제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n-1}}{(-2)^n+3^n}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

24. 수열 $\{a_n\}$이 $\lim_{n\to\infty}(3a_n-5n)=2$를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)a_n}{4n^2}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(\overbrace{3a_n-5n}^{\to 2}+5n)\cdot\frac{1}{3}}{4n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(3a_n-5n)+(2n+1)\cdot 5n}{12n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{2n+1}{12n^2}}_{\to 0}\cdot\underbrace{(3a_n-5n)}_{\to 2}+\lim_{n\to\infty}\frac{10n^2+5n}{12n^2}$$

$$=\frac{5}{6}$$

25. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{an^2+n}-\sqrt{an^2-an}\right)=\frac{5}{4}$ 를 만족시키는 모든 양수 a의 값의 합은? [3점]

① $\frac{7}{2}$ ② $\frac{15}{4}$ ③ 4 ④ $\frac{17}{4}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

유리화!! *

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(an^2+n)-(an^2-an)}{\sqrt{an^2+n}+\sqrt{an^2-an}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+a)n}{\sqrt{an^2+n}+\sqrt{an^2-an}}$$

$$=\frac{1+a}{2\sqrt{a}}=\frac{5}{4}$$

$2(1+a)=5\sqrt{a}$

양변제곱

$4(1+2a+a^2)=25a$

$4a^2-17a+4=0$

모든 양수의 합 = 두 근의 합 = $\frac{17}{4}$

26. 첫째항이 1인 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}-a_n=3,\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_k}=n^2$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}a_nb_n$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

먼저 일반항 b_n이 필요!! *

$\frac{1}{b_n}=n^2-(n-1)^2=2n-1 \quad (n\geq 2)$

준식에서 $b_1=1$, 방금... $\frac{1}{b_1}=1$ 이므로

$b_n=\frac{1}{2n-1} \quad (n\geq 1)$

$a_n=3n-2$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-2}{2n-1}=\frac{3}{2}$$

너무 중요!!

첫째항부터 n항까지의 합 S_n과 일반항 a_n 관계

$S_n-S_{n-1}=a_n \quad (n\geq 2)$

a_1의 값과 S_1의 값 비교

$a_1\neq S_1$ 이면 정말 둘째항부터 수열 a_n

$a_1=S_1$ 이면 그냥 수열 a_n.

27. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n^{\ 2} < 4na_n + n - 4n^2$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+3n}{2n+4}$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

$a_n^2 - 4na_n + 4n^2 < n$

$(a_n - 2n)^2 < n$

따라서

$-\sqrt{n} < a_n - 2n < \sqrt{n}$

이다.

여기서

$5n - \sqrt{n} < a_n + 3n < 5n + \sqrt{n}$ 이 되어

$\frac{5n-\sqrt{n}}{2n+4} < \frac{a_n+3n}{2n+4} < \frac{5n+\sqrt{n}}{2n+4}$ 이다

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+3n}{2n+4} = \frac{5}{2}$ 이다.

28. 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 A_n을 다음 규칙에 따라 정한다.

> (가) A_1은 원점이다.
> (나) n이 홀수이면 A_{n+1}은 점 A_n을 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 점이다.
> (다) n이 짝수이면 A_{n+1}은 점 A_n을 y축의 방향으로 $a+1$만큼 평행이동한 점이다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_{2n}}}{n} = \frac{\sqrt{34}}{2}$일 때, 양수 a의 값은? [4점]

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ 2 ④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

	x좌표	y좌표
A_1	0	0
A_2	a	0
A_3	a	$a+1$
A_4	$2a$	$a+1$
A_5	$2a$	$2a+2$
A_6	$3a$	$2a+2$
A_7	$3a$	$3a+3$
	⋮	

규칙성을 찾는다

A_{2n}의 x좌표 : na

y좌표 : $(n-1)(a+1)$

이다

$\overline{A_1A_{2n}} = \sqrt{n^2a^2 + (n-1)^2(a+1)^2}$ 이다

n에 관하여 정리하자.

