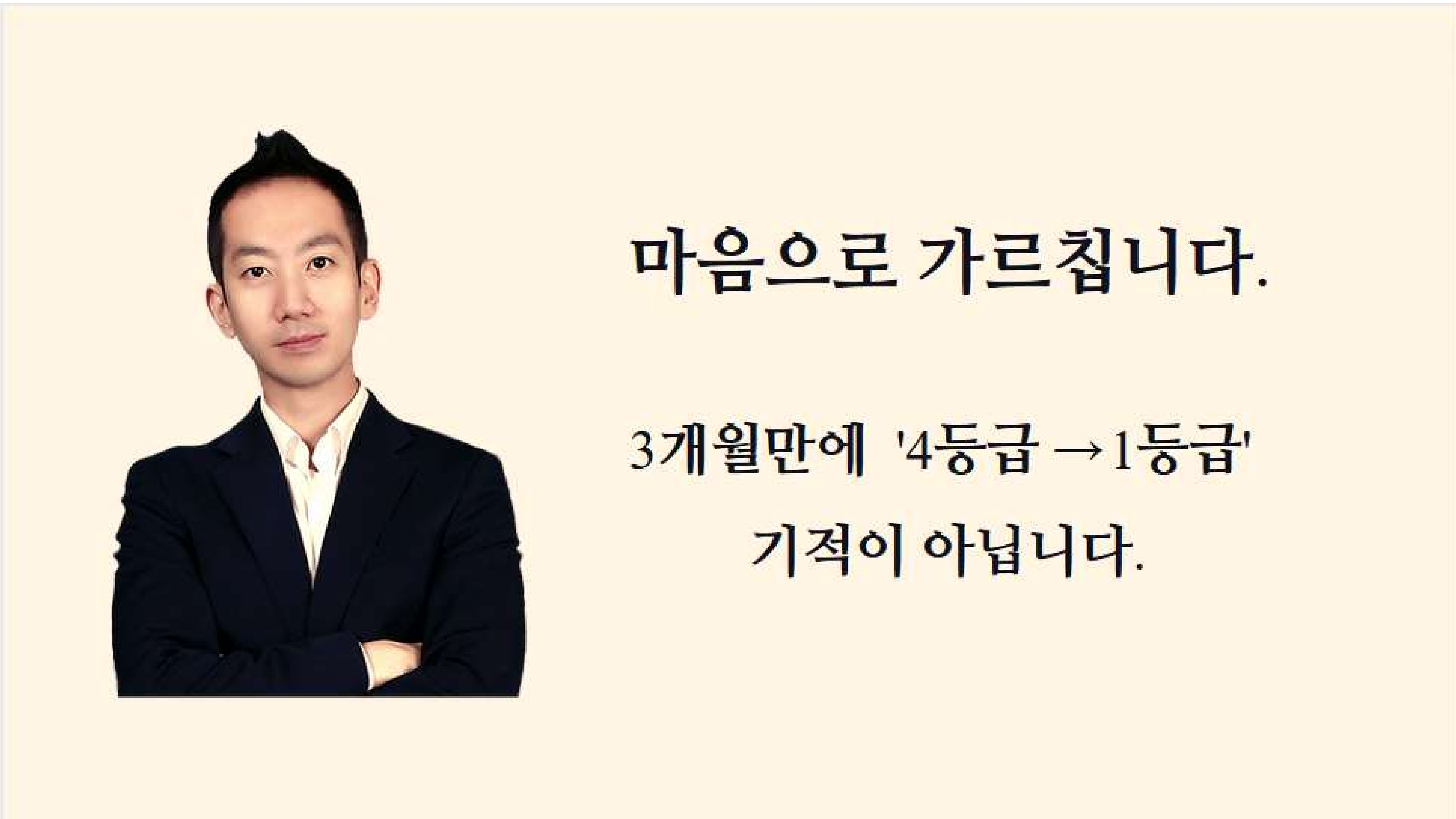


정지호

01075132362

동국대학교 수학교육과
고려대학교 교육대학원 수학교육전공

현) 대치다원본원
전) 중계명인학원
전) 평촌메가 최다수강생/전과목 강의평가 1등
전) 성북메가 고3 문,이과 담임겸임/전과목 강의평가 1등
전) 대원외고 초빙강사

공 부 법

첫째, REVIEW를 암기하고 문제 푸세요.

둘째, 조금이라도 애매하면 모르는 것입니다. 질문하거나 답지를 보세요.

셋째, 답지를 보거나 영상을 보았으면, 답지를 덮고, 반드시 다시 풀어야 합니다.

넷째, 책에 틀리거나 애매한 문제도 반드시 문제 옆에 표시하고, 나중에 다시 풀어야 합니다.

집합과 명제

(1) 집합

(2) 집합의 연산법칙

(3) 명제

$A-B=A\cap B^c=A-(A\cap B)=(A\cup B)-B$

집합과 명제
(1) 집합
(2) 집합의 연산법칙
(3) 명제

※ $p \Rightarrow q$이고 $q \Rightarrow p$일 때, 기호로 $p \Leftrightarrow q$와 같이 나타내고 p는 q이기 위한 필요충분조건이라고 한다. 'p를 q로 정의한다.'는 뜻이기도 하다. 'p는 q와 완벽히 같다.'라는 뜻이다.

1. 산술·기하평균($a>0,\ b>0$)
: $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때, 성립)
: 합의 최솟값을 알 수 있고, 변형하면 $(\frac{a+b}{2})^2 \geq ab$이므로 곱의 최댓값도 알 수 있다.

ex13) $a>0,\ b>0$일 때, $ab=25$일 때, $a+b$의 최솟값, 그 때의 a, b도 구하여라.

풀이) $10,\ a=5, b=5$
$a\ >0,\ b\ >0$ 이므로 산술기하평균에 의해,
$a+b\ \geqq 2\sqrt{ab}\ =2\sqrt{25}=10$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립) $a+b$의 최솟값은 10이다.
$a+b \geqq 10$에서, 10일 때는, 등호가 성립할 때.
즉, $a=b$일 때.
그러므로 $a+b=10$일 때, $a=b$이므로 $a=b=5$이다.

ex14) $a>0,\ b>0$일 때, $a+2b=6$일 때, ab의 최댓값, 그 때의 a, b도 구하여라.

풀이) $\frac{9}{2},\ a=3, b=\frac{3}{2}$
$a\ >0,\ b\ >0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여 $6=a+2b\ \geqq 2\sqrt{a \cdot 2b}=2\sqrt{2ab}$
$6\ \geqq 2\sqrt{2ab},\ \ 3\ \geqq \sqrt{2ab},\ 9\ \geqq 2ab \quad \therefore\ ab\ \leqq \frac{9}{2}$
ab의 최댓값은 $\frac{9}{2}$
$\frac{9}{2} \geqq ab$에서, $\frac{9}{2}$일 때는, 등호가 성립할 때를 찾자.
$a+2b=6$에서 출발했으므로 등호성립조건은 $a=2b$일 때이다. 마지막에 $\frac{9}{2} \geqq ab$라서 $a=b$라고 헷갈리지말자.
문제에서 $a+2b=6$이므로, $a=2b$이려면 3씩 나눠가지면 된다. $a=3, b=\frac{3}{2}$

함수

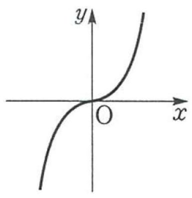
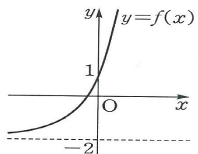
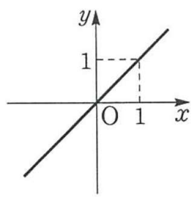
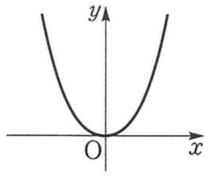
(4) 함수

(5) 유리식과 유리함수

(6) 무리식과 무리함수

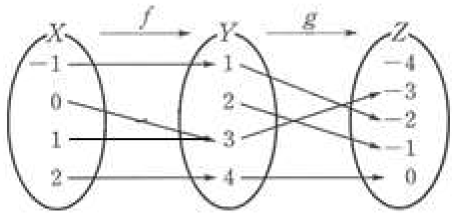
1. 일대일대응 함수가 되기 위한 조건
:수2 에서는 정의역이 실수 전체 집합이므로, 증가함수 또는 감소함수

ex1) 일대일대응 함수의 그래프를 찾아라.

