dt & (0\le x<2)\\ \displaystyle\int_2^x -\{f(t)\}^2dt & (2\le x\le 4)\end{cases},\quad g'(x)=\begin{cases}\{f(x)\}^2 & (0\le x<2)\\ -\{f(x)\}^2 & (2\le x\le 4)\end{cases}$$

   이고, 닫힌구간 $[0,\,4]$ 의 모든 실수 x 에 대하여 $\{f(x)\}^2\ge 0$ 이므로
   열린구간 $(0,\,2)$ 에서 함수 $g(x)$ 는 증가하고, 열린구간 $(2,\,4)$ 에서 함수 $g(x)$ 는 감소한다.
   따라서 닫힌구간 $[0,\,4]$ 의 모든 실수 x 에 대하여 $g(x)\le 0$ 이고, 이때 함수 $g(x)$ 는
   최댓값 24 를 가질 수 없으며 $g(2)=0$ 이 최댓값이다.

   ii) 직선 $y=f(x)$ 의 기울기가 양수일 때

$$g(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_2^x -\{f(t)\}^2dt & (0\le x<2)\\ \displaystyle\int_2^x \{f(t)\}^2dt & (2\le x\le 4)\end{cases},\quad g'(x)=\begin{cases}-\{f(x)\}^2 & (0\le x<2)\\ \{f(x)\}^2 & (2\le x\le 4)\end{cases}$$

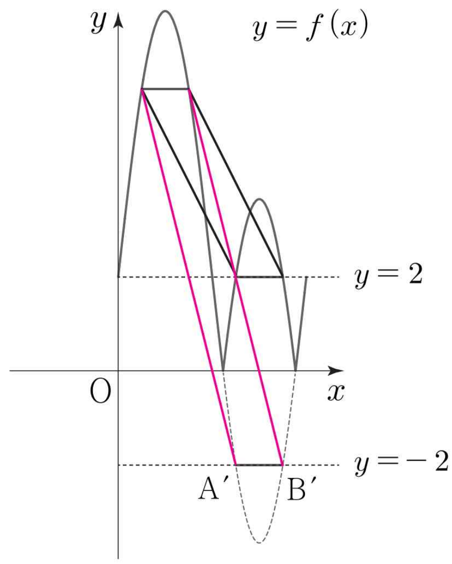
   이고, 닫힌구간 $[0,\,4]$ 의 모든 실수 x 에 대하여 $\{f(x)\}^2\ge 0$ 이므로
   열린구간 $(0,\,2)$ 에서 함수 $g(x)$ 는 감소하고, 열린구간 $(2,\,4)$ 에서 함수 $g(x)$ 는 증가한다.
   따라서 닫힌구간 $[0,\,4]$ 의 모든 실수 x 에 대하여 $g(x)\ge 0$ 이고, 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 과
   $x=4$ 에서 각각 최댓값 24 를 갖는다.

   $g(0)=\displaystyle\int_2^0\{f(t)\}^2dt=\int_2^0 m^2(t-2)^2dt=\frac{8m^2}{3}=24$ 에서 $m=3$ 이고, $f(3)=3$.

공통 12번

1. 두 점 A, B를 x축에 대하여 대칭이동시킨 점을 각각 A', B'이라 하면,

   두 점 A', B'은 함수 $y = a\sin\frac{\pi x}{2} + 2\ (0 \le x \le 4)$의 그래프와 직선 $y = -2$의 교점이다.



2. 사각형 ABCD가 평행사변형이므로 사각형 $\mathrm{A'B'CD}$도 평행사변형이고,
   $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{A'B'}} = \overline{\mathrm{CD}}$이므로 삼각함수의 그래프의 대칭성에 의하여
   직선 $\mathrm{A'B'}$과 직선 AB 사이의 거리, 직선 CD와 직선 AB 사이의 거리는 서로 같다.
   그런데 직선 AB와 직선 $\mathrm{A'B'}$ 사이의 거리는 4이므로, 직선 CD와 직선 AB 사이의 거리도 4이고, 평행사변형 ABCD의 넓이는 $4 \times \overline{\mathrm{AB}}$로 계산할 수 있다.

   $4\overline{\mathrm{AB}} = 4$에서 $\overline{\mathrm{AB}} = 1$이고, $\overline{\mathrm{CD}} = 1$이다.

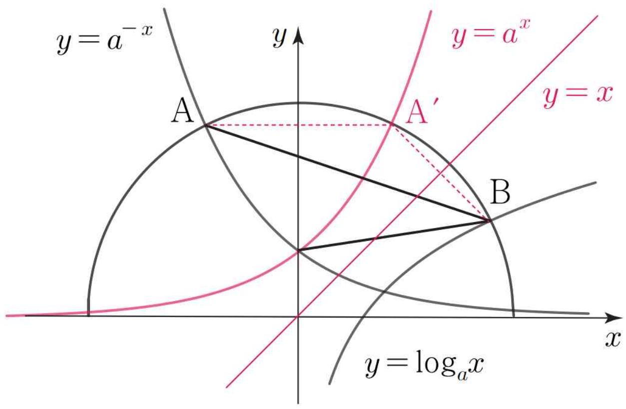
   두 점 C, D는 직선 $x = 1$에 대하여 대칭이므로 점 C의 좌표는 $\mathrm{C}\left(\frac{1}{2}, 6\right)$이고, 이를

   함수 $y = f(x)$에 대입하면 $6 = f\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow a = 4\sqrt{2}$.

공통 13번

1. 조건 (가)에 의하여 점 B의 좌표를 $\mathrm{B}(6k,\ k+1)\ (k>0)$이라 할 수 있다.
원점을 중심으로 하고 곡선 $y=a^{-x}$과 제2사분면에서 교점을 갖는 반원은 y축 대칭인 도형이고,
점 A를 y축에 대하여 대칭이동시킨 점을 A'이라 하면 점 A'은 곡선 $y=a^{x}$ 위의 점이다.

한편, 반원의 $x\geq 0$, $y\geq 0$인 부분은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고,
곡선 $y=a^{x}$과 곡선 $y=\log_a x$도 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로, 점 A'과 점 B도
직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 따라서 직선 $\mathrm{A}'\mathrm{B}$의 기울기는 -1이고, 점 A'과 점 A의
좌표는 각각 $\mathrm{A}'(k+1,\ 6k)$, $\mathrm{A}(-k-1,\ 6k)$이다.



2. 조건 (나)에 의하여 $-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1-5k}{7k+1} \Leftrightarrow k=\dfrac{1}{2}$이므로 점 B의 좌표는 $\mathrm{B}\left(3,\ \dfrac{3}{2}\right)$이고,
곡선 $y=\log_a x$가 점 B를 지나므로 $a=3^{\frac{2}{3}}$.

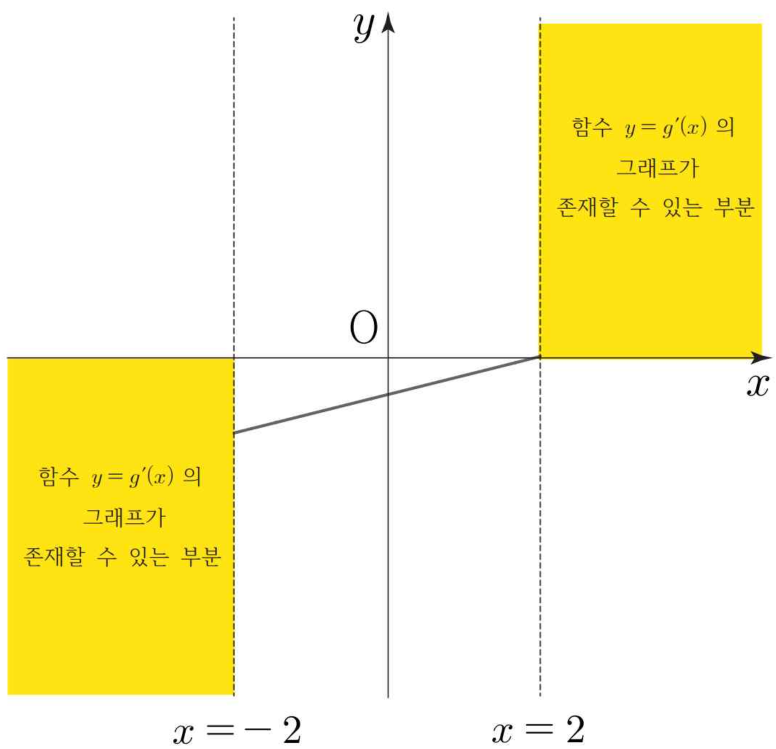
공통 14번

1. 함수 $g'(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 2-} g'(x) = \lim_{x\to 2+} g'(x) = g'(2) \Leftrightarrow f(2) = (4+2a+b)f(2),$$

$$\lim_{x\to -2-} g'(x) = \lim_{x\to -2+} g'(x) = g'(-2) \Leftrightarrow f(-2) = (4-2a+b)f(-2)$$ 가 성립한다.

