the most perfect,

Simplest Digital Notebook

Basic Notebook

designed and shared to you by ventilattenoice

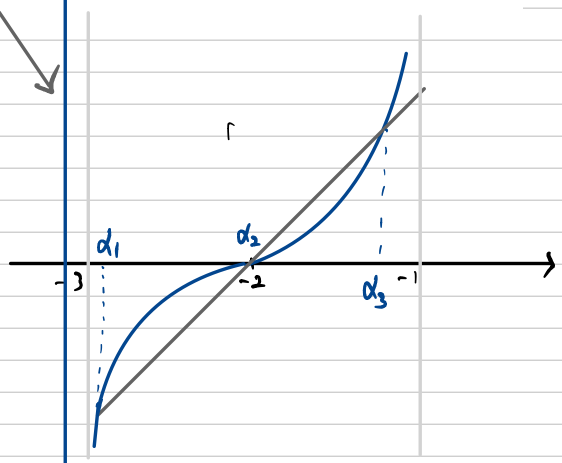
OVER THE HILLS AND FAR AWAY

• 히파수스 모의고사 1회 4점문항 해설

9. 열린구간 $(-3,\ -1)$에서 방정식 $\boxed{k\tan\frac{\pi x}{2}-2=x}$의 서로 다른 실근의 곱이 $-\frac{64}{9}$일 때, k의 값은? (단, k는 양수이다.) [4점]

① $\frac{\sqrt{3}}{9}$ ② $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ $\frac{4\sqrt{3}}{9}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{9}$

$y=k\tan\frac{\pi}{2}x$, $y=x+2$



$\tan x$ 대칭성에 의해 $2\alpha_2=\alpha_1+\alpha_3$

$\alpha_2=-2$, $\alpha_1=-2-p$, $\alpha_3=-2+p$

$2p^2-8=-\frac{64}{9}$

$p=\frac{2}{3}$

$\frac{2}{3}=k\tan\frac{\pi}{3}$

$\boxed{k=\frac{2}{3\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{9}}$ ②

Comment
탄젠트함수의 점대칭성을 이용해 계산을 처리하는 문항이였습니다.

참고 기출문항 20231109

9. 함수

$$\boxed{f(x)=a-\sqrt{3}\tan 2x}$$

가 닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{6},\ b\right]$에서 최댓값 7, 최솟값 3을 가질 때, $a\times b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{5\pi}{12}$ ③ $\frac{\pi}{3}$ ④ $\frac{\pi}{4}$ ⑤ $\frac{\pi}{6}$

탄젠트 함수를 이용한 간단한 조건처리에서
위 문항과 유사성을 갖습니다

10. 이차함수 $f(x)$의 한 $\boxed{\text{부정적분을 } F(x)}$라 하자. 다음 조건을 만족시키는 a의 값이 $-1,\ 3$일 때, $F(2)$의 값은? [4점]

> 곡선 $y=F(x)$ 위의 점 $(a, F(a))$에서의 접선의 방정식은 $\boxed{y=f'(a)(x-a)+a}$이다.

① 8　② 10　③ 12　④ 14　⑤ 16

$F'(x)=f(x)$

$f(a)(x-a)+F(a)=f'(a)(x-a)+a$

$\{a \mid f(a)(x-a)+F(a)=f'(a)(x-a)+a\}=\{-1, 3\}$

$\downarrow$

$f(-1)=f'(-1),\ f(3)=f'(3),\ F(3)=3,\ F(-1)=-1$

$\downarrow$

$f(x)-f'(x)=k(x+1)(x-3)=kx^2-2kx-3k$

$\downarrow$

$f(x)=kx^2-3k$

$\downarrow$

$F(x)=\frac{k}{3}x^3-3kx+C$

$\downarrow$

$F(-1)=\frac{8}{3}k+C=-1,\quad F(3)=C=3$

$\downarrow$

$k=-\frac{3}{2},\quad C=3$

$\downarrow$

$\boxed{F(2)=8}$

Comment

접선의 방정식을 이용해 계산하는 문항이였습니다

11. 첫째항이 -85이고 공차가 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$가 있다. 수열 $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\boxed{b_n = \sqrt{\frac{a_n}{2n-21}}}$$

를 만족시킬 때, $a_{11} \times b_{11}$의 값은? [4점]

