[준킬러][수학1] 3지수로그함수2

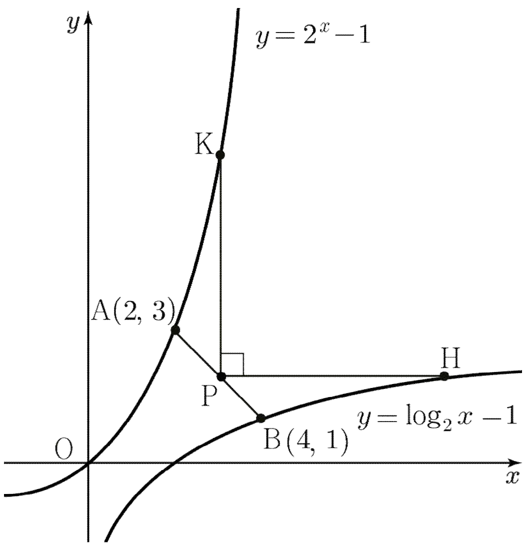
03 수1 04 로그함수

01 로그함수의 그래프

06 로그함수의 그래프의 해석2 (길이와 넓이)

[출처] 2004 모의_공공 교육청 고3 03월 17

1. 그림과 같이 두 점 A(2, 3), B(4, 1)을 이은 선분 위의 임의의 점 P를 지나 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_2 x-1$과 만나는 점을 H, y축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^x-1$과 만나는 점을 K라 한다. 이 때, $\overline{\mathrm{PH}}+\overline{\mathrm{PK}}$의 최솟값은?

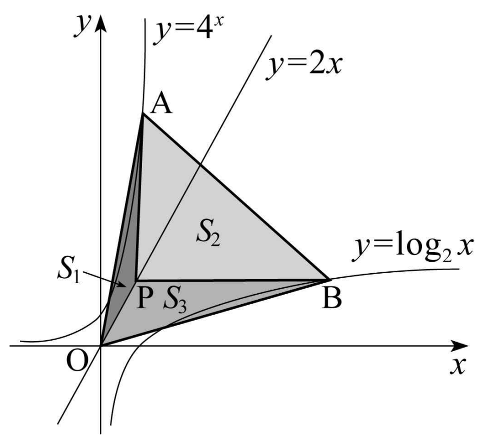


① 10 ② 9 ③ 8
④ 7 ⑤ 6

[출처] 2008 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 16

[출처] 2008 모의_공공 교육청 고3 10월 16

2. 제 1사분면에서 직선 $y=2x$ 위의 한 점 P를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=4^x$과 만나는 점을 A라 하고, 점 P를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점을 B라 하자. 이때, 세 삼각형 OPA, PAB, OPB의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3이라 하자. $S_1 : S_2 : S_3 = 3 : k : 7$일 때, 상수 k의 값은?
(단, O는 원점이다.)



① 17 ② 18 ③ 19
④ 20 ⑤ 21

[출처] 2008 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 17

[출처] 2008 모의_공공 평가원 고3 06월 17

3. 함수 $y=\log_2|5x|$ 의 그래프와 함수 $y=\log_2(x+2)$ 의 그래프가 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B라고 하자. $m>2$ 인 자연수 m에 대하여 함수 $y=\log_2|5x|$ 의 그래프와 함수 $y=\log_2(x+m)$ 의 그래프가 만나는 서로 다른 두 점을 각각 C(p, q), D(r, s)라고 하자. <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?
(단, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작고 $p<r$이다.)

<보 기>

ㄱ. $p<-\frac{1}{3}$, $r>\frac{1}{2}$

ㄴ. 직선 AB의 기울기와 직선 CD의 기울기 같다.

ㄷ. 점 B의 y좌표와 점 C의 y좌표가 같을 때, 삼각형 CAB의 넓이와 삼각형 CBD의 넓이는 같다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2008 모의_공공 경찰대 고3 07월 19

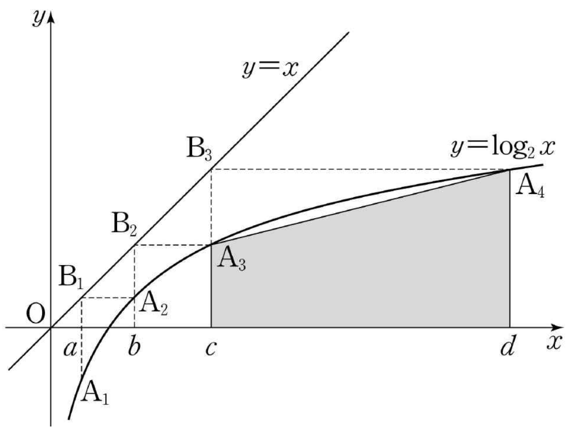
4. 기울기가 -1인 직선 l이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점을 A(a, b), 직선 l이 곡선 $y=\log_4(x+2)$와 만나는 점을 B(c, d)라고 하자. (단, $1<a<c$)
$\overline{AB}=\sqrt{2}$일 때, $a+c$의 값은?

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

[출처] 2009 모의_공공 평가원 고3 06월 16

[출처] 2009 모의_공공 평가원 고3 06월 16

5. 그림과 같이 함수 $y=\log_2 x$의 그래프 위의 한 점 A_1에서 y축에 평행한 직선을 그어 직선 $y=x$와 만나는 점을 B_1이라 하고, 점 B_1에서 x축에 평행한 직선을 그어 이 그래프와 만나는 점을 A_2라 하자. 이와 같은 과정을 반복하여 점 A_2로부터 점 B_2와 점 A_3을, 점 A_3으로부터 점 B_3과 점 A_4를 얻는다. 네 점 A_1, A_2, A_3, A_4의 x좌표를 차례로 a, b, c, d라 하자.
네 점 $(c, 0)$, $(d, 0)$, $(d, \log_2 d)$, $(c, \log_2 c)$를 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이를 함수 $f(x)=2^x$을 이용하여 a, b로 나타낸 것과 같은 것은?



① $\frac{1}{2}\{f(b)+f(a)\}\{(f\circ f)(b)-(f\circ f)(a)\}$

② $\frac{1}{2}\{f(b)-f(a)\}\{(f\circ f)(b)+(f\circ f)(a)\}$

③ $\{f(b)+f(a)\}\{(f\circ f)(b)+(f\circ f)(a)\}$

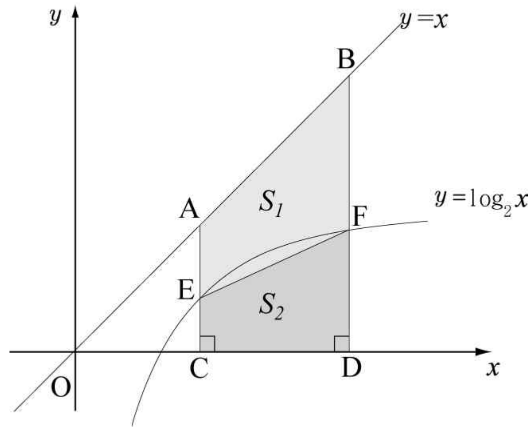
④ $\{f(b)+f(a)\}\{(f\circ f)(b)-(f\circ f)(a)\}$

⑤ $\{f(b)-f(a)\}\{(f\circ f)(b)+(f\circ f)(a)\}$

[출처] 2010 모의_공공 교육청 고2 09월 16

[출처] 2010 모의_공공 교육청 고2 09월 16

6. 그림과 같이 직선 $y=x$ 위의 두 점 $A(a, a)$, $B(b, b)$에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하고, 함수 $y=\log_2 x$의 그래프가 $\overline{AC}$, $\overline{BD}$와 만나는 점을 각각 E, F라 하자. □AEFB의 넓이 S_1과 □ECDF의 넓이 S_2의 비가 $4:3$이고 $a+b=7$일 때, a^2+b^2의 값은? (단, $a>1$)



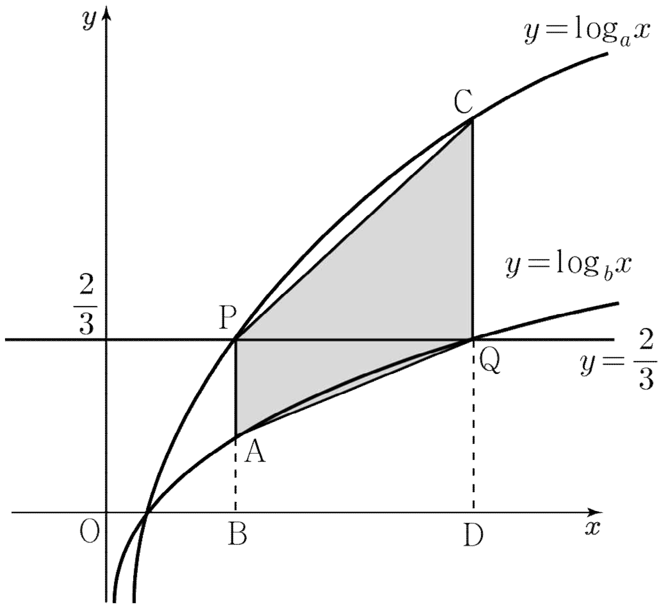
① 35 ② 33 ③ 31

④ 29 ⑤ 27

[출처] 2010 모의_공공 사관학교 고3 07월 22

[출처] 2010 모의_공공 사관학교 고3 07월 22

7. 그림과 같이 직선 $y=\frac{2}{3}$ 가 두 곡선 $y=\log_a x$, $y=\log_b x$ 와 만나는 점을 각각 P, Q 라 하자. 점 P 를 지나고 x 축에 수직인 직선이 곡선 $y=\log_b x$ 와 x 축과 만나는 점을 각각 A, B 라 하고, 점 Q 를 지나고 x 축에 수직인 직선이 곡선 $y=\log_a x$ 와 x 축과 만나는 점을 각각 C, D 라 하자.



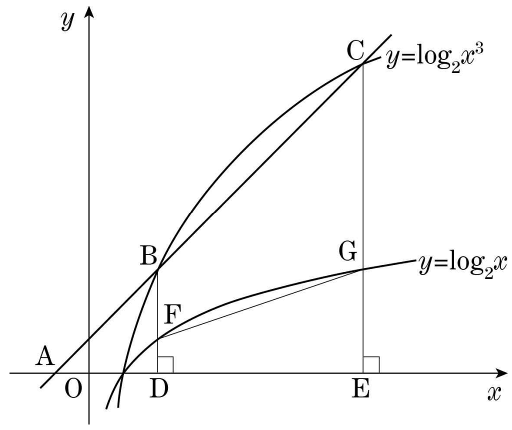
$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{AB}}$ 이고, 사각형 PAQC 의 넓이가 1 일 때, 두 상수 a, b 의 곱 ab 의 값은? (단, $1<a<b$ 이다.)

① $12\sqrt{2}$ ② $14\sqrt{2}$ ③ $16\sqrt{2}$
④ $18\sqrt{2}$ ⑤ $20\sqrt{2}$

[출처] 2012 모의_공공 교육청 고3 03월 29

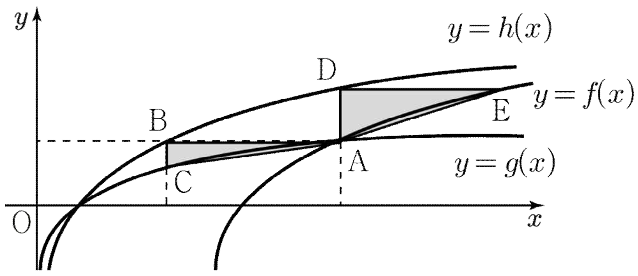
[출처] 2012 모의_공공 교육청 고3 03월 29

8. 그림과 같이 x 축 위의 한 점 A 를 지나는 직선이 곡선 $y=\log_2 x^3$ 과 서로 다른 두 점 B, C 에서 만나고 있다. 두 점 B, C 에서 x 축에 내린 수선의 발을 각각 D, E 라 하고, 두 선분 BD, CE 가 곡선 $y=\log_2 x$ 와 만나는 점을 각각 F, G 라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=1:2$ 이고, 삼각형 ADB 의 넓이가 $\frac{9}{2}$ 일 때, 사각형 BFGC 의 넓이를 구하시오.
(단, 점 A 의 x 좌표는 0 보다 작다.)



[출처] 2013 모의_공공 교육청 고2 11월 19

9. 그림과 같이 두 함수 $f(x)=\log_2(x-4)$, $g(x)=\log_4 x$ 의 그래프가 만나는 점을 A, 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $h(x)=\log_2 x$ 의 그래프와 만나는 점을 B, 점 B를 지나고 y축에 평행한 직선이 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 만나는 점을 C라 하자. 또한, 점 A를 지나고 y축에 평행한 직선이 함수 $y=h(x)$ 의 그래프와 만나는 점을 D, 점 D를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 만나는 점을 E라 하자. 두 삼각형 ABC, AED 의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, $\frac{S_1}{S_2}$ 의 값은?



① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{5}{12}$ ③ $\frac{1}{2}$

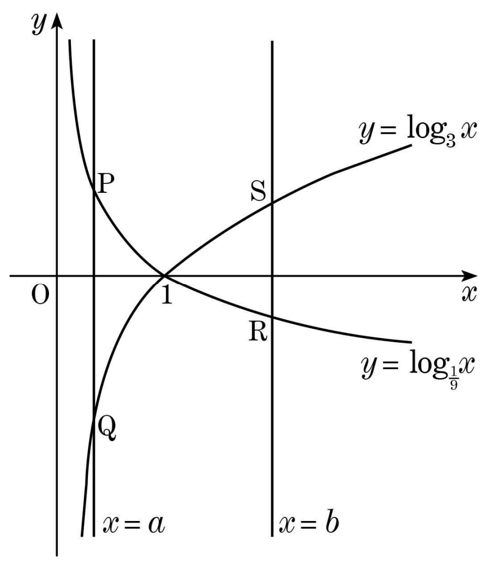
④ $\frac{7}{12}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고3 03월 28

10. 좌표평면에서 직선 $x=a(0<a<1)$가 두 곡선 $y=\log_{\frac{1}{9}}x$, $y=\log_3 x$와 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 직선 $x=b(b>1)$가 두 곡선 $y=\log_{\frac{1}{9}}x$, $y=\log_3 x$와 만나는 점을 각각 R, S라 하자. 네 점 P, Q, R, S는 다음 조건을 만족시킨다.

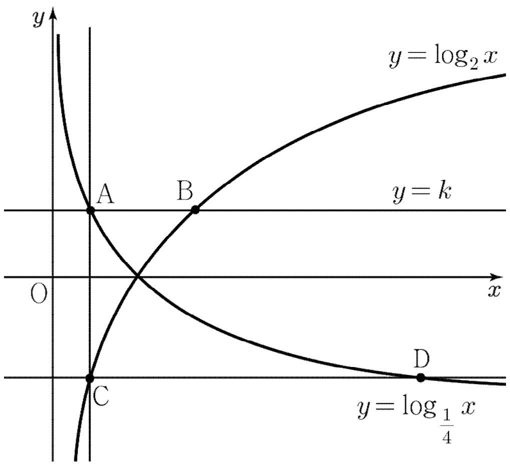
> (가) $\overline{PQ} : \overline{SR} = 2 : 1$
>
> (나) 선분 PR의 중점의 x좌표는 $\frac{9}{8}$ 이다.

두 상수 a, b에 대하여 $40(b-a)$의 값을 구하시오.



[출처] 2014 모의_공공 교육청 고2 09월 20

11. 그림과 같이 직선 $y=k(k>0)$이 두 곡선 $y=\log_{\frac{1}{4}}x$, $y=\log_2 x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 점 A를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점을 C라 하고, 점 C를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_{\frac{1}{4}}x$와 만나는 점을 D라 하자. $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}=\dfrac{1}{5}$일 때, 실수 k의 값은?



① $\frac{4}{9}$　② $\frac{5}{9}$　③ $\frac{2}{3}$

④ $\frac{7}{9}$　⑤ $\frac{8}{9}$

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고2 09월 15

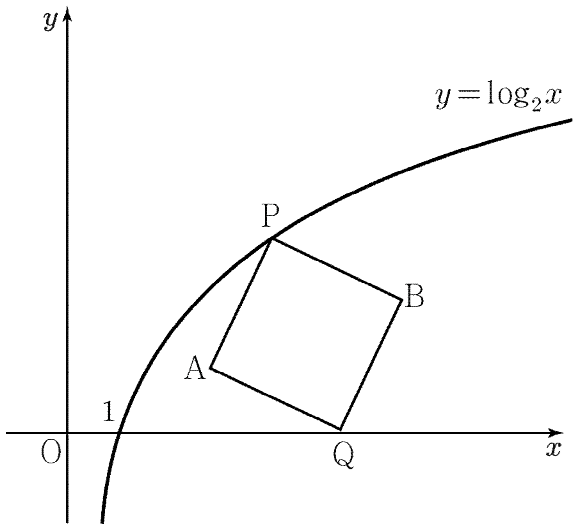
12. $1<k<128$인 실수 k에 대하여 직선 $x=k$가 두 로그함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_{\frac{1}{4}}x$의 그래프와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 선분 AB의 길이가 자연수가 되도록 하는 모든 k의 값의 곱을 M이라 할 때, $3\log_2 M$의 값은?