$f(2)=0$ 이면 $f(-2)\neq 0$ 이므로 $4-2a+b=1 \Leftrightarrow b=2a-3$ 이다.
직선 $y=f(x)$ 의 기울기는 양수 또는 음수인데, 조건 (가)에 의하여 직선 $y=f(x)$ 의 기울기는 음수가 될 수 없음을 알 수 있다.



따라서 구간 $(-2, 2)$ 에서 $g'(x)<0$ 이고, 이 구간에서 함수 $g(x)$ 는 감소하므로 선지 ㄱ.은 참.

2. $f(-2)=0$ 이면 $f(2)\neq 0$ 이므로 $4+2a+b=1 \Leftrightarrow b=-2a-3$ 이다.
직선 $y=f(x)$ 의 기울기는 양수 또는 음수인데, 조건 (나)에 의하여 직선 $y=f(x)$ 의 기울기는 음수가 될 수 없음을 알 수 있다.

따라서 $x=-2$ 의 좌우에서 함수 $g'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 변하므로,
함수 $g(x)$ 는 $x=-2$ 에서 극솟값을 갖는다. 선지 ㄴ.은 거짓.

3. $f(2)=0$ 이므로 $f(x)=k(x-2)\ (k>0)$ 이고, $f(-2)=-4k$ 이므로 $a=-4k$,
$b=2a-3=-8k-3$ 에서 함수 $g'(x)$ 는 다음과 같다.

$$g'(x)=\begin{cases}(x^2-4kx-8k-3)k(x-2) & (|x|>2)\\ k(x-2) & (|x|\le 2)\end{cases}$$

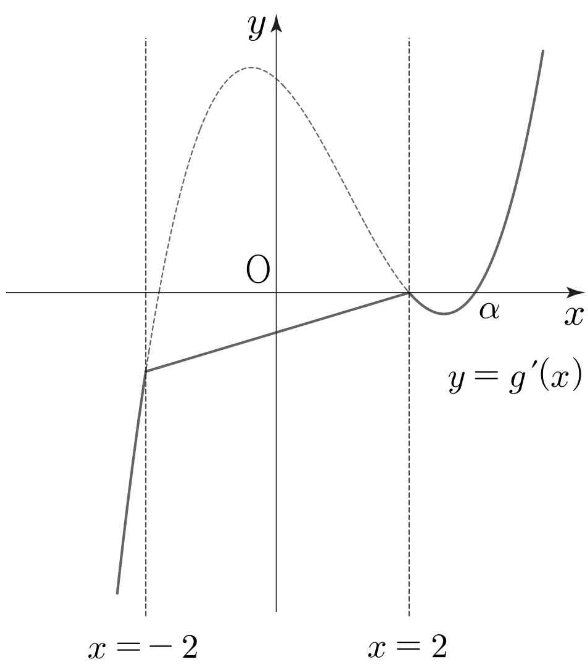
이차방정식 $x^2-4kx-8k-3=0$ 의 판별식 $\dfrac{D}{4}=4k^2+8k+3=(2k+3)(2k+1)$ 이므로

임의의 양수 k 에 대하여 $\dfrac{D}{4}>0$ 이다.

따라서 이차방정식 $x^2-4kx-8k-3=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

계속해서 이차방정식 $x^2-4kx-8k-3=0$ 을 관찰해 보자.
이차함수 $h(x)=x^2-4kx-8k-3$ 의 대칭축은 직선 $x=2k$ 이고, $h(-2)=1$ 이므로
이차방정식 $x^2-4kx-8k-3=0$ 의 서로 다른 두 실근은 각각 -2 보다 크다.

그런데 이차방정식 $x^2-4kx-8k-3=0$ 이 2 보다 큰 실근 α 를 갖게 되면,
구간 $(2,\alpha)$ 에서 $g'(x)<0$ 이므로 조건 (가)에 모순이다.

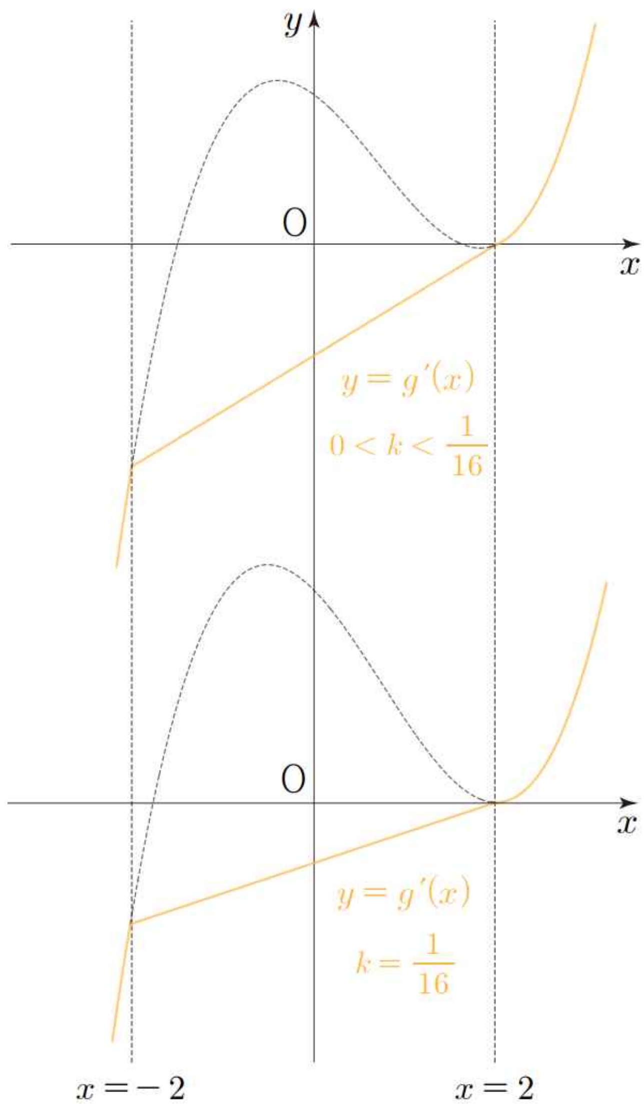


따라서 이차방정식 $x^2-4kx-8k-3=0$ 은 2 보다 작거나 같은 양의 실근을 갖는다.

4. 이차방정식 $x^2-4kx-8k-3=0$ 은 2 보다 작거나 같은 양의 실근을 갖는다는 것에서

$h(2)=1-16k \geq 0 \Leftrightarrow 0<k \leq \dfrac{1}{16}$ 임을 알 수 있고, $f(4)=2k$ 이므로 $0<f(4) \leq \dfrac{1}{8}$ 이다.

따라서 $f(4)$ 의 최댓값은 $\dfrac{1}{8}$ 이므로 선지 ㄷ.은 참.



공통 15번

1. 수열 $\{a_n\}$이 정의되는 방식을 정리해보면 다음 표와 같다.

a_n 의 범위	$a_n = 0$	$a_n \leq -1$	$-1 < a_n < 0$	$0 < a_n < 1$	$a_n \geq 1$
a_{n+1}	k	$-2a_n$	0	$2a_n$	0

그런데 $0 < a_1 \leq k < 1$ 이므로 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} k & (a_n = 0) \\ 2a_n & (0 < a_n < 1) \\ 0 & (a_n \geq 1) \end{cases}$$

을 만족시킨다.

한편, $a_{10} = 0$ 이면서 a_1 의 값이 최소가 될 때는
$a_2 = 2a_1 \,(0 < a_1 < 1)$, $a_3 = 2a_2 = 2^2 a_1 \left(0 < a_1 < 2^{-1}\right)$, $a_4 = 2a_3 = 2^3 a_1 \left(0 < a_1 < 2^{-2}\right)$,
$\cdots$, $a_9 = 2a_8 = 2^8 a_1 \left(0 < a_1 < 2^{-7}\right)$ 이고,
$a_9 = 256a_1 \geq 1 \Rightarrow a_1 \geq 2^{-8}$ 이다.

따라서 $2^{-8} \leq a_1 < 2^{-7}$ 이므로 $m_1 = 2^{-8}$.

2. $a_{10} = 0$ 이므로 $a_{11} = k$ 이고, k 의 값의 범위에 따라 $a_n \,(n \geq 12)$ 가 결정됨을 알 수 있다.

임의의 자연수 i 에 대하여

$\dfrac{1}{2} \leq k < 1$ 이면 $a_{12} = 2k$, $a_{13} = 0$ 이고, (①) 에 의하여 $a_{3i+7} = 0$, $a_{3i+8} = k$, $a_{3i+9} = 2k$ 임을 알 수 있고, $a_{i+9} = a_{i+12}$ 가 성립한다.

$\dfrac{1}{4} \leq k < \dfrac{1}{2}$ 이면 $a_{12} = 2k$, $a_{13} = 4k$, $a_{14} = 0$ 이고, (①) 에 의하여 $a_{4i+6} = 0$, $a_{4i+7} = k$, $a_{4i+8} = 2k$, $a_{4i+9} = 4k$ 임을 알 수 있고, $a_{i+9} = a_{i+13}$ 이 성립한다.
따라서 이때 $a_{10} = a_{30} = 0$ 이다.

