

[권구승/한성은 모의고사]

| 3월 모의고사 연습(2/2) |

| 권구승 (서울대)

대찬학원(분당), 미래탐구(목동), 이투스앤써

잠깐 타오르고 식는 열정보단 꾸준한 습관으로 건디는 1년이 되길 바랍니다.
보통 성과는 달팽이처럼 천천히 오거든요.

| 한성은 (POSTECH 수학과)

5A ACADEMY

잘 되는 것도 있고 그렇지 않은 것도 있고,
모든 것이 좋지 않아도 좋다.

hansungeun.com/texta.html - 공개 모의고사 페이지
써밋 N제 미적분(2021년) 출간 - 책 사주세요.

| CCL

- 허락 없이 문제를 쓰실 수 있지만, 출처를 반드시 표시해 주세요.
- 자신이 저작자라는 주장을 하지 말아 주세요.

수학 영역

1

5지선다형

1. $2^{-1} \times 8^{\frac{2}{3}}$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

2. 함수 $f(x) = x^3 - 4x^2 + 7$ 에 대하여 $f'(3)$ 의 값은? [2점]

- ① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

3. 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$a_2 + a_5 + a_8 = 21$ 일 때, a_6 의 값은? [3점]

- ① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

4. 두 양수 a, b 가

$$\log_3(a+b)=2, \quad \log_2 a + \log_2 b = 3$$

을 만족시킬 때, $a^2 + b^2$ 의 값은? [3점]

- ① 61 ② 63 ③ 65
④ 67 ⑤ 69

5. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^5 (a_k + 2)^2 = 20, \quad \sum_{k=1}^5 \{a_k(a_k + 3)\} = 60$$

일 때, $\sum_{k=1}^5 a_k$ 의 값은? [3점]

- ① -40 ② -45 ③ -50
 ④ -55 ⑤ -60

6. 부등식 $(\log_2 2x)(\log_2 4x) \leq 12$ 를 만족시키는

모든 자연수 x 의 값의 합은? [3점]

- ① 10 ② 14 ③ 18
 ④ 22 ⑤ 26

7. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$a_2 = 16$ 이고 $a_3 a_5 = 16$ 일 때, $a_1 a_8$ 의 값은? [3점]

- ① $16\sqrt{2}$ ② 16 ③ $8\sqrt{2}$
 ④ 8 ⑤ $4\sqrt{2}$

8. 이차함수 $f(x) = x^2 - 4x + 2$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x < k) \\ 28 - f(x) & (x \geq k) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 k 의 값의 곱은? [3점]

- ① -18 ② -16 ③ -14
 ④ -12 ⑤ -10

9. x 에 대한 이차방정식 $3x^2 + 4x - 8 = 0$ 의 두 실근이

$\frac{1}{\sin\theta}$, $\frac{1}{\cos\theta}$ 일 때, x 에 대한 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의

두 실근은 $\sin\theta$, $\cos\theta$ 이다. $|a| + |b|$ 의 값은?
 (단, a , b 는 상수이다.) [4점]

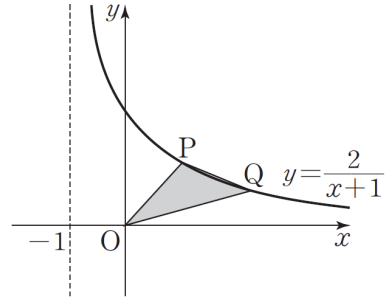
- ① $\frac{15}{16}$ ② $\frac{7}{8}$ ③ $\frac{13}{16}$
 ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{11}{16}$

10. 곡선 $y = \frac{2}{x+1}$ ($x > -1$) 위의 두 점 $P(1, 1)$,

$Q\left(t, \frac{2}{t+1}\right)$ ($t > 1$)에 대하여 삼각형 OQP의 넓이를

$S(t)$ 라 하자. $\lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{S(t)}{t-1}$ 의 값은? (단, 0는 원점이다.)