①  ②  ③  ④ 

풀이) ①, ③

2. 합성함수 : 두 함수 $f: X \to Y,\ g: Y \to Z$를 이용하여 $X \to Z$로 가는 함수를 만듦



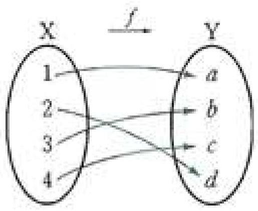
$g \circ f: X \to Z$. 먼저 오는 f가 뒤에 있다는 것을 유의

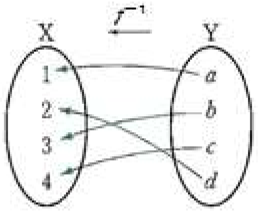
① 정의역X : $\{-1, 0, 1,\ 2\}$
② 공역Z : $\{-4,\ -3,\ -2, -1, 0\}$
③ 치역$(g \circ f)(X)$: $\{-3,\ -2, 0\}$
④ $(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(3) = -3$
⑤ $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(4) = 0$

3. 식에서의 합성
ex9) $f(x) = x - 1,\ g(x) = -2x$

① 교환법칙 성립안함
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x-1) = -2(x-1) = -2x+2$
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(-2x) = -2x-1$
※ 이렇게도 가능
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = -2(f(x)) = -2(x-1) = -2x+2$

4. 역함수 : $f: X \to Y$에서 $Y \to X$로 가는 함수를 만듦.
$f^{-1}: Y \to X$를 만들기 위한 조건이 있다.
f가 일대일대응이여야 한다.





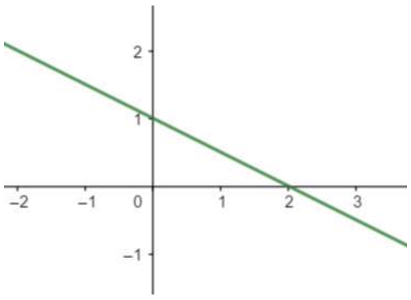
$f: X \to Y$ <=> $f^{-1}: Y \to X$

① $f(1) = a \;\Leftrightarrow\; 1 = f^{-1}(a)$
② $f(2) = d \;\Leftrightarrow\; 2 = f^{-1}(d)$
③ $(f^{-1} \circ f)(2) = f^{-1}(f(2)) = f^{-1}(d) = 2$
④ $(f \circ f^{-1})(c) = f(f^{-1}(c)) = f(4) = c$

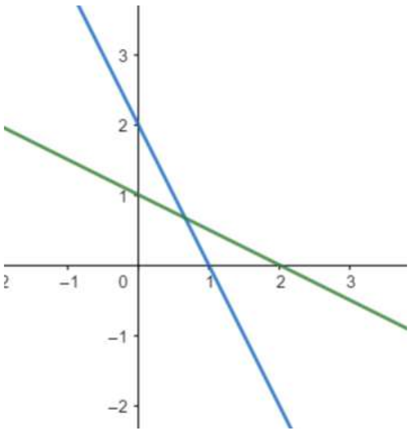
5. 역함수구하기
① x를 y에 대해 표현하기
② x와 y자리 바꾸기

$y = f(x)$ <=> $f^{-1}(y) = x$ => $f^{-1}(x) = y$
역함수 일반적으로 표현

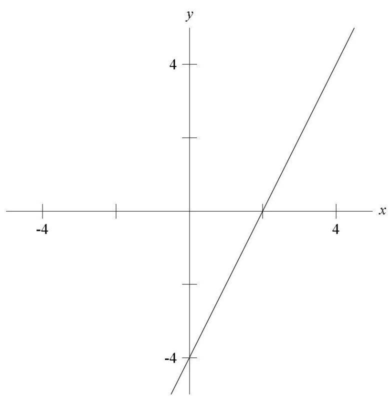
ex11) 함수 $y = f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 함수 $y = f^{-1}(x)$의 그래프를 좌표평면 위에 나타내어라.



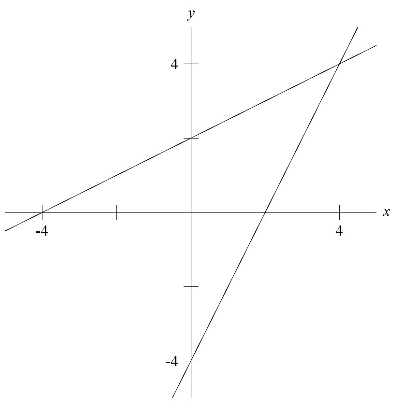
풀이)



ex12) $y = f(x)$의 그래프이다. $y = 2x - 4$이다. $y = x$대칭을 이용하여 $y = f^{-1}(x)$그래프를 그려라. 또한 $y = f^{-1}(x)$를 구하여라.



풀이)



$y = 2x - 4 \;\Leftrightarrow\; x = \dfrac{1}{2}y + 2 \;\Rightarrow y = \dfrac{1}{2}x + 2$

ex13) 다음 함수의 역함수를 구하여라.
$y = x^2 - 2 \ (x \geq 0, y \geq -2)$

풀이)
답: $y = \sqrt{x+2} \ (x \geq -2)$

$y = x^2 - 2 \ (x \geq 0, y \geq -2)$ 일대일 대응이므로
역함수가 존재

x에 대하여 표현하면,
$x = \pm \sqrt{y+2} \ (x \geq 0, y \geq -2)$

그 중 $x \geqq 0$이므로,
$x = \sqrt{y+2} \ (x \geq 0, y \geq -2)$

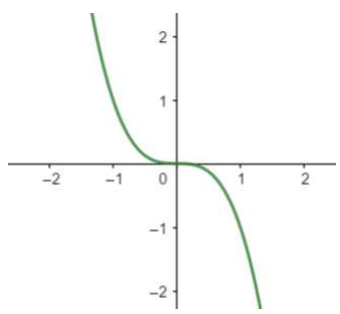
일반적으로 정의역은 x, 공역은 y이므로 바꿔쓰면,
$y = \sqrt{x+2} \ (y \geq 0, x \geq -2)$

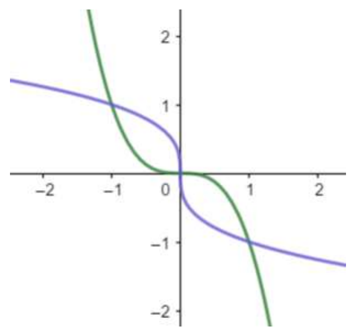
6. 역함수의 특성

① $y = f(x)$가 증가함수이면, $y = f^{-1}(x)$도 증가함수.
$y = f(x)$가 감소함수이면, $y = f^{-1}(x)$도 감소함수.

② 그래프에서 $y = f(x)$와 $y = f^{-1}(x)$는 $y = x$대칭이므로, 보통 $y = f(x)$와 $y = f^{-1}(x)$의 교점은 $y = x$위에 생긴다.
즉, '$y = f(x)$와 $y = f^{-1}(x)$의 교점'은
'$y = f(x)$와 $y = x$의 교점'을 구하면 된다.

단, 함수 $y = f(x)$가 감소함수이면,
'$y = f(x)$와 $y = x$의 교점'으로
'$y = f(x)$와 $y = f^{-1}(x)$의 교점'을 모두 못 구할 수도 있다.
즉, '$y = x$밖에서도 $y = f(x)$와 $y = f^{-1}(x)$의 교점이 생길 수도 있다.'





③ '$y = f(x)$와 $y = f^{-1}(x)$의 교점'이
$y = x$밖에 생길 때,

교점이 (a, b) $(단, a \neq b)$이면 (b, a)도 교점이다.

1) 다음 식의 그래프를 그려라.
$y=|x+2|-1$

2) 다음 식의 그래프를 그려라.
$y=|x+2|+|x-1|$

3) 다음 물음에 답하여라.
(1) $|x|+|y|=4$의 그래프를 그려라.

(2) $2|x|+|y|=8$의 그래프를 그려라.

4) $-1 \le x \le 3$일 때, $y=[x]$의 그래프를 그려라.
(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수를 나타낸다)

5) 다음 함수의 그래프를 그려라.
(1) $y=(x-2)(x-4)$

(2) $y=(x-2)^2$

(3) $y=x^2-4x+6$ ($x^2-4x+6=0$의 실근은 존재하지 않는다.)

6) 다음 그래프를 그려라.

(1) $f(x)=2(x-1)(x-3)(x-5)$

(2) $f(x)=-2(x-1)(x-3)(x-5)$

(3) $f(x)=2(x-1)^2(x-3)$

(4) $f(x)=2(x-1)(x-3)^2$

(5) $f(x)=2(x-1)^3$

(6) $f(x)=2(x-1)(x^2+x+1)$

7) 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f가 $f\left(\dfrac{x+1}{2}\right)=3x+2$를 만족시킬 때, $f\left(\dfrac{1-2x}{3}\right)$를 구하여라.