① 80　② 90　③ 100

④ 110　⑤ 120

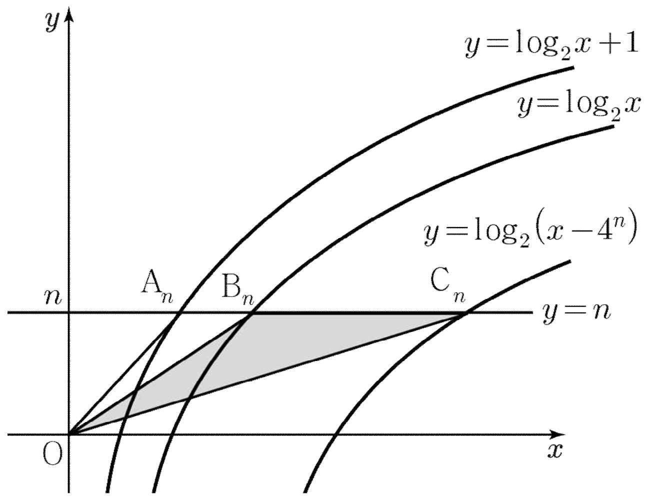
[출처] 2014 모의_공공 교육청 고2 11월 30

13. 그림과 같이 좌표평면 위의 한 점 $\mathrm{A}\left(2, \frac{1}{2}\right)$과 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(p, \log_2 p)$에 대하여 선분 AP를 한 변으로 하는 정사각형 AQBP가 있다. 점 Q의 좌표가 $(q, 0)$일 때, 2^{p+q}의 값을 구하시오. (단, $p>2$)



[출처] 2015 모의_공공 교육청 고3 04월

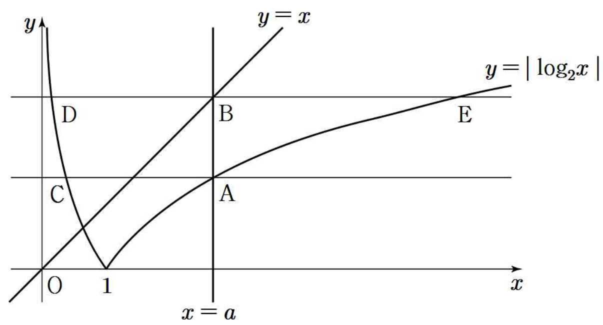
14. 자연수 n에 대하여 그림과 같이 세 곡선 $y=\log_2 x+1$, $y=\log_2 x$, $y=\log_2(x-4^n)$이 직선 $y=n$과 만나는 세 점을 각각 A_n, B_n, C_n이라 하자. 두 삼각형 $\mathrm{A}_n OB_n$, $\mathrm{B}_n\mathrm{OC}_n$의 넓이를 각각 S_n, T_n이라 할 때, $\frac{T_n}{S_n}=64$를 만족시키는 n의 값을 구하시오.
(단, O는 원점이다.)



[출처] 2017 모의_공공 교육청 고2 11월 17

15. 그림과 같이 곡선 $y=|\log_2 x|$ 와 직선 $y=x$ 가 있다. 직선 $x=a(a>1)$ 이 곡선 $y=|\log_2 x|$ 와 만나는 점을 A, 직선 $y=x$ 와 만나는 점을 B라 하자. 점 A를 지나고 x 축에 평행한 직선이 곡선 $y=|\log_2 x|$ 와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C라 하고, 점 B를 지나고 x 축에 평행한 직선이 곡선 $y=|\log_2 x|$ 와 만나는 두 점을 각각 D, E라 하자.

$\overline{\text{DE}}=\dfrac{15}{4}$ 일 때, 선분 CA의 길이는?



① $\dfrac{9}{8}$ ② $\dfrac{5}{4}$ ③ $\dfrac{11}{8}$

④ $\dfrac{3}{2}$ ⑤ $\dfrac{13}{8}$

[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 09월 16

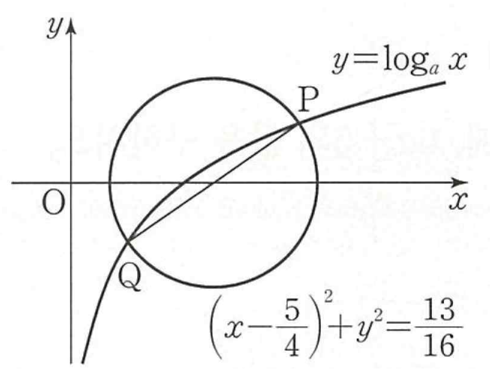
[출처] 2021 일반_시중교재 EBS한국교육방송공사 EBS교육방송 편집부 수능특강 대표 기출 문제

[출처] 2022 일반_기타개인 [2023학년도 수능특강 유사변형] 02. 지수함수와 로그함수 127제

[출처] 2022 일반_시중교재 EBS한국교육방송공사 EBS교육방송 편집부 수능완성 01 지수함수와 로그함수 유형7 필수유형

[출처] 2022 일반_시중교재 EBS한국교육방송공사 EBS교육방송 편집부 수능완성 01 지수함수와 로그함수 유형7 필수유형

16. $a>1$인 실수 a에 대하여 곡선 $y=\log_a x$와 원 $C: \left(x-\dfrac{5}{4}\right)^2+y^2=\dfrac{13}{16}$의 두 교점을 P, Q라 하자. 선분 PQ가 원 C의 지름일 때, a의 값은?

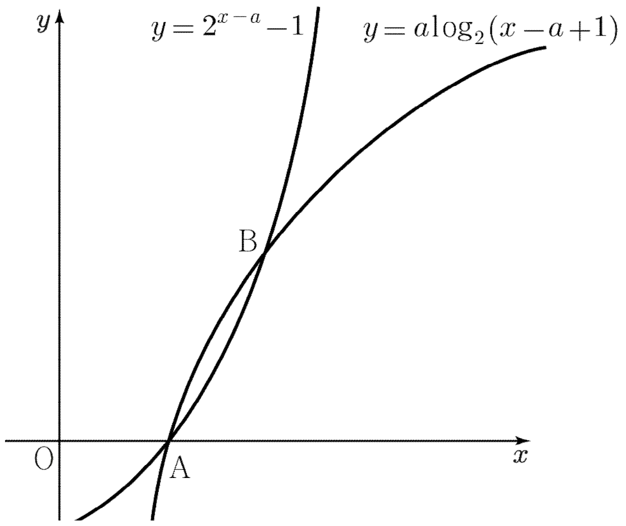


① 3 ② $\dfrac{7}{2}$ ③ 4

④ $\dfrac{9}{2}$ ⑤ 5

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 04월 14

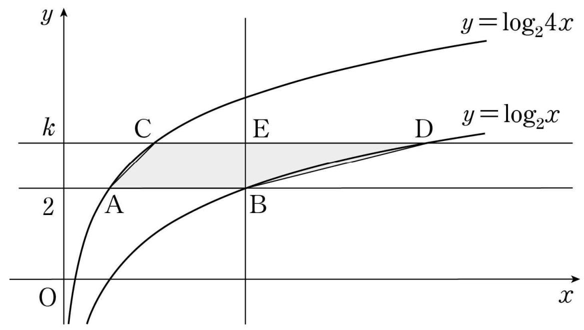
17. 그림과 같이 $a>1$인 실수 a에 대하여 두 곡선 $y=a\log_2(x-a+1)$과 $y=2^{x-a}-1$이 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 점 A가 x축 위에 있고 삼각형 OAB의 넓이가 $\frac{7}{2}a$일 때, 선분 AB의 중점은 M(p, q)이다. $p+q$의 값은? (단, O는 원점이다.)



① $\frac{13}{2}$ ② 7 ③ $\frac{15}{2}$
④ 8 ⑤ $\frac{17}{2}$

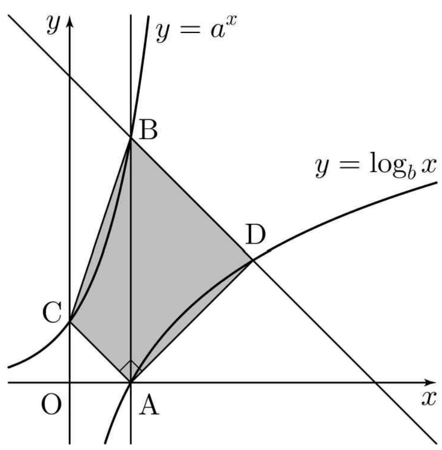
[출처] 2019 모의_공공 교육청 고3 03월 27

18. 그림과 같이 직선 $y=2$가 두 곡선 $y=\log_2 4x$, $y=\log_2 x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=k\,(k>2)$가 두 곡선 $y=\log_2 4x$, $y=\log_2 x$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 점 B를 지나고 y축과 평행한 직선이 직선 CD와 만나는 점을 E라 하면 점 E는 선분 CD를 1 : 2로 내분한다. 사각형 ABDC의 넓이를 S라 할 때, $12S$의 값을 구하시오.



[출처] 2019 모의_공공 사관학교 고3 07월 16

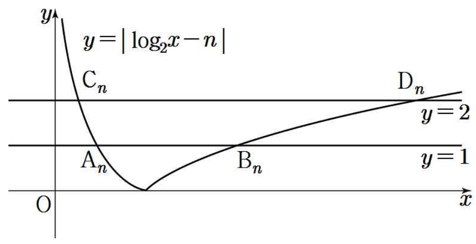
19. 그림과 같이 1보다 큰 두 상수 a, b에 대하여 점 A$(1,\ 0)$을 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=a^x$과 만나는 점을 B라 하고, 점 C$(0,\ 1)$에 대하여 점 B를 지나고 직선 AC와 평행한 직선이 곡선 $y=\log_b x$와 만나는 점을 D라 하자. $\overline{\mathrm{AC}}\perp\overline{\mathrm{AD}}$이고, 사각형 ADBC의 넓이가 6일 때, $a\times b$의 값은?



① $4\sqrt{2}$ ② $4\sqrt{3}$ ③ 8
④ $4\sqrt{5}$ ⑤ $4\sqrt{6}$

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고2 11월 20

20. 그림과 같이 자연수 n에 대하여 곡선 $y=|\log_2 x-n|$이 직선 $y=1$과 만나는 두 점을 각각 $\mathrm{A_n}$, $\mathrm{B_n}$이라 하고 곡선 $y=|\log_2 x-n|$이 직선 $y=2$와 만나는 두 점을 각각 $\mathrm{C_n}$, $\mathrm{D_n}$이라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



<보 기>

ㄱ. $\overline{\mathrm{A_1B_1}}=3$

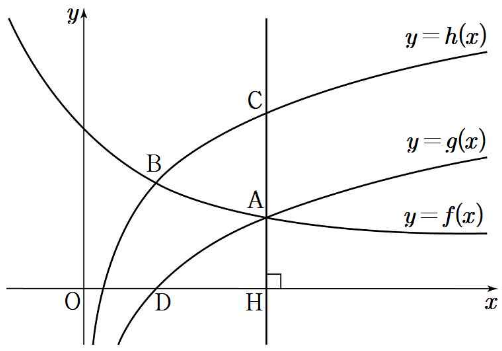
ㄴ. $\overline{\mathrm{A_nB_n}}:\overline{\mathrm{C_nD_n}}=2:5$

ㄷ. 사각형 $\mathrm{A_nB_nD_nC_n}$의 넓이를 S_n이라 할 때, $21\le S_k\le 210$을 만족시키는 모든 자연수 k의 합은 25이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고2 06월 19

21. 그림과 같이 함수 $f(x)=2^{1-x}+a-1$의 그래프가 두 함수 $g(x)=\log_2 x$, $h(x)=a+\log_2 x$의 그래프와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 수직인 직선이 함수 $h(x)$의 그래프와 만나는 점을 C, x축과 만나는 점을 H라 하고, 함수 $g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점을 D라 하자. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $a>0$)



<보 기>

ㄱ. 점 B의 좌표는 $(1,\ a)$이다.

ㄴ. 점 A의 x좌표가 4일 때, 사각형 ACBD의 넓이는 $\dfrac{69}{8}$이다.

ㄷ. $\overline{CA} : \overline{AH}=3 : 2$이면 $0<a<3$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

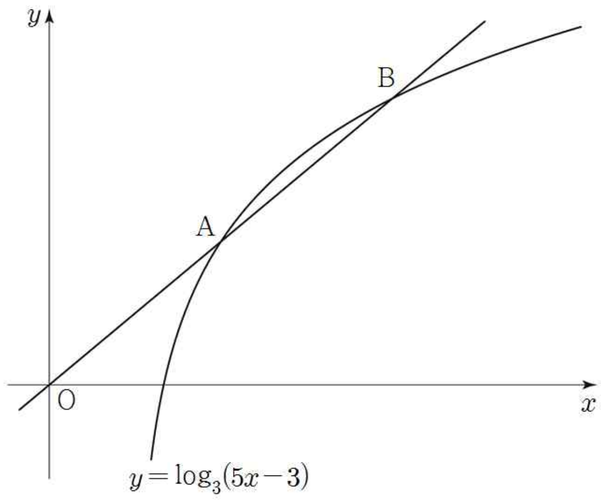
[출처] 2019 모의_공공 교육청 고2 09월 27

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고2 09월 28

22. 곡선 $y=\log_3(5x-3)$ 위의 서로 다른 두 점 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 세 점 O, A, B는 한 직선 위에 있다.
(나) $\overline{OA} : \overline{OB} = 1 : 2$

직선 AB의 기울기가 $\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



[출처] 2019 모의_공공 교육청 고2 09월 29

23. 직선 $y=x+n-2^n$이 두 함수 $y=\log_2 x$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프와 제1사분면에서 만나는 점을 각각 A, B라 하면, 점 A의 좌표는 $(2^n, n)$이다. $1<\frac{\overline{AB}}{\sqrt{2}}<10$을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

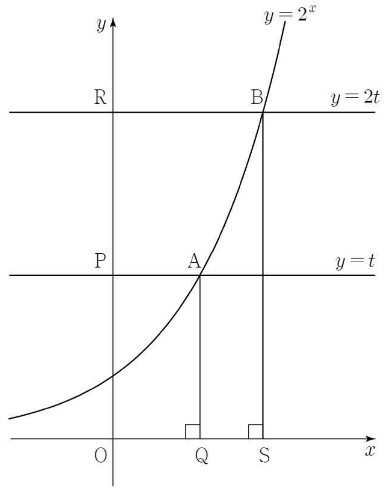
[출처] 2019 모의_공공 교육청 고2 06월 18

24. 좌표평면 위의 두 점 A$(-1, 0)$, B$(1, 0)$에 대하여 선분 AB를 지름으로 하는 원 C가 있다. $a>1$인 실수 a에 대하여 함수 $y=\log_a x$의 그래프와 원 C가 만나는 두 점 중에서 B가 아닌 점을 P라 하자. $\overline{AP}=\sqrt{3}$일 때, $a^{\sqrt{3}}$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 09월 19

25. 그림과 같이 실수 $t(1<t<100)$에 대하여 점 P$(0, t)$를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 A, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 Q라 하자. 점 R$(0, 2t)$를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 B, 점 B에서 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 B, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 S라 하자. 사각형 ABRP의 넓이를 $f(t)$, 사각형 AQSB의 넓이를 $g(t)$라 할 때, $\frac{f(t)}{g(t)}$의 값이 자연수가 되도록 하는 모든 t의 값의 곱은?



① 2^{11} ② 2^{12} ③ 2^{13}
④ 2^{14} ⑤ 2^{15}

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 06월 20

26. 1보다 큰 실수 a에 대하여 두 곡선 $y=\log_a x$, $y=\log_{a+2}x$가 직선 $y=2$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 점 A를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_{a+2}x$와 만나는 점을 C, 점 B를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_a x$와 만나는 점을 D라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 점 A의 x좌표는 a^2이다.

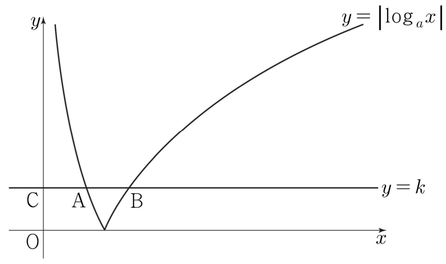
ㄴ. $\overline{AC}=1$이면 $a=2$이다.

ㄷ. 삼각형 ACB와 삼각형 ABD의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, $\dfrac{S_2}{S_1}=\log_a(a+2)$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

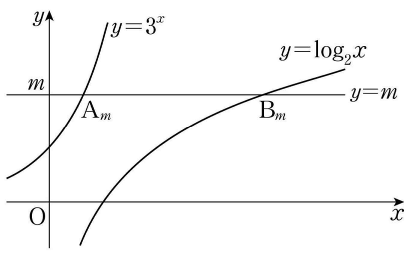
[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 28

27. 그림과 같이 1보다 큰 실수 a에 대하여 곡선 $y=|\log_a x|$가 직선 $y=k(k>0)$과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=k$가 y축과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{OC}=\overline{CA}=\overline{AB}$일 때, 곡선 $y=|\log_a x|$와 직선 $y=2\sqrt{2}$가 만나는 두 점 사이의 거리는 d이다. $20d$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작다.)



[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 16

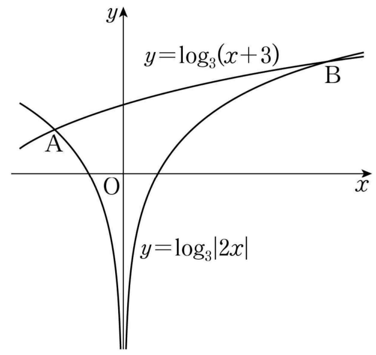
28. 그림과같이 자연수 m에 대하여 두 함수 $y=3^x$, $y=\log_2 x$의 그래프와 직선 $y=m$이 만나는 점을 각각 A_m, B_m이라 하자. 선분 $\mathrm{A}_m\mathrm{B}_m$의 길이 중 자연수인 것을 작은 수부터 크기순으로 나열하여 a_1, a_2, a_3, $\cdots$이라 할 때, a_3의 값은?



① 502 ② 504 ③ 506
④ 508 ⑤ 510

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 14

29. 함수$y=\log_3|2x|$의 그래프와 함수 $y=\log_3(x+3)$의 그래프가 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B라 하자. 점 A를 지나고 직선 AB와 수직인 직선이 y축과 만나는 점을 C라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이는?
(단, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작다.)



① $\frac{13}{2}$ ② 7 ③ $\frac{15}{2}$
④ 8 ⑤ $\frac{17}{2}$

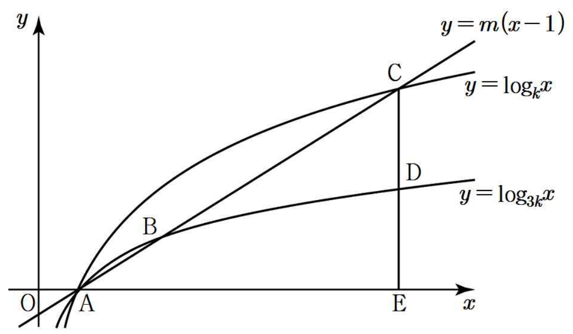
[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 07월 27

30. $k>1$인 실수 k에 대하여 두 곡선 $y=\log_{3k}x$, $y=\log_k x$가 만나는 점을 A라 하자. 양수 m에 대하여 직선 $y=m(x-1)$이 두 곡선 $y=\log_{3k}x$, $y=\log_k x$와 제 1사분면에서 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 점 C를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_{3k}x$, x축과 만나는 점을 각각 D, E라 할 때, 세 삼각형 ADB, AED, BDC가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 삼각형 BDC의 넓이는 삼각형 ADB의 넓이의 3배이다.