[4점]



- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
 ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

11. 지수함수 $y = a^x$ ($a > 1$)의 그래프 위의 두 점 A, B에서 x 축에 내린 수선의 발을 각각 A', B'라 하자. 점 A가 선분 OB의 중점이고 사각형 AA'B'B의 넓이가 6일 때, a 의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

- ① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2
 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

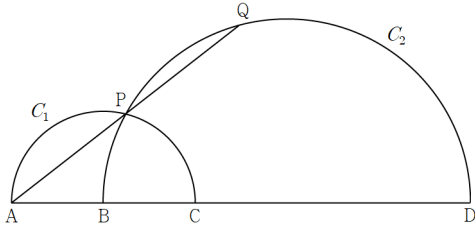
12. 첫째항이 1인 등비수열 $\{a_n\}$ 과 자연수 m 에 대하여

$$\sum_{k=1}^m a_k a_{m+k} = 4 \sum_{k=1}^m a_k a_{k+1}$$

이고 $\sum_{k=1}^m a_k a_{2m-k} = 80$ 일 때, m 의 값은? [4점]

- ① 4 ② 5 ③ 6
 ④ 7 ⑤ 8

13. 한 직선 위에 순서대로 놓인 네 점 A, B, C, D는 $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=2$, $\overline{CD}=6$ 을 만족시킨다. 선분 AC를 지름으로 하는 반원 C_1 의 호와 선분 BD를 지름으로 하는 반원 C_2 의 호가 만나는 점을 P, 직선 AP와 반원 C_2 가 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 할 때, \overline{PQ} 의 값은? [4점]



- ① $2\sqrt{2}$ ② 3 ③ $\sqrt{10}$
 ④ $\sqrt{11}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

14. 함수

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & (\sin x \geq \cos x) \\ \cos x & (\sin x < \cos x) \end{cases}$$

에 대한 설명으로 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

—<보 기>—

ㄱ. 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = f(x+p)$ 를 만족시키는 최소의 양수 p 의 값은 2π 이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{64} f\left(\frac{n\pi}{4}\right) = 16 + 8\sqrt{2}$

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. 양의 상수 a 에 대하여

$$f'(x) = 6(x-a)(x-3a)$$

인 함수 $f(x)$ 와 $g'(x) = \begin{cases} f'(x) & (f'(x) \leq 0) \\ 0 & (f'(x) > 0) \end{cases}$ 인
연속함수 $g(x)$ 는 다음을 만족시킨다.

$$\begin{aligned} \text{(가)} & f(0) = g(0) \\ \text{(나)} & f(4a) = g(4a) + 16 \end{aligned}$$

$\int_0^{4a} \{f(x) - g(x)\} dx$ 의 값은? [4점]

- ① 20 ② 24 ③ 28
④ 32 ⑤ 36

단답형

16. $\frac{\log 256}{\log 2}$ 의 값을 구하여라. [3점]

17. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가
모든 실수 x 에 대하여

$$(x-2)f(x) = x^2 - 6x + a$$

를 만족시킨다. $a + f(2)$ 의 값을 구하여라.
(단, a 는 상수이다.) [3점]

18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n + b_n = 2n + 3$$

을 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{10} a_k = 45$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10} b_k$ 의 값을
구하여라. [3점]

19. 두 함수

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{10}{3}, \quad g(x) = \frac{1}{2}|x|$$

의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라. [3점]

20. 함수 $f(x) = \cos \frac{\pi}{2}x$ ($0 < x < 61$)에 대하여 $y = f(x)$ 의

그래프와 직선 $y = \frac{3}{4}$ 이 만나는 모든 점의 x 좌표를

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \quad (x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n)$$

이라 할 때, $n + x_{n-1} + x_n$ 의 값을 구하여라. [4점]

21. 공차가 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$ 과 함수 $f(x) = |x-5| + |x-15|$ 에 대하여

$$\sum_{k=6}^{10} f(a_k) = 50, \quad \sum_{k=11}^{15} f(a_k) = 100$$

이다. $f(a_1)$ 의 값을 구하여라. [4점]

22. 최고차항의 계수가 k 인 사차함수 $f(x)$ 와 $g(x) = |x|$ 는 다음을 만족시킨다.

(가) x 에 대한 방정식 $f(x) = g(x)$ 는

$-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, a$ 의 세 근만을 가진다.

(나) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq g(x)$ 이다.

