제 2 교시

수학 영역(미적분)

홀수형

5지선다형

23. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+4}-2}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(x+1)}{x}\times(\sqrt{x+4}+2)\right]=1\times 4=4$

24. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{3k}{n}}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{13}{9}$ ③ $\frac{14}{9}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{16}{9}$

$=\int_0^1\sqrt{1+3x}\,dx$

$=\frac{1}{3}\int_1^4\sqrt{x}\,dx$

$=\frac{2}{9}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4$

$=\frac{14}{9}$

25. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{3^n+2^{2n-1}}=3$일 때, a_2의 값은? [3점]

수렴 ⇒ $a_n = a\cdot 4^{n-1}$

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

× → 무시

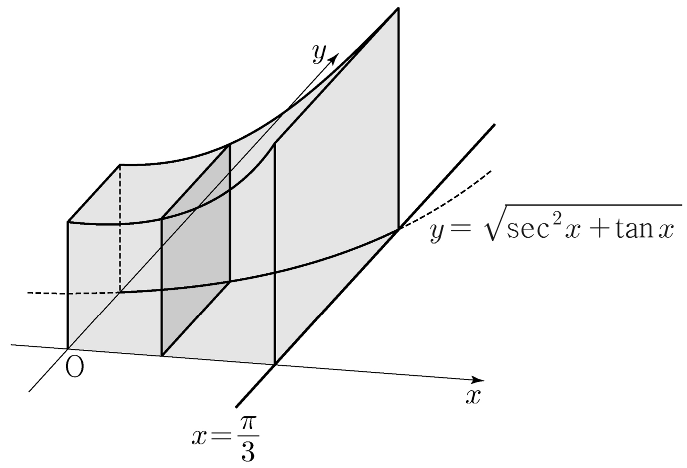
$\lim_{n\to\infty}\frac{a\cdot 4^{n-1}\cancel{+1}}{\cancel{3^n}+2\cdot 4^{n-1}} = \frac{a}{2} = 3$

$a = 6$

$a_n = 6\cdot 4^{n-1}$

$a_2 = 24$

26. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{\sec^2 x+\tan x}\left(0\le x\le\frac{\pi}{3}\right)$와 x축, y축 및 직선 $x=\frac{\pi}{3}$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\ln 2}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln 2$ ③ $\sqrt{3}+\frac{\ln 2}{2}$

④ $\sqrt{3}+\ln 2$ ⑤ $\sqrt{3}+2\ln 2$

$V = \int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sec^2 x+\tan x)\,dx$

$= \left[\tan x - \ln|\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

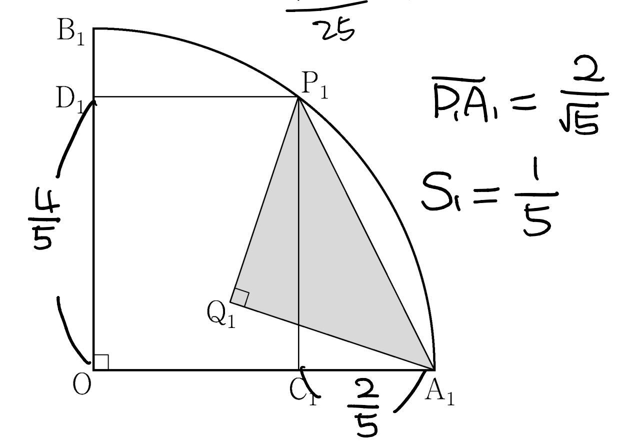
$= (\sqrt{3} - \ln\frac{1}{2})$

$= \sqrt{3} + \ln 2$

27. 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OA_1B_1이 있다. 호 A_1B_1 위에 점 P_1, 선분 OA_1 위에 점 C_1, 선분 OB_1 위에 점 D_1을 사각형 $OC_1P_1D_1$이 $\overline{OC_1}:\overline{OD_1}=3:4$인 직사각형이 되도록 잡는다.
부채꼴 OA_1B_1의 내부에 점 Q_1을 $\overline{P_1Q_1}=\overline{A_1Q_1}$, $\angle P_1Q_1A_1=\frac{\pi}{2}$가 되도록 잡고, 이등변삼각형 $P_1Q_1A_1$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 OA_1 위의 점 A_2와 선분 OB_1 위의 점 B_2를 $\overline{OQ_1}=\overline{OA_2}=\overline{OB_2}$가 되도록 잡고, 중심이 O, 반지름의 길이가 $\overline{OQ_1}$, 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OA_2B_2를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 네 점 P_2, C_2, D_2, Q_2를 잡고, 이등변삼각형 $P_2Q_2A_2$에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]