$a^2n^2 + (a+1)^2n^2 - 2(a+1)^2n + (a+1)^2$

$= (2a^2+2a+1)n^2 - 2(a+1)^2n + (a+1)^2$

$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{A_1A_{2n}}}{n} = \sqrt{2a^2+2a+1} = \frac{\sqrt{34}}{2}$

양변 제곱

$2a^2+2a+1 = \frac{17}{2}$

$4a^2+4a-15=0$

$(2a-3)(2a+5)=0$

$a = -\frac{5}{2}$ 또는 $a = \frac{3}{2}$

$a>0$ 이므로

$a = \frac{3}{2}$

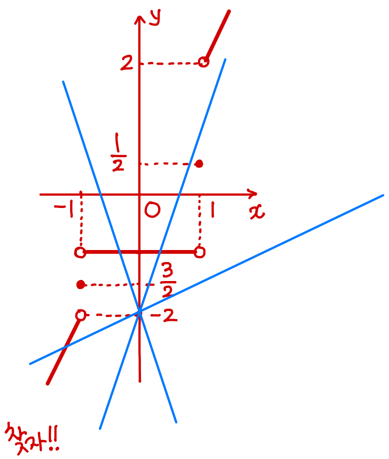
단 답 형

29. 실수 t에 대하여 직선 $y=tx-2$가 함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x^{2n+1}-1}{x^{2n}+1}$$

의 그래프와 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=a$에서 불연속인 모든 a의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m$ (m은 자연수)라 할 때, $m\times a_m$의 값을 구하시오. [4점]

$$f(x)=\begin{cases} 2x & (|x|>1) \\ \frac{1}{2} & (x=1) \\ -\frac{3}{2} & (x=-1) \\ -1 & (|x|<1) \end{cases}$$ 이다.



이제 교점의 개수가 달라지는 포인트를 찾자!!

① 점(1, −1)을 지날때 $t=1$

② 점$(1, \frac{1}{2})$을 지날때 $t=\frac{5}{2}$

③ 점(1, 2)를 지날때 $t=4$

여기서 $t>0$인 경우 $g(t)$를 정리부터하자

$$g(t)=\begin{cases} 1 & (0<t\le 1) \\ 2 & (1<t<2) \\ 1 & (t=2) \\ 2 & (2<t<\frac{5}{2}) \\ 3 & (t=\frac{5}{2}) \\ 2 & (\frac{5}{2}<t<4) \\ 1 & (t\ge 4) \end{cases}$$

→ $y=f(x)$에서 $y=2x$와 평행한 경우를 고려

④ 점$(-1, -\frac{3}{2})$을 지날때 $t=-\frac{1}{2}$

⑤ 점(−1, −1)을 지날때 $t=-1$

이제 $t\le 0$인 경우 $g(t)$를 정리하자.

$$g(t)=\begin{cases} 0 & (-\frac{1}{2}<t\le 0) \\ 1 & (t=-\frac{1}{2}) \\ 0 & (-1\le t<-\frac{1}{2}) \\ 1 & (t<-1) \end{cases}$$

위 정리된 함수 $g(t)$의 함숫값이 달라진 경계값 t에서 불연속이다!!*

따라서

$t=-1,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ 1,\ 2,\ \frac{5}{2},\ 4$ 이다.

$m=7$ 이고 $a_m=a_7=4$ 이므로 $m\times a_m=28$.