① $3\sqrt{3}$ ② 8 ③ $5\sqrt{5}$ ④ $6\sqrt{6}$ ⑤ $7\sqrt{7}$

$a_n = d(n-1)-85 \quad d \in \mathbb{N}$

$10d-85>0$

$9d-85<0$

$\frac{a_n}{2n-21} \geq 0 \longrightarrow a_{10}<0, \ a_{11}>0$

$\frac{85}{10} < d < \frac{85}{9}$

$\boxed{d=9}$

$a_n = 9n-94$

$a_{11} \times b_{11} = a_{11}\sqrt{a_{11}} = \boxed{5\sqrt{5}}$

Comment

수열 {bn}이 모든 자연수 n에 대하여 정의되기 위한 숨겨진 조건을 찾아 {an}을 결정하는 문항이였습니다

참고 기출문항 20161130(B형)

30. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x \leq b$일 때, $f(x) = a(x-b)^2 + c$이다. (단, a, b, c는 상수이다.)
(나) 모든 실수 x에 대하여 $\boxed{f(x) = \int_0^x \sqrt{4-2f(t)}\,dt}$이다.

$\int_0^6 f(x)dx = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

f(x)가 잘 정의되어 있으므로 근호 안의 식이 항상 0이상이다라는 내용이 위 문항과 유사합니다

13. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\boxed{f(x+1)+f(x)=x^2}$$

를 만족시킬 때, $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{13}{2}} f(x)dx$의 값은? [4점]

① $\frac{139}{4}$ ② $\frac{141}{4}$ ③ $\frac{143}{4}$ ④ $\frac{145}{4}$ ⑤ $\frac{147}{4}$

$$f(x+2)+f(x+1)=x^2+2x+1$$

$$\begin{array}{rl} & f(x+2)+f(x+1)=x^2+2x+1 \\ - & f(x+1)+f(x)=x^2 \\ \hline = & f(x+2)-f(x)=2x+1 \end{array}$$

$$\int_x^{x+2} f(t)dt = x^2+x+C$$

$$\int_0^2 f(t)dt = C = \frac{1}{3} \quad \left(\because \int_0^1 f(x+1)+f(x) = \int_0^1 x^2dx = \int_0^2 f(x)dx\right)$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{13}{2}} f(x)dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{5}{2}}^{\frac{9}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{9}{2}}^{\frac{13}{2}} f(x)dx$$

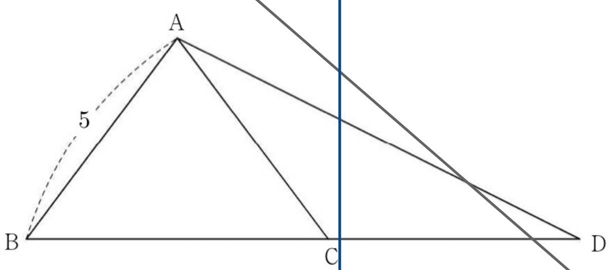
$$\boxed{\therefore \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{13}{2}} f(x)dx = \frac{141}{4}}$$

Comment
주어진식을 조작하여 정적분 형태의 식을 만들어내야 합니다

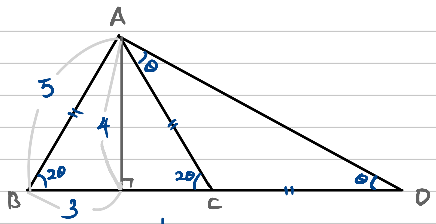
13. 그림과 같이 $\overline{AB}=5$, $\boxed{\cos(\angle ABC)=\frac{3}{5}}$ 인 삼각형 ABC가 있다. 선분 BC 위의 점 D에 대하여

$$\boxed{\angle ABC=\angle ACB=2\angle CAD}$$

일 때, 삼각형 $\boxed{\text{ACD의}}$ 넓이는? [4점]



① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16



$\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{CD}=5$, $\overline{BD}=11$

$\triangle ABD-\triangle ABC$

$\frac{1}{2}\times5\times11\times\frac{4}{5}-\frac{1}{2}\times3\times4$

$\boxed{\triangle ACD=10}$

Comment

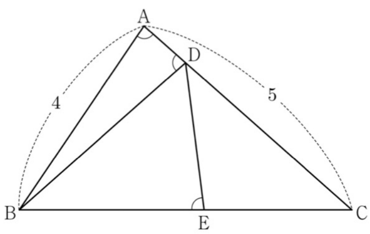
주어진 조건으로 각들을 표시하고 삼각형을 푸는게 도형문제의 기본 태도입니다