$\frac{16+4}{25}$ 20

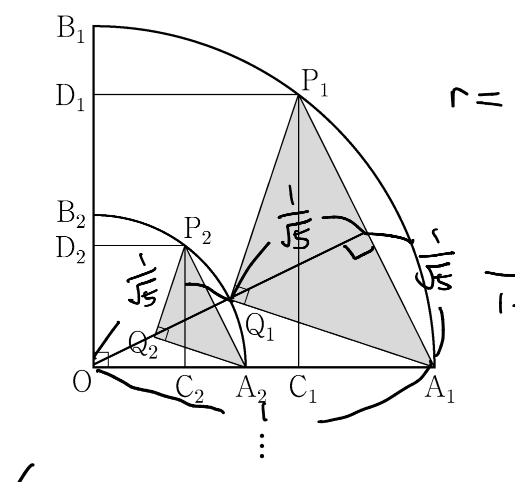
R_1



$\overline{P_1A_1}=\frac{2}{\sqrt5}$

$S_1=\frac{1}{5}$

R_2



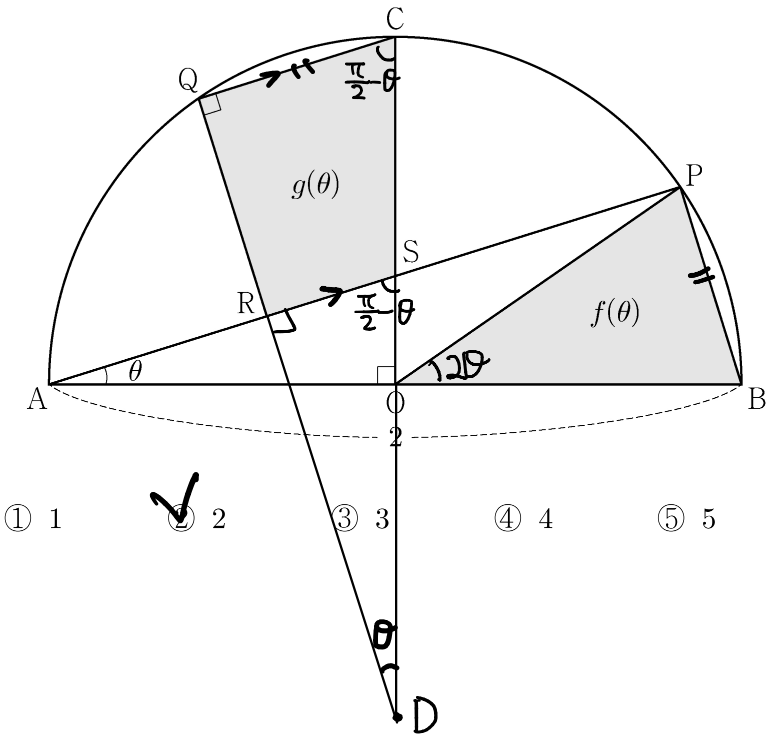
$r=\frac{1}{\sqrt5}$

$\dfrac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{4}$

⋮ ⋮

① $\frac{9}{40}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{11}{40}$ ④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{13}{40}$

28. 그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 $\angle AOC=\frac{\pi}{2}$인 점 C가 있다. 호 BC 위에 점 P와 호 CA 위에 점 Q를 $\overline{PB}=\overline{QC}$가 되도록 잡고, 선분 AP 위에 점 R를 $\angle CQR=\frac{\pi}{2}$가 되도록 잡는다. 선분 AP와 선분 CO의 교점을 S라 하자. $\angle PAB=\theta$일 때, 삼각형 POB의 넓이를 $f(\theta)$, 사각형 CQRS의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to0+}\frac{3f(\theta)-2g(\theta)}{\theta^2}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

△CDQ와 △PAB는 합동 (RHS)

$f(\theta)=\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin2\theta=\frac{1}{2}\sin2\theta$

$OS=\tan\theta$

△CDQ와 △SDR이 닮음이고,
닮음비가 $2:1+\tan\theta$이므로

$g(\theta)=\frac{1}{2}\times2\times2\cos\theta\times\sin\theta\times\left(1-\left(\frac{1+\tan\theta}{2}\right)^2\right)$

$=\sin2\theta\left(\frac{3-2\tan\theta-\tan^2\theta}{4}\right)$

$3f(\theta)-2g(\theta)=\sin2\theta\times\left(\frac{3}{2}-\frac{3-2\tan\theta-\tan^2\theta}{2}\right)$