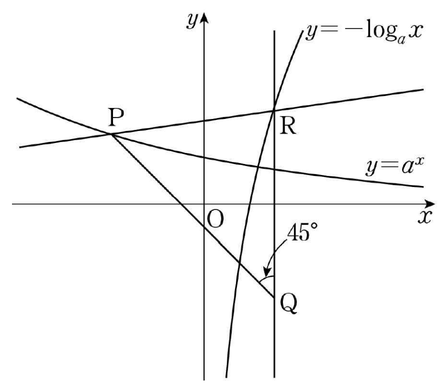
(나) 삼각형 BDC의 넓이는 삼각형 AED의 넓이의 $\frac{3}{4}$배이다.

$\frac{k}{m}$의 값을 구하시오.



[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 10월 15

31. 그림과 같이 좌표평면에서 곡선 $y=a^x$ $(0<a<1)$위의 점 P가 제 2사분면에 있다. 점 P를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 점 Q와 곡선 $y=-\log_a x$위의 점 R에 대하여 $\angle PQR=45°$이다. $\overline{PR}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$이고 직선 PR의 기울기가 $\frac{1}{7}$일 때, 상수 a의 값은?

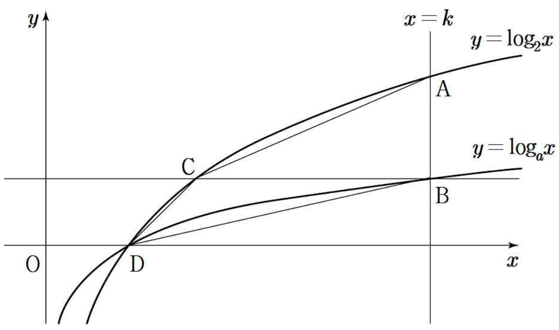


① $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{2}{3}$

④ $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{6}}{3}$

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 06월 16

32. 상수 k에 대하여 그림과 같이 직선 $x=k(k>1)$이 두 함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_a x(a>2)$의 그래프와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 B를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=\log_2 x$의 그래프와 만나는 점을 C라 하자. 함수 $y=\log_2 x$의 그래프가 x축과 만나는 점을 D라 할 때, 삼각형 ACB와 삼각형 BCD의 넓이의 비는 3 : 2이다. 상수 a의 값은?



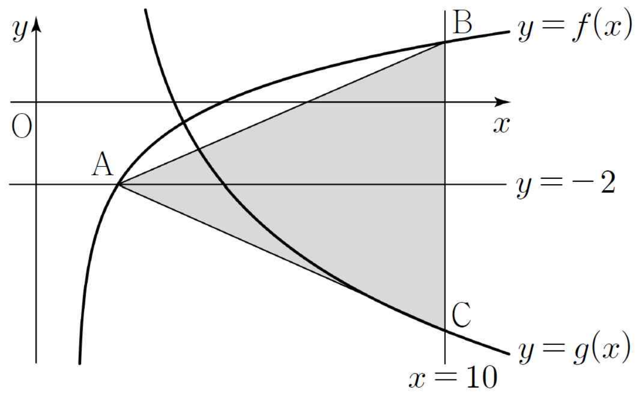
① $2\sqrt{2}$ ② 4 ③ $4\sqrt{2}$
④ 8 ⑤ $8\sqrt{2}$

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 11

33. $a>1$인 실수 a에 대하여 두 함수

$$f(x)=\frac{1}{2}\log_a(x-1)-2,\ g(x)=\log_{\frac{1}{a}}(x-2)+1$$

이 있다. 직선 $y=-2$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점을 A라 하고, 직선 $x=10$과 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 삼각형 ACB의 넓이가 28일 때, a^{10}의 값은?



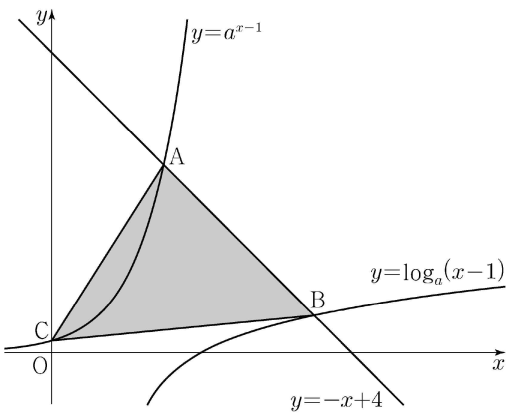
① 15 ② 18 ③ 21
④ 24 ⑤ 27

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 21

34. $a>1$인 실수 a에 대하여 직선 $y=-x+4$가 두 곡선

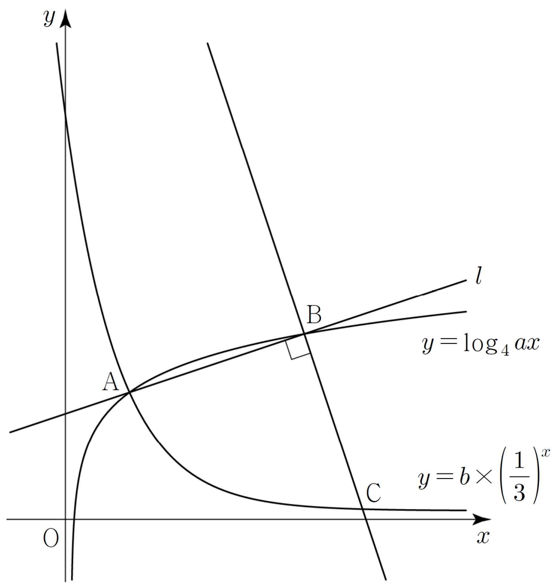
$$y=a^{x-1},\ y=\log_a(x-1)$$

과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 곡선 $y=a^{x-1}$이 y축과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{AB}=2\sqrt{2}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는 S이다. $50\times S$의 값을 구하시오.



[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 09월 20

35. 그림과 같이 기울기가 $\frac{1}{3}$인 직선 l이 곡선 $y=\log_4 ax$와 서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$에서 만나고, 곡선 $y=b\times\left(\frac{1}{3}\right)^x$이 점 A를 지난다. 점 B를 지나고 직선 l에 수직인 직선이 곡선 $y=b\times\left(\frac{1}{3}\right)^x$과 만나는 점을 $\mathrm{C}(x_3,\ y_3)$이라 하자. $\overline{AB}=\overline{BC}=\sqrt{10}$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b는 양수이고 $x_1<x_2<x_3$이다.)



<보 기>

ㄱ. $x_2-x_1=3$

ㄴ. $x_3-x_1=2(y_1-y_3)$

ㄷ. $a^2=4^b$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

03 수1

04 로그함수

01 로그함수의 그래프

07 로그함수를 이용한 수의 대소 비교

[출처] 2007 모의_공공 사관학교 고3 07월 12

36. 다음 <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $1<a<b$이고 $0<\log_a c<1$이면 $\log_b c>\log_b a$이다.

ㄴ. $0<a<1<b$이고 $0<\log_a c<1$이면 $\log_b a<\log_b c$이다.

ㄷ. $0<a<b<1$이고 $\log_a c<0$이면 $\log_a b<\log_c b$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2011 모의_공공 교육청 고2 11월 18

[출처] 2011 모의_공공 교육청 고2 11월 18

37. $0<a<b<1$인 두 실수 a, b에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $\log_a b<1$

ㄴ. $\log_{(b+1)}(a+1)>1$

ㄷ. 서로 다른 두 양수 c, d에 대하여 $\log_a c=\log_b d$이면 $c<d$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

03 수1 04 로그함수

02 로그함수의 최대와 최소

04 Mm4 (여러가지 Mm)

[출처] 2006 모의_공공 교육청 고3 03월 23

38. 두 양수 x, y에 대하여 등식

$$(\log_3 x)^2 + (\log_3 y)^2 = \log_9 x^2 + \log_9 y^2$$

이 성립할 때, xy의 최댓값은 M, 최솟값은 m이다.
$M+m$의 값을 구하시오.

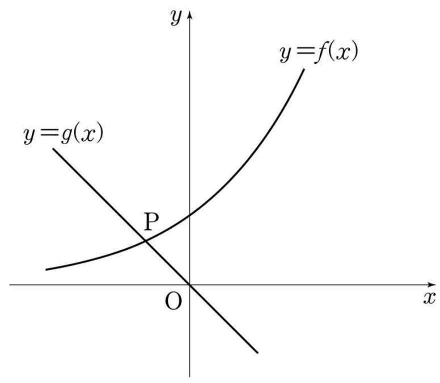
03 수1 04 로그함수

03 지수함수와 로그함수의 역함수 관계

01 역함수1 (역함수의 함숫값)

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 예비 9

39. 좌표평면에서 함수 $f(x)=2^x$의 그래프와 함수 $g(x)=-x$의 그래프가 만나는 점을 $\mathrm{P}(a, -a)$라 할 때, 옳은 것만을
<보기>에서 있는 대로 고른 것은?



<보 기>

ㄱ. $a < -1$

ㄴ. $t > 0$이면 $|f(-t)-g(-t)| < |f(t)-g(t)|$이다.

ㄷ. 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프와 함수 $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 좌표는 $(-a, a)$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 20

40. 두 함수

$$f(x)=2^x,\ g(x)=2^{x-2}$$

에 대하여 두 양수 a, $b(a<b)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값은?

(가) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $y=a$, $y=b$로 둘러싸인 부분의 넓이가 6이다.

(나) $g^{-1}(b)-f^{-1}(a)=\log_2 6$

① 15 ② 16 ③ 17
④ 18 ⑤ 19

03 수1 04 로그함수

03 지수함수와 로그함수의 역함수 관계

03 역함수3 (y=x대칭)

[출처] 2007 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 14

[출처] 2007 모의_공공 평가원 고3 09월 14

41. $0<a<1$인 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} a^x & (x<0) \\ -x+1 & (0\le x<1) \\ \log_a x & (x\ge 1)\end{cases}$$

일 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $\{f(-3)\}^5=f(-15)$

ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$는 한 점에서 만난다.

ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

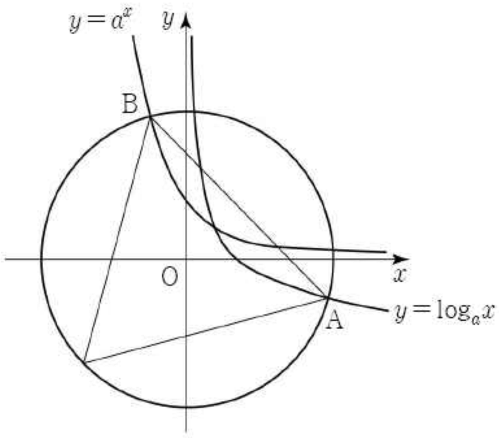
03 수1 04 로그함수

03 지수함수와 로그함수의 역함수 관계

04 역함수4 (y=x대칭의 발견)

[출처] 2013 모의_공공 교육청 고2 09월 30

42. $0<a<1$인 실수 a에 대하여 곡선 $y=\log_a x$와 원 $x^2+y^2=8$이 제 4사분면에서 만나는 점을 A, 곡선 $y=a^x$과 원 $x^2+y^2=8$이 제 2사분면에서 만나는 점을 B라 하자. 그림과 같이 두 점 A, B를 꼭짓점으로 하고 원에 내접하도록 그린 삼각형이 정삼각형이 될 때, 점 A의 x좌표는 $p+\sqrt{q}$이다. 이때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 정수이다.)

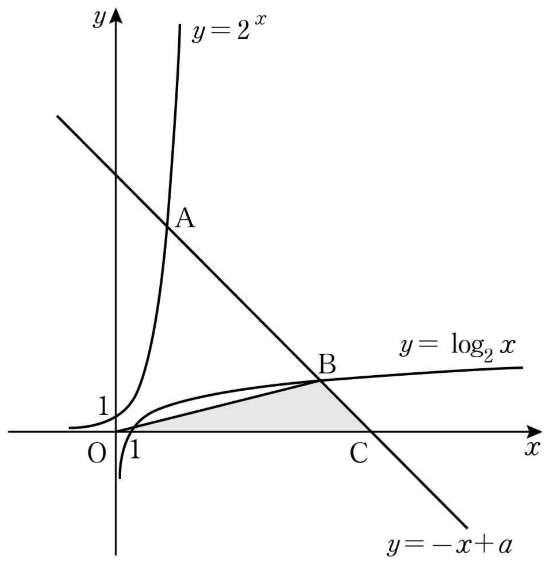


[출처] 2015 모의_공공 교육청 고3 03월 18

43. 그림과 같이 직선 $y=-x+a$가 두 곡선 $y=2^x$, $y=\log_2 x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, x축과 만나는 점을 C라 할 때, 점 A, B, C가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{AB}:\overline{BC}=3:1$
(나) 삼각형 OBC의 넓이는 40이다.

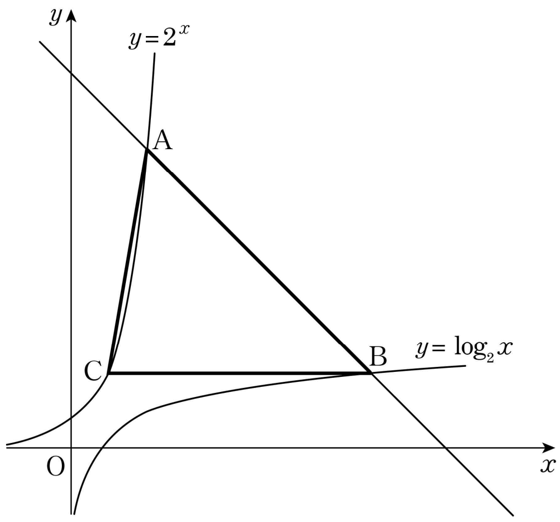
점 A의 좌표를 A(p, q)라 할 때, $p+q$의 값은? (단, O는 원점이고, a는 상수이다.)



① 10 ② 15 ③ 20
④ 25 ⑤ 30

[출처] 2015 모의_공공 교육청 고3 10월 17

44. 그림과 같이 기울기가 -1인 직선이 두 곡선 $y=2^x$, $y=\log_2 x$와 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, 점 B를 지나고 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 C라 하자. 선분 AB의 길이가 $12\sqrt{2}$, 삼각형 ABC의 넓이가 84이다. 점 A의 x좌표를 a라 할 때, $a-\log_2 a$의 값은?



① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 10월 14

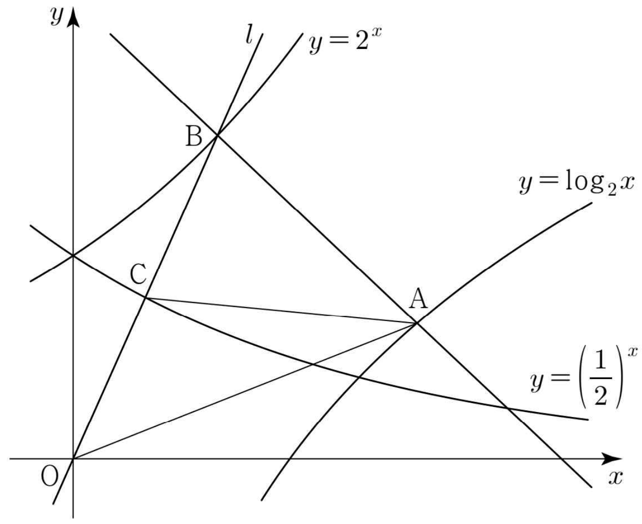
[출처] 2019 모의_공공 교육청 고3 10월 14

45. 곡선 $y=\log_{\sqrt{2}}(x-a)$와 직선 $y=\frac{1}{2}x$가 만나는 점 중 한 점을 A라 하고, 점 A를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=(\sqrt{2})^x+a$와 만나는 점을 B라 하자. 삼각형 OAB의 넓이가 6일 때, 상수 a의 값은?
(단, $0<a<4$이고, O는 원점이다.)

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$
④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고2 09월 19

46. 그림과 같이 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 한 점 $A(x_1, y_1)$을 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 $B(x_2, y_2)$라 하고, 두 점 B, O를 지나는 직선 l이 곡선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$과 만나는 점을 $C(x_3, y_3)$이라 하자. 삼각형 OAB의 넓이가 삼각형 OAC의 넓이의 2배일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, $x_1>1$이고, O는 원점이다.)



<보 기>

ㄱ. $\overline{OC}=\frac{1}{2}\overline{OA}$

ㄴ. $x_2+y_1=4x_3$

ㄷ. 직선 l의 기울기는 $3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

03 수1

04 로그함수

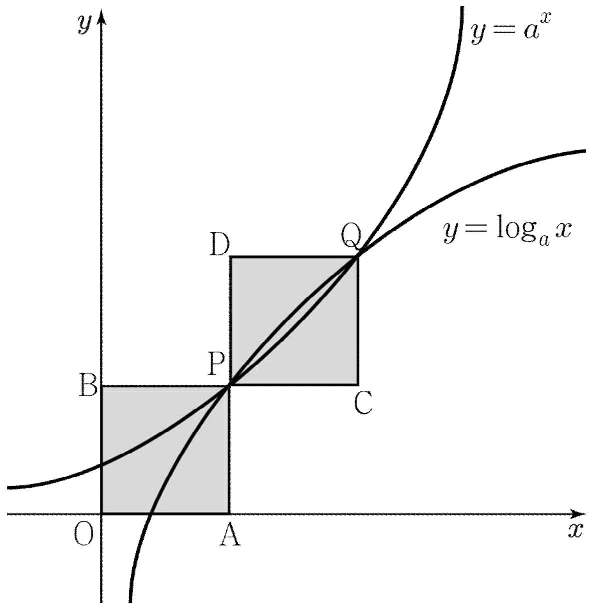
03 지수함수와 로그함수의 역함수 관계

05 역함수5 (원함수와 역함수의 교점)

[출처] 2012 모의_공공 교육청 고3 10월 16

[출처] 2012 모의_공공 교육청 고3 10월 16

47. 그림과 같이 지수함수 $y=a^x$과 로그함수 $y=\log_a x$가 두 점 P, Q에서 만날 때, 점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 하자. 점 Q를 지나고 x축과 평행한 직선이 직선 AP와 만나는 점을 D, 점 Q를 지나고 y축과 평행한 직선이 직선 BP와 만나는 점을 C라 할 때, 두 사각형 OAPB와 PCQD는 합동이다. a의 값은?
(단, O는 원점이다.)



① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{2}$

④ $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ⑤ 2

[출처] 2013 모의_공공 교육청 고2 11월 29

48. 좌표평면에서 함수 $f(x)=a^x-\frac{5}{4}\,(a>1)$의 그래프와 그 역함수의 그래프가 만나는 두 점을 A, B라 하자. 선분 AB의 중점이 원점일 때, a^3의 값을 구하시오.

03 수1 04 로그함수

04 로그방정식과 부등식

02 로그방정식2 (치환)

[출처] 2012 모의_공공 교육청 고2 06월 10

49. 방정식 $2^{\log x}x^{\log 2}-\left(2^{\log x}+5x^{\log 2}\right)+8=0$의 두 근의 곱은?

① 10 ② 10^2 ③ 10^3

④ 10^4 ⑤ 10^5

[출처] 2015 모의_공공 경찰대 고3 07월 6

50. 방정식

$$\sqrt{2016\,x^{\log_{2016}x}}=x^2$$

의 해의 곱을 N이라 할 때, N의 마지막 두 자리를 구하면?

① 16 ② 36 ③ 56

④ 76 ⑤ 96

03 수1 04 로그함수

04 로그방정식과 부등식

03 로그방정식3 (연립방정식)

[출처] 2008 모의_공공 교육청 고3 07월 11

51. 연립방정식 $\begin{cases} \log_2 x + \log_3 y = 2 \\ (\log_3 x)(\log_4 y) = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$ 의 해가 $x=a$, $y=b$일 때, $3ab$의 값은? (단, $a>1$)

① 6 ② 8 ③ 10

④ 12 ⑤ 14

[출처] 2008 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 6

52. 로그방정식 $\log_{10}(y+5) = \log_{10} x + \log_{10}(y+1)$ 을 만족하는 두 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

[출처] 2011 모의_공공 교육청 고3 04월 28

53. 연립방정식 $\begin{cases} \log_2 x + \log_3 y = 5 \\ \log_3 x \times \log_2 y = 6 \end{cases}$ 의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 할 때, $\beta-\alpha$의 최댓값을 구하시오.

[출처] 2013 모의_공공 교육청 고3 04월 26

54. 두 실수 x, y에 대한 연립방정식

$$\begin{cases} 2^x - 2\cdot 4^{-y} = 7 \\ \log_2(x-2) - \log_2 y = 1 \end{cases}$$

의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 할 때, $10\alpha\beta$의 값을 구하시오.

[출처] 2015 모의_공공 사관학교 고3 07월 10

55. 연립방정식

$$\begin{cases} \log_x y = \log_3 8 \\ 4(\log_2 x)(\log_3 y) = 3 \end{cases}$$

의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 할 때, $\alpha\beta$의 값은?
(단, $\alpha > 1$이다.)

① 4 ② $2\sqrt{5}$ ③ $2\sqrt{6}$
④ $2\sqrt{7}$ ⑤ $4\sqrt{2}$

03 수1 04 로그함수

04 로그방정식과 부등식

05 로그방정식5 (해석)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 06월 14

56. $x>0$에서 정의된 함수

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (0 < x \le 1) \\ \log_3 x & (x > 1) \end{cases}$$

에 대하여 $f(t) + f\left(\frac{1}{t}\right) = 2$를 만족시키는 모든 양수 t의 값의 합은?

① $\frac{76}{9}$ ② $\frac{79}{9}$ ③ $\frac{82}{9}$
④ $\frac{85}{9}$ ⑤ $\frac{88}{9}$

03 수1

04 로그함수

04 로그방정식과 부등식

10 로그부등식5 (해석)

[출처] 2007 모의_공공 교육청 고3 10월 27

57. 두 집합

$$A=\{x \mid 2^{x(x-3a)}<2^{a(x-3a)}\},$$
$$B=\{x \mid \log_3(x^2-2x+6)<2\}$$

에 대하여 $A\cap B=A$ 가 성립하도록 하는 실수 a 의 값의 범위는?

① $-1\le a\le 0$ ② $-1\le a\le \frac{1}{3}$

③ $-\frac{1}{3}\le a\le 1$ ④ $\frac{1}{3}\le a\le 3$

⑤ $1\le a\le 3$

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 04월 17

58. 두 집합

$$A=\{x \mid x^2-5x+4\le 0\},$$
$$B=\{x \mid (\log_2 x)^2-2k\log_2 x+k^2-1\le 0\}$$

에 대하여 $A\cap B\ne\varnothing$ 을 만족시키는 정수 k 의 개수는?

① 5 ② 6 ③ 7

④ 8 ⑤ 9

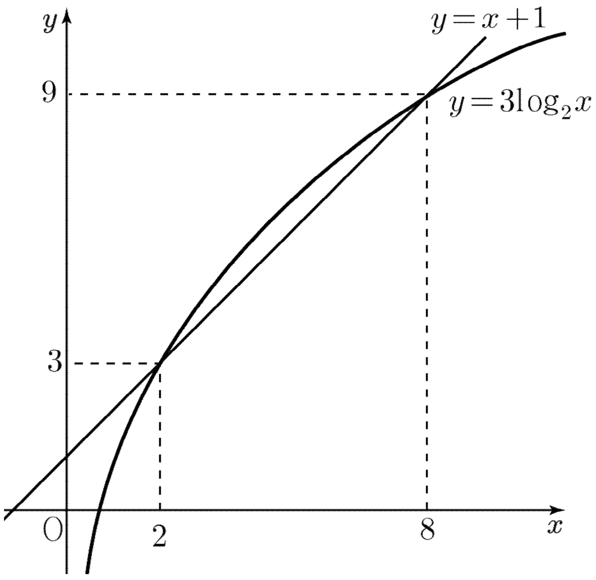
03 수1 04 로그함수

05 로그함수의 활용

01 활용1 (방, 부등식과 그래프)

[출처] 2005 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 16

59. 두 함수 $y=x+1$ 과 $y=3\log_2 x$ 의 그래프를 이용하여 부등식 $2^{x+2}<(x+1)^3$ 을 만족시키는 x 의 범위를 구하면 $\alpha<x<\beta$ 이다. 이 때, $\alpha+\beta$ 의 값은?



① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

03 수1 04 로그함수

05 로그함수의 활용

02 활용2 (방정식의 실근 조건, 치환)

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 03월 공통범위 21

60. 상수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 좌표평면의 점 $\mathrm{A}(a, b)$가 오직 하나 존재한다.

> (가) 점 A는 곡선 $y=\log_2(x+2)+k$ 위의 점이다.
> (나) 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은 곡선 $y=4^{x+k}+2$ 위에 있다.

$a\times b$의 값을 구하시오. (단, $a\neq b$)

03 수1 04 로그함수

05 로그함수의 활용

03 활용3 (로그방정식의 실근 조건, 그래프로 해석)

[출처] 2004 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 12

[출처] 2004 모의_공공 평가원 고3 06월 29

61. 두 실수 x, y에 관한 연립방정식

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ \log_2 x+\log_2 y=(\log_2 xy)^2 \end{cases}$$

의 해의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 예비 20

62. 정의역이 $\{x|1\le x<100\}$이고 함숫값이 $\log x$의 소수부분인 함수를 $f(x)$라 하자. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2-\dfrac{x}{n}$가 만나는 점의 개수가 2가 되도록 하는 자연수 n의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

03 수1 04 로그함수

05 로그함수의 활용

05 활용5 (그래프를 이용한 대소비교)

[출처] 2005 모의_공공 평가원 고3 06월 12

63. 두 점 $(1, 0)$, $(0, -m)$을 지나는 직선이 두 곡선 $y=2\log x$, $y=3\log x$와 각각 두 점에서 만날 때, $(1, 0)$이 아닌 교점을 각각 $(p, 2\log p)$, $(q, 3\log q)$라 하자. <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?
(단, $m>0$, $p>1$, $q>1$이다.)

<보 기>

ㄱ. $p>q$

ㄴ. $m=\dfrac{3\log q-2\log p}{q-p}$

ㄷ. $m>\dfrac{3\log q}{q}$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2008 모의_공공 교육청 고2 11월 15

64. $0<a<b<1$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a와 b는 실수이다.)

<보 기>

ㄱ. $0<\log_a b<1$

ㄴ. $\dfrac{\log a}{a}<\dfrac{\log b}{b}$

ㄷ. $\log_a\left(\dfrac{a}{b}\right)<\log_b\left(\dfrac{b}{a}\right)$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2008 모의_공공 평가원 고3 11월 11

65. $0<a<\frac{1}{2}$ 인 상수 a 에 대하여 직선 $y=x$ 가 곡선 $y=\log_{a}x$ 와 만나는 점을 $(p,\ p)$, 직선 $y=x$ 가 곡선 $y=\log_{2a}x$ 와 만나는 점을 $(q,\ q)$ 라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $p=\frac{1}{2}$ 이면 $a=\frac{1}{4}$ 이다.

ㄴ. $p<q$

ㄷ. $a^{p+q}=\frac{pq}{2^{q}}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2009 모의_공공 평가원 고3 11월 16

[출처] 2009 모의_공공 평가원 고3 11월 16

66. 자연수 $n(n \geq 2)$ 에 대하여 직선 $y=-x+n$ 과 곡선 $y=|\log_{2}x|$ 가 만나는 서로 다른 두 점의 x 좌표를 각각 a_{n}, $b_{n}(a_{n}<b_{n})$ 이라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $a_{2}<\frac{1}{4}$

ㄴ. $0<\frac{a_{n+1}}{a_{n}}<1$

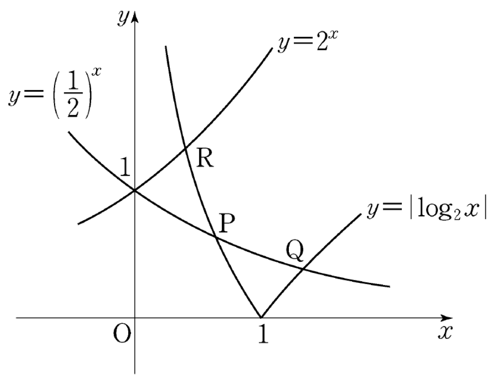
ㄷ. $1-\frac{\log_{2}n}{n}<\frac{b_{n}}{n}<1$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2010 모의_공공 평가원 고3 11월 16

[출처] 2010 모의_공공 평가원 고3 11월 공통범위 16

67. 좌표평면에서 두 곡선 $y=|\log_2 x|$ 와 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 이 만나는 두 점을 $P(x_1,\ y_1)$, $Q(x_2,\ y_2)\,(x_1<x_2)$ 라 하고, 두 곡선 $y=|\log_2 x|$ 와 $y=2^x$ 이 만나는 점을 $R(x_3,\ y_3)$ 이라 하자. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?



<보 기>

ㄱ. $\frac{1}{2}<x_1<1$

ㄴ. $x_2y_2-x_3y_3=0$

ㄷ. $x_2(x_1-1)>y_1(y_2-1)$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2011 모의_공공 사관학교 고3 07월 23

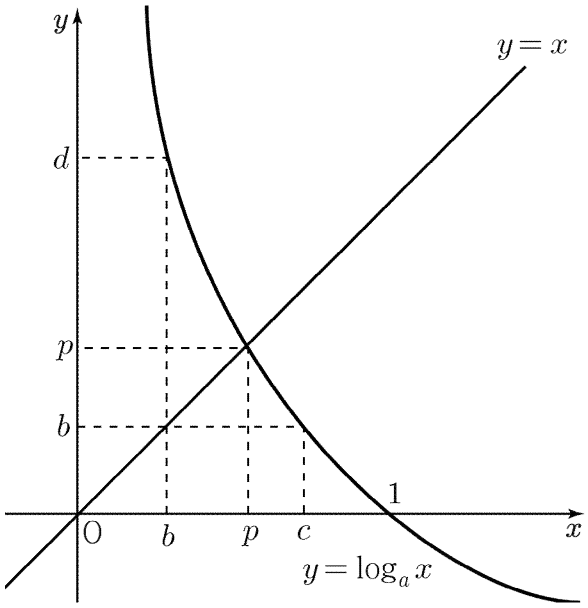
[출처] 2011 모의_공공 사관학교 고3 07월 23

68. $0<a<b<1$ 일 때, 직선 $y=1$ 이 $y=\log_a x$ 의 그래프와 $y=\log_b x$ 의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q 라 하고 직선 $y=-1$ 이 $y=\log_a x$ 의 그래프와 $y=\log_b x$ 의 그래프와 만나는 점을 각각 R, S 라 하자.
네 직선 PS, PR, QS, QR 의 기울기를 각각 α, β, γ, δ 라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $\delta<\alpha<\beta<\gamma$ ② $\gamma<\alpha<\delta<\beta$
③ $\gamma<\alpha<\beta<\delta$ ④ $\gamma<\alpha=\delta<\beta$
⑤ $\alpha=\delta<\beta<\gamma$

[출처] 2012 모의_공공 교육청 고2 11월 21

69. 그림과 같이 $0 < a < 1$인 실수 a에 대하여 곡선 $y = \log_a x$가 두 점 (b, d), (c, b)를 지나고, 직선 $y = x$와 점 (p, p)에서 만날 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?(단, $0 < b < p < c < 1$)



<보 기>

ㄱ. $p = \frac{1}{2}$이면 $a = \frac{1}{4}$이다.

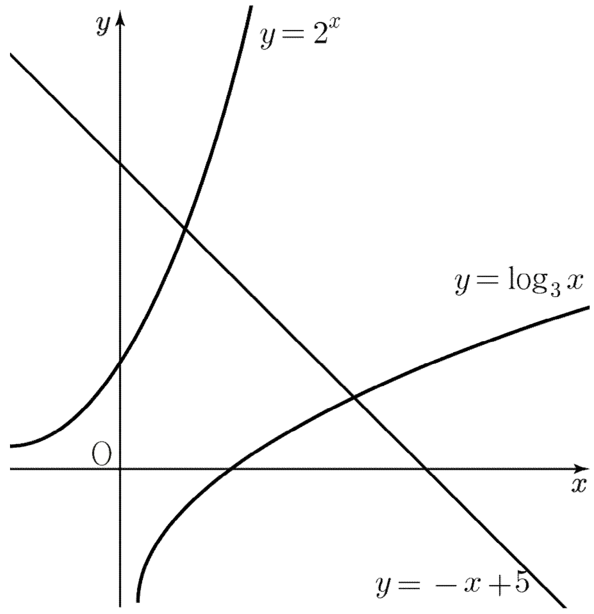
ㄴ. $a^{b+d} = bc$

ㄷ. $\frac{p-b}{p-a^c} < \frac{c-b}{c-a^c}$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2012 모의_공공 교육청 고3 07월 15

70. 두 곡선 $y = 2^x$, $y = \log_3 x$와 직선 $y = -x + 5$가 만나는 점을 각각 $\mathrm{A}(a_1, a_2)$, $\mathrm{B}(b_1, b_2)$라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?



<보 기>

ㄱ. $a_1 > b_2$

ㄴ. $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$

ㄷ. $\frac{a_1}{a_2} < \frac{b_2}{b_1}$

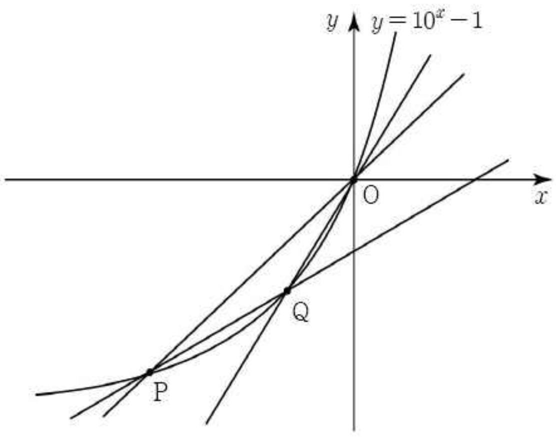
① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2013 모의_공공 교육청 고2 09월 21

71. $-1<a<b<0$ 인 두 실수 a, b에 대하여 함수 $y=10^x-1$의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{P}(\log(a+1), a)$, $\mathrm{Q}(\log(b+1), b)$가 있다. 세 직선 PO, QO, PQ를 이용하여 세 실수

$$A=(a+1)^{\frac{1}{a}},\ B=(b+1)^{\frac{1}{b}},\ C=\left(\frac{b+1}{b-1}\right)^{\frac{1}{b-a}}$$

의 대소를 비교할 때, A, B, C의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은? (단, O는 원점이다.)

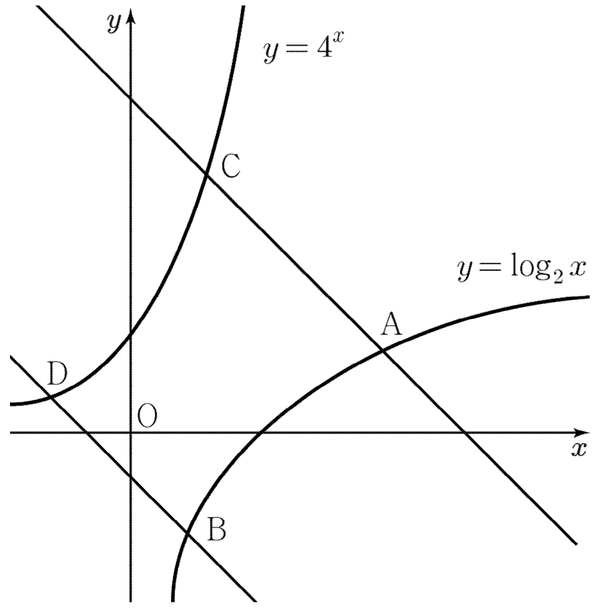


① $A<B<C$　② $A<C<B$　③ $B<A<C$　④ $B<C<A$　⑤ $C<A<B$

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고2 09월 19

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고2 09월 21

72. 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 점 A(4, 2)를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=4^x$과 만나는 점을 $\mathrm{C}(x_1, y_1)$이라 하고, 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 점 $\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, -1\right)$을 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=4^x$과 만나는 점을 $\mathrm{D}(x_2, y_2)$라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?