참고 기출문항 20220612

12. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=5$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{1}{8}$ 인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 점 D와 선분 BC 위의 점 E에 대하여

$$\boxed{\angle BAC=\angle BDA=\angle BED}$$

일 때, 선분 DE의 길이는? [4점]



① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ $\frac{17}{6}$ ⑤ 3

주어진 각도조건에서 위 문항과 유사성을 갖습니다

14. 사차이하의 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\boxed{f(x)+|x| \geq 2}$$

를 만족시킨다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보기>

ㄱ. 함수 $f(x)$는 삼차함수가 아니다.

ㄴ. $f(2)+f(0)+f(-1) \geq 3$

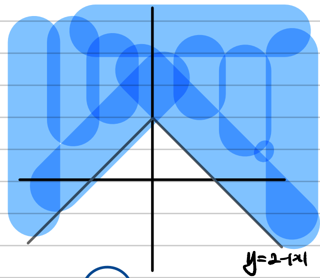
ㄷ. $f(2)+f(0)+f(-1)=3$이면 $f(-4)=36$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

색칠된 부분에만 f(x)가 존재 해야함

$f(x) \geq 2-|x|$



$f(x)$가 삼차함수라면 조건에 모순 → ㄱ. 참

$f(2) \geq 0$, $f(0) \geq 2$, $f(-1) \geq 1$ → $f(2)+f(0)+f(-1) \geq 3$

ㄴ. 참

$f(2)+f(0)+f(-1)=3$

↓

$f(2)=0$, $f(0)=2$, $f(-1)=1$

↓ ★★★

$f'(-1)=1$, $f'(2)=-1$

↓

$f(x)=a(x+1)^4+b(x+1)^3+c(x+1)^2+(x+1)+1$

↓

$a+b+c=0$, $108a+27b+6c=-2$, $81a+27b+9c=-4$

↓

$\boxed{a=\frac{4}{27},\ b=\frac{-22}{27},\ c=\frac{2}{3}}$

↓

$f(x)=\frac{4}{27}(x+1)^4-\frac{22}{27}(x+1)^3+\frac{2}{3}(x+1)^2+(x+1)+1$

↓

$\boxed{f(-4)=38}$ ㄷ. 거짓

Comment

주로 특정한 한가지 주제를 물어보는 ㄱㄴㄷ 문제에선 주제를 명확히 잡고 ㄱ ㄴ ㄷ의 유기성을 느끼며 푸는 연습을 하시길 바랍니다

15. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\boxed{a_{3n-2} = a_1 a_n - 2}$

(나) $a_{3n-1} = a_1 a_n$

(다) $a_{3n} = a_1 a_n + 2$

$a_1^2 - a_1 - 2 = 0 \quad a_1 = 2$ 또는 $a_1 = -1$

$a_1 = 2$ 이면 $a_9 > 0 \longrightarrow \boxed{a_1 = -1}$

$\boxed{a_9 < 0}$일 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{242} a_n$의 값은? [4점]

① 240 ② 241 ③ 242 ④ 243 ⑤ 244

$\boxed{a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n} = 3a_1 a_n}$

$$\sum_{n=1}^{242} a_n = \sum_{n=1}^{243} a_n - a_{243} \longrightarrow \boxed{a_{243} = 3}$$

근거 $\displaystyle\sum_{n=1}^{243} a_n = 3a_1 \sum_{n=1}^{81} a_n = 9a_1^2 \sum_{n=1}^{27} a_n = \cdots = 243a_1^6$

$$\sum_{n=1}^{242} a_n = 243a_1^6 - a_{243} = 243 - 3 = \boxed{240}$$

Comment

간단한 식조작으로 수열의 구조를 파악해야 합니다

참고 기출문항 20201121(나형)

수열의 합을 구하는 과정에서 위 문항과 상당한 유사성을 갖습니다

21. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n} = a_n - 1$

(나) $a_{2n+1} = 2a_n + 1$

$a_{20} = 1$일 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{63} a_n$의 값은? [4점]

① 704 ② 712 ③ 720 ④ 728 ⑤ 736

20. 최고차항의 계수가 1인 $\boxed{\text{사차함수 } f(x)}$가 다음조건을 만족시킬 때, $f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

> $$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{|f(x)|+|f(t)|}-\sqrt{|f(t)|}}{x}}$$ 의 값이 존재하지 않는 실수 t의 값은 0과 3뿐이다.