8) $f(2)=1$, $g^{-1}(3)=2$일 때, $f^{-1}(1)+g(2)$의 값을 구하여라.

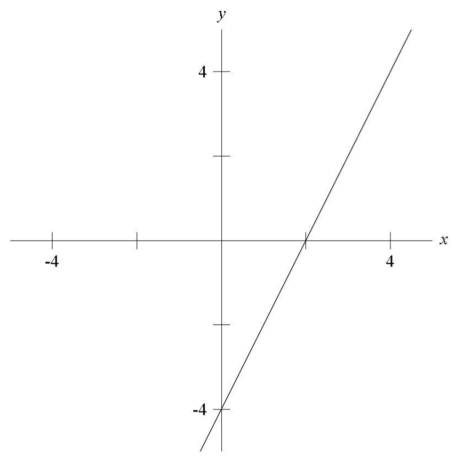
9) 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=ax+b$에 대하여 $f^{-1}(4)=2,\ f^{-1}(-5)=-1$이다. 이때 두 상수 $a,\ b$에 대하여 a^2+b^2의 값을 구하여라.

10) 다음 함수의 역함수를 구하여라.

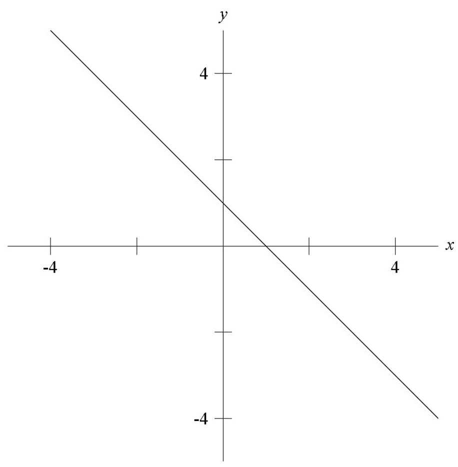
(1) $y=x-2$

(2) $y=x^2-2\ \ (x \geq 0,\ y \geq -2)$

11) 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프를 좌표평면 위에 나타내어라.



12) 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프를 좌표평면 위에 나타내어라.



13) 함수 $f(x)=\frac{1}{4}x-3$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 좌표가 $(a,\ b)$일 때, $a+b$의 값을 구하여라.

14) 함수 $f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2+2\ \ (x \geq 2,\ y \geq 2)$에 대하여 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 서로 다른 두 점에서 만난다. 이때 두 점 사이의 거리를 구하여라.

함수

(4) 함수

(5) 유리식과 유리함수

(6) 무리식과 무리함수

1. 유리식 : 다항식과 분수식을 통틀어 유리식이라고 한다. 하지만 이 단원에서는 거의 분수식만을 다루므로 분수식을 유리식이라고 생각해도 상관없다.

2. 식다루기

① $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad=bc$

3. 부분분수 : $\frac{C}{AB}=\frac{C}{B-A}(\frac{1}{A}-\frac{1}{B})$

ex1) $\frac{b}{a(a+b)}$를 부분분수를 적용하여 표현하여라.

풀이) $\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b}$

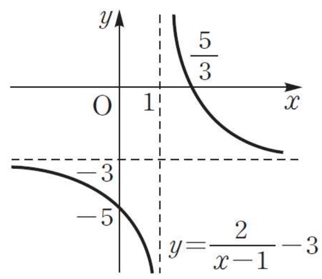
$\frac{b}{b}(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b})=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b}$

4. 유리함수 : 이 단원에서는 분수함수라 생각해도 무방하다.

ex2) 다음 함수의 그래프를 그리고(y절편도 표시), 정의역과 치역, 점근선, 대칭점, 대칭인 직선을 구하여라.

$y=\frac{2}{x-1}-3$

풀이)



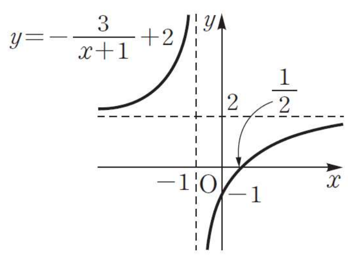
점근선 : $x=1, y=-3$
정의역: $\{x|x\neq 1$인 실수$\}$
치역 : $\{y|y\neq -3$인 실수$\}$
대칭점 : $(1,-3)$
대칭직선 : $y=x-4, y=-x-2$

ex3) 다음 함수의 그래프를 그리고(y절편도 표시), 정의역과 치역, 점근선, 대칭점, 대칭인 직선을 구하여라.

$y=\frac{2x-1}{x+1}$

풀이)

$y=\frac{2x-1}{x+1}=\frac{2(x+1)-3}{x+1}=-\frac{3}{x+1}+2$

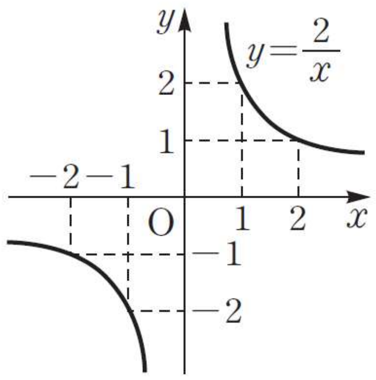


점근선 : $x=-1, y=2$
정의역: $\{x|\, x\neq -1$인 실수$\}$
치역 : $\{y|\, y\neq 2$인 실수$\}$
대칭점 : $(-1,2)$
대칭직선 : $y=x+3, y=-x+1$

ex4) 다음 함수의 그래프를 그리고, 정의역과 치역, 점근선, 대칭점, 대칭인 직선을 구하여라.

$y=\frac{2}{x}$

풀이)



점근선 : $x=0, y=0$

정의역: $\{x \mid x \neq 0$인 실수$\}$

치역 : $\{y \mid y \neq 0$인 실수$\}$

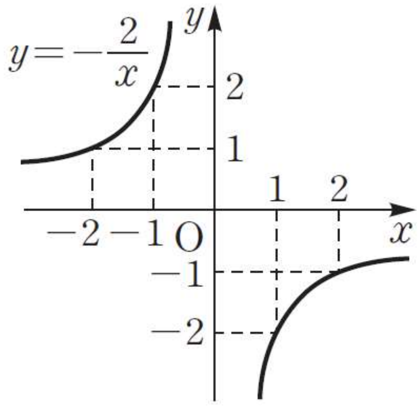
대칭점 : $(0,0)$

대칭직선 : $y=x, y=-x$

ex5) 다음 함수의 그래프를 그리고, 정의역과 치역, 점근선, 대칭점, 대칭인 직선을 구하여라.

$y=-\frac{2}{x}$

풀이)



점근선 : $x=0, y=0$

정의역: $\{x \mid x \neq 0$인 실수$\}$

치역 : $\{y \mid y \neq 0$인 실수$\}$

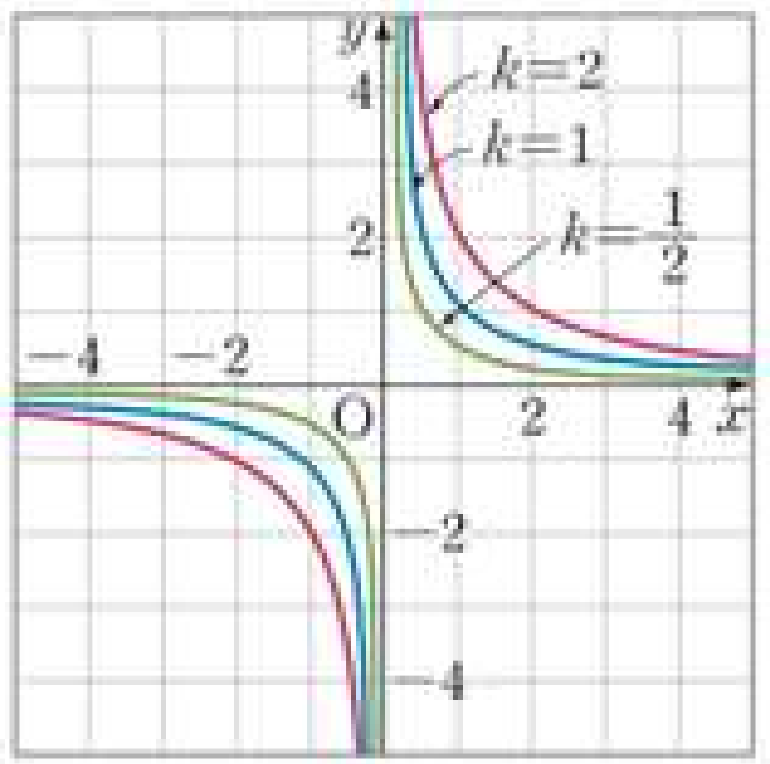
대칭점 : $(0,0)$

대칭직선 : $y=x, y=-x$

ex6) 다음 함수의 그래프들을 한 번에 그려라.