이와 같은 논리를 반복하면 $a_{10} = a_{30} = 0$ 이 되도록 하는 수열 $\{a_n\}$은 임의의 자연수 i 에 대하여 $a_{i+9} = a_{i+9+m}$ 을 만족시키고, m 으로 가능한 값은 $30 - 10 = 20$ 의 양의 약수 중 1 과 2 가 아닌 자연수임을 알 수 있다.

즉, 수열 $\{a_n\}$의 10번째 항부터는 주기가 20의 양의 약수 중 1과 2가 아닌 자연수인 주기수열을 이루고, m의 값이 커질수록 k의 최솟값은 작아짐을 예상할 수 있다.

(①)에 착안하여 m의 값에 따른 k의 범위를 정리하면 다음 표와 같다. ⋯ (②)

m	k의 범위
4	$2^{-2} \le k < 2^{-1}$
5	$2^{-3} \le k < 2^{-2}$
10	$2^{-8} \le k < 2^{-7}$
20	$2^{-18} \le k < 2^{-17}$

$a_1 \le k$이므로 (②)에서 m으로 가능한 값은 4, 5, 10임을 알 수 있고,
이 중 k가 가장 작아질 때는 $m=10$일 때이다. 따라서 $m_2 = 2^{-8}$이고, $\log_2(m_1 m_2) = -16$.

공통 16번

1. $72 = \frac{1}{2} \times 6^2 \times k \Leftrightarrow k = 4$.

공통 17번

1. $\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - a}{x+2} = \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)} = \lim_{x \to -2}(x-2) = -4$이므로 $a=4$, $b=-4$.

공통 18번

1. 주어진 등식을 동치변형하면 $a_{10} - a_9 + a_2 - a_1 = 6 = 2d$에서 $d=3$.

공통 19번

1. 주어진 항등식의 양변에 $x=2$를 대입하면 $f(2)=0$이므로 이차함수 $f(x)$는 $(x-2)$를 인수로 갖고, 이차함수 $f(x)$가 $x=3$에서 최솟값을 가지므로 $f(x) = k(x-2)(x-4)$ $(k>0)$이라 할 수 있다.

2. 함수 $g(x)$는

$$g(x) = \begin{cases} k(x-4) & (x \neq 2) \\ -2k & (x=2) \end{cases}$$

이고, $g'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{k(x-4) - (-2k)}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{k(x-2)}{x-2} = k = 2$이다.

함수 $(1-x)g(x)$의 $x=2$에서의 미분계수는 $-g(2) - g'(2) = -(-4) - 2 = 2$.

공통 20번

1. 두 점 P, Q가 출발한 이후 한 번만 만난다는 것은 양수 s에 대하여 시각 $t=0$에서 $t=s$까지의 두 점 P, Q의 위치의 변화량이 같은 s가 오직 하나 존재한다는 것이다.

   두 점 P, Q의 시각 $t=0$에서 $t=s$까지의 위치의 변화량은 각각 $\int_0^s v_1(t)dt$, $\int_0^s v_2(t)dt$ 이므로

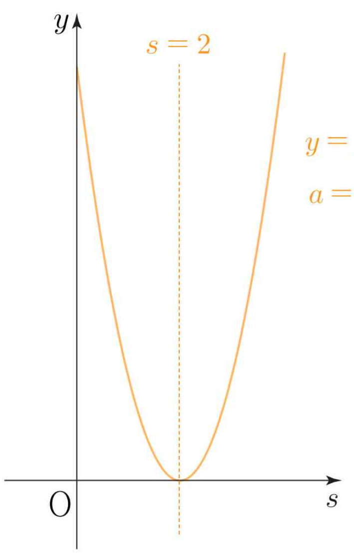
   $\int_0^s v_1(t)dt = \int_0^s v_2(t)dt \Leftrightarrow \int_0^s \{v_1(t)-v_2(t)\}dt = 0 \Leftrightarrow \int_0^s \{6t^2+(2a-8)t-2a\}dt = 0$

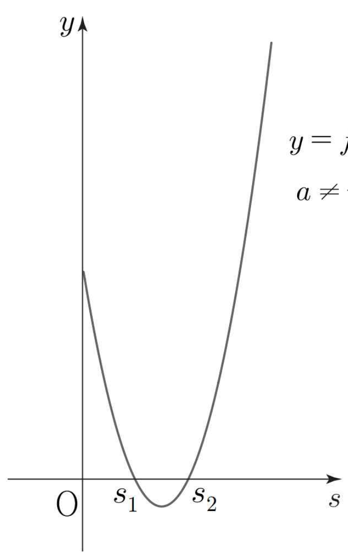
   $\Leftrightarrow s\{2s^2+(a-4)s-2a\}=0 \cdots$ (①)인 양수 s가 오직 하나 존재하고, 그 s가 t_1이다.

2. s에 대한 이차함수 $f(s)=2s^2+(a-4)s-2a$의 그래프의 대칭축은 직선 $s=\dfrac{4-a}{4}>0$이고,

   $f(0)=-2a>0$인데,

   이차방정식 $2s^2+(a-4)s-2a=0$의 판별식 $D=(a-4)^2+16a=(a+4)^2 \geq 0$ $(a<0)$이므로 (①)을 만족시키는 양수 s의 값은 $a=-4$일 때 $s=2$, a가 -4가 아닌 음수일 때 s_1, s_2로 두 개 존재한다.





   따라서 $a=-4$, $t_1=2$이고 구하는 값은 $\int_0^2 |v_2(t)|dt = \int_0^2 (16t+4)dt = 40$.

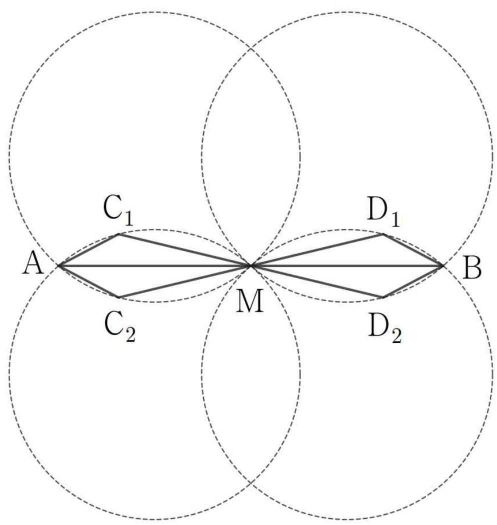
공통 21번

1. $\overline{\mathrm{AM}}=\overline{\mathrm{BM}}=2\sqrt{2}$ 이고, 삼각형 ACM 의 외접원의 반지름의 길이와 삼각형 BDM 의 외접원의 반지름의 길이가 서로 같으므로, 삼각형 ACM 과 삼각형 BDM 에서 사인법칙에 의하여 $\dfrac{\overline{\mathrm{AM}}}{\sin(\angle\mathrm{ACM})}=\dfrac{\overline{\mathrm{BM}}}{\sin(\angle\mathrm{BDM})}=\dfrac{8\sqrt{14}}{7}\cdots$(①) 이 성립한다.
   $0<\angle\mathrm{BDM}<\dfrac{\pi}{2}<\angle\mathrm{ACM}<\pi$ 인 것에 착안하면 (①) 에 의하여 $\angle\mathrm{BDM}+\angle\mathrm{ACM}=\pi$ 임을 알 수 있고, $\sin(\angle\mathrm{ACM})=\sin(\angle\mathrm{BDM})=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ 이다.

2. $\overline{\mathrm{CM}}=\overline{\mathrm{DM}}=x$, $\overline{\mathrm{BD}}=y$ 라 하자.
   삼각형 ACM 에서 코사인법칙에 의하여 $(2\sqrt{2})^2=1^2+x^2-2x\cos(\angle\mathrm{ACM})\Leftrightarrow x=2$ 이고,
   삼각형 BDM 에서 코사인법칙에 의하여 $(2\sqrt{2})^2=2^2+y^2-4y\cos(\angle\mathrm{BDM})\Leftrightarrow y=4$ 이다.

   따라서 삼각형 BDM 의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times x\times y\times\sin(\angle\mathrm{BDM})=\sqrt{7}$.

   ※ $\overline{\mathrm{BD}}>1$ 이 아닐 때, 문제의 조건을 만족시키는 다음 그림과 같은 상황도 존재한다.