<보 기>

ㄱ. $x_1+x_2>0$

ㄴ. $y_1y_2>1$

ㄷ. $\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}>\dfrac{7}{6}$

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고2 09월 19

73. 실수 k에 대하여 지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$의 그래프를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 그래프가 나타내는 함수를 $y=f(x)$라 하자. 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

모든 실수 x에 대하여 $f(2+x)f(2-x)=1$이다.

보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f(2)=1$

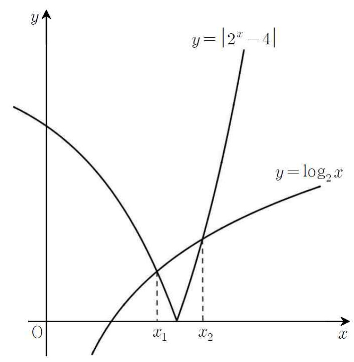
ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 개수는 2이다.

ㄷ. 모든 실수 t에 대하여 $f(t+1)-f(t)<f(t+2)-f(t+1)$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 21

74. 두 곡선 $y=|2^x-4|$, $y=\log_2 x$가 만나는 두 점의 x좌표를 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



<보 기>

ㄱ. $\log_2 3<x_1<x_2<\log_2 6$

ㄴ. $(x_2-x_1)(2^{x_2}-2^{x_1})<3$

ㄷ. $2^{x_1}+2^{x_2}>8+\log_2(\log_3 6)$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 10월 21

75. 두 곡선 $y=2^{-x}$과 $y=|\log_2 x|$가 만나는 두 점을 (x_1, y_1), (x_2, y_2)라 하자. $x_1 < x_2$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $\frac{1}{2} < x_1 < \frac{\sqrt{2}}{2}$

ㄴ. $\sqrt[3]{2} < x_2 < \sqrt{2}$

ㄷ. $y_1 - y_2 < \frac{3\sqrt{2}-2}{6}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고2 06월 20

76. $1 < a < 4$인 실수 a에 대하여 함수 $y=\log_a x$의 그래프와 함수 $y=\frac{1}{x}$의 그래프가 만나는 점을 $\mathrm{A}(p, q)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $pq=1$

ㄴ. $a=2$일 때, $p > \sqrt{2}$이다.

ㄷ. 원점 O와 점 $\mathrm{B}(p+q, 0)$에 대하여 삼각형 AOB의 넓이를 $S(p)$라 할 때, $S(p) < \frac{a+1}{2a}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

03 수1 04 로그함수

05 로그함수의 활용

06 활용6 (추론과 해석)

[출처] 2010 모의_공공 경찰대 고3 07월 19

77. 1이 아닌 양수 x에 대하여 부등식 $[\log_x n] \le 2$를 만족시키는 가장 큰 자연수 n을 $f(x)$라 하자. <보기>에서 참인 명제만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f(2)=4$

ㄴ. $x<y$이면 $f(x) \le f(y)$이다.
(단, x와 y는 1이 아닌 양수이다.)

ㄷ. $f\left(\frac{1}{x}\right) \le 30$을 만족시키는 자연수 x는 6개다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2013 모의_공공 교육청 고2 09월 30

78. 2보다 큰 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 m 중 최솟값을 $f(n)$이라 하자.

(가) $m \ge 2$

(나) 두 점 $(m, \log_n m)$, $(m+1, \log_n(m+1))$을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{1}{3}$보다 작다.

이때, $f(3)+f(4)+f(5)+f(6)$의 값을 구하시오.

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 11월 14

79. 자연수 n에 대하여 $f(n)$이 다음과 같다.

$$f(n)=\begin{cases} \log_3 n & (n\text{이 홀수}) \\ \log_2 n & (n\text{이 짝수}) \end{cases}$$

20 이하의 두 자연수 m, n에 대하여 $f(mn)=f(m)+f(n)$을 만족시키는 순서쌍 (m, n)의 개수는?

① 220 ② 230 ③ 240
④ 250 ⑤ 260

[출처] 2015 모의_공공 경찰대 고3 07월 23

80. 두 자연수 m, n에 대하여 부등식

$$\left|\log_3 \frac{m}{15}\right| + \log_3 \frac{n}{3} \le 0$$

을 만족시키는 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하시오.

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고2 06월 28

81. 100이하의 자연수 k에 대하여 $2 \le \log_n k < 3$을 만족시키는 자연수 n의 개수를 $f(k)$라 하자. 예를 들어 $f(30) = 2$이다. $f(k) = 4$가 되도록 하는 k의 최댓값을 구하시오.

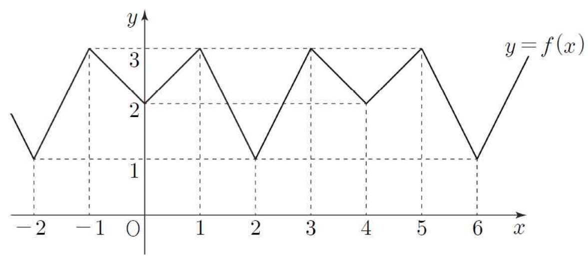
[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 09월 21

82. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x) = \begin{cases} x+2 & (0 \le x < 1) \\ -2+5 & (1 \le x \le 2) \end{cases}$

(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x) = f(x)$이고 $f(x) = f(x+4)$이다.

n이 자연수일 때, 함수 $y = \log_{2^n}(x+2n)$의 그래프와 함수 $y = f(x)$의 그래프가 만나는 서로 다른 모든 점의 개수를 a_n이라 하자. $a_1 + a_2 + a_3$의 값은?



① 532 ② 535 ③ 538
④ 541 ⑤ 544

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 16

83. 두함수 $f(x)=x^2-6x+11$, $g(x)=\log_3 x$가 있다. 정수 k에 대하여

$$k<(g\circ f)(n)<k+2$$

를 만족시키는 자연수 n의 개수를 $h(k)$라 할 때, $h(0)+h(3)$의 값은?

① 11 ② 13 ③ 15
④ 17 ⑤ 19

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 06월 20

84. 자연수 n에 대하여 직선 $y=1$이 곡선 $y=2^x-1$, 직선 $y=-(1+\log_2 n)x+7$과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 두 점 A, B 사이의 거리를 $f(n)$이라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f(2)=2$
ㄴ. $f(n)\ge 1$을 만족시키는 n의 개수는 4이다.
ㄷ. $|f(n)-1|\ge\dfrac{2}{3}$를 만족시키는 n의 개수는 245이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 11월 공통범위 21

85. 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases}|3^{x+2}-n| & (x<0)\\ |\log_2(x+4)-n| & (x\ge 0)\end{cases}$$

이라 하자. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$의 최댓값이 4가 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

03 수1 04 로그함수

05 로그함수의 활용

07 활용7 (격자점 문제)

[출처] 2005 모의_공공 경찰대 고3 07월 18

86. 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_3 x$와 직선 $x=32$로 둘러싸인 영역에 포함되는 x, y좌표가 모두 정수인 점의 개수는?
(단, 경계 위의 점은 제외한다.)

① 29 ② 31 ③ 33
④ 35 ⑤ 37

[출처] 2011 모의_공공 평가원 고3 11월 30

[출처] 2011 모의_공공 평가원 고3 11월 30

87. 자연수 a, b에 대하여 곡선 $y=a^{x+1}$과 곡선 $y=b^x$이 직선 $x=t\,(t\geq 1)$와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 다음 조건을 만족시키는 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오. 예를 들어 $a=4$, $b=5$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $2\leq a\leq 10$, $2\leq b\leq 10$

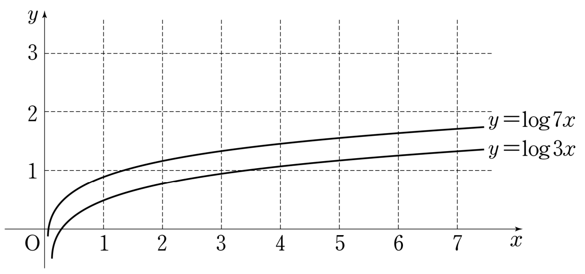
(나) $t\geq 1$인 어떤 실수 t에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}\leq 10$이다.

[출처] 2012 모의_공공 평가원 고3 09월 30

[출처] 2012 모의_공공 평가원 고3 09월 30

88. 좌표평면에서 다음 조건을 만족시키는 정사각형 중 두 함수 $y=\log 3x$, $y=\log 7x$의 그래프와 모두 만나는 것의 개수를 구하시오.

> (가) 꼭짓점의 x좌표, y좌표가 모두 자연수이고 한 변의 길이가 1이다.
>
> (나) 꼭짓점의 x좌표는 모두 100 이하이다.



[출처] 2014 모의_공공 평가원 고3 11월 30

89. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 삼각형 OAB의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $f(1)+f(2)+f(3)$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

> (가) 점 A의 좌표는 $(-2,\ 3^n)$이다.
>
> (나) 점 B의 좌표를 $(a,\ b)$라 할 때, a와 b는 자연수이고 $b \le \log_2 a$를 만족시킨다.
>
> (다) 삼각형 OAB의 넓이는 50 이하이다.

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 04월 29

90. 좌표평면에서 2 이상의 자연수 n에 대하여 두 곡선 $y=3^x-n$, $y=\log_3(x+n)$으로 둘러싸인 영역의 내부 또는 그 경계에 포함되고 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점의 개수가 4가 되도록 하는 자연수 n의 개수를 구하시오.

[출처] 2017 모의_공공 사관학교 고3 07월 18

91. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 정사각형의 개수를 a_n이라 하자.

(가) 한 변의 길이가 n이고 네 꼭짓점의 x좌표와 y좌표가 모두 자연수이다.
(나) 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_{16} x$와 각각 서로 다른 두 점에서 만난다.

a_3+a_4의 값은?

① 21 ② 23 ③ 25
④ 27 ⑤ 29

03 수1 04 로그함수

05 로그함수의 활용

08 활용8 (실생활 활용)

[출처] 2011 모의_공공 교육청 고3 03월 13

[출처] 2011 모의_공공 교육청 고3 03월 13

92. 액체의 끓는 온도 T(℃)와 증기압력 P(mmHg) 사이에

$$\log P = a + \frac{b}{c+T} \quad (a,\ b,\ c\text{는 상수이고 } T>-c)$$

인 관계가 성립한다. 표는 어떤 액체의 끓는 온도에 대한 증기압력을 나타낸 것이다.

끓는 온도(℃)	0	5	10
증기압력(mmHg)	4.8	6.6	8.8

이 표를 이용하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $\log 2 = 0.301$로 계산한다.)

<보 기>

ㄱ. $0.602 < a + \frac{b}{c} < 0.699$

ㄴ. $b < 0$

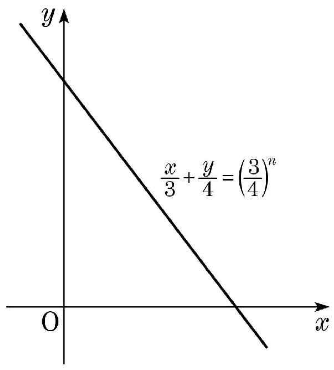
ㄷ. $P < 10^a$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

자연수 n에 대하여 좌표평면에서 직선

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

을 l_n이라 하자. 다음 물음에 답하시오.



[출처] 2014 모의_공공 교육청 고3 03월 14

93. 직선 l_n과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\frac{1}{10}$ 이하가 되도록 하는 자연수 n의 최솟값은?
(단, $\log 2=0.30$, $\log 3=0.48$로 계산한다.)

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

[준킬러][수학1] 3지수로그함수2(빠른 정답)

프로젝트 2023.01.06

1. [정답] ①
2. [정답] ⑤
3. [정답] ④
4. [정답] ⑤
5. [정답] ①

6. [정답] ②
7. [정답] ③
8. [정답] 24
9. [정답] ③
10. [정답] 70

11. [정답] ③
12. [정답] ④
13. [정답] 40
14. [정답] 5
15. [정답] ④

16. [정답] ③
17. [정답] ⑤
18. [정답] 54
19. [정답] ②
20. [정답] ②

21. [정답] ⑤
22. [정답] 11
23. [정답] 54
24. [정답] ②
25. [정답] ③

26. [정답] ⑤
27. [정답] 75
28. [정답] ⑤
29. [정답] ⑤
30. [정답] 12

31. [정답] ⑤
32. [정답] ③
33. [정답] ④
34. [정답] 192
35. [정답] ②

36. [정답] ②
37. [정답] ①
38. [정답] 10
39. [정답] ⑤
40. [정답] ①

41. [정답] ⑤
42. [정답] 4
43. [정답] ③
44. [정답] ②
45. [정답] ④

46. [정답] ⑤
47. [정답] ①
48. [정답] 16
49. [정답] ③
50. [정답] ③

51. [정답] ②
52. [정답] ③
53. [정답] 23
54. [정답] 15
55. [정답] ③

56. [정답] ③
57. [정답] ③
58. [정답] ①
59. [정답] ③
60. [정답] 12

61. [정답] ④
62. [정답] ⑤
63. [정답] ④
64. [정답] ③
65. [정답] ⑤

66. [정답] ④
67. [정답] ③
68. [정답] ②
69. [정답] ③
70. [정답] ③

71. [정답] ③
72. [정답] ⑤

73. [정답] ③
74. [정답] ②
75. [정답] ⑤

76. [정답] ⑤
77. [정답] ①
78. [정답] 9
79. [정답] ①
80. [정답] 55

81. [정답] 80
82. [정답] ②
83. [정답] ③
84. [정답] ③
85. [정답] 33

86. [정답] ⑤
87. [정답] 39
88. [정답] 79
89. [정답] 120
90. [정답] 16

91. [정답] ①
92. [정답] ⑤
93. [정답] ③

[준킬러][수학1] 3지수로그함수2(해설)

프로젝트 2023.01.06

1) [정답] ①

[해설]

직선 AB 의 방정식은 $y=-x+5$ 이므로

점 P 의 좌표를 (a,b)라 하면 $a+b=5$

이 때, 점 H 의 x좌표는 $b=\log_2 x-1$ 에서 $x=2^{b+1}$ ∴ $\overline{\mathrm{PH}}=2^{b+1}-a$

또, 점 K 의 y좌표는 $y=2^a-1$

∴ $\overline{\mathrm{PK}}=2^a-1-b$

$\overline{\mathrm{PH}}+\overline{\mathrm{PK}}=2^{b+1}-a+2^a-1-b$

$=2^a+2^{b+1}-6 \geq 2\sqrt{2^a\cdot 2^{b+1}}-6$

$=10$

따라서 $a=3$, $b=2$ 일 때 최소값은 10 이다.

2) [정답] ⑤

[해설]

직선 $y=2x$ 위의 한 점 P를 $(a,2a)$라 하면

$\mathrm{A}(a,4^a)$, $\mathrm{B}(4^a,2a)$이므로

$$\frac{S_3}{S_1}=\frac{(4^a-a)2a}{(4^a-2a)a}=\frac{7}{3},\ 4^a=8a$$

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{(4^a-a)(4^a-2a)}{(4^a-2a)a}=\frac{k}{3}\ \therefore\ k=21$$

3) [정답] ④

[해설]

$\log_2 5x=\log_2(x+m)$에서 $5x=x+m$이므로 $x=\frac{m}{4}$

$\log_2(-5x)=\log_2(x+m)$에서 $-5x=x+m$이므로 $x=-\frac{m}{6}$

$\therefore A\left(-\frac{1}{3},\ \log_2\frac{5}{3}\right)$, $B\left(\frac{1}{2},\ \log_2\frac{5}{2}\right)$

$C\left(-\frac{m}{6},\ \log_2\frac{5}{6}m\right)$, $D\left(\frac{m}{4},\ \log_2\frac{5}{4}m\right)$

ㄱ. $m>2$이면

$p=-\frac{m}{6}<-\frac{1}{3}$, $r=\frac{m}{4}>\frac{1}{2}$ (참)

ㄴ. $\overline{CD}$의 기울기는

$$\frac{\log_2\frac{5}{4}m-\log_2\frac{5}{6}m}{\frac{m}{4}-\frac{m}{6}}=\frac{\log_2\left(\frac{5}{4}m\times\frac{6}{5m}\right)}{\frac{m}{12}}$$

따라서 m의 값에 따라 기울기가 달라진다. (거짓)

ㄷ. $\log_2\frac{5}{2}=\log_2\frac{5}{6}m$에서 $m=3$

이 때

$$\triangle CAB=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\left(\log_2\frac{5}{2}-\log_2\frac{5}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\log_2\frac{3}{2}$$

$$\triangle CBD=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\left(\log_2\frac{15}{4}-\log_2\frac{5}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\log_2\frac{3}{2}$$

이므로 두 삼각형의 넓이는 같다. (참)

4) [정답] ⑤

[해설]

직선 l을 $y=-x+m$이라 두면

$\mathrm{A}(a,\ -a+m)$, $\mathrm{B}(c,\ -c+m)$

그러므로 조건에 의해 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(a-c)^2+(a-c)^2}$

$\sqrt{2(a-c)^2}=\sqrt{2}$ ∴ $a-c=-1$ ($\because 1<a<c$)

또, 점 $\mathrm{A}(a,b)$는 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 점이고,

점 $\mathrm{B}(c,d)$는 곡선 $y=\log_4(x+2)$ 위의 점이므로

$b=\log_2 a$, $d=\log_4(c+2)$이다.

$\overline{\mathrm{AB}}$의 기울기가 -1이므로

$$\frac{\log_2 a-\log_4(c+2)}{a-c}=-1$$

$\log_2 a-\frac{1}{2}\log_2(c+2)=1$ ($\because a-c=-1$)

$2\log_2 a-\log_2(c+2)=2$, $\log_2\frac{a^2}{c+2}=2$

$a^2=4(c+2)$

$a^2-4a-12=(a-6)(a+2)=0$ ($\because c=a+1$)

$\therefore\ a=6\ (\because 1<a)$

따라서 $a+c=6+7=13$이다.