$y=\frac{2}{x}$, $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{1}{2x}$

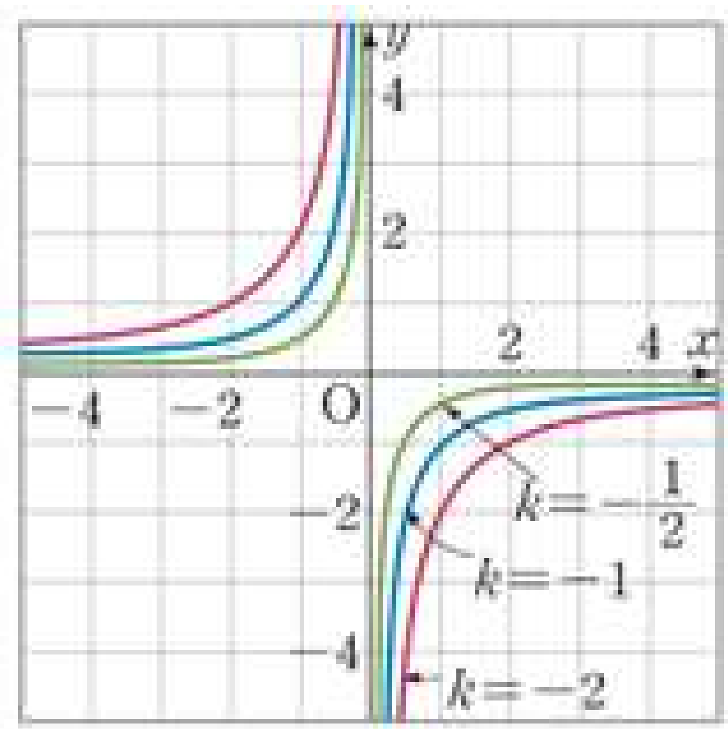
풀이) $y=\frac{k}{x}$



ex7) 다음 함수의 그래프들을 한 번에 그려라.

$y=-\frac{2}{x}$, $y=-\frac{1}{x}$, $y=-\frac{1}{2x}$

풀이) $y=\frac{k}{x}$



※ $y=\frac{k}{x}(k \neq 0)$의 그래프는 $|k|$의 값이 클수록 원점으로부터 멀어진다.

15) 다음 식을 간단히 하여라.

$$\frac{1}{x(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+6)}+\frac{1}{(x+6)(x+8)}$$

16) $x^2-3x+1=0$일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $x^2+\frac{1}{x^2}$

(2) $x^3+\frac{1}{x^3}$

함수

(4) 함수

(5) 유리식과 유리함수

(6) 무리식과 무리함수

1. 제곱근의 성질

① $a<0,\ b<0$ 일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$

② $a>0,\ b<0$ 일 때, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

③ a에 관계없이, $(\sqrt{a})^2=a$

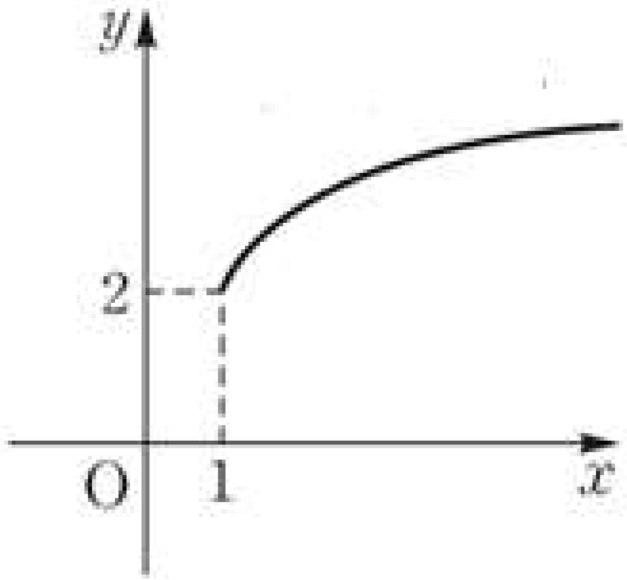
④ a에 관계없이, $(\sqrt{a^2})=|a|$

※ $|a|^2=a^2$

2. 무리함수

ex3) 다음 함수의 그래프를 그리고, 시작점, 정의역과 치역을 구하여라.
$y=\sqrt{x-1}+2$

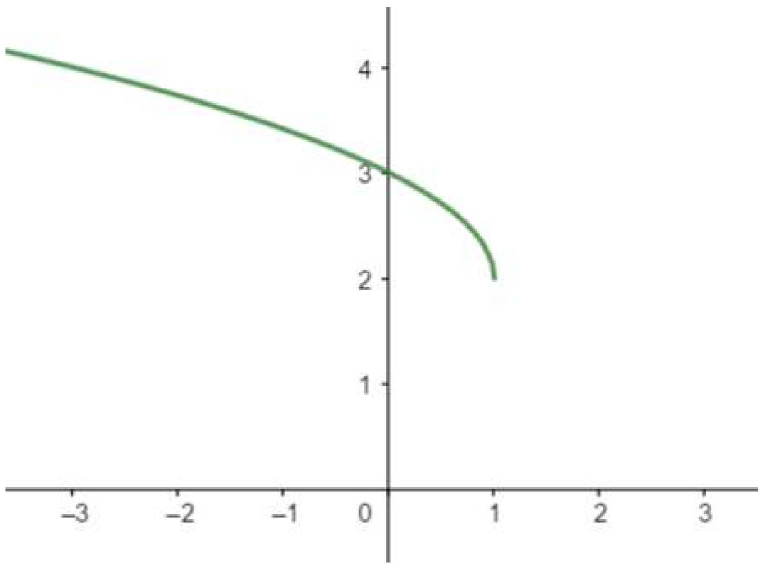
풀이)



시작점 : $(1,2)$
정의역 : $\{x \mid x \geq 1\}$
치역 : $\{y \mid y \geq 2\}$

ex4) 다음 함수의 그래프를 그리고(y절편도 표시), 시작점, 정의역과 치역을 구하여라.
$y=\sqrt{1-x}+2$

풀이)

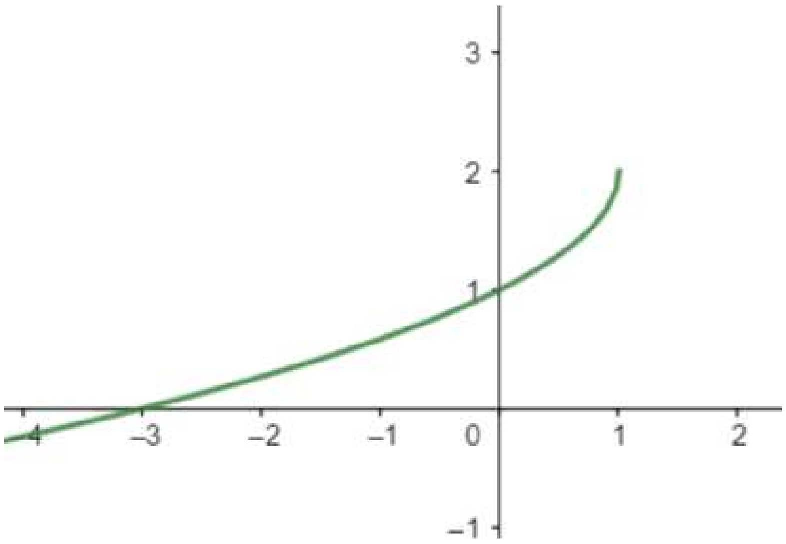


시작점 : $(1,2)$
정의역 : $\{x \mid x \leq 1\}$
치역 : $\{y \mid y \geq 2\}$

ex5) 다음 함수의 그래프를 그리고(y절편도 표시), 시작점, 정의역과 치역을 구하여라.