$f(x)=x^4 \sim$

$\lim_{x\to 0} x=0 \rightarrow \lim_{x\to 0}\sqrt{|f(x)|+|f(t)|}-\sqrt{|f(t)|}=0$

$f(0)=0$

$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{|f(x)|+|f(t)|}-\sqrt{|f(t)|}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{x}\times\frac{1}{\sqrt{|f(x)|+|f(t)|}+\sqrt{|f(t)|}}$

$f'(0)=0$

$\boxed{\{x \mid f(x)=0\}=\{0,3\}}$

I. $|f(t)|\neq 0 \rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{|f(x)|+|f(t)|}-\sqrt{|f(t)|}}{x}=0$

II. $|f(t)|=0 \rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{|f(x)|}}{x}$ 존재 X $\rightarrow f''(0)\neq 0 \rightarrow \boxed{f(x)=x^2(x-3)^2}$

$\boxed{f(5)=100}$

Comment

복잡한 형태의 극한식을 통해 함수를 추론하는 문항이였습니다

참고 기출문항 20230622

22. 두 양수 a, $b\,(b>3)$과 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases}(x+3)f(x) & (x<0)\\ (x+a)f(x-b) & (x\geq 0)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킬 때, $g(4)$의 값을 구하시오. [4점]

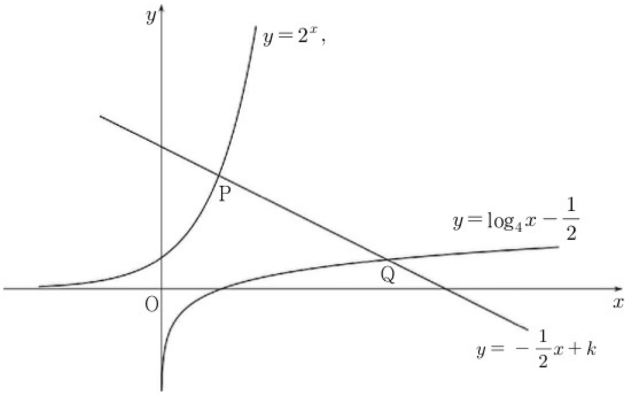
> $$\boxed{\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|}{(x+3)^2}}$$ 의 값이 존재하지 않는 실수 t의 값은 -3과 6뿐이다.

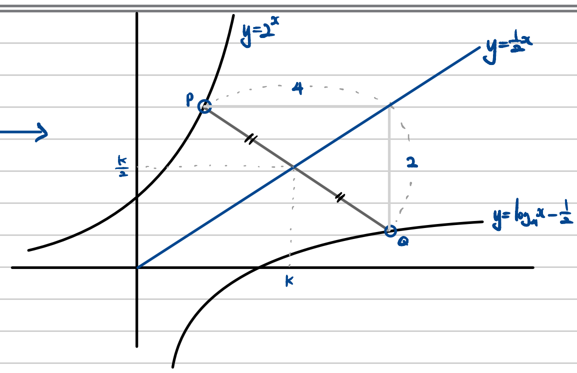
극한식을 조작하는데 있어서 위 문항과 유사성을 갖습니다

21. 직선 $\boxed{y=-\frac{1}{2}x+k}$가 두 함수

$$\boxed{y=2^x,\quad y=\log_4 x-\frac{1}{2}}$$

의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}=2\sqrt{5}$일 때, 2^k-2k의 값을 구하시오. [4점]