$=\sin2\theta\times\frac{\tan\theta}{2}\times(\tan\theta+2)$

$\approx2\theta^2$

단답형

29. 세 상수 a, b, c에 대하여 함수 $f(x)=ae^{2x}+be^{x}+c$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)+6}{e^{x}}=1$
>
> (나) $f(\ln 2)=0$

함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\displaystyle\int_{0}^{14}g(x)\,dx=p+q\ln 2$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이고, $\ln 2$는 무리수이다.) [4점]

(가)에서 $e^x\to 0$ 이므로 $f(x)+6\to 0$

$\therefore c=-6$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)+6}{e^x}=\lim_{x\to-\infty}(ae^x+b)=1$

$\therefore b=1$

$f(\ln 2)=4a+2-6=0$

$\therefore a=1$

$\displaystyle\int_0^{14}g(x)dx=\int_{\ln 2}^{\ln 4}tf'(t)dt$ (치환 $x=f(t)$)

$\displaystyle=tf(t)\Big]_{\ln 2}^{\ln 4}-\int_{\ln 2}^{\ln 4}f(t)dt$

$=(\ln 4)\cdot 14-0-(8-6\ln 2)$

$=28\ln 2+6\ln 2-8$

$=34\ln 2-8$

26

30. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=e^{\sin\pi x}-1$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 합성함수 $h(x)=g(f(x))$가 다음 조건을 만족시킨다.

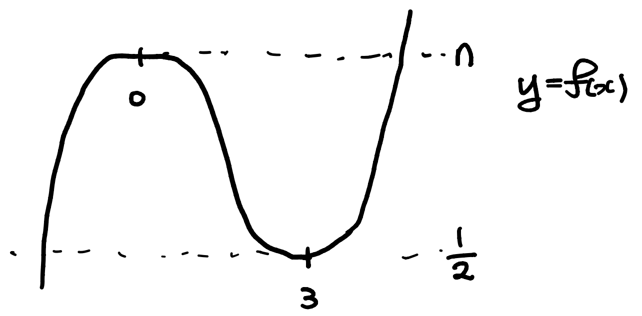
$\pi\cos\pi x\, e^{\sin\pi x}$

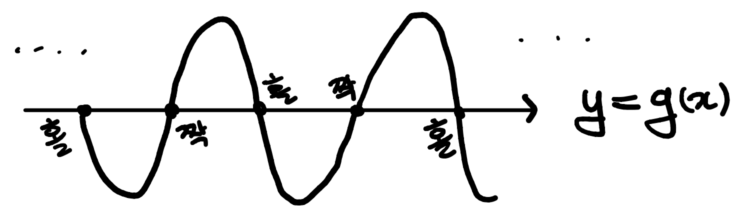
> (가) 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극댓값 0을 갖는다.
>
> (나) 열린구간 $(0, 3)$에서 방정식 $h(x)=1$의 서로 다른 실근의 개수는 7이다.

$f(3)=\dfrac{1}{2}$, $f'(3)=0$일 때, $f(2)=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

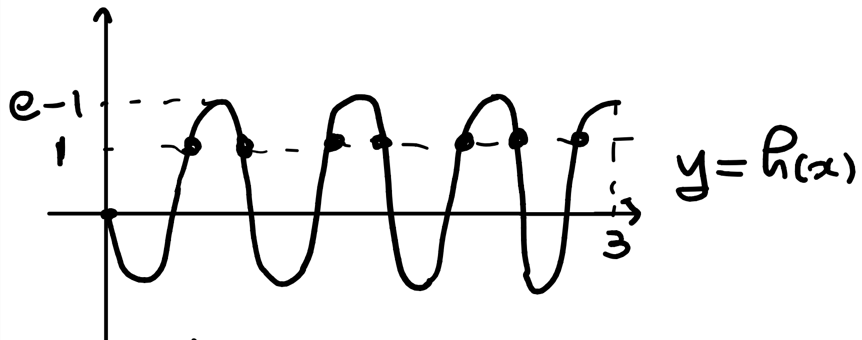
$h(0)=g(f(0))=0 \Rightarrow f(0)=n$ (n은 정수)

$h'(0)=g'(f(0))f'(0)=0 \Rightarrow f'(0)=0$ ($\cos\pi f(0)\neq 0$)





$\Rightarrow$ n이 짝수여야 h(x)가 0에서 극대



(나) $\Rightarrow n=8$

$f(x)=px^2\left(x-\frac{9}{2}\right)+8$

$f(3)=8-\frac{27}{2}p=\frac{1}{2} \Rightarrow p=\frac{5}{9}$

$f(2)=\frac{5}{9}\cdot 4\left(-\frac{5}{2}\right)+8=\frac{22}{9}$

31

> * 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.