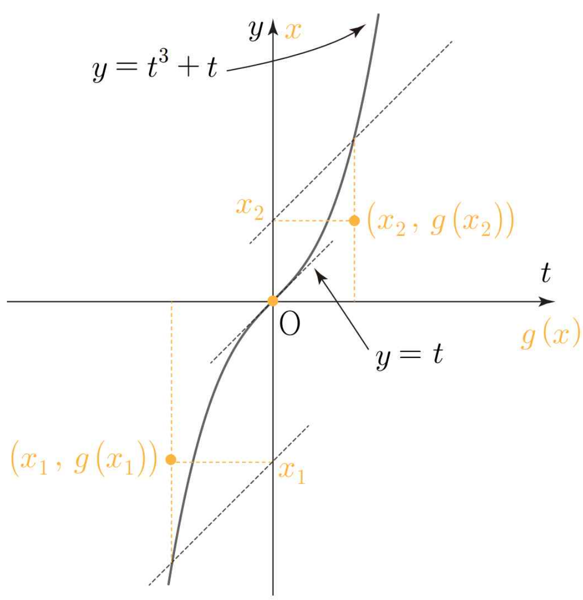
$\overline{\mathrm{BD}}=1$

공통 22번

1. 함수 $g(x)$는 실수 x에 대하여 t에 대한 방정식 $f(t)=t+x$의 실근으로 생각할 수 있다.
여기서 $t+x$를 기울기가 1이고 y절편이 x인 직선 $y=t+x$로 생각하면,
$f(0)=f'(0)=1$인 삼차함수 $f(t)$의 그래프와 직선 $y=t+x$의 위치 관계에 따라
조건을 만족시키는 상황을 찾는 것이 합리적이다.
이때 $f(0)=0$, $f'(0)=1$임에 착안하면 곡선 $y=f(t)$에 접하는 기울기가 1인 직선이 반드시 존재하고, 그 접점의 좌표는 원점임을 알 수 있다. 따라서 곡선 $y=f(t)$와 직선 $y=t$는 반드시 원점에서 접한다.

$\lim_{x\to a+} g(x)=g(a)$이면 $\lim_{x\to a+} g(x)+\lim_{x\to a-} g(x)=2g(a) \Leftrightarrow \lim_{x\to a-} g(x)=g(a)$이므로
함수 $g(x)$는 $x=a$에서 연속이고,
$\lim_{x\to a-} g(x)=g(a)$이면 $\lim_{x\to a+} g(x)+\lim_{x\to a-} g(x)=2g(a) \Leftrightarrow \lim_{x\to a+} g(x)=g(a)$이므로
함수 $g(x)$는 $x=a$에서 연속이다.
또한 $\lim_{x\to a+} g(x)-\lim_{x\to a-} g(x)=2\sqrt{3}$이므로 $\lim_{x\to a+} g(x)\neq\lim_{x\to a-} g(x)$임을 알 수 있다.
따라서 함수 $g(x)$는 $\lim_{x\to a+} g(x)\neq g(a)\neq\lim_{x\to a-} g(x)$ $\cdots$ (①)을 만족시키면서 $x=a$에서만 불연속이다.

2. 모든 실수 t에 대하여 $f'(t)\geq 1$일 때, $f'(0)=1$이므로 함수 $f'(t)$가 $t=0$에서 최솟값을 갖고, 임의의 실수 x에 대하여 t에 대한 방정식 $f(t)=t+x$의 실근은 유일하게 결정되므로 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
이는 임의의 실수 x에 대하여 t에 대한 방정식 $f(t)-t=t^3=x$의 실근이 오직 하나씩만 존재하고, x가 증가함에 따라 방정식의 실근도 연속적으로 증가하는 것과 동치이다.

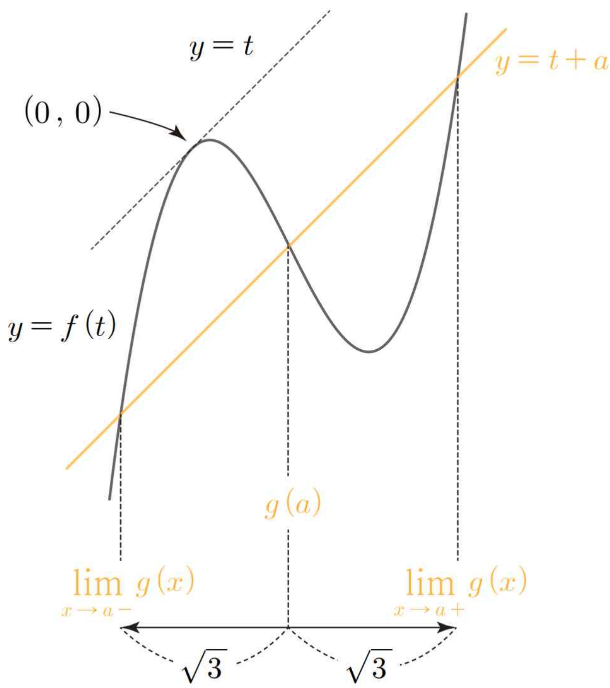


따라서 함수 $f'(t)$의 최솟값은 1보다 작다.

3. 함수 $f'(t)$의 최솟값이 1보다 작을 때, 이차함수의 그래프의 대칭성에 의하여 직선 $y=t$가 곡선 $y=f(t)$에 접하는 상황은 $f'(t)=1$인 $t\,(t>0)$이 존재할 때와 $f'(t)=1$인 $t\,(t<0)$이 존재할 때로 두 가지 경우가 있다.

i) $f'(t)=1$인 $t\,(t>0)$이 존재할 때

$g(a)=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to a+} g(x)+\lim_{x\to a-} g(x)\right)$인 것과 (①)에 착안하면 곡선 $y=f(t)$와 직선 $y=t+a$의 위치 관계는 다음 그림과 같다.



함수 $f(t)-(t+a)$를 생각하자.
인수정리에 의하여 $f(t)-(t+a)=\{t-(g(a)-\sqrt{3})\}(t-g(a))\{t-(g(a)+\sqrt{3})\}$이고,
함수 $f(t)-(t+a)$는 $t=0$에서 극댓값을 가지므로 삼차함수의 비율 관계에 의하여
$g(a)=1$임을 알 수 있다. 따라서 $f(t)=(t^2-2t-2)(t-1)+t+a$이고, $f(0)=0$에서
$a=-2$이다. 따라서 이때 $f(a)=f(-2)=-22$이다.

ii) $f'(t)=1$인 $t\,(t<0)$이 존재할 때

i)의 논리와 동일하게 함수 $f(t)$와 a를 구하면 $f(t)=(t^2+2t-2)(t+1)+t+2$, $a=2$이므로 이때 $f(a)=f(2)=22$이다.

$\alpha=22$, $\beta=-22$이므로 $\alpha-\beta=44$.

확률과 통계 23번

1. ${}_3\Pi_2 + {}_2\Pi_2 = 3^2 + 2^2 = 13$.

확률과 통계 24번

1. ㄱ이 한쪽 끝에만 있도록 6개의 자음을 나열하는 경우는
ㄱ이 왼쪽 끝에만 있을 때와, ㄱ이 오른쪽 끝에만 있도록 나열하는 경우이다.

ㄱ이 왼쪽 끝에만 있을 때, 오른쪽 끝에 ㄱ이 있을 수 없으므로, 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1 \times \dfrac{4!}{2!} = 36$,

ㄱ이 오른쪽 끝에만 있을 때, 왼쪽 끝에 ㄱ이 있을 수 없으므로, 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1 \times \dfrac{4!}{2!} = 36$.

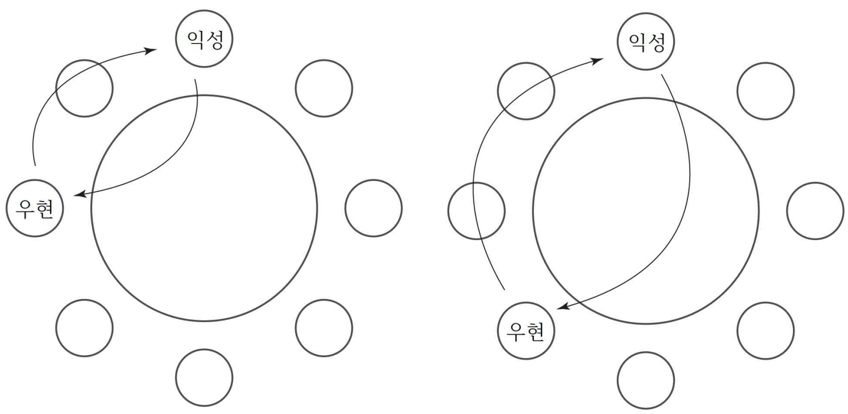
확률과 통계 25번

1. 주어진 부등식을 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는
${}_4\mathrm{H}_3 + {}_4\mathrm{H}_2 + {}_4\mathrm{H}_1 + {}_4\mathrm{H}_0 = {}_6\mathrm{C}_3 + {}_5\mathrm{C}_2 + {}_4\mathrm{C}_1 + {}_4\mathrm{C}_0 = {}_6\mathrm{C}_3 + {}_5\mathrm{C}_2 + {}_5\mathrm{C}_1 = {}_6\mathrm{C}_3 + {}_6\mathrm{C}_2 = {}_7\mathrm{C}_3 = 35$.

※ $n > r$인 두 자연수 n, r에 대하여 ${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_r$가 성립한다.

확률과 통계 26번

1. 익성이와 우현이의 위치 관계로 가능한 경우는 다음과 같다.



따라서 조건을 만족시키도록 8명을 의자에 앉히는 경우의 수는 $4 \times 6! = 2880$.