5) [정답] ①

[해설]

점 $A_4(d, \log_2 d)$이고 점 A_4의 y좌표와 점 B_3의 y좌표가 같으므로

$\log_2 d=c$ 즉 $d=2^c=f(c)$

점 $A_3(c, \log_2 c)$이고 점 A_3의 y좌표와 점 B_2의 y좌표가 같으므로

$\log_2 c=b$ 즉 $c=2^b=f(b)$

점 $A_2(b, \log_2 b)$이고 점 A_2의 y좌표와 점 B_1의 y좌표가 같으므로

$\log_2 b=a$ 즉 $b=2^a=f(a)$

따라서 구하는 사각형의 넓이는

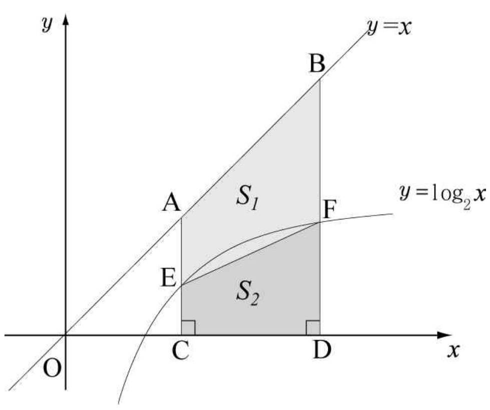
$\frac{1}{2}(\log_2 d+\log_2 c)(d-c)$

$=\frac{1}{2}(c+b)\{f(c)-f(b)\}$

$=\frac{1}{2}\{f(b)+f(a)\}\{(f\circ f)(b)-(f\circ f)(a)\}$

6) [정답] ②

[해설]



$S_1 : S_2=4:3,\ S_1=\frac{4}{3}S_2,\ S_1+S_2=\frac{7}{3}S_2=\frac{1}{2}(b-a)(a+b)$

$S_2=\frac{1}{2}(b-a)(\log_2 a+\log_2 b)$

$\frac{7}{3}\times\frac{1}{2}(b-a)\log_2 ab=\frac{1}{2}(b-a)(a+b)$

$a+b=7$이므로 $\log_2 ab=3\ \therefore ab=8$

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=33$

7) [정답] ③

[해설]

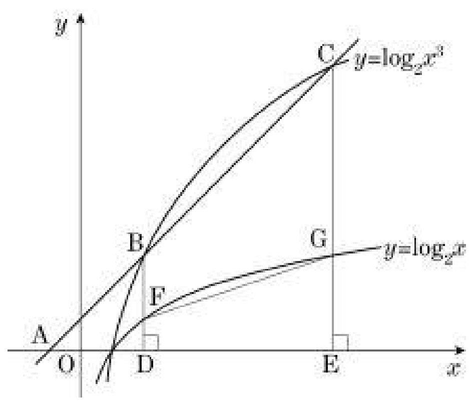
$\log_a x:\log_b x=2:1\qquad \therefore b=a^2$

$\square PAQC=\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}{2}\times\overline{BD}=1\quad ,\ \overline{BD}=2$

$a^{\frac{4}{3}}-a^{\frac{2}{3}}=2\ ,\ a^{\frac{2}{3}}=2\qquad \therefore ab=a^3=2^{\frac{9}{2}}=16\sqrt{2}$

8) [정답] 24

[해설]



$\log_2 x^3-\log_2 x=3\log_2 x-\log_2 x$

$=2\log_2 x$

이므로 두 점 F, G는 두 선분 BD, CE를 각각 $2:1$로 내분하는 점이다.

$\therefore \square\mathrm{BFGC}=\frac{2}{3}\times\square\mathrm{BDEC}=\frac{2}{3}(8\times\triangle\mathrm{ADB})=\frac{16}{3}\times\frac{9}{2}=24$

9) [정답] ③

[해설]

함수 $f(x)=\log_2(x-4)$의 그래프는 함수 $h(x)=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼 평행이동한 그래프이므로

$\overline{\mathrm{BA}}=\overline{\mathrm{DE}}=4$, 함수 $g(x)=\log_4 x$의 그래프와 함수

$f(x)=\log_2(x-4)$의 그래프가 만나는 점 A의 x좌표를 a라 하면 A$(a, \log_4 a)$, D$(a, \log_2 a)$이므로 $\overline{AD}=\frac{1}{2}\log_2 a$

점 A와 점 B의 y좌표가 $\log_4 a$로 같으므로

$\log_2 x=\log_4 a \Leftrightarrow x=\sqrt{a}$

B$(\sqrt{a}, \log_2\sqrt{a})$, C$(\sqrt{a}, \log_4\sqrt{a})$ $\therefore$ $\overline{BC}=\frac{1}{4}\log_2 a$

$\therefore S_1=\frac{1}{2}\times 4\times\frac{1}{4}\log_2 a$, $S_2=\frac{1}{2}\times 4\times\frac{1}{2}\log_2 a$

따라서 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{1}{2}$

10) [정답] 70

[해설]

$\overline{PQ}=\log_{\frac{1}{9}}a-\log_3 a=-\frac{3}{2}\log_3 a$

$\overline{SR}=\log_3 b-\log_{\frac{1}{9}}b=\frac{3}{2}\log_3 b$

$\overline{PQ}:\overline{SR}=2:1$ 에서 $\overline{PQ}=2\overline{SR}$ 이므로

$-\frac{3}{2}\log_3 a=2\times\frac{3}{2}\log_3 b\Leftrightarrow\log_3 a+2\log_3 b=0$

$\therefore ab^2=1\cdots$ ㉠

선분 PR의 중점의 x좌표가 $\frac{9}{8}$ 이므로 $\frac{a+b}{2}=\frac{9}{8}\cdots$ ㉡

㉡에서 $a=\frac{9}{4}-b$를 ㉠에 대입하면 $\left(\frac{9}{4}-b\right)b^2=1$

$\Leftrightarrow 4b^3-9b^2+4=0\Leftrightarrow(b-2)(4b^2-b-2)=0$

$b=2$ 또는 $b=\frac{1\pm\sqrt{33}}{8}$, $b>1$ 이므로 $b=2$

따라서 $a=\frac{1}{4}$, $b=2$이므로 $40(b-a)=70$

11) [정답] ③

[해설]

두 점 A, B의 y좌표가 k이므로 A$(2^{-2k}, k)$, B$(2^k, k)$

점 C의 x좌표가 점 A의 x좌표와 같으므로 C$(2^{-2k}, -2k)$

점 D의 y좌표는 점 C의 y좌표와 같으므로 D$(2^{4k}, -2k)$

$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}=\frac{2^k-2^{-2k}}{2^{4k}-2^{-2k}}=\frac{2^{3k}-1}{2^{6k}-1}=\frac{1}{5}$에서 $k>0$이므로 $2^{3k}+1=5$

그러므로 $k=\frac{2}{3}$

12) [정답] ④

[해설]

$\overline{AB}=\log_2 k-\log_{\frac{1}{4}}k=\frac{3}{2}\log_2 k=n$($n$은 자연수)

따라서 $\log_2 k=\frac{2}{3}n$

한편, $\log_2 1<\log_2 k<\log_2 128$

즉, $0<\frac{2}{3}n<7$에서 $n=1, 2, \cdots, 10$

모든 k값의 곱을 M이라 하면

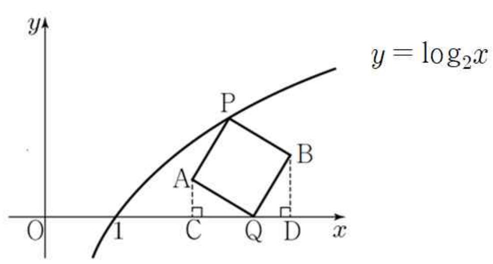
$\log_2 M=\frac{2}{3}(1+2+3+\cdots+10)=\frac{110}{3}$

그러므로 $3\log_2 M=110$

13) [정답] 40

[해설]

점 A에서 내린 수선의 발을 점 C, 점 B에서 내린 수선의 발을 점 D라 하자.



$\overline{AQ}=\overline{QB}$, $\angle CAQ=\angle DQB$, $\angle CQA=\angle DBQ$

이므로 삼각형 ACQ와 삼각형 QDB는 합동이다.

$\overline{AC}=\overline{QD}=\frac{1}{2}$, $\overline{CQ}=\overline{DB}=q-2$이므로

B$\left(q+\frac{1}{2}, q-2\right)$

선분 AB의 중점과 선분 PQ의 중점이 일치하므로

$2+q+\frac{1}{2}=p+q$, $\therefore p=\frac{5}{2}$

$\frac{1}{2}+q-2=\log_2 p$, $\therefore q=\log_2\frac{5}{2}+\frac{3}{2}$

$\therefore p+q=\frac{5}{2}+\log_2\frac{5}{2}+\frac{3}{2}$

$=\log_2 40$

따라서 $2^{p+q}=40$

14) [정답] 5

[해설]

점 A_n은 곡선 $y=\log_2 x+1$과 직선 $y=n$이 만나는 점이므로 $\log_2 x+1=n$

$x=2^{n-1}$ $\therefore A_n(2^{n-1},\ n)$

점 B_n은 곡선 $y=\log_2 x$와 직선 $y=n$이 만나는 점이므로 $\log_2 x=n$

$x=2^n$ $\therefore B_n(2^n,\ n)$

점 C_n은 곡선 $y=\log_2(x-4^n)$과 직선 $y=n$이 만나는 점이므로 $\log_2(x-4^n)=n$

$x=2^n+4^n$ $\therefore C_n(2^n+4^n,\ n)$

$S_n=\frac{1}{2}\times n\times\overline{A_nB_n}$, $T_n=\frac{1}{2}\times n\times\overline{B_nC_n}$

$\therefore \frac{T_n}{S_n}=\frac{\overline{B_nC_n}}{\overline{A_nB_n}}=\frac{2^n+4^n-2^n}{2^n-2^{n-1}}$

$=\frac{4^n}{(2-1)\times 2^{n-1}}$

$=2^{n+1}=64$

따라서 $n=5$

15) [정답] ④

[해설]

$a>1$일 때, $A(a,\ \log_2 a)$, $B(a,\ a)$, $C\left(\frac{1}{a},\ \log_2 a\right)$, $D\left(\left(\frac{1}{2}\right)^a,\ a\right)$,

$E(2^a,\ a)$이고 $\overline{DE}=\frac{15}{4}$이므로 $2^a-\left(\frac{1}{2}\right)^a=\frac{15}{4}$

$2^a=4$, $a=2$

$\therefore \overline{CA}=a-\frac{1}{a}=\frac{3}{2}$

16) [정답] ③

[해설]

원 $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+y^2=\left(\frac{\sqrt{13}}{4}\right)^2$의 중심의 좌표는 $\left(\frac{5}{4},\ 0\right)$,

반지름의 길이는 $\frac{\sqrt{13}}{4}$이다.

두 점 P, Q의 좌표를 각각
$P(p,\ \log_a p)$, $Q(q,\ \log_a q)(p>q)$라 하면

선분 PQ의 중점이 원의 중심 $\left(\frac{5}{4},\ 0\right)$이므로

$\frac{p+q}{2}=\frac{5}{4}$, $\frac{\log_a p+\log_a q}{2}=0$에서

$p+q=\frac{5}{2}$, $pq=1$

p, q를 두 실근으로 갖는 t에 대한 이차방정식은

$t^2-\frac{5}{2}t+1=0$, $2t^2-5t+2=0$

$(t-2)(2t-1)=0$

$t=2$ 또는 $t=\frac{1}{2}$

따라서 $p=2$, $q=\frac{1}{2}$이므로 $P(2,\ \log_a 2)$, $Q\left(\frac{1}{2},\ \log_a\frac{1}{2}\right)$

이때 선분 PQ가 원 C의 지름이므로

$\left(2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\log_a 2-\log_a\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2$

$\frac{9}{4}+\{\log_a 2-(-\log_a 2)\}^2=\frac{13}{4}$

$(2\log_a 2)^2=1$

$(\log_a 4)^2=1$

$a>1$이므로 $\log_a 4=1$에서 $a=4$

17) [정답] ⑤

[해설]

곡선 $y=a\log_2(x-a+1)$이 x축과 만나므로

$a\log_2(x-a+1)=0$에서 $x=a$

곡선 $y=2^{x-a}-1$이 x축과 만나므로

$2^{x-a}-1=0$에서 $x=a$

$\therefore A(a,\ 0)$

점 B의 y좌표를 $k(k>0)$라 하면

삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times k=\frac{1}{2}\times a\times k=\frac{7}{2}a$이므로 $k=7$

$2^{x-a}-1=7$이므로 $x=a+3$

$\therefore \mathrm{B}(a+3,\ 7)$

점 B는 곡선 $y=a\log_2(x-a+1)$ 위의 점이므로

$a\log_2(a+3-a+1)=7$에서 $a=\frac{7}{2}$

$\therefore \mathrm{A}\left(\frac{7}{2},\ 0\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{13}{2},\ 7\right)$

선분 AB의 중점 M의 좌표는 $\left(5,\ \frac{7}{2}\right)$이므로

$p=5,\ q=\frac{7}{2}$

따라서 $p+q=\frac{17}{2}$

18) [정답] 54

[해설]

점 A의 x좌표를 a라 하면 점 $\mathrm{A}(a,\ 2)$는 곡선 $y=\log_2 4x$ 위의 점이므로 $2=\log_2 4a$

$\therefore a=1$

따라서 점 A의 좌표는 $(1,\ 2)$

점 B의 x좌표를 b라 하면 점 $\mathrm{B}(b,\ 2)$는 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 점이므로 $2=\log_2 b$

$\therefore b=4$

따라서 점 B의 좌표는 $(4,\ 2)$

점 C의 x좌표를 c라 하면 점 $\mathrm{C}(c,\ k)$는 곡선 $y=\log_2 4x$ 위의 점이므로 $k=\log_2 4c$

$\therefore c=2^{k-2}$

따라서 점 C의 좌표는 $(2^{k-2},\ k)$

점 D의 x좌표를 d라 하면 점 $\mathrm{D}(d,\ k)$는 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 점이므로 $k=\log_2 d$

$\therefore d=2^k$

따라서 점 D의 좌표는 $(2^k,\ k)$

점 E의 x좌표는 점 B의 x좌표와 같으므로 4이고, 점 E가 선분 CD를 1 : 2로 내분하므로

$$4=\frac{1\times 2^k+2\times 2^{k-2}}{1+2}$$

$$=\frac{2\times 2^{k-1}+2^{k-1}}{3}$$

$$=\frac{3\times 2^{k-1}}{3}$$

$$=2^{k-1}$$

$2^2=2^{k-1}$, $k-1=2$

$\therefore k=3$

따라서 $\mathrm{C}(2,\ 3)$, $\mathrm{D}(8,\ 3)$, $\mathrm{E}(4,\ 3)$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\overline{\mathrm{CD}}=6$, $\overline{\mathrm{BE}}=1$

사각형 ABDC의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{CD}})\times\overline{\mathrm{BE}}$$

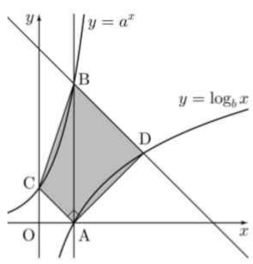
$$=\frac{1}{2}\times(3+6)\times 1$$

$$=\frac{9}{2}$$

따라서 $12S=54$

19) [정답] ②

[해설]



$\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{B}(1,\ a)$, $\mathrm{C}(0,\ 1)$, $\mathrm{D}(k,\ k-1)$

$1+a=k+(k-1)$, $6=\frac{1}{2}\times a\times k$,

$k-1=\log_b k$

을 연립하여 풀면 $k=3$, $a=4$, $b=\sqrt{3}$

$\therefore ab=4\sqrt{3}$

20) [정답] ②

[해설]

$|\log_2 x - n| = 1$에서

$\log_2 x - n = 1$ 또는 $\log_2 x - n = -1$

$\therefore x = 2^{n+1}$ 또는 $x = 2^{n-1}$

$|\log_2 x - n| = 2$에서

$\log_2 x - n = 2$ 또는 $\log_2 x - n = -2$

$\therefore x = 2^{n+2}$ 또는 $x = 2^{n-2}$

ㄱ. $\overline{\mathrm{A_1B_1}} = 2^2 - 2^0 = 3$ (참)

ㄴ. $\overline{\mathrm{A_nB_n}} = 2^{n+1} - 2^{n-1} = 2^n(2 - 2^{-1}) = \frac{3}{2} \times 2^n$

$\overline{\mathrm{C_nD_n}} = 2^{n+2} - 2^{n-2} = 2^n(2^2 - 2^{-2}) = \frac{15}{4} \times 2^n$

따라서 $\overline{\mathrm{A_nB_n}} : \overline{\mathrm{C_nD_n}} = \frac{3}{2} : \frac{15}{4} = 2 : 5$ (참)

ㄷ. $S_n = \frac{1}{2}\left(\overline{\mathrm{A_nB_n}} + \overline{\mathrm{C_nD_n}}\right) = \frac{1}{2}\left(\overline{\mathrm{A_nB_n}} + \frac{5}{2}\overline{\mathrm{A_nB_n}}\right)$

$= \frac{7}{4}\overline{\mathrm{A_nB_n}} = \frac{21}{8} \times 2^n$

따라서 $S_n = 21 \times 2^{n-3}$

$21 \le 21 \times 2^{k-3} \le 210$

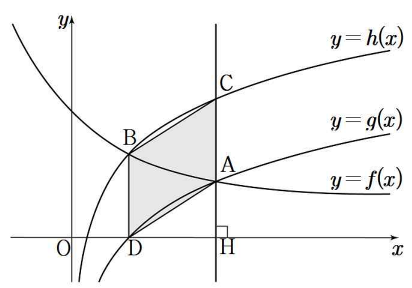
$1 \le 2^{k-3} \le 10$을 만족하는 자연수 k의 값은 3, 4, 5, 6

모든 자연수 k의 값의 합은 18 (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

21) [정답] ⑤

[해설]



ㄱ. $f(1) = h(1) = a$이므로 점 B의 좌표는 $(1,\ a)$이다. (참)

ㄴ. 점 A는 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$의 그래프의 교점이므로 점 A의 x좌표가 4일 때,

$\log_2 4 = 2^{1-4} + a - 1$이므로 $a = \frac{23}{8}$이다.