$60(k+a)$ 의 값을 구하여라. (단, a 는 양수이다.) [4점]

5지선다형

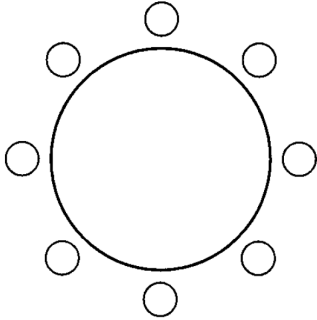
23. $(x+2)^6$ 의 전개식에서 x^4 의 계수는? [2점]

- ① 60 ② 55 ③ 50
④ 45 ⑤ 40

24. 5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 여섯 개를 택해 일렬로 나열하여 여섯 자리의 자연수를 만든다. 만의 자리와 백의 자리의 수는 짝수이고 일의 자리의 수는 홀수인 자연수의 개수는? [3점]

- ① 1350 ② 1400 ③ 1450
④ 1500 ⑤ 1550

25. 그림과 같은 원형의 탁자에 네 쌍의 부부 8명이 둘러앉을 때, 부부끼리는 서로 마주보도록 앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]



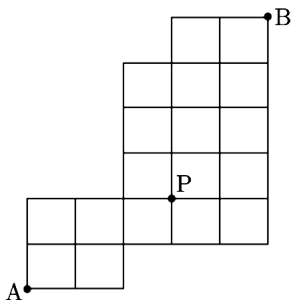
- ① 24
- ② 36
- ③ 48
- ④ 72
- ⑤ 96

26. 집합 $X = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \rightarrow X$ 의 개수는? [3점]

X 의 모든 원소 x 에 대하여 $f(-x) = f(x)$ 이다.

- ① 105
- ② 110
- ③ 115
- ④ 120
- ⑤ 125

27. 그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다.
이 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 P지점을 지나
B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는? [3점]



- ① 130 ② 135 ③ 140
 ④ 145 ⑤ 150

28. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 에 대하여 다음 조건을
만족시키는 함수 $f: X \rightarrow X$ 의 개수는? [4점]

(가) $f(1) + f(4) = 6$
 (나) 집합 X 의 임의의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여
 $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) \leq f(x_2)$ 이다.

- ① 83 ② 87 ③ 91
 ④ 95 ⑤ 99

단답형

29. A, A, A, B, B, C, D의 문자가 하나씩 적혀 있는 7장의 카드가 있다. 이 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열할 때, 같은 문자가 적힌 카드끼리는 이웃하지 않게 나열되는 경우의 수를 구하여라. [4점]

30. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수를 구하여라. [4점]

(가) $a+b+c+d=10$

(나) $(a-b)(a-c)(a-d) > 0$

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + 2n^2 - 5}{n^3 + n^2 - 2}$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

24. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-3}{2}\right)^n$ 이 수렴하도록 하는 모든 정수

x 의 합은? [3점]

- ① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

25. 첫째항이 1이고 공차가 -2인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.
수열 $\{b_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$S_{n+1} < n^2 b_n < S_n$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nb_n + 1}{a_n}$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$
- ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

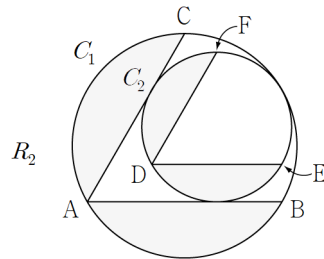
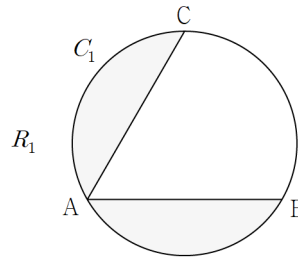
26. 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원 C_1 위의 세 점 A, B, C는 $\overline{AB} = \overline{AC}$, $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$ 을 만족시킨다.

선분 AB와 호 AB로 둘러싸인 부분과 호 AC와 호 AC로 둘러싸인 부분인 \cap 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

그림 R_1 에서 두 선분 AB, AC와 호 BC에 모두 접하는 원 C_2 를 그리고 그림 R_1 을 얻은 것과 같은

방법으로 원 C_2 에 \cap 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [3점]

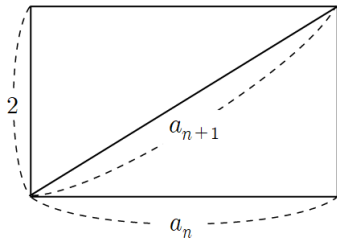


- ① $\frac{7}{5} \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ ② $\frac{3}{2} \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$
- ③ $\frac{8}{5} \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ ④ $\frac{17}{10} \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$
- ⑤ $\frac{9}{5} \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

27. $a_1 = 2$ 인 수열 $\{a_n\}$ 은 모든 자연수 n 에 대하여 다음을 만족시킨다.