확률과 통계 27번

1. 3개의 주머니에 들어가는 축구공의 개수를 각각 n_1, n_2, n_3이라 하면,
구하는 값은 $n_1 + n_2 + n_3 = 7$을 만족시키는 음이 아닌 정수 n_1, n_2, n_3의 모든 순서쌍 (n_1, n_2, n_3)의 개수에서 $n_1 + n_2 + n_3 = 7$을 만족시키는 자연수 n_1, n_2, n_3의 모든 순서쌍의 개수를 뺀 것과 같다.
따라서 구하는 값은 ${}_3\mathrm{H}_7 - {}_3\mathrm{H}_4 = {}_9\mathrm{C}_2 - {}_6\mathrm{C}_2 = 21$.

확률과 통계 28번

1. 조건 (가)와 조건 (나)는 서로 배반인 경우를 서술하고 있다.
   따라서 구하는 경우의 수는 $n(\text{가} \cup \text{나}) = n(\text{가}) + n(\text{나})$ 이다.

2. $n(\text{가})$ 를 구해보자.
   익성이가 쿠키를 받는 개수는 1 부터 5 까지의 자연수가 가능한데, 익성이가 쿠키를 4 개 받는 경우와, 5 개 받는 경우는 불가능함을 알 수 있다.
   따라서 익성이가 받는 쿠키의 개수 a 에 대한 쿠키를 받는 사람의 수 b 와 그 경우의 수 c 를 정리하면 다음 표와 같다.

a	b	c
1	4	${}_5\mathrm{C}_1 \times \left[3^4 - \left\{3 + {}_3\mathrm{C}_2 \times \left(2^4 - 2\right)\right\}\right] = 180$
2	3	${}_5\mathrm{C}_2 \times {}_3\mathrm{C}_2 \times \left(2^3 - 2\right) = 180$
3	2	${}_5\mathrm{C}_3 \times {}_3\mathrm{C}_1 = 30$

   따라서 $n(\text{가}) = 390$ 이다.

3. $n(\text{나})$ 를 구해보자.
   익성이가 쿠키를 받지 않을 때, 쿠키를 받는 사람의 수와 쿠키를 받지 않는 사람의 수의 차가 2 가 되는 경우는 쿠키를 받는 사람의 수가 1 일 때와 3 일 때임을 알 수 있다.

   따라서 쿠키를 받는 사람의 수 d 에 대한 쿠키를 받지 않는 사람의 수 e 와 그 경우의 수 f 를 정리하면 다음 표와 같다.

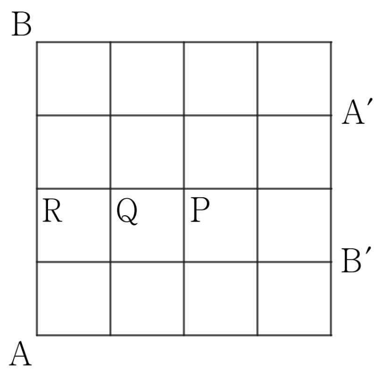
d	e	f
1	3	$3^5 - \left\{3 + {}_3\mathrm{C}_2 \times \left(2^5 - 2\right)\right\} = 150$
3	1	${}_3\mathrm{C}_2 = 3$

   따라서 $n(\text{나}) = 153$ 이고, 구하는 경우의 수는 543 .

   ※ 결국 문제의 상황은 정의역이 $\{\text{쿠키}_1, \text{쿠키}_2, \text{쿠키}_3, \text{쿠키}_4, \text{쿠키}_5\}$, 공역이 $\{\text{익성}, \text{사람}_1, \text{사람}_2, \text{사람}_3\}$ 인 함수 중 조건을 만족시키는 함수의 개수를 구하는 것과 같다.
   서로 다른 것에서 서로 다른 것으로 대응시키는 상황은 중복순열을 사용하는 상황임을 알고 있어야 한다.

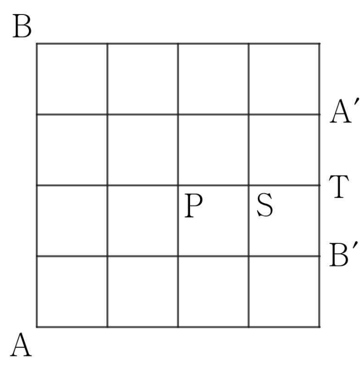
확률과 통계 29번

1. 익성이와 현준이가 각각 A 지점과 B 지점에서 출발한 후 같은 속력으로 P 지점까지 최단 거리로 이동하는 모든 경우 중에서 P 지점에서만 만나는 경우의 수는 $\left(\frac{4!}{2!2!}\right)^2-\left(\frac{3!}{2!}\right)^2=27$ 이다.



($\left(\frac{4!}{2!2!}\right)^2$ 가지의 경로 중에서 $\left(\frac{3!}{2!}\right)^2$ 가지의 경로는 위 그림의 Q 지점 또는 R 지점에서 만나는 경로이므로, 빼주어야 한다.)

2. 익성이와 현준이가 각각 P 지점에서 A'지점, B'지점까지 최단 거리로 이동할 때, 서로 다른 도로를 통하여 이동하는 경우의 수는 $\left(\frac{3!}{2!}\right)^2-2^2=5$ 이다.



($\left(\frac{3!}{2!}\right)^2$ 가지의 경로 중에서 2^2 가지의 경로는 위 그림의 S 지점 또는 T 지점에서 만나는 경로이므로, 빼주어야 한다.)

따라서 구하는 경우의 수는 $27\times5=135$.

확률과 통계 30번

1. 조건 (가)에 의하여 다음 세 가지 경우를 생각할 수 있다.

   ⅰ) $f(1)<f(6)$ 이고, $f(2)\geq f(5)$, $f(3)\geq f(4)$ 인 경우

   ⅱ) $f(2)<f(5)$ 이고, $f(1)\geq f(6)$, $f(3)\geq f(4)$ 인 경우

   ⅲ) $f(3)<f(4)$ 이고, $f(1)\geq f(6)$, $f(2)\geq f(5)$ 인 경우

   각 경우에서 조건 (나)를 만족시키는 경우의 수를 구해보자.

2. ⅰ) 에서 조건 (나)에 의하여

   ⅰ-ⅰ) $f(1)+f(6)>8$ 이고, $f(2)+f(5)\leq 8$, $f(3)+f(4)\leq 8$ 인 경우

   ⅰ-ⅱ) $f(2)+f(5)>8$ 이고, $f(1)+f(6)\leq 8$, $f(3)+f(4)\leq 8$ 인 경우

   ⅰ-ⅲ) $f(3)+f(4)>8$ 이고, $f(1)+f(6)\leq 8$, $f(2)+f(5)\leq 8$ 인 경우

   가 가능함을 알 수 있다.

   ⅰ-ⅰ)

   $f(1)=4$, $f(6)=5$ 이고, 조건을 만족시키도록 $f(2)$ 와 $f(5)$ 를 결정하는 경우의 수와 $f(3)$, $f(4)$ 를 결정하는 경우의 수는 모두 ${}_5\mathrm{H}_2-2=13$ 이다.
   따라서 이때 함수 f 의 개수는 $1\times 13\times 13=169$ 이다.

   ⅰ-ⅱ)

   $f(2)=5$, $f(5)=4$ 이거나 $f(2)=f(5)=5$ 이고. 조건을 만족시키도록 $f(1)$ 과 $f(6)$ 을 결정하는 경우의 수와 $f(3)$, $f(4)$ 를 결정하는 경우의 수는 각각 ${}_5\mathrm{C}_2-1=9$, ${}_5\mathrm{H}_2-2=13$ 이다.
   따라서 이때 함수 f 의 개수는 $9\times 2\times 13=234$ 이다.

   ⅰ-ⅲ)

   $f(3)=5$, $f(4)=4$ 이거나 $f(3)=f(4)=5$ 이고, 조건을 만족시키도록 $f(1)$ 과 $f(6)$ 을 결정하는 경우의 수와 $f(2)$, $f(5)$ 를 결정하는 경우의 수는 각각 ${}_5\mathrm{C}_2-1=9$, ${}_5\mathrm{H}_2-2=13$ 이다.
   따라서 이때 함수 f 의 개수는 $9\times 13\times 2=234$ 이다.

3. ⅱ) 와 ⅲ) 에서도 각각 ⅰ) 과 같이 경우를 분류하여 함수 f의 개수를 구해야 하는데, $(f(1),\, f(6))$과 $(f(2),\, f(5))$, $(f(3),\, f(4))$는 각각 서로 독립적으로 정의되고 ⅱ) 와 ⅲ) 에서 $(f(1),\, f(6))$과 $(f(2),\, f(5))$, $(f(3),\, f(4))$를 결정하는 경우의 수는 ⅰ) 에서의 경우의 수와 순서만 바뀐 형태임을 추론할 수 있다.
따라서 ⅱ) 와 ⅲ) 에서 함수 f의 개수는 모두 $169+234+234=637$임을 알 수 있고,
$n=3\times 637$에서 $\dfrac{n}{21}=91$.

미적분 23번

1. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{9}{4}\right)^n+2\times 3^n}{3^{n-1}+2^n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{3}{4}\right)^n+2}{\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}=6$.