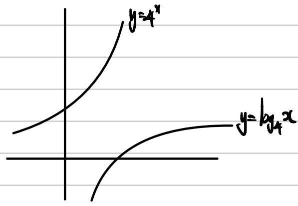


$\mathrm{P}(k-2, \frac{k}{2}+1)$, $\mathrm{Q}(k+2, \frac{k}{2}-1)$

$2^{k-2}=\frac{k}{2}+1$

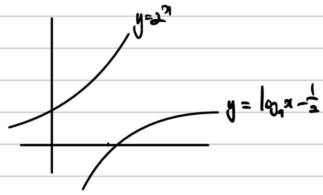
$\boxed{2^k-2k=4}$

+ PLUS



← x계비이 $\frac{1}{2}$ 대칭

→



Comment

대칭성을 이용해 문제를 해결해야하는 문항이였습니다. 이미 기출에선 y=x, y=x+k 대칭을 이용한 문제들이 출제되었으므로 한 번 더 나아가 y=kx의 대칭성을 이용하게끔 했습니다

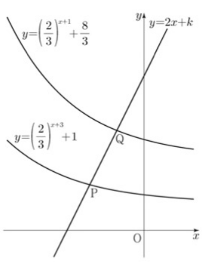
참고 기출문항 220921, 221109

9. 직선 $y=2x+k$가 두 함수

$$y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}+1,\quad y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}+\frac{8}{3}$$

의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{5}$일 때, 상수 k의 값은? [4점]

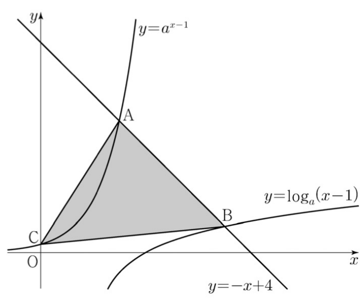
① $\frac{31}{6}$ ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{11}{2}$ ④ $\frac{17}{3}$ ⑤ $\frac{35}{6}$



21. $a>1$인 실수 a에 대하여 직선 $y=-x+4$가 두 곡선

$$y=a^{x-1},\quad y=\log_a(x-1)$$

과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 곡선 $y=a^{x-1}$이 y축과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는 S이다. $50\times S$의 값을 구하시오. [4점]



221109 문항 과는 발문과 주어진 조건의 유사성을 220921 문항 과는 주어진 상황과 유사성을 갖습니다

22. 두 정수 $\boxed{a,\ b\text{와 모든 항의 계수가 정수인 삼차함수 } f(x)}$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x)-ax & (f(x)<0) \\ f(x)+b & (f(x)\ge 0) \end{cases}$$

가 다음조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to 1+}\{g(x)+g(1)\}=5$

(나) $\lim_{x\to 2+}\{g(x)+g(2)\}=3$

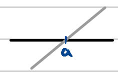
$g(0)=11$일 때, $|g(4)|$의 값을 구하시오. [4점]

$f(\text{정수})=\text{정수}$, $g(\text{정수})=\text{정수}$

if) $g(x)$가 $x=1$ 연속 → $\boxed{\lim_{x\to 1+}\{g(x)+g(1)\}}=2g(1)=\text{짝수}$ — 모순 → $f(1)=0$

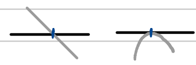
if) $g(x)$가 $x=2$ 연속 → $\boxed{\lim_{x\to 2+}\{g(x)+g(2)\}}=2g(2)=\text{짝수}$ — 모순 → $f(2)=0$

→ $b-a=5$, $b-2a=3$ → $a=2$, $b=7$



f(x)가 x=a 근방에서 -에서+로 바뀌면 g(x)는 x=a에서 연속이다

$x=1, x=2$ 에서



이런 개형이여야 한다.

$f(0)=4$ → $f(x)=(x-1)(x-2)(px+2)$ $\boxed{(p\text{는 정수})}$

$1<-\frac{2}{p}\le 2$

$-2<p\le -1$

$\boxed{p=-1}$

$f(x)=(x-1)(x-2)(-x+2)$

$|g(4)|=20$

Comment

정수조건을 이용하여 함수를 추론해야하는 문항이였습니다

참고 기출문항 23사관12번

12. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & (x\le 2) \\ ax+b & (x>2) \end{cases}$$

에 대하여 $\boxed{f(\alpha)+\lim_{x\to\alpha+}f(x)=4}$를 만족시키는 실수 α의 개수가 4이고, 이 네 수의 합이 8이다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① $-\frac{7}{4}$ ② $-\frac{5}{4}$ ③ $-\frac{3}{4}$ ④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

극한식에서 위 문항과 유사성을 보입니다
(20230630미적 문제에서도 볼 수 있습니다)