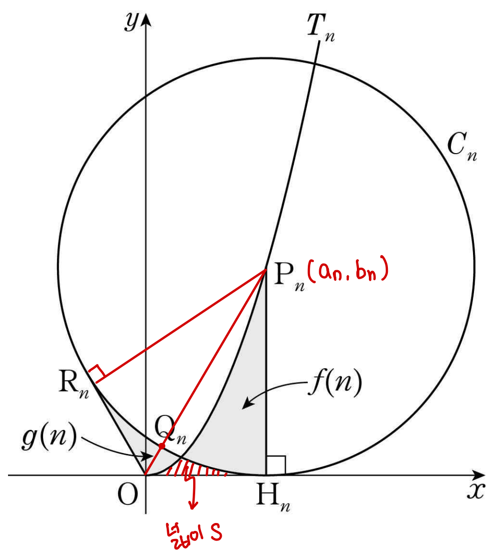
30. 그림과 같이 자연수 n에 대하여 곡선

$$T_n : y=\frac{\sqrt{3}}{n+1}x^2\ (x\ge 0)$$

위에 있고 원점 O와의 거리가 $2n+2$인 점을 P_n이라 하고, 점 P_n에서 x축에 내린 수선의 발을 H_n이라 하자.

중심이 P_n이고 점 H_n을 지나는 원을 C_n이라 할 때, 곡선 T_n과 원 C_n의 교점 중 원점에 가까운 점을 Q_n, 원점에서 원 C_n에 그은 두 접선의 접점 중 H_n이 아닌 점을 R_n이라 하자.

점 R_n을 포함하지 않는 호 $\mathrm{Q}_n\mathrm{H}_n$과 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{H}_n$, 곡선 T_n으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(n)$, 점 H_n을 포함하지 않는 호 $\mathrm{R}_n\mathrm{Q}_n$과 선분 OR_n, 곡선 T_n으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(n)$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)-g(n)}{n^2}=\frac{\pi}{2}+k$이다. $60k^2$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [4점]



f(n), g(n)을 구하는것이 쉽지 않다는 것을 알수 있다.

그렇다면 어떻게 접근할까??

관찰하면...

빗금친 부분의 넓이 S를 포함하면 구하기 쉽고

무엇보다

$f(n)-g(n)$

$=(f(n)+S)-(g(n)+S)$

이용할수 있다.

$$f(n)+S=\int_0^{a_n}\frac{\sqrt{3}}{n+1}x^2\,dx=\frac{\sqrt{3}}{3(n+1)}a_n^3$$

$g(n)+S=$ 사각형 $\mathrm{OH}_n\mathrm{P}_n\mathrm{R}_n$ 넓이 $-$ 부채꼴 $\mathrm{P}_n\mathrm{R}_n\mathrm{H}_n$ 넓이

$=2\times$ 삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{OH}_n$ 넓이 $\quad =\frac{1}{2}\cdot b_n^2\cdot\angle\mathrm{H}_n\mathrm{P}_n\mathrm{R}_n$ *

이제는 $a_n,\ b_n$을 구하도록 한다.

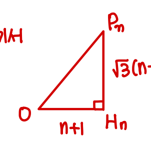
$$\overline{\mathrm{OP}_n}^2=a_n^2+b_n^2=a_n^2+\frac{3}{(n+1)^2}a_n^4=4(n+1)^2$$

$a_n^2=t$로 치환하여 정리하면

$$3t^2+(n+1)^2t-4(n+1)^4=0,\quad \{3t+4(n+1)^2\}\{t-(n+1)^2\}=0$$

$t=(n+1)^2=a_n^2$ 이므로 $a_n=n+1$ 이다.

여기서



가 되어 $\overline{\mathrm{OH}_n}:\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{H}_n}=1:\sqrt{3}$ 이므로

$\angle\mathrm{H}_n\mathrm{P}_n\mathrm{O}=\frac{\pi}{6}$ 이다. 따라서 $\angle\mathrm{H}_n\mathrm{P}_n\mathrm{R}_n=\frac{\pi}{3}$ 이다.

따라서 $g(n)+S=2\cdot(n+1)\cdot\sqrt{3}(n+1)\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot 3(n+1)^2\cdot\frac{\pi}{3}$

$=(n+1)^2\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right)$

계속이어서 풀이

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)-g(n)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)+S-\{g(n)+S\}}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}(n+1)^2-\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right)(n+1)^2}{n^2}$$

이차항의 계수비!! $\frac{\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}+\frac{\pi}{2}$

$k=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$60k^2=60\cdot\frac{4}{3}=80$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.