미적분 24번

1. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+12n}-an\right)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{(4-a^2)n^2+12n}{\sqrt{4n^2+12n}+an}$ 이 수렴하기 위해서는

   $a^2=4 \Leftrightarrow a=2$ 이어야 한다.

   따라서 $b=\lim_{n\to\infty}\dfrac{12n}{\sqrt{4n^2+12n}+2n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{12}{\sqrt{4+\dfrac{12}{n}}+2}=3$.

미적분 25번

1. $c_n=a_n+2b_n$ 이라 하자.

   $\dfrac{c_n}{a_n}=1+\dfrac{2b_n}{a_n}$ 이고, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{c_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(c_n\times\dfrac{1}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty}c_n\times\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n}=1\times 0=0$ 이므로

   $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2b_n}{a_n}\right)=0$ 이 성립한다.

   따라서 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=-\dfrac{1}{2}$.

미적분 26번

1. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{6}{2k(k+2)}=\dfrac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+2}\right)=\dfrac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\left\{1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right\}=\dfrac{9}{4}$.

미적분 27번

1. $f(x)=-\left\{x-\left(4^n-2^n\right)\right\}\left\{x-\left(4^n+2^n\right)\right\}$ 이므로 조건 (가)에 착안하여

   모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $4^n-2^n<a_n<4^n+2^n$ 이 성립함을 알 수 있다.

2. 함수 $f(x)$ 는 $x=4^n$ 에서 최댓값 $f\left(4^n\right)=-16^n+2\times 16^n-16^n+4^n=4^n$ 을 가지므로

   $b_n=4^n$ 이다.

   모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $\dfrac{4^n-2^n}{4^n}<\dfrac{a_n}{b_n}<\dfrac{4^n+2^n}{4^n}$ 이 성립하고,

   $\lim_{n\to\infty}\dfrac{4^n-2^n}{4^n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{4^n+2^n}{4^n}=1$ 이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=1$.

미적분 28번

1. 주어진 삼차식을 인수분해하면

$(x-6n)\left(x-\frac{6n+\sqrt{36n^2-24n}}{2}\right)\left(x-\frac{6n-\sqrt{36n^2-24n}}{2}\right)$ 이므로,

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 일반항은 $6n$, $3n \pm \sqrt{9n^2-6n}$ 중 하나이다.

$3n-\sqrt{9n^2-6n} < 3n+\sqrt{9n^2-6n} < 6n$ 이고, $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)$ 의 값이 자연수인 것에서

$a_n > b_n$ 임을 알 수 있다.

2. $a_n = 3n+\sqrt{9n^2-6n}$ 일 때,

$b_n = 3n-\sqrt{9n^2-6n}$ 이므로 $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n) = \lim_{n\to\infty}\left(2\sqrt{9n^2-6n}\right) = \infty$ 이다.

3. $a_n = 6n$ 일 때,

$b_n = 3n+\sqrt{9n^2-6n}$ 이면 $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n) = \lim_{n\to\infty}\left(3n-\sqrt{9n^2-6n}\right)$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{6n}{3n+\sqrt{9n^2-6n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{6}{3+\sqrt{9-\frac{6}{n}}} = 1$,

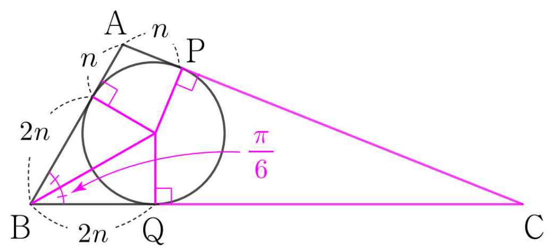
$b_n = 3n-\sqrt{9n^2-6n}$ 이면 $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n) = \lim_{n\to\infty}\left(3n+\sqrt{9n^2-6n}\right) = \infty$ 이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)$의 값이 자연수가 되도록 하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 일반항은 각각

$a_n = 6n$, $b_n = 3n+\sqrt{9n^2-6n}$ 이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+b_n}{n} = 18$.

미적분 29번

1. 삼각형 ABC의 내접원과 선분 AB가 만나는 점을 R라 하자.
원의 접선의 성질에 의하여 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AR}}=n$, $\overline{\mathrm{BQ}}=\overline{\mathrm{BR}}=2n$, $\overline{\mathrm{CP}}=\overline{\mathrm{CQ}}$임을 알 수 있다.
삼각형 ABC의 내접원의 중심을 O라 하면, $\angle\mathrm{OBQ}=\angle\mathrm{OBR}=\dfrac{\pi}{6}$이므로
삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이는 $\dfrac{2n}{\sqrt{3}}$이다. 따라서 $f(n)=\dfrac{4n^2}{3}\pi$이다.



2. $\overline{\mathrm{CP}}=\overline{\mathrm{CQ}}=a_n$이라 하자.
삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여 $\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2-\overline{\mathrm{AC}}^2}{2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BC}}}$ $\Leftrightarrow$ $a_n=6n$이고,
삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여 $\dfrac{3n}{\sin(\angle\mathrm{ACB})}=\dfrac{n+6n}{\sin\dfrac{\pi}{3}}$ $\Leftrightarrow$ $\sin(\angle\mathrm{ACB})=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$이다.
따라서 삼각형 APQ에서 코사인법칙에 의하여 $\cos(\angle\mathrm{ACB})=\dfrac{13}{14}=\dfrac{36n^2+36n^2-\overline{\mathrm{PQ}}^2}{2\times6n\times6n}$
$\Leftrightarrow$ $13\times36n^2=36n^2\times14-7\overline{\mathrm{PQ}}^2$ $\Leftrightarrow$ $\overline{\mathrm{PQ}}^2=\dfrac{36n^2}{7}$이다.

3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{f(n)+\overline{\mathrm{PQ}}^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\dfrac{4n^2}{3}\pi+\dfrac{36n^2}{7}}=\frac{1}{\dfrac{4}{3}\pi+\dfrac{36}{7}}=\frac{21}{28\pi+108}$이므로
$\alpha+\beta=49$.

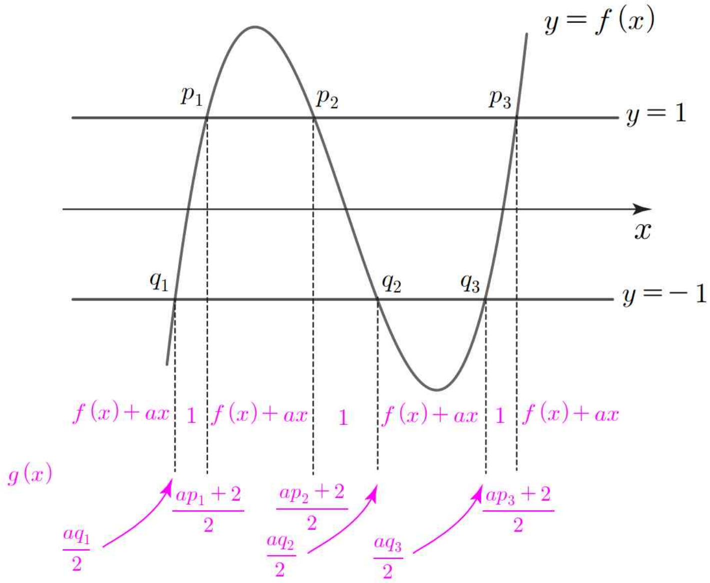
미적분 30번

1. 함수 $g(x)$는 등비수열의 극한에 의하여 정의된 함수이므로 $|f(x)|$의 범위에 따른 $g(x)$를 구하면 다음과 같다.

$$g(x)=\begin{cases} f(x)+ax & (|f(x)|>1) \\ 1 & (|f(x)|<1) \\ \dfrac{ap+2}{2} & (f(x)=1) \\ \dfrac{aq}{2} & (f(x)=-1) \end{cases} \quad (f(p)=1\,,\ f(q)=-1)$$

삼차함수 $f(x)$의 그래프와 두 직선 $y=1$, $y=-1$의 위치 관계에 따라 함수 $g(x)$가 정의되므로, 삼차함수 $f(x)$의 그래프가 변곡점에 대하여 대칭인 것에 착안하여 삼차함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 그려보면서 경우를 나누어보자.

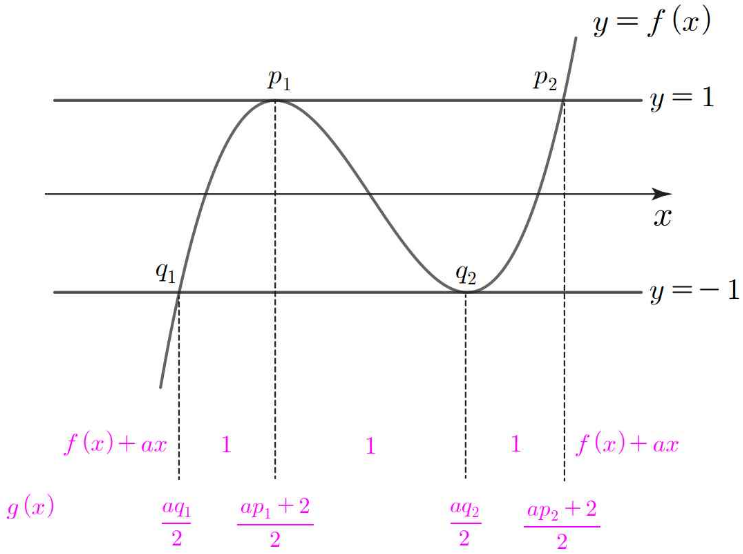
2. 삼차함수 $f(x)$의 극댓값이 1보다 클 때, 삼차함수 $f(x)$의 그래프의 개형에 따른 함수 $g(x)$를 정리하면 다음 그림과 같다.