$y=-\sqrt{1-x}+2$

풀이)



시작점 : $(1,2)$

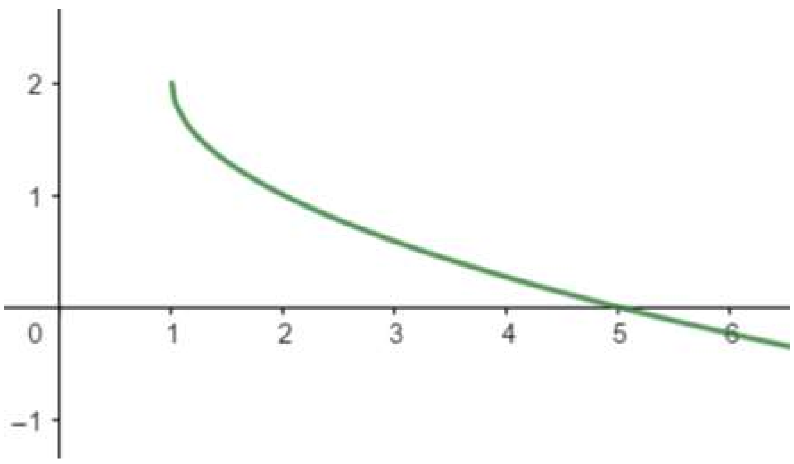
정의역 : $\{x \mid x \le 1\}$

치역 : $\{y \mid y \le 2\}$

ex6) 다음 함수의 그래프를 그리고, 시작점, 정의역과 치역을 구하여라.

$y=-\sqrt{x-1}+2$

풀이)



시작점 : $(1,2)$

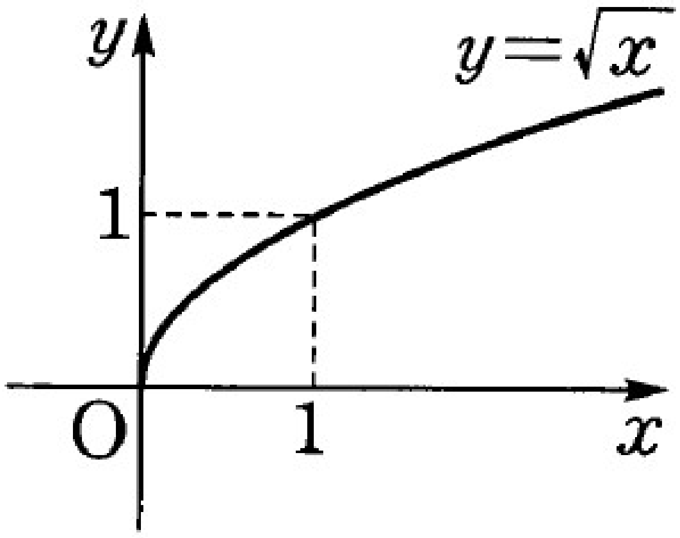
정의역 : $\{x \mid x \ge 1\}$

치역 : $\{y \mid y \le 2\}$

ex7) 다음 함수의 그래프를 그리고, 시작점, 정의역과 치역을 구하여라.

$y=\sqrt{x}$

풀이)



시작점 : $(0,0)$

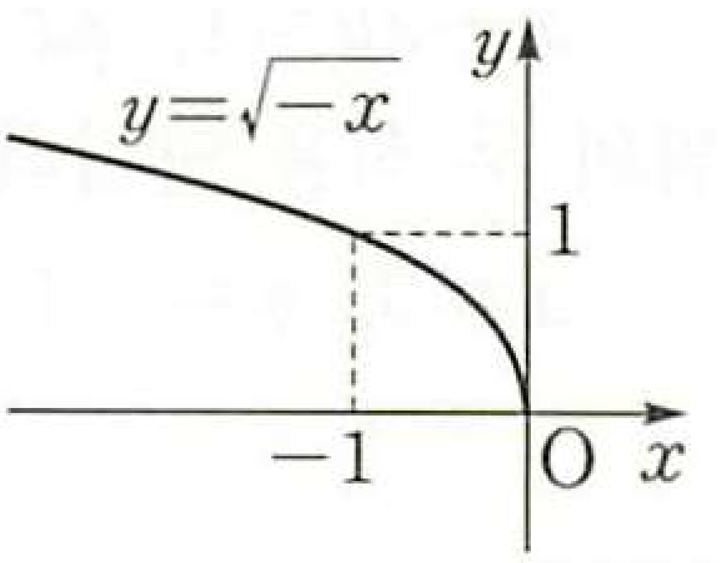
정의역 : $\{x \mid x \ge 0\}$

치역 : $\{y \mid y \ge 0\}$

ex8) 다음 함수의 그래프를 그리고, 시작점, 정의역과 치역을 구하여라.

$y=\sqrt{-x}$

풀이)



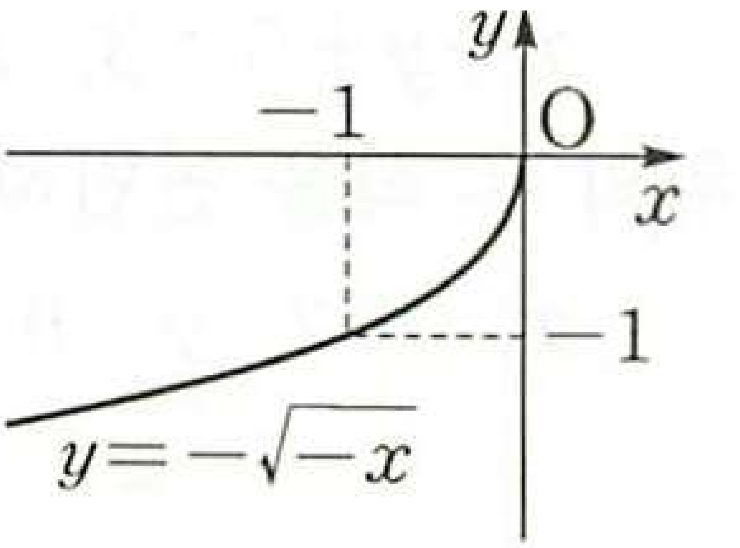
시작점 : $(0,0)$

정의역 : $\{x \mid x \le 0\}$

치역 : $\{y \mid y \ge 0\}$

ex9) 다음 함수의 그래프를 그리고, 시작점, 정의역과 치역을 구하여라.
$y=-\sqrt{-x}$

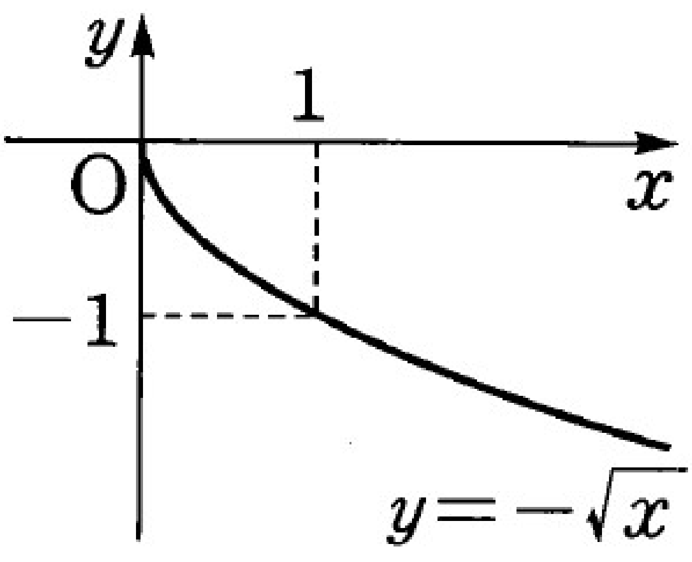
풀이)



시작점 : $(0,0)$
정의역 : $\{x \mid x \le 0\}$
치역 : $\{y \mid y \le 0\}$

ex10) 다음 함수의 그래프를 그리고, 시작점, 정의역과 치역을 구하여라.
$y=-\sqrt{x}$

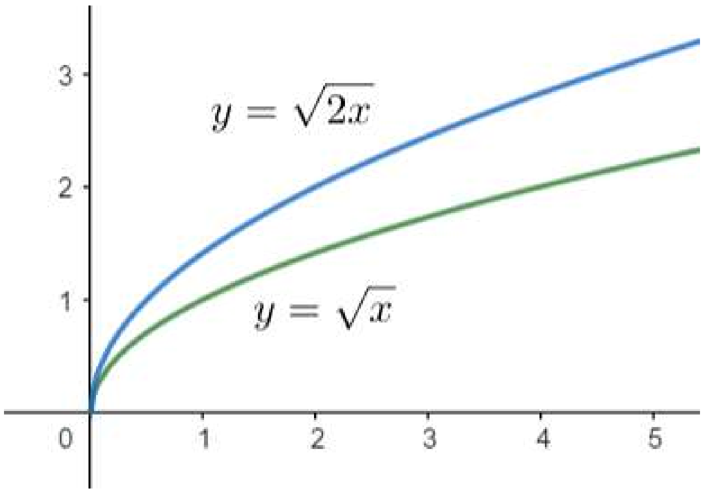
풀이)