$\overline{\mathrm{BD}}$와 $\overline{\mathrm{CA}}$가 평행하고, $\overline{\mathrm{BD}} = \overline{\mathrm{CA}} = a$이므로 사각형 ACBD는 평행사변형이다.

따라서 사각형 ACBD의 넓이는 $3 \times \frac{23}{8} = \frac{69}{8}$이다. (참)

ㄷ. $\overline{\mathrm{CA}} : \overline{\mathrm{AH}} = 3 : 2$에서 $2\overline{\mathrm{CA}} = 3\overline{\mathrm{AH}}$이다.

점 A의 x좌표를 k라 하면 $\overline{\mathrm{CA}} = a$, $\overline{\mathrm{AH}} = \log_2 k$이므로

$2a = 3\log_2 k$이다. …… ㉠

또한 점 A는 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$의 그래프의 교점이므로 $\log_2 k = 2^{1-k} + a - 1$이다. …… ㉡

㉠, ㉡에서 $2^{1-k} = 1 - \frac{a}{3}$이다.

$a > 0$에서 점 A의 x좌표 k는 1보다 크다.

따라서 $0 < 2^{1-k} < 1$이다.

그러므로 $0 < 1 - \frac{a}{3} < 1$에서 $0 < a < 3$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

22) [정답] 11

[해설]

두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′이라 하자.

삼각형 AOA′과 삼각형 BOB′은 닮음이므로

$\overline{\mathrm{OA'}} : \overline{\mathrm{OB'}} = \overline{\mathrm{AA'}} : \overline{\mathrm{BB'}} = 1 : 2$

점 A의 좌표를 $(a,\ \log_3(5a-3))$이라 하면

점 B의 좌표는 $(2a,\ \log_3(10a-3))$

$2\log_3(5a-3) = \log_3(10a-3)$

$25a^2 - 30a + 9 = 10a - 3$

$25a^2 - 40a + 12 = (5a-2)(5a-6) = 0$이므로

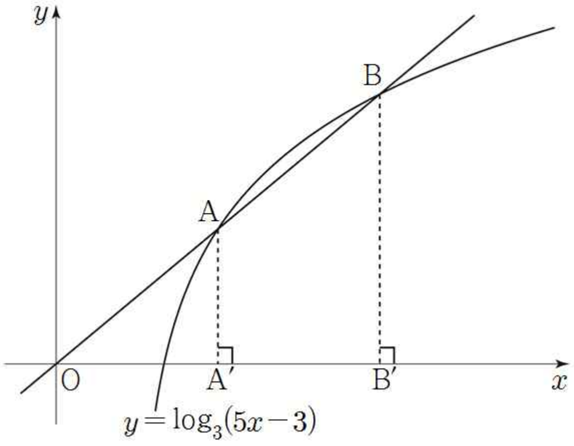
$a = \frac{2}{5}$ 또는 $a = \frac{6}{5}$

$a > \frac{3}{5}$이므로 $a = \frac{6}{5}$ 즉, 점 A의 좌표는 $\left(\frac{6}{5},\ 1\right)$

직선 AB의 기울기는 직선 OA의 기울기와 같다.

직선 OA의 기울기 $\frac{q}{p} = \frac{1-0}{\frac{6}{5}-0} = \frac{5}{6}$

따라서 $p + q = 11$

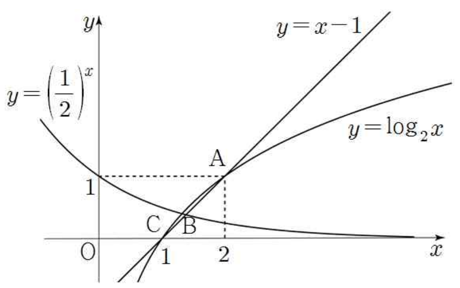


23) [정답] 54

[해설]

직선 $y=x+n-2^n$이 x축과 만나는 점을 C라 하자.

i) $n=1$일 때,

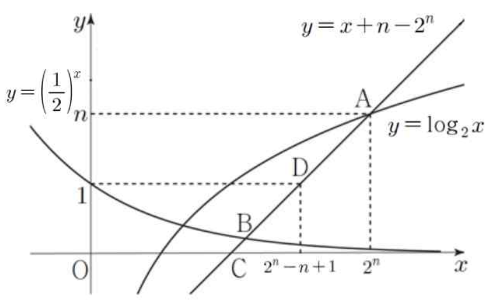


점 A$(2,\ 1)$, 점 C$(1,\ 0)$이므로 $\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{AB}}<\overline{\mathrm{AC}}$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}<\sqrt{2}$

따라서 $n=1$일 때 주어진 식을 만족시키지 않는다.

ii) $n\geq 2$일 때,



점 C의 좌표는 $(2^n-n,\ 0)$

직선 $y=x+n-2^n$이 직선 $y=1$과 만나는 점을 D라 하면, 점 D의 좌표는 $(2^n-n+1,\ 1)$

$\overline{\mathrm{AD}}<\overline{\mathrm{AB}}<\overline{\mathrm{AC}}$이고

$\overline{\mathrm{AD}}=(n-1)\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{AC}}=\mathrm{n}\sqrt{2}$

즉, $n-1<\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sqrt{2}}<\mathrm{n}$

i), ii)에 의하여

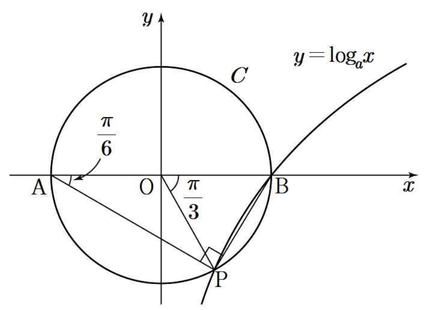
$1<\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sqrt{2}}<10$을 만족시키는 자연수 n은

2, 3, 4, $\cdots$, 10이다.

따라서 모든 자연수 n의 값의 합은 54

24) [정답] ②

[해설]



삼각형 APB는 빗변의 길이가 2인 직각삼각형이고

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{3}$이므로 $\angle\mathrm{BAP}=\dfrac{\pi}{6}$이다.

원점을 O라 하면 $\angle\mathrm{BOP}=\dfrac{\pi}{3}$이고, 점 P의 좌표는

$\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right),\ \sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)=\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$이다.

점 P는 함수 $y=\log_a x$의 그래프 위의 점이므로

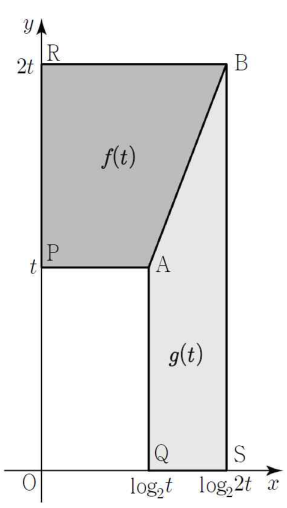
$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\log_a\dfrac{1}{2}$이다.

즉, $a^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{1}{2}$이므로 $a^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2$이다.

따라서 $a^{\sqrt{3}}=2^2=4$이다.

25) [정답] ③

[해설]



두 점 A, B의 좌표는 $(\log_2 t,\ t)$, $(\log_2 2t,\ 2t)$이므로 두 사각형의 넓이 $f(t)$, $g(t)$는

$$f(t)=\frac{1}{2}(\log_2 t+\log_2 2t)(2t-t)=\frac{t}{2}\log_2 2t^2$$

$$g(t)=\frac{1}{2}(t+2t)(\log_2 2t-\log_2 t)=\frac{3}{2}t$$

$$\frac{f(t)}{g(t)}=\frac{1}{3}\log_2 2t^2$$

$\frac{1}{3}\log_2 2t^2=n$ (n은 자연수)라 하면 $2t^2=2^{3n}$이므로

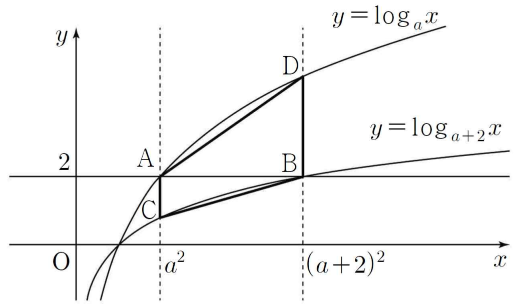
$$t=2^{\frac{3n-1}{2}}$$

$1<t<100$을 만족시키는 자연수 n의 값은 1, 2, 3, 4

따라서 t의 값은 2, $2^{\frac{5}{2}}$, 2^4, $2^{\frac{11}{2}}$이므로 모든 t의 값의 곱은 2^{13}

26) [정답] ⑤

[해설]



ㄱ. 곡선 $y=\log_a x$와 직선 $y=2$가 점 A에서 만나므로 $\log_a x=2$이고 $x=a^2$이다. (참)

ㄴ. $\mathrm{A}(a^2,\ 2)$, $\mathrm{C}(a^2,\ \log_{a+2}a^2)$에서

$1=\overline{\mathrm{AC}}=2-\log_{a+2}a^2$이므로 $\log_{a+2}a^2=1$이다.

$a+2=a^2$, $a^2-a-2=0$에서

$a=-1$ 또는 $a=2$이고 $a>1$이므로 $a=2$이다. (참)

ㄷ. $\mathrm{A}(a^2,\ 2)$, $\mathrm{B}((a+2)^2,\ 2)$, $\mathrm{C}(a^2,\ \log_{a+2}a^2)$, $\mathrm{D}((a+2)^2,\ \log_a(a+2)^2)$에서 $\log_a(a+2)=t$라 하면

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BD}}}{\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}}=\frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\overline{\mathrm{AC}}}$$

$$=\frac{2\log_a(a+2)-2}{2-2\log_{a+2}a}$$

$$=\frac{\log_a(a+2)-1}{1-\log_{a+2}a}$$

$$=\frac{t-1}{1-\frac{1}{t}}$$

$$=\frac{t(t-1)}{(t-1)}$$

$$=t$$

$=\log_a(a+2)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

27) [정답] **75**

[해설]

$\overline{\mathrm{OC}}=\overline{\mathrm{CA}}=\overline{\mathrm{AB}}$이므로 점 A의 좌표는 $(k,\ k)$이고, 점 B의 좌표는 $(2k,\ k)$이다.

점 A는 곡선 $y=-\log_a x$ 위의 점이므로

$k=-\log_a k$ …… ㉠

점 B는 곡선 $y=-\log_a x$ 위의 점이므로

$k=\log_a 2k$ …… ㉡

㉠과 ㉡을 연립하면 $\log_a 2k^2=0$에서 $2k^2=1$이므로 $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$

곡선 $y=|\log_a x|$와 직선 $y=2\sqrt{2}$가 만나는 두 점의 x좌표를 각각 α, $\beta(\alpha<\beta)$라 하면 $-\log_a\alpha=2\sqrt{2}$에서 $\alpha=a^{-2\sqrt{2}}$

$\log_a\beta=2\sqrt{2}$에서 $\beta=a^{2\sqrt{2}}$

㉡에서 $a^k=2k$이므로 $a=(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}=2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$$d=\beta-\alpha=a^{2\sqrt{2}}-a^{-2\sqrt{2}}$$

$$=\left(2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)^{2\sqrt{2}}-\left(2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)^{-2\sqrt{2}}$$

$$=2^2-2^{-2}=\frac{15}{4}$$

따라서 $20d=20\times\frac{15}{4}=75$

28) [정답] ⑤

[해설]

$m=3^x$에서 $x=\log_3 m$이므로 $\mathrm{A_m}(\log_3 m,\ m)$

$m=\log_2 x$에서 $x=2^m$이므로 $\mathrm{B_m}(2^{\mathrm{m}},\ \mathrm{m})$

그러므로 $\overline{\mathrm{A_mB_m}}=2^m-\log_3 m$

$\overline{\mathrm{A_mB_m}}$이 자연수이기 위해서는 m과 2^m이 자연수이므로 $\log_3 m$이 음이 아닌 정수이다.

그러므로 $m=3^k$(단, k는 음이 아닌 정수이다.)

$m=3^0$일 때, $a_1=2^1-\log_3 1=2$

$m=3^1$일 때, $a_2=2^3-\log_3 3=7$

$m=3^2$일 때, $a_3=2^9-\log_3 9=510$

따라서 $a_3=510$

[보충 설명]

위의 풀이에서 $\overline{\mathrm{A_mB_m}}$이 자연수이기 위해서는 $m=3^k$꼴임을 알 수 있다. 이제 m의 값이 3^{n-1}에서 3^n으로 증가하면 $2^m-\log_3 m$의 값도 증가함을 보이자.

모든 자연수 n에 대하여

$$\left(2^{3^n}-n\right)-\left\{2^{3^{n-1}}-(n-1)\right\}$$
$$=2^{3^n}-2^{3^{n-1}}-1$$
$$=2^{3^{n-1}}(2^3-1)-1$$
$$=7\times2^{3^{n-1}}-1$$

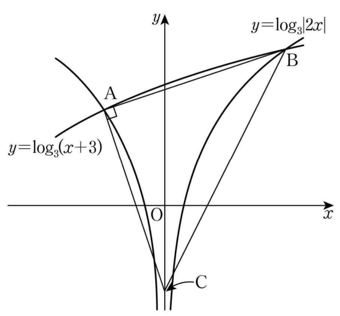
$3^{n-1}\geq1$이므로 $2^{3^{n-1}}\geq2$이다.

그러므로 $7\times2^{3^{n-1}}-1>0$

따라서 $2^{3^{n-1}}-(n-1)<2^{3^n}-n$이 성립한다.

29) [정답] ⑤

[해설]



$x<0$일 때의 교점 A의 x좌표는 방정식 $\log_3(-2x)=\log_3(x+3)$의 근이므로

$$-2x=x+3,\ 3x=-3,\ x=-1$$

따라서 점 A의 좌표는 $\mathrm{A}(-1,\ \log_3 2)$

$x>0$일 때 교점 B의 x좌표는 방정식 $\log_3 2x=\log_3(x+3)$의 근이므로 $2x=x+3,\ x=3$

따라서 점 B의 좌표는 $\mathrm{B}(3,\ \log_3 6)$이다.

두 점 $\mathrm{A}(-1,\ \log_3 2)$, $\mathrm{B}(3,\ \log_3 6)$에 대하여 직선 AB의 기울기는

$\dfrac{\log_3 6-\log_3 2}{3-(-1)}=\dfrac{\log_3\frac{6}{2}}{4}=\dfrac{1}{4}$이므로 점 A를 지나고 직선 AB와 수직인 직선의 방정식은

$$y-\log_3 2=-4(x+1)$$
$$y=-4x-4+\log_3 2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

직선 ㉠이 y축과 만나는 점 C의 좌표는 $\mathrm{C}(0,\ -4+\log_3 2)$이다.

이때 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{4^2+(\log_3 6-\log_3 2)^2}=\sqrt{17}$,

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(-1)^2+4^2}=\sqrt{17}$이므로 직각삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}=\frac{1}{2}\times\sqrt{17}\times\sqrt{17}=\frac{17}{2}$$

30) [정답] **12**

[해설]

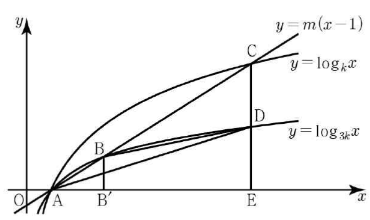
조건 (가)에 의하여 삼각형 ADB의 넓이를 S라 하면 삼각형 BDC의 넓이는 $3S$이다.

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=1:3$에서 $\overline{\mathrm{BC}}=3\overline{\mathrm{AB}}$이고 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 B'이라 하면 $\overline{\mathrm{B'E}}=3\overline{\mathrm{AB'}}$이다.

$\overline{\mathrm{AB'}}=\mathrm{a}$라 하면 $\overline{\mathrm{B'E}}=3\mathrm{a}$이므로

$$\mathrm{B}(\mathrm{a}+1,\ \log_{3\mathrm{k}}(\mathrm{a}+1)),\ \mathrm{C}(4\mathrm{a}+1,\ \log_{\mathrm{k}}(4\mathrm{a}+1)),$$
$$\mathrm{D}(4\mathrm{a}+1,\ \log_{3\mathrm{k}}(4\mathrm{a}+1))$$

이다.



조건 (나)에 의하여 삼각형 AED의 넓이는 $4S$이고 삼각형

AEC의 넓이는 $8S$이므로 D는 선분 CE의 중점이다.

$$\log_k(4a+1)=2\log_{3k}(4a+1)$$

$$\frac{\log_k(4a+1)}{\log_k k}=\frac{2\log_k(4a+1)}{\log_k 3k}$$

$\log_k 3k=2$에서 $k^2=3k$이므로 $k=3$

세 점 A, B, C가 직선 $y=m(x-1)$위에 있으므로

$$m=\frac{\log_9(a+1)-0}{(a+1)-1}=\frac{\log_3(4a+1)-0}{(4a+1)-1}\text{에서}$$

$$2\log_3(a+1)=\log_3(4a+1)$$

$$(a+1)^2=4a+1,\ a^2-2a=0$$

$a>0$이므로 $a=2$

$$m=\frac{\log_9 3}{2}=\frac{1}{4}$$

따라서 $\frac{k}{m}=12$

31) [정답] ⑤

[해설]

점 P의 좌표를 $P(t,\ a^t)\ (t<0)$이라 하면 점 P를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 점 Q의 좌표는 $(a^t,\ t)$이다. $\angle PQR=45°$이고 직선 PQ의 기울기가 -1이므로 두 점 Q, R의 x좌표는 같다.

즉 점 R의 좌표는 $(a^t,\ -t)$이다.

직선 PR의 기울기는 $\frac{1}{7}$이므로 $\frac{a^t+t}{t-a^t}=\frac{1}{7}$에서

$$a^t=-\frac{3}{4}t \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\overline{PR}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$이므로 $\sqrt{(t-a^t)^2+(a^t+t)^2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

$$a^{2t}+t^2=\frac{25}{4} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $t^2=4$이고 $t<0$이므로 $t=-2$

㉠에 대입하면 $\frac{1}{a^2}=\frac{3}{2}$이고 $a>0$이므로 $a=\frac{\sqrt{6}}{3}$

32) [정답] ③

[해설]

직선 $x=k$가 x축과 만나는 점을 E라 하면 삼각형 ACB와 삼각형 BCD의 넓이의 비가 3 : 2이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{CB}\times\overline{AB}\ :\ \frac{1}{2}\times\overline{CB}\times\overline{BE}=3\ :\ 2$이다.