위 그림에서 $\dfrac{ap_m+2}{2}$ $(m=1,\,2,\,3)$ 중 하나가 1이면 나머지 두 수는 반드시 1이 아니므로 함수 $g(x)$가 $x=\alpha$에서 불연속인 α의 개수의 최솟값은 2이다. ($\dfrac{aq_k}{2}$ $(k=1,\,2,\,3)$의 값의 경우에 관계없이 조건 (가)에 모순이다.)

따라서 삼차함수 $f(x)$의 극댓값은 1보다 크지 않다.

3. 삼차함수 $f(x)$ 의 극댓값이 1 일 때, 삼차함수 $f(x)$ 의 그래프의 개형에 따른 함수 $g(x)$ 를 정리하면 그림과 같다.



조건 (가)에 의하여 $x=p_1$, $x=p_2$, $x=q_1$, $x=q_2$ 중 1 개의 x 에서만 함수 $g(x)$ 가 불연속이 되어야 하고, 그 x 가 -3 이다.

$\lim_{x \to p_2-} g(x)=1$, $g(p_2)=\frac{ap_2+2}{2}$, $\lim_{x \to p_2+} g(x)=\lim_{x \to p_2+}\{f(x)+ax\}=1+ap_2$ 이므로

$p_2=0$ 이면 함수 $g(x)$ 는 $x=p_2$ 에서 연속이고, 이때 $p_1<0$, $q_1<q_2<0$, $\frac{ap_1+2}{2}>1$

이므로 함수 $g(x)$ 는 $x=p_1$ 에서 불연속이다. 따라서 이때 $p_1=-3$ 이다.

함수 $g(x)$ 가 $x=q_1$ 에서 연속일 필요충분조건은 $aq_1=2$,

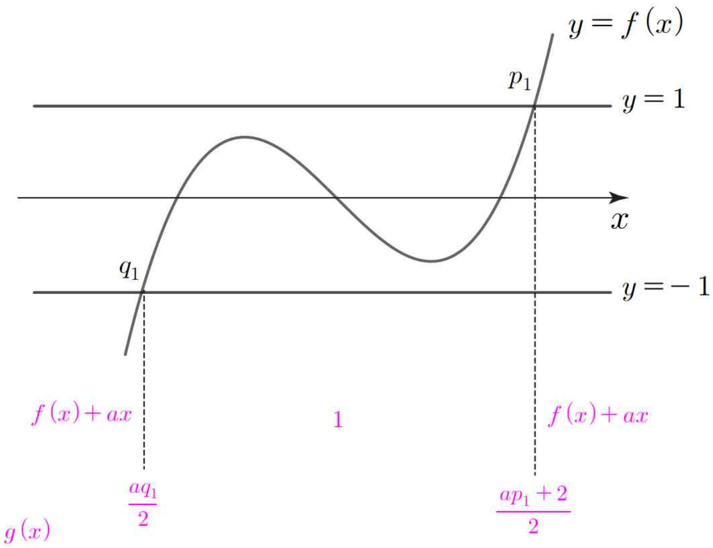
함수 $g(x)$ 가 $x=q_2$ 에서 연속일 필요충분조건은 $aq_2=2$ 인데,

$q_1<-3<q_2<0$ 이므로 불가능함을 알 수 있다.

따라서 $p_2=0$ 일 때, 함수 $g(x)$ 는 $x=-3$ 에서만 불연속이지 않다.

동일한 논리로 함수 $g(x)$ 가 $x=-3$ 에서만 불연속일 수 없음을 알 수 있다.

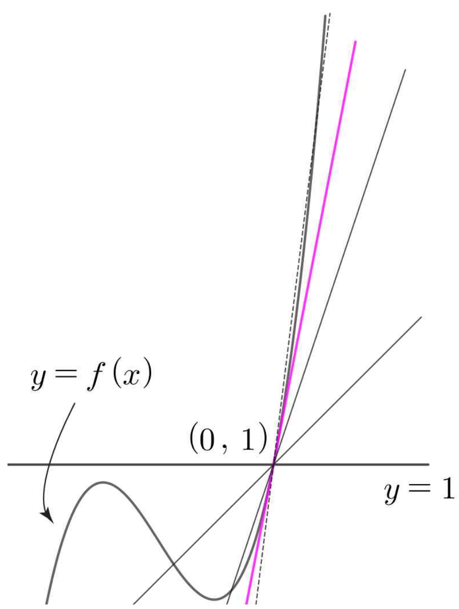
4. 삼차함수 $f(x)$의 극댓값이 1보다 작은 양수일 때, 삼차함수 $f(x)$의 그래프의 개형에 따른 함수 $g(x)$를 정리하면 그림과 같다.



조건 (가)에 의하여 $q_1=-3$, $p_1=0$이고, 이때 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이며

조건 (나)에 의하여 $x>0$에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=1-ax$가 만나지 않는 경우가 가능함을 알 수 있다.

5. $f(0)=1$이고, 직선 $y=1-ax$는 음수 a의 값에 관계없이 점 $(0,\ 1)$을 지나는 것에 착안하면 $x>0$에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=1-ax$가 만나지 않도록 하는 음수 a가 최소일 때, 즉 양수 a가 최대일 때는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=1-ax$가 점 $(0,\ 1)$에서 접할 때이다.



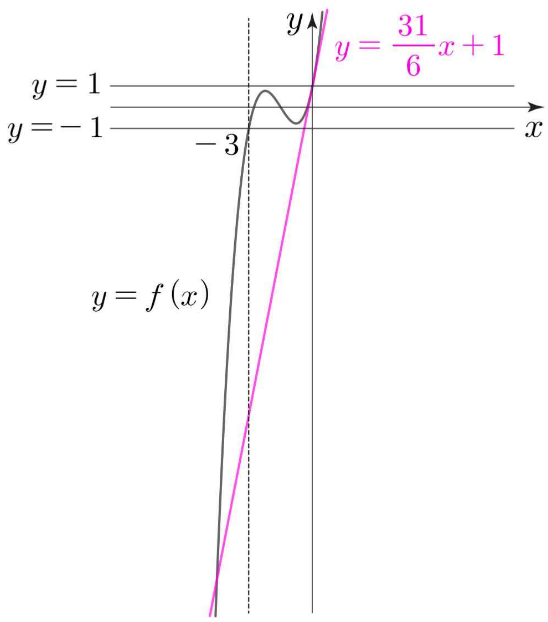
$f'(-3)=f'(0)$ 이므로 삼차함수 $f(x)$ 의 그래프는 점 $\left(-\frac{3}{2},\ f\left(-\frac{3}{2}\right)=0\right)$ 에 대하여 대칭이고, 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 방정식 $f(x)=1-ax$ 의 모든 실근의 합은 방정식 $f(x)=0$ 의 모든 실근의 합인 $-\frac{9}{2}$ 와 같다.

따라서 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=1-ax$ 가 점 $(0,\ 1)$ 에서 접할 때,

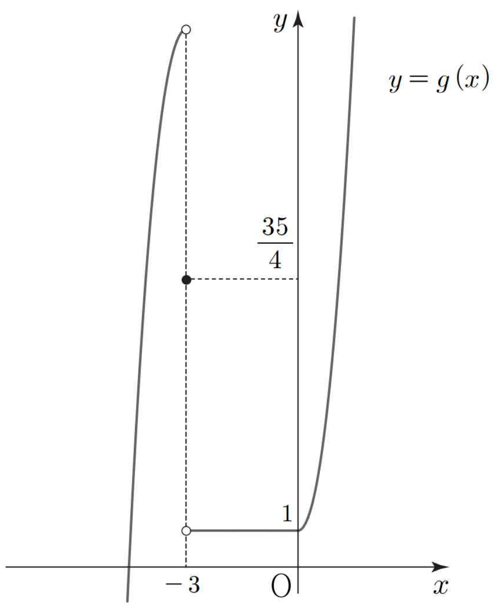
곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=1-ax$ 가 만나는 접점이 아닌 점의 x 좌표는 $-\frac{9}{2}$ 이고,

$f(x)=x^2\left(x+\frac{9}{2}\right)+1-ax$ 에서 $f(-3)=-1$ 이고, a 의 최솟값은 $-\frac{31}{6}$ 이다.

따라서 $-12a$ 의 최댓값은 62.