가로 길이가 a_n , 세로 길이가 2인 직사각형의 대각선의 길이는 a_{n+1} 이다.

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(a_{n+1} - a_n)$ 의 값은? [3점]



- ① $\frac{1}{2}$
- ② 1
- ③ $\sqrt{2}$
- ④ 2
- ⑤ 4

28. 자연수 n 에 대하여 직선 $y = x$ 과 함수 $y = \tan x$ 의 그래프가 제1사분면에서 만나는 점의 x 좌표를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n 번째 수를 a_n 이라 하자.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$ 의 값은? [4점]

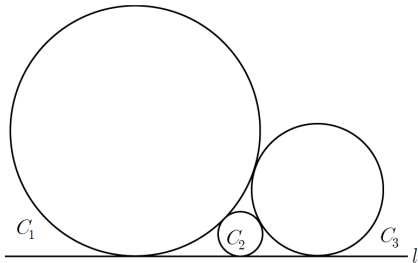
- ① $\frac{\pi}{4}$
- ② $\frac{\pi}{2}$
- ③ $\frac{3}{4}\pi$
- ④ π
- ⑤ $\frac{5}{4}\pi$

단답형

29. 그림과 같이 자연수 n 에 대하여 반지름의 길이가 각각 $1, a_n, \frac{1}{n^2}$ 인 세 원 C_1, C_2, C_3 가 모두 직선 l 에 접하고 세 원 중 어느 두 원도 서로 외접하고 있다.

$$100 \sum_{n=2}^{\infty} (2n+1)a_{n-1}a_n$$

의 값을 구하여라. (단, $a_n < \frac{1}{n^2}$ 이다.) [4점]



30. 자연수 n 에 대하여 3^n 의 모든 약수 중에서 서로 다른 2개의 수를 선택하여 선택된 2개의 수의 곱으로 만들어지는 모든 수의 합을 $S(n)$ 이라 하자. 두 실수 a, b 에 대하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S(n)}{a^n} = b \quad (b \neq 0)$$

일 때, $16ab$ 의 값을 구하여라. [4점]

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 타원 $x^2 + 4y^2 = 4$ 의 장축의 길이는? [2점]

- ① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

24. 준선이 $y = -2$ 인 포물선 $x^2 = ay$ 가 있다.

이 포물선이 점 $(4, k)$ 를 지날 때, $a+k$ 의 값은?

(단, a 는 상수) [3점]

- ① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

25. 쌍곡선 $4x^2 - 3y^2 = -12$ 위의 점 $(3, 4)$ 에서의 접선과 x 축, y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는? [3점]

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$
 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

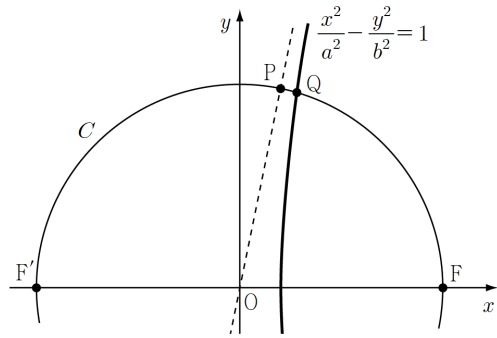
26. 초점이 F인 포물선 $y^2 = 4px$ 과 점 F를 지나고 기울기가 $\sqrt{3}$ 인 직선의 두 교점을 각각 A, B라 하자.

$\overline{AB} = 32$ 일 때, 양수 p 의 값은? [3점]

- ① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 6
 ④ 8 ⑤ 9

27. 타원 $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ 의 한 초점 F와 타원 위의 점 $P_k(a_k, b_k)$ 에 대하여 $a_k = k - 10 (k=1, 2, 3, \dots, 19)$ 일 때, $\sum_{k=1}^{19} \overline{FP_k}$ 의 값은? [3점]
- ① 180 ② 190 ③ 200
 ④ 210 ⑤ 220

28. 그림과 같이 두 초점이 $F(c, 0), F'(-c, 0)$ 인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 과 두 점 F, F'을 지름의 양 끝으로 하는 원 C가 있다. 원 C와 쌍곡선의 점근선과 만나는 점을 P, 원 C와 쌍곡선과 만나는 점을 Q라 하자. $\tan(\angle PF'F) = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 일 때, $\tan(\angle QF'F)$ 의 값은? (단, c 는 양수이고, P, Q는 제1사분면 위의 점이다.) [4점]



- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$
 ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

단답형

29. 두 양수 k, p 에 대하여 점 $A(-k, 0)$ 에서 포물선 $y^2 = 4px$ 에 그은 접선 중 하나의 접점을 B , 점 B 를 지나고 직선 AB 와 수직인 직선이 x 축과 만나는 점을 C 라 할 때, $\tan(\angle ACB) = 2$ 이다. 두 점 A, C 를 초점으로 하고 점 B 를 지나는 타원의 단축의 길이가 20일 때, kp 의 값을 구하여라. [4점]

30. 좌표평면 위에 원점 O 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $2a$ 인 원 C 와 점 $F(-2b, 0)$ ($0 < b < a$)이 있다. 점 Q 가 원 C 위를 움직일 때, 선분 QF 의 수직이등분선과 선분 OQ 의 교점 P 가 나타내는 곡선을 S 라 하자. 점 F 에서 곡선 S 위의 점까지 거리의 최댓값과 최솟값이 각각 6, 2일 때, 곡선 S 위의 점에서 직선 $x - 2y + 14 = 0$ 까지 거리의 최솟값은 d 이다. $25d^2$ 의 값을 구하여라. [4점]

[권구승/한성은 모의고사 3월 연습(2/2) 정답표]

〈공통〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	②	02	①	03	③	04	③	05	⑤
06	①	07	④	08	④	09	②	10	⑤
11	①	12	②	13	③	14	⑤	15	④
16	8	17	6	18	95	19	13	20	151
21	28	22	110						

〈확률과 통계〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
23	①	24	④	25	③	26	⑤	27	②
28	③	29	96	30	96				

〈미적분〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
23	③	24	①	25	②	26	⑤	27	④
28	④	29	25	30	81				

〈기하〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
23	①	24	⑤	25	④	26	③	27	②
28	③	29	20	30	80				

COMMENT 11

$A(t, a^t)$ 라 하자. $B(2t, a^{2t})$ 이므로 $a^{2t} = 2a^t$ 에서 $a^t = 2$ 이다.
사다리꼴 넓이 쪼개보면 $ta^t = 4$ 이다. $t=2, a = \sqrt{2}$ 이다.

COMMENT 12

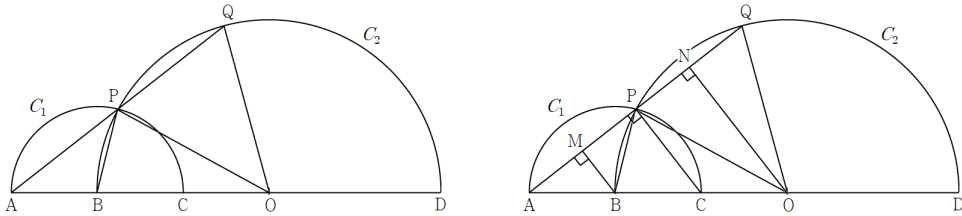
$\sum_{k=1}^m a_k a_{m+k} = \frac{r^m(r^{2m}-1)}{r^2-1}$ 이고 $\sum_{k=1}^m a_k a_{k+1} = \frac{r(r^{2m}-1)}{r^2-1}$ 이므로 $r^{m-1} = 4$ 이다.

$\sum_{k=1}^m a_k a_{2m-k} = m(r^{2m-2})$ 이다. (k 값과 관계없이 $a_k a_{2m-k}$ 는 r^{2m-2} 이다.)

COMMENT 13

선분 BD의 중점을 O라 하자. 삼각형 OBP에서 $\cos(\angle POB) = \frac{7}{8}$ 이다.

삼각형 POA에서 $\overline{AP} = \sqrt{10}$ 이다. 삼각형 AOQ에서 $\overline{AQ} = 2\sqrt{10}$ 이다.



다른 풀이 : 오른쪽 그림에서 닮음 치고 두 삼각형 AMB, PNO에서 피타고라스.

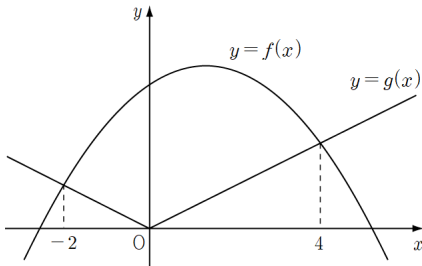
COMMENT 14

니은 : $f\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ 이다.