시작점 : $(0,0)$
정의역 : $\{x \mid x \ge 0\}$
치역 : $\{y \mid y \le 0\}$

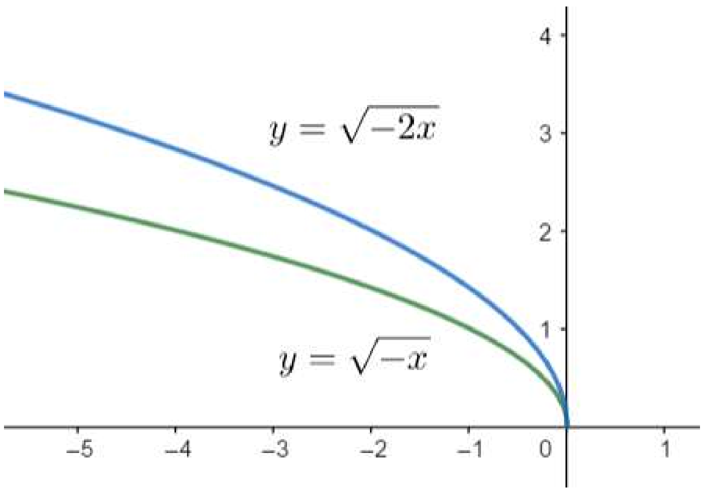
ex11) 다음 함수의 그래프들을 한 번에 그려라.
$y=\sqrt{x}, y=\sqrt{2x}$

풀이)



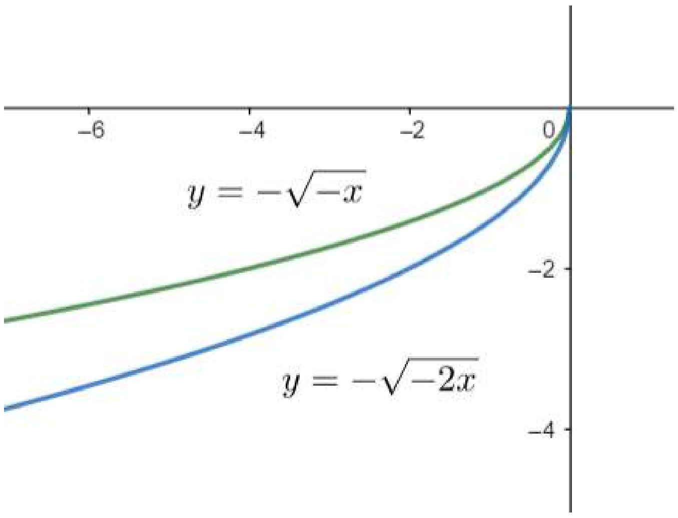
ex12) 다음 함수의 그래프들을 한 번에 그려라.
$y=\sqrt{-x}, y=\sqrt{-2x}$

풀이)



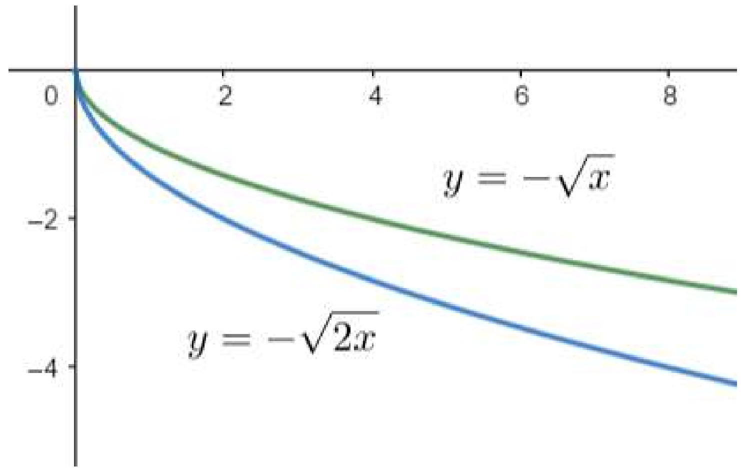
ex13) 다음 함수의 그래프들을 한 번에 그려라.
$y=-\sqrt{-x}, y=-\sqrt{-2x}$

풀이)



ex14) 다음 함수의 그래프들을 한 번에 그려라.
$y=-\sqrt{x}, y=-\sqrt{2x}$

풀이)



※ 무리함수 $y=\pm\sqrt{ax}$ $(a\neq 0)$의 그래프는 $|a|$의 값이 클수록 x축으로부터 멀어진다.

17) 무리함수 $y=\sqrt{4x-8}+5$의 그래프는 무리함수 $y=2\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동 한 것이다. 이때 상수 p, q의 값을 구하여라.

18) 무리함수 $y=\sqrt{4x-8}$의 그래프와 직선 $y=x+k$의 위치관계가 다음과 같을 때, 상수 k의 값 또는 범위를 구하여라.

(1) 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 한 점에서 만난다.

(3) 만나지 않는다.

순열과 조합

(7) 순열과 조합

MINI COMPACT

수(하)

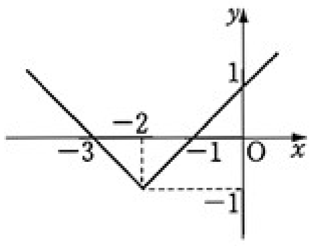
1) 풀이 참조

$x \geq -2$일 때, $x+2 \geq 0$

$f(x)=x+2-1=x+1$

$x < -2$일 때, $x+2 < 0$

$f(x)=-(x+2)-1=-x-3$



2) 풀이 참조

$y=|x+2|+|x-1|$에서

(ⅰ) $x<-2$ 일 때

$y=|x+2|+|x-1|=-x-2-x+1=-2x-1$

(ⅱ) $-2 \leq x < 1$ 일 때

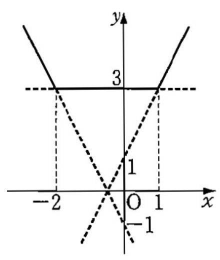
$y=|x+2|+|x-1|=x+2-x+1=3$

(ⅲ) $x \geq 1$ 일 때

$y=|x+2|+|x-1|=x+2+x-1=2x+1$

따라서 그래프는

.



3) 풀이 참조

(1)

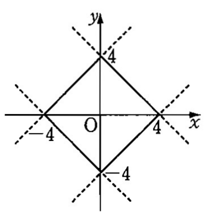
$|x|+|y|=4$에서

$x \geq 0, y \geq 0$일 때 $x+y=4 \quad \therefore y=-x+4$

$x \geq 0, y < 0$일 때 $x-y=4 \quad \therefore y=x-4$

$x < 0, y \geq 0$일 때 $-x+y=4 \quad \therefore y=x+4$

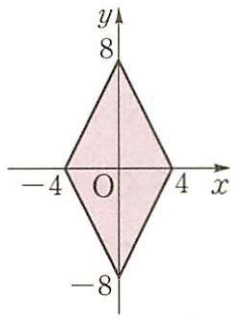
$x < 0, y < 0$일 때 $-x-y=4 \quad \therefore y=-x-4$



(2)

$2|x|+|y|=8$ 의 그래프는

$2x+y=8$, 즉 $y=-2x+8$ 의 그래프에서 $x \geq 0$, $y \geq 0$ 인 부분만 남기고 이 그래프를 x 축, y 축, 원점에 대하여 각각 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같은 마름모이다.