※ 정답인 상황의 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



기하 23번

1. 주어진 타원의 초점의 x좌표 중 양수인 것은 $\sqrt{18-9}=3$.

기하 24번

1. 포물선 $y^2=8x$ 위의 점 A의 y좌표가 4이므로, 점 A의 x좌표는 2이다.
   포물선의 정의에 의하여 선분 AF의 길이는 점 A와 포물선의 준선 사이의 거리이므로
   선분 AF의 길이는 4.

기하 25번

1. 주어진 쌍곡선의 점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{3}{a}(x-1)-3$이다.

   두 점근선 중 원점을 지날 수 있는 점근선의 방정식은 $y=-\frac{3}{a}(x-1)-3$이고, 이 점근선이

   원점을 지나므로 $a=1$.

2. 주어진 쌍곡선의 두 점근선 중 원점을 지나지 않는 점근선의 방정식은 $y=3(x-1)-3$이므로

   구하는 도형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times6\times2=6$.

기하 26번

1. 타원 E의 방정식을 변형하면

   $(x-1)^2+2(y-a)^2+24-2a^2=0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{2a^2-24}+\frac{(y-a)^2}{a^2-12}=1$이다.

   따라서 타원 E는 두 초점이 x축 위의 점인 타원 $\frac{x^2}{2a^2-24}+\frac{y^2}{a^2-12}=1$을

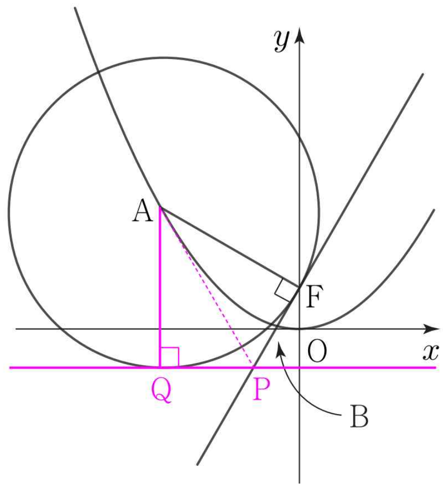
   x축의 양의 방향으로 1만큼, y축의 양의 방향으로 a만큼 평행이동시킨 타원이다.

2. 타원 E의 초점의 x좌표는 $\sqrt{a^2-12}+1$ 또는 $-\sqrt{a^2-12}+1$인데, 이 중 3이 될 수 있는
   것은 $\sqrt{a^2-12}+1$이다. 따라서 $\sqrt{a^2-12}+1=3$에서 $a=4$이고, $\mathrm{F}(3,\,4)$, $\mathrm{F}'(-1,\,4)$이므로
   선분 OF'의 길이는 $\sqrt{17}$.

기하 27번

1. 포물선의 준선의 방정식을 $y=-p$ 라 하자. 포물선의 정의에 의하여 직선 $y=-p$ 는 원에 접한다.
직선 $y=-p$ 와 직선 BF 가 만나는 점을 P 라 하면, 삼각형의 닮음에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}}=4$ 이고,
직선 $y=-p$ 와 원이 접하는 점을 Q 라 하면, 원의 접선의 성질에 의하여 $\overline{\mathrm{PQ}}=4$ 이다.

한편, 삼각형 AQP 에서 $\dfrac{\overline{\mathrm{AQ}}}{\overline{\mathrm{PQ}}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 이므로 $\angle \mathrm{PAQ}=\dfrac{\pi}{6}$ 이고,
삼각형 APQ 와 삼각형 APF 는 합동이므로 $\angle \mathrm{PAF}=\dfrac{\pi}{6}$ 이다.
따라서 $\angle \mathrm{QPF}=\dfrac{2}{3}\pi$ 이므로 직선 PF 의 기울기는 $\sqrt{3}$ 이다.



2. $\angle \mathrm{FBO}=\dfrac{\pi}{3}$ 이므로 $\overline{\mathrm{OF}}=\sqrt{3}=p$ 이고,
삼각형 AFQ 는 정삼각형이므로 점 A 의 좌표는 $\mathrm{A}(-6,\,3\sqrt{3})$ 임을 알 수 있다.
따라서 $\overline{\mathrm{OA}}=3\sqrt{7}$.

기하 28번

1. $\overline{\mathrm{PF}}:\overline{\mathrm{FQ}}=\overline{\mathrm{PF'}}:\overline{\mathrm{FF'}}$ 이므로 $\overline{\mathrm{PF'}}=2t$, $\overline{\mathrm{FF'}}=t$ 라 할 수 있고, $2b=2t+2$ 이다.
또한 타원의 두 초점의 y 좌표를 $\pm c\ (c>0)$ 이라 하면, $b^2=a^2+c^2$ 이 성립하고,
$2c=t+1$ 이다.

2. 삼각형 PFQ 에서 코사인법칙에 의하여
$\cos(\angle \mathrm{PFQ})=\dfrac{2^2+1^2-\left(\dfrac{\sqrt{30}}{2}\right)^2}{2\times2\times1}=-\dfrac{5}{8}$ 이고,
삼각형 PFF′에서 코사인법칙에 의하여
$\cos(\angle \mathrm{PFF'})=-\dfrac{5}{8}=\dfrac{(t+1)^2+2^2-(2t)^2}{2\times(t+1)\times2}$ 에서 $t=\dfrac{5}{2}$ 이다.
따라서 $b=\dfrac{7}{2}$, $c=\dfrac{7}{4}$ 이고, $a^2=b^2-c^2$ 에서 $a=\dfrac{7\sqrt{3}}{4}$ 이므로 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

기하 29번

1. 삼각형 OAF 가 정삼각형이므로 $\angle \mathrm{AOF}=\frac{\pi}{3}$ 이고, 쌍곡선의 점근선의 방정식은 $y=\pm\sqrt{3}x$ 이다. 따라서 $b=\sqrt{3}a$ 이다.

   $\overline{\mathrm{OF}}=\overline{\mathrm{OF'}}=\overline{\mathrm{OA}}$ 이므로 세 점 F, F′, A 는 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{OF}}$ 인 원 위의 점이다. 따라서 중심각과 원주각의 관계에 의하여 $\angle \mathrm{FAF'}=\frac{\pi}{2}$ 이다.

2. $\overline{\mathrm{RF'}}=t$ 라 하자. 쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{RF}}=2a+t$, $\overline{\mathrm{QF}}=t+6-2a$ 이고,
   $\overline{\mathrm{RF}}-\overline{\mathrm{QF}}=4a-6=2$ 에서 $a=2$ 이다. 따라서 쌍곡선의 주축의 길이와 정삼각형 OAF 의 한 변의 길이는 모두 4 이다.

3. 직각삼각형 FAF′에서 $\overline{\mathrm{AF'}}=8\cos\frac{\pi}{6}=4\sqrt{3}$ 이고, $\overline{\mathrm{AP}}=x$, $\overline{\mathrm{PF'}}=8-x$ 라 하면

   직각삼각형 APF′에서 피타고라스 정리에 의하여 $(4\sqrt{3})^2+x^2=(8-x)^2 \Leftrightarrow x=1$ 이다.

   따라서 삼각형 PFF′의 둘레의 길이는 $8+3+7=18$.

   ※ 직각삼각형을 이용하지 않고, 삼각형 PFF′에서 코사인법칙을 통하여
   $\cos(\angle \mathrm{PFF'})=\frac{1}{2}=\frac{8^2+\overline{\mathrm{PF}}^2-(4+\overline{\mathrm{PF}})^2}{2\times 8\times\overline{\mathrm{PF}}}$ 에서 $\overline{\mathrm{PF}}=3$ 을 구해도 된다.

기하 30번

1. 조건 (가)와 조건 (나)를 해석해보자.
   $\overline{\mathrm{AF}} = \overline{\mathrm{AB}}$ 에서 포물선의 정의에 의하여 점 B 는 포물선의 준선과 점 A 를 지나고 x 축에 평행한 직선의 교점이다.
   조건 (나)에 의하여 점 A 의 x 좌표는 점 F 의 x 좌표보다 크다.

   $\overline{\mathrm{AF}} = t$ 라 하자. 점 F 에서 선분 AB 에 내린 수선의 발을 H 라 하면, $\overline{\mathrm{AH}} = t-4$ 이므로
   $\cos(\angle \mathrm{FAB}) = \dfrac{t-4}{t} = \dfrac{4}{5} \Leftrightarrow t = 20$ 이다.
   따라서 두 점 A, B 의 좌표는 $\mathrm{A}(18, 12)$, $\mathrm{B}(-2, 12)$ 이다.

2. 조건 (다)를 해석해보자.
   포물선 $(y-a)^2 = -kx$ 의 꼭짓점은 y 축 위의 점이고, 직선 FB 가 y 축과 만나는 점은 선분 FB 의 중점이다. 따라서 포물선 $(y-a)^2 = -kx$ 의 꼭짓점의 좌표는 $(0, 6)$ 이므로 $a = 6$ 이다.

   점 B 의 좌표를 포물선 $(y-a)^2 = -kx$ 에 대입하면, $k = 18$ 이다.