디귤 : $+\frac{\sqrt{2}}{2}+1+\frac{\sqrt{2}}{2}+0+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+0+\frac{\sqrt{2}}{2}+1$ 이 여덟 개.

COMMENT 19

두 함수의 그래프는 아래 그림과 같다.



$$\int_{-2}^4 \left(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{10}{3}\right) dx - \int_{-2}^0 \left(-\frac{1}{2}x\right) dt - \int_0^4 \frac{1}{2}x dx$$

COMMENT 20

$$n = 31, x_{n-1} + x_n = 120$$

COMMENT 21

$f(x)$ 의 최솟값이 10인데 $f(a_6) + f(a_7) + f(a_8) + f(a_9) + f(a_{10}) = 50$ 이므로

$f(a_6) = f(a_7) = \dots = f(a_{10}) = 10$ 이다. 따라서 $5 \leq a_6, a_{10} \leq 15$ 이고 이를 만족하려면 공차는 1 또는 2다.

공차가 1이면 $\sum_{k=11}^{15} f(a_k)$ 의 값이 개 크더라도 $a_{11} = 16, a_{12} = 17, \dots, a_{15} = 20$ 이고 $f(a_{11}) = 12, f(a_{12}) = 14, \dots, f(a_{15}) = 20$ 으로

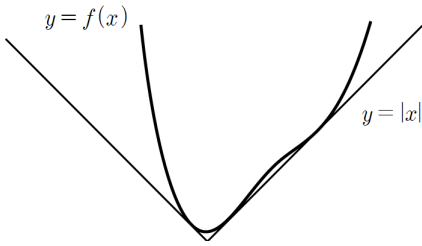
100에 미치지 못한다. 따라서 공차는 2이고 $f(a_{13}) = 20$ 이다. (엄밀하게는 $a_{11} < 15$ 인 경우를 따로 고려해 줘야 함. 될 수 없다.)

$f(a_{13}) = 20$ 이면 $a_{13} = 20$ 이다. $a_1 = -4$ 이고 $f(a_1) = 28$ 이다.

COMMENT 22

$$f(x) - x = k \left(x - \frac{2}{3} \right)^2 (x - \alpha)^2$$

\Rightarrow 방정식 $f(x) = -x$ 가 $-\frac{1}{3}$ 을 중근으로 가진다. $\Rightarrow k = \frac{1}{6}, a = \frac{5}{3}$



COMMENT 확률과 통계 25

남자 A의 위치를 고정시키자. 아내의 위치는 맞은 편으로 정해진다.

나머지 6명을 배열하는 경우의 수는 $3! \times 2^3$ 이다.

COMMENT 확률과 통계 28

Case1) $f(1) = 1, f(4) = 5 : {}_5H_2 \times {}_2H_2 = 45$

Case2) $f(1) = 2, f(4) = 4 : {}_3H_2 \times {}_3H_2 = 36$

Case3) $f(1) = 3, f(4) = 3 : {}_1H_2 \times {}_4H_2 = 10$

COMMENT 확률과 통계 29

(전체 배열) - (A 이웃) - (B 이웃) + (A 이웃 \cap B 이웃)

$$= \frac{7!}{3!2!} - \left(\frac{4!}{2!} \times 5 + \frac{4!}{2!} \times 5 \times 4 \right) - \frac{6!}{3!} + (3! \times 4 + 3! \times 4 \times 3)$$

※ $\frac{4!}{2!} \times 5$ 는 A가 모두 이웃하는 경우의 수, $\frac{4!}{2!} \times 5 \times 4$ 는 A 중 2개만 이웃하는 경우의 수이다.