4) 풀이 참조

$y=[x]$에서

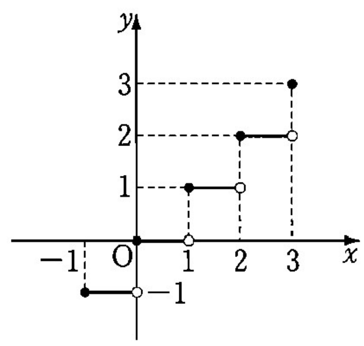
$-1 \leq x < 0$일 때 $y=-1$,

$0 \leq x < 1$일 때 $y=0$,

$1 \leq x < 2$일 때 $y=1$,

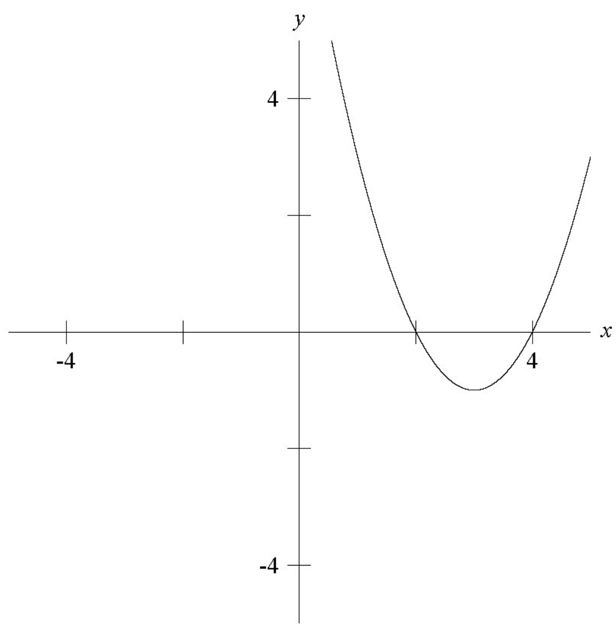
$2 \leq x < 3$일 때 $y=2$,

$x=3$일 때 $y=3$

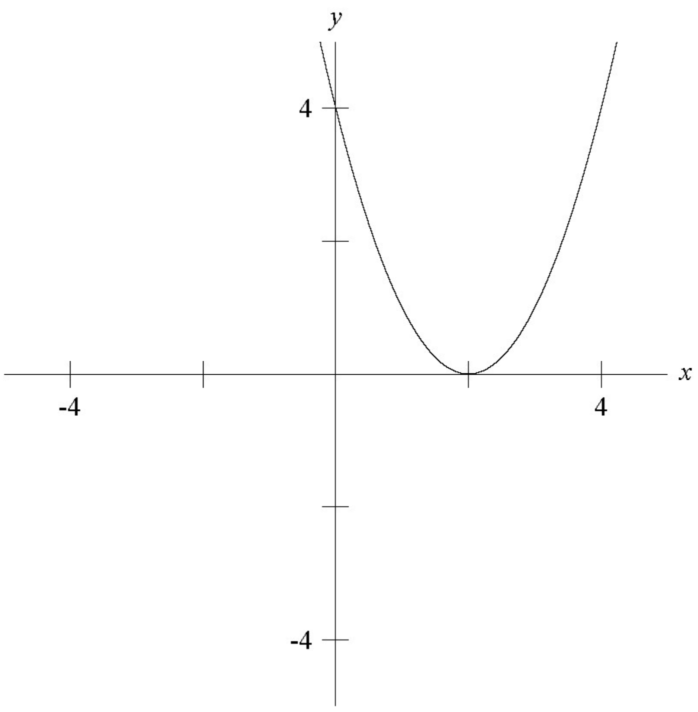


5) 풀이 참조

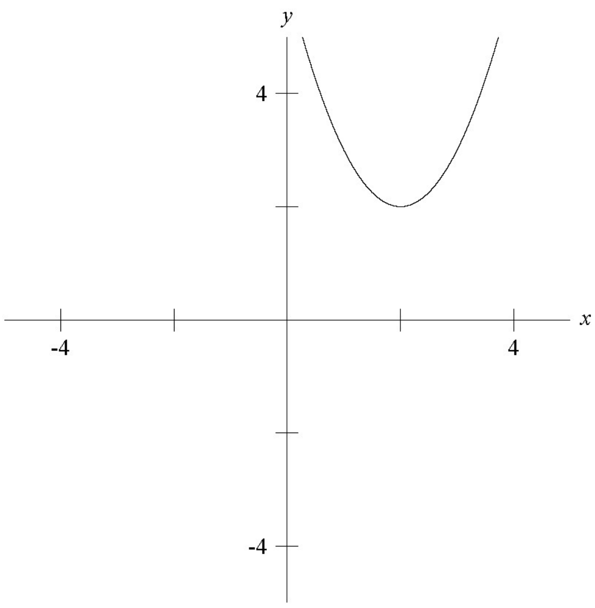
(1)



(2)

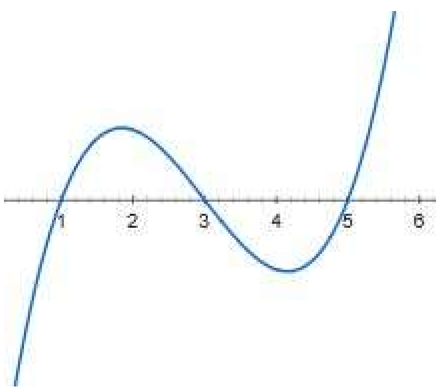


(3)

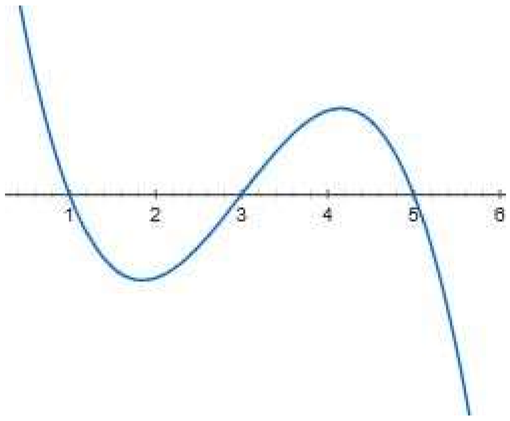


6) 풀이참조

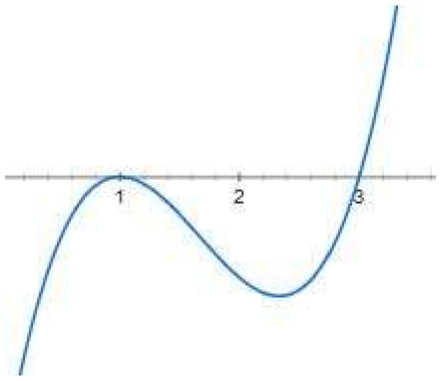
(1) 최고차계수가 양수이므로 꼬랑지가 위쪽이다. x축과 1, 3, 5에서 만나므로 다음과 같다.



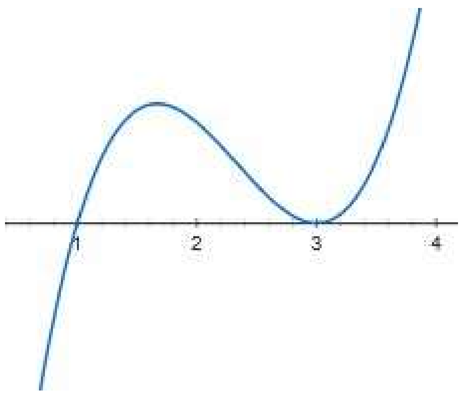
(2) 최고차계수가 음수이므로 꼬랑지가 아래쪽이다. x축과 1, 3, 5에서 만나므로 다음과 같다.



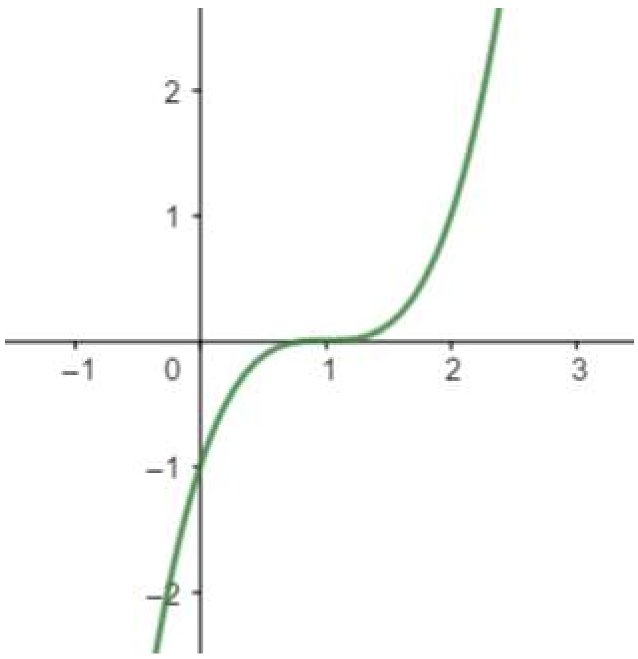
(3) 최고차계수가 양수이므로 꼬랑지가 위쪽이다. x축과 1, 3에서 만나고 $x-1$의 차수가 짝수차를 가지므로 다음과 같다.