COMMENT 확률과 통계 30

Case1) $a > b, a > c, a > d$ 인 경우 : 63가지

1) $a = 10, a = 9, a = 8, a = 7, a = 6$: ${}_3H_0 + {}_3H_1 + {}_3H_2 + {}_3H_3 + {}_3H_4 = 35$ 가지

2) $a = 5$: ${}_3H_5 - 3 = 18$ 가지

3) $a = 4$: ${}_3H_6 - 3 - 6 - 9 = 10$ 가지

Case2) $d < a, a < b, a < c$ 인 경우 : 11가지

1) $a = 2, d = 1$: 2가지

2) $a = 2, d = 0$: 3가지

3) $a = 1, d = 0$: 6가지

Case3) $b < a, a < c, a < d$ 인 경우 : 11가지

Case4) $c < a, a < b, a < d$ 인 경우 : 11가지

COMMENT 미적분 27

수열 $\{a_n^2\}$ 은 등차수열이다. $a_n^2 = 4n$ 이므로 $a_n = 2\sqrt{n}$ 이다.

$$a_n(a_{n+1} - a_n) = 2\sqrt{n}(2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n}) = \frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

COMMENT 미적분 28

그래프 그려보자. $n\pi < a_n < \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$ 이다.

COMMENT 미적분 29

세 원 C_1, C_2, C_3 과 직선 l 의 접점을 각각 P, Q, R라 할 때,

$\overline{PQ} = 2\sqrt{a_n}, \overline{QR} = \frac{2}{n}\sqrt{a_n}, \overline{PR} = \frac{2}{n}$ 이다. $2\sqrt{a_n} + \frac{2}{n}\sqrt{a_n} = \frac{2}{n}$ 에서 $a_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ 이다.

$$\sum_{k=2}^n \frac{2k+1}{a_{k-1}a_k} = \sum_{k=2}^n \left\{ \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right\}$$

COMMENT 미적분 30

3^n 의 모든 약수는 $1, 3, 3^2, \dots, 3^n$ 이다.

$(1+3+3^2+\dots+3^n)^2$ 을 전개하면 $1^2+3^2+3^4+\dots+3^{2n}$ 과 $2S(n)$ 의 합이므로

$$S(n) = \frac{(1+3+3^2+\dots+3^n)^2 - (1^2+3^2+3^4+\dots+3^{2n})}{2} = \frac{9}{16}9^n + \frac{3}{4}3^n + \frac{3}{16}$$

이다. $a=9, b=\frac{9}{16}$ 이다.

COMMENT 기하 27

$\overline{FP_{19}} = \overline{F'P_1}, \overline{FP_{18}} = \overline{F'P_2}, \overline{FP_{17}} = \overline{F'P_3}, \dots, \overline{FP_{11}} = \overline{F'P_9}$ 이고

타원의 정의 잘 때리면 답은 $20 \times 9 + 10$ 이다.

COMMENT 기하 28

$\angle POF = 2(\angle PF'F)$ 이므로 $\tan(\angle POF) = 2\sqrt{6}$ 이다.

$\tan(\angle POF)$ 는 $\frac{b}{c}$ 이므로 $a:b:c = 1:2\sqrt{6}:5$ 이다.

쌍곡선의 정의에서 $\overline{FQ} = x$, $\overline{F'Q} = x+2a$ 라 둘 수 있고, $\angle F'QF$ 가 직각이므로 $x^2 + (x+2a)^2 = (2c)^2$ 이다.
또, $2c = 10a$ 이므로 정리하면 $\overline{FQ} = x = 6a$ 이다. $\overline{F'Q} = 8a$ 이다.

COMMENT 기하 29

포물선의 초점 F에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자.

점 H는 y축 위의 점이고 $\angle ACB = \angle AFH$ 이므로 $\overline{OH} = 2p$, $\overline{OA} = 4p$ 이다.

문제의 타원의 두 초점 사이의 거리는 $10p$, 장축의 길이는 $6\sqrt{5}p$ 이므로 단축의 길이는 $4\sqrt{5}p$ 이다. 따라서 $p = \sqrt{5}$, $k = 4p = 4\sqrt{5}$ 이다.

COMMENT 기하 30

$\overline{OQ} = \overline{OP} + \overline{PQ} = 2a$ 이고 $\overline{QP} = \overline{FP}$ 이므로 $\overline{FP} + \overline{OP}$ 의 값은 $2a$ 로 일정.

점 P의 자취는 두 점 F, O를 초점으로 하고 장축의 길이가 $2a$ 인 타원이다.

\overline{FP} 의 최댓값은 $a+b$, 최솟값은 $a-b$ 이므로 $a=4$, $b=2$ 이다.

점 P의 자취의 방정식은 $\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ 이고, 대충 평행이동하고 기울기가 $\frac{1}{2}$ 인 접선을 긋자. $d = \frac{4}{\sqrt{5}}$ 이다.