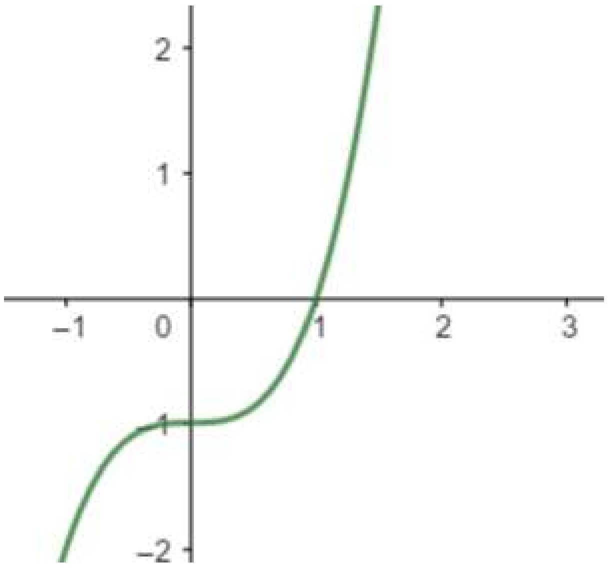
(4) 최고차계수가 양수이므로 꼬랑지가 위쪽이다. x축과 1, 3에서 만나고 $x-2$의 차수가 짝수차를 가지므로 다음과 같다.



(5) 최고차계수가 양수이므로 꼬랑지가 위쪽이다. x축과 1에서 만나고 $x-1$의 차수가 홀수차를 가지므로 다음과 같다.



(6) 최고차계수가 양수이므로 꼬랑지가 위쪽이다. x축과 1에서 만나고 x^2+x+1은 실근을 갖지 않으므로 x축과 교점이 없다. 다음과 같다.



7) $-4x+1$

$f\left(\dfrac{x+1}{2}\right)=3x+2$ 에서 $\dfrac{x+1}{2}=t$ 라 하면 $x=2t-1$

$\therefore\ f(t)=3(2t-1)+2=6t-1$

$\therefore\ f\left(\dfrac{1-2x}{3}\right)=6\times\dfrac{1-2x}{3}-1=-4x+1$

8) 5

$f(2)=1$ 이므로 $f^{-1}(1)=2$

$g^{-1}(3)=2$ 이므로 $g(2)=3$

$\therefore\ f^{-1}(1)+g(2)=2+3=5$

9) 13

$f^{-1}(4)=2$ 이므로 $f(2)=4$

$\therefore\ 2a+b=4$ $\cdots\cdots$ ㉠

$f^{-1}(-5)=-1$ 이므로 $f(-1)=-5$

$\therefore\ -a+b=-5$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3,\ b=-2$

$\therefore\ a^2+b^2=9+4=13$

10) (1) $y=x+2$ (2) $y=\sqrt{x+2}$ $(x\geq -2)$

(1) $y=x-2$는 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 일대일 대응이므로 역함수가 존재한다. $y=x-2$를 x에 대하여 정리하면 $x=y+2$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는 $y=x+2$

(2) 주어진 함수는 정의역이 $\{x\geq -1\}$, 치역이 $\{y\geq -2\}$인 일대일 대응이므로 역함수가 존재한다.

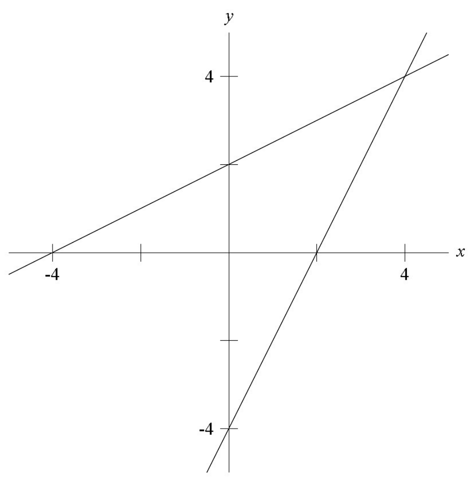
$y=x^2-2$를 x에 대하여 정리하면 $x^2=y+2\ \therefore$ $x=\pm\sqrt{y+2}$

그런데 $x\geq 0$이므로 $x=\sqrt{y+2}$

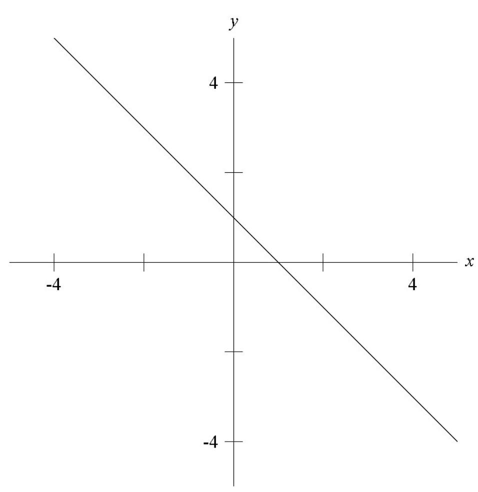
x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\sqrt{x+2}$ $(x\geq -2)$ ←역함수의 정의역은 원래 함수의 치역이므로 $\{x\,|\,x\geq -2\}$

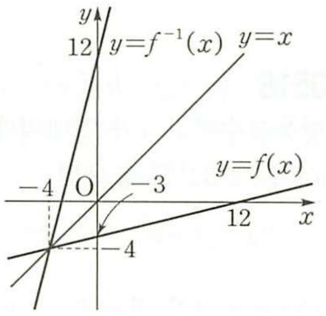
11)



12)



13) -8



$y=f^{-1}(x)$의 그래프는
함수 $y=f(x)$의 그래프와 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같고, 교점의 좌표는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 좌표와 같으므로

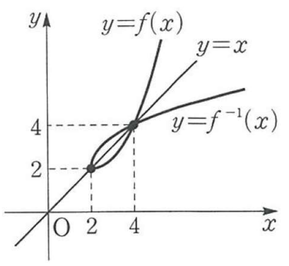
$\frac{1}{4}x-3=x$, $\quad -\frac{3}{4}x=3$

$\therefore\ x=-4$

따라서 교점의 좌표는 $(-4,\ -4)$이므로
$a=-4,\ b=-4\ \ \therefore a+b=-8$

14) $2\sqrt{2}$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다. 오른쪽 그림에서 함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점이므로



$\frac{1}{2}(x-2)^2+2=x$에서

$x^2-6x+8=0$

$\therefore\ x=2$ 또는 $x=4$

따라서 두 교점의 좌표는 $(2,\ 2)$, $(4,\ 4)$이므로 두 점 사이의 거리는 $\sqrt{(4-2)^2+(4-2)^2}=2\sqrt{2}$

15) $\frac{4}{x(x+8)}$

(주어진 식)

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)+\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+6}\right)+\left(\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+8}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+8}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{x+8-x}{x(x+8)}$$

$$=\frac{4}{x(x+8)}$$

16) (1) 7 (2) 18

$x^2-3x+1=0$에서 $x\neq 0$이므로 양변을 x로 나누면

$x-3+\frac{1}{x}=0$

$\therefore\ x+\frac{1}{x}=3$

(1) $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=3^2-2=7$

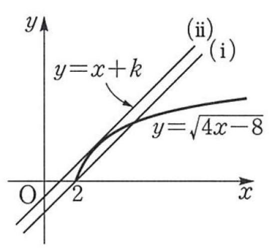
(2) $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=3^3-3\cdot 3=18$

17) $p=2,\ q=5$

$y=\sqrt{4x-8}+5=\sqrt{4(x-2)}+5=2\sqrt{x-2}+5$의 그래프는
$y=2\sqrt{x}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.
$\therefore\ p=2,\ q=5$

18) (1) $-2\leq k<-1$ (2) $k=-1$ 또는 $k<-2$
(3) $k>-1$

$y=\sqrt{4x-8}=\sqrt{4(x-2)}$의 그래프는 $y=\sqrt{4x}$를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동 한 것이고, $y=x+k$는 기울기가 1이고, y절편이 k인 직선이다.



(i) 직선 $y=x+k$가 점 $(2,\ 0)$을 지날 때,
$0=2+k \qquad \therefore\ k=-2$

(ii) $y=\sqrt{4x-8}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접할 때,
$\sqrt{4x-8}=x+k$의 양변을 제곱하여 정리하면

$x^2+2(k-2)x+k^2+8=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(k-2)^2-(k^2+8)=0$

$-4k-4=0 \qquad \therefore\ k=-1$

(1) 서로 다른 두 점에서 만나는 경우는 직선이 (i)이거나 (i)과 (ii) 사이에 있을 때이므로
$-2\leq k<-1$

(2) 한 점에서 만나는 경우는 직선이 (ⅱ)이거나 (ⅰ)보다 아래쪽에 있을 때이므로

$k=-1$ 또는 $k<-2$

(3) 만나지 않는 경우는 직선이 (ⅱ)보다 위쪽에 있을 때이므로

$k>-1$