$\overline{AB}\ :\ \overline{BE}=3\ :\ 2$이므로 $\overline{BE}=\frac{2}{5}\overline{AE}$이다.

$\overline{BE}=\log_a k,\ \overline{AE}=\log_2 k$이므로

$\log_a k=\frac{2}{5}\log_2 k$에서 $a=2^{\frac{5}{2}}=4\sqrt{2}$

33) [정답] ④

[해설]

직선 $y=-2$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점이 A이므로

$-2=\frac{1}{2}\log_a(x-1)-2$에서 $x=2$

즉, $A(2,\ -2)$

$B\left(10,\ \frac{1}{2}\log_a 9-2\right)$, $C(10,\ -\log_a 8+1)$이고, 점 A와 직선 $x=10$ 사이의 거리는 8이므로 삼각형 ACB의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times 8\times\left\{\left(\frac{1}{2}\log_a 9-2\right)-(-\log_a 8+1)\right\}$$

$$=4\times(\log_a 24-3)=28$$

따라서 $\log_a 24=10$이므로 $a^{10}=24$

34) [정답] **192**

[해설]

곡선 $y=a^{x-1}$은 곡선 $y=a^x$을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이고, 곡선 $y=\log_a(x-1)$은 곡선 $y=\log_a x$를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 두 곡선 $y=a^{x-1}$, $y=\log_a(x-1)$은 직선 $y=x-1$에 대하여 대칭이다.

즉, 두 직선 $y=-x+4$, $y=x-1$의 교점을 M이라 하면 점 M의 좌표는 $M\left(\frac{5}{2},\ \frac{3}{2}\right)$이고, 점 M은 선분 AB의 중점이므로 $\overline{AM}=\sqrt{2}$이다.

점 A의 좌표를 $(k,\ -k+4)$라 하면

$\left(k-\frac{5}{2}\right)^2+\left(-k+\frac{5}{2}\right)^2=2$에서 $k=\frac{3}{2}$

즉, $A\left(\frac{3}{2},\ \frac{5}{2}\right)$이므로

$$\frac{5}{2}=a^{\frac{3}{2}-1},\ a^{\frac{1}{2}}=\frac{5}{2},\ a=\frac{25}{4}$$

이때 점 C의 좌표는 $\left(0,\ \frac{1}{a}\right)$, 즉 $\left(0,\ \frac{4}{25}\right)$이고, 점 C에서 직선 $y=-x+4$에 내린 수선의 발을 H라 하면 선분 CH의 길이는 점 C와 직선 $y=-x+4$ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{\mathrm{CH}}=\frac{\left|0+\frac{4}{25}-4\right|}{\sqrt{2}}=\frac{48\sqrt{2}}{25}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

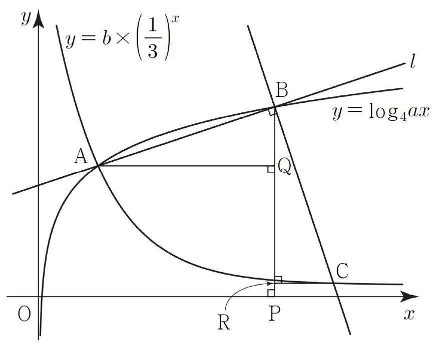
$$S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{CH}}$$
$$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\frac{48\sqrt{2}}{25}$$
$$=\frac{96}{25}$$

이므로 $50\times S=50\times\frac{96}{25}=192$

35) [정답] ②

[해설]

점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 P, 점 A에서 선분 BP에 내린 수선의 발을 Q, 점 C에서 선분 BP에 내린 수선의 발을 R라 하자.



ㄱ. 직선 l의 기울기가 $\frac{1}{3}$이므로

$$\frac{\overline{\mathrm{BQ}}}{\overline{\mathrm{AQ}}}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{1}{3},\ y_2-y_1=\frac{1}{3}(x_2-x_1)$$

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{10}$$

$$\frac{10}{9}(x_2-x_1)^2=10,\ (x_2-x_1)^2=9$$

$x_1<x_2$이므로 $x_2-x_1=3$ (참)

ㄴ. $\angle\mathrm{AQB}=\angle\mathrm{BRC}=\frac{\pi}{2}$이고

$\angle\mathrm{ABQ}+\angle\mathrm{CBR}=\angle\mathrm{CBR}+\angle\mathrm{BCR}=\frac{\pi}{2}$이므로

$\angle\mathrm{ABQ}=\angle\mathrm{BCR}$

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{10}$이므로 두 삼각형 ABQ와 BCR는 합동이다.

$\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{BR}}=3,\ \overline{\mathrm{BQ}}=\overline{\mathrm{CR}}=1$

$x_3-x_1=\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{CR}}=3+1=4$

$y_1-y_3=\overline{\mathrm{QR}}=\overline{\mathrm{BR}}-\overline{\mathrm{BQ}}=3-1=2$

$x_3-x_1=2(y_1-y_3)=4$ (참)

ㄷ. ㄱ에 의하여 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_1+3,\ y_1+1)$

두 점 A, B는 곡선 $y=\log_4 ax$위에 있으므로

$y_1=\log_4 ax_1$ …… ㉠

$y_1+1=\log_4 a(x_1+3)$ …… ㉡

점 A는 곡선 $y=b\times\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 위에 있으므로

$y_1=\frac{b}{3^{x_1}}$ …… ㉢

㉠, ㉡을 연립하면 $1=\log_4\frac{x_1+3}{x_1}$, $x_1=1$

㉠, ㉢에 의하여 $\log_4 a=\frac{b}{3}$, $a=4^{\frac{b}{3}}$

$a^2=4^{\frac{2}{3}b}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

[참고]

점 $\mathrm{C}(x_1+4,\ y_1-2)$는 곡선 $y=b\times\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 위에 있고 $x_1=1$,

$y_1=\frac{b}{3}$이므로 $\frac{b}{3}-2=b\times3^{-5}$에서 $b=\frac{243}{40}$

$a=4^{\frac{b}{3}}=4^{\frac{81}{40}}=2^{\frac{81}{20}}$

36) [정답] ②

[해설]

ㄱ) $0<\log_a c<1$이므로 $1<c<a$를 만족시킨다.($\because a>1$)
그러므로, 구한 부등식의 양변에 $\log_b$를 달아주면
$\log_b c<\log_b a$를 만족한다.

ㄴ) $0<\log_a c<1$이므로 $a<c<1$를 만족시킨다.
$b>1$이므로 $\log_b a<\log_b c$가 성립한다.

ㄷ) $\log_a c<0$이므로 $c>1$이다. 그러므로 $\log_a b>\log_c b$가 성립한다 $\therefore$ ㄴ만 옳다.

37) [정답] ①

[해설]

ㄱ. $a<b$이고 $a<1$이므로 $\log_a b<\log_a a\Leftrightarrow\log_a b<1$ (참)

ㄴ. (반례) $a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{9}{16}$ (거짓)

ㄷ. (반례) $a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{1}{2}$, $c=4$, $d=2$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ

38) [정답] 10

[해설]

$\log_3 x = X$, $\log_3 y = Y$라 하면

$(\log_3 x)^2 + (\log_3 y)^2 = 2\log_9 x + 2\log_9 y = \log_3 x + \log_3 y$ 는

$X^2 + Y^2 = X + Y$, $\left(X-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(Y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ $\cdots$ ㉠

$\log_3 xy = \log_3 x + \log_3 y = X + Y$ 에서 직선

$X + Y - \log_3 xy = 0$과 ㉠이 만나야 하므로

$\frac{\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\log_3 xy\right|}{\sqrt{1^2+1^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, $|1-\log_3 xy| \leq 1$

$\therefore 0 \leq \log_3 xy \leq 2$

$\therefore 1 \leq xy \leq 9$ $\quad$ $\therefore$ $M + m = 9 + 1 = 10$

39) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. (거짓) $f(-1) = \frac{1}{2}$, $g(-1) = 1$이므로

$f(-1) < g(-1)$

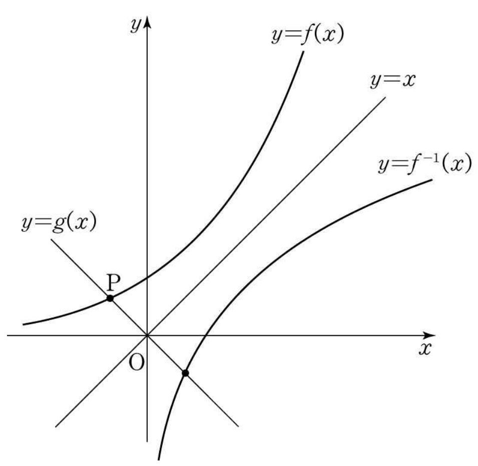
$\therefore a > -1$

ㄴ. (참) $t > 0$이면 그래프에서

$|f(-t) - g(-t)| < |f(t) - g(t)|$

ㄷ. (참) 함수 $y = f^{-1}(x)$의 그래프와 함수 $y = f(x)$의 그래프는 직선 $y = x$에 대하여 대칭이므로 구하는 점은 점 $\mathrm{P}(a,\ -a)$와 직선 $y = x$에 대하여 대칭인 점이다.

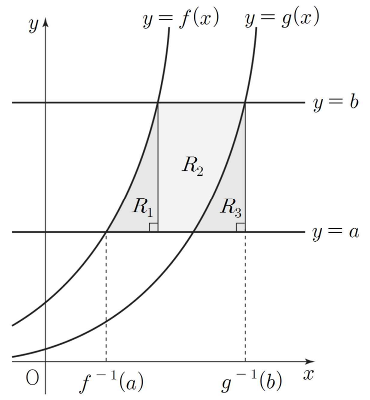
따라서, 구하는 점의 좌표는 $(-a,\ a)$이다.



40) [정답] ①

[해설]

두 함수 $f(x) = 2^x$, $g(x) = 2^{x-2}$의 그래프는 다음과 같다.



세 영역 R_1, R_2, R_3의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3이라 하자.

함수 $g(x)$의 그래프는 함수 $f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 $S_1 = S_3$

조건 (가)에서

$S_1 + S_2 = S_3 + S_2 = 2 \times (b-a) = 6$

$b - a = 3$ $\cdots\cdots$ ㉠

조건 (나)에서

$f^{-1}(a) = p$, $g^{-1}(b) = q$ (p, q는 실수)라 하면

$2^p = a$, $2^{q-2} = b$

$p = \log_2 a$, $q = \log_2 b + 2 = \log_2 4b$

$q - p = \log_2 4b - \log_2 a = \log_2 \frac{4b}{a} = \log_2 6$

$3a = 2b$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 6$, $b = 9$

$a + b = 15$

41) [정답] ⑤

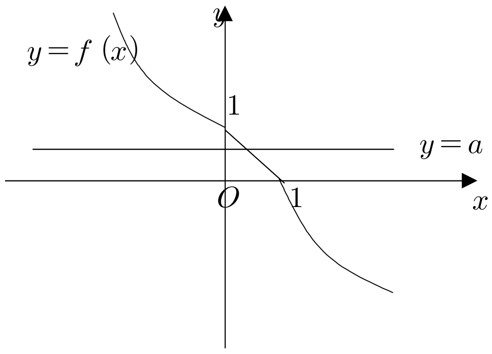
[해설]

ㄱ. $\{f(-3)\}^2 = (a^{-3})^5 = a^{-15}$

$f(-15) = a^{-15}$

$\therefore$ $\{f(-3)\}^2 = f(-15)$ (참)

ㄴ. $0 < a < 1$이므로 $y = f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



따라서, $y=f(x)$의 그래프와 직선$y=a$는 한 점에서 만난다. (참)

ㄷ. $y=a^x$의 역함수는 $y=\log_a x$이므로

$y=a^x$ $(x \leq 0)$의 그래프와 $y=\log_a x$ $(x \geq 1)$의 그래프는 직선$y=x$에 대하여 대칭이다.

따라서, ㄴ에서 $y=f(x)$의 그래프는 직선$y=x$에 대하여 대칭이다. (참)

그러므로 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

42) [정답] 4

[해설]

점B$(m,\ a^m)$라 하면 점 A$(a^m,\ m)$ 점 A와 점 B는 원 위의 점이고 반지름이 $\sqrt{8}$인 원에 내접하는 정삼각형의 무게중심이 원점과 일치하므로 정삼각형의 한 변의 길이는 $2\sqrt{6}$

$$\begin{cases} m^2+a^{2m}=8 & \cdots ㉠ \\ \sqrt{2(a^m-m)^2}=2\sqrt{6} & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡에서 $a^m-m=\pm 2\sqrt{3}$

$a^m-m>0$ 이므로 $a^m-m=2\sqrt{3}$ $\cdots$ ㉢

㉠에 ㉢을 대입하면 $a^{2m}+(a^m-2\sqrt{3})^2=8$

$a^{2m}-2\sqrt{3}a^m+2=0$ $\therefore$ $a^m=1+\sqrt{3}$ $(a^m>1)$

A의 x좌표는 $1+\sqrt{3}=p+\sqrt{q}$ $\therefore$ $p=1,\ q=3$

따라서 $p+q=4$

43) [정답] ③

[해설]

직선이 y축과 만나는 점을 D라 하면

두 곡선 $y=2^x$과 $y=\log_2 x$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점 C$(a,\ 0)$이라 하면 점 D$(0,\ a)$이고,

$\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AD}}$

조건에 의해 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=3:1$에서

$\triangle\mathrm{OBC}=\frac{1}{5}\triangle\mathrm{OCD}=\frac{1}{10}a^2=40$이므로 $a=20$

점 A는 직선 $y=-x+a$ 위의 점이다.

따라서 $p+q=a=20$

[다른 풀이]

두 곡선 $y=2^x$과 $y=\log_2 x$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점 A와 점 B는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 점 A$(p,\ q)$이므로 점 B$(q,\ p)$이고, 점 C$(a,\ 0)$이다.

조건에 의해 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=3:1$

점 B는 선분 AC를 $3:1$로 내분하는 점이므로

$q=\frac{3a+p}{4}$, $p=\frac{q}{4}$에서 $a=5p$, $q=4p$

또, 삼각형 OBC의 넓이가 40이므로

$\frac{1}{2}ap=\frac{5}{2}p^2=40$

$p^2=16$에서 $p=4$이므로 $a=20$

($p<0$인 경우에는 문제의 조건을 만족시킬 수 없다.)

점 A는 직선 $y=-x+a$ 위의 점이다.

따라서 $p+q=a=20$

44) [정답] ②

[해설]

x좌표를 추론한다.

A$(a,\ 2^a)$, B$(2^a,\ a)$이고 C$(\log_2 a,\ a)$이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=12\sqrt{2}$, $2(2^a-a)^2=288$, $2^a-a=12$ $\cdots$ ㉠

점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{\mathrm{AH}}=2^a-a=12$이므로 $\overline{\mathrm{BC}}=14$이다.

그러므로 $2^a-\log_2 a=14$ $\cdots$ ㉡

㉡-㉠으로부터 $a-\log_2 a=2$

45) [정답] ④

[해설]

두 곡선 $y=\log_{\sqrt{2}}(x-a)$와 $y=(\sqrt{2})^x+a$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고, 직선 AB는 직선 $y=x$에 수직이므로 두 점 A, B는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

점 A의 좌표를 $A(2t,\ t)$ $(t>0)$이라 하면 점 B의 좌표는 $B(t,\ 2t)$이므로 $\overline{AB}=\sqrt{2}t$이다.

선분 AB의 중점을 M이라 하면 $M\left(\frac{3}{2}t,\ \frac{3}{2}t\right)$

삼각형 OAB는 $\overline{OA}=\overline{OB}$인 이등변삼각형이므로 삼각형 OAB의 넓이는

$$6=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{OM}$$

$$=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}t\times\frac{3\sqrt{2}}{2}t$$

$$=\frac{3}{2}t^2$$

이므로 $t=2$

즉 $A(4,\ 2)$가 곡선 $y=\log_{\sqrt{2}}(x-a)$위의 점이므로

$$2=\log_{\sqrt{2}}(4-a),\ (\sqrt{2})^2=4-a$$

따라서 구하는 상수 a의 값은 2이다.

46) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. 두 곡선 $y=2^x$과 $y=\log_2 x$는
직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이므로
$x_1=y_2,\ y_1=x_2,\ OA=OB$
삼각형 OAB의 넓이가 삼각형 OAC의 넓이의 2배이므로
$\overline{OC}=\frac{1}{2}\overline{OB}=\frac{1}{2}\overline{OA}$ (참)

ㄴ. 점 C는 선분 OB의 중점이므로

$x_3=\frac{1}{2}x_2,\ y_3=\frac{1}{2}y_2$

$x_2=y_1=2x_3$

$x_2+y_1=2y_1=4x_3$ (참)

ㄷ. $y_2=2^{x_2},\ y_3=\left(\frac{1}{2}\right)^{x_3}$

세 점 O, B, C는 직선 l 위의 점이므로

직선 l의 기울기는 $\frac{y_2}{x_2}=\frac{y_3}{x_3},\ \frac{2^{x_2}}{x_2}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{x_3}}{x_3}$

ㄴ에서 $x_2=2x_3$이므로

$\frac{2^{2x_3}}{2x_3}=\frac{2^{-x_3}}{x_3},\ 2^{2x_3-1}=2^{-x_3}$

$2x_3-1=-x_3$이므로 $x_3=\frac{1}{3}$

직선 l의 기울기는 $\frac{y_3}{x_3}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{x_3}}{x_3}=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

47) [정답] ①

[해설]

두 사각형이 합동이고 두 점 P, Q가 직선 $y=x$ 위의 점이므로 $P(k,\ k),\ Q(2k,\ 2k)$이다.

따라서 $a^k=k,\ a^{2k}=2k$이므로 $2k=a^{2k}=(a^k)^2=k^2$에서 $k=2$이다. $a^2=2\ \therefore\ a=\sqrt{2}$

48) [정답] 16

[해설]

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수의 그래프가 만나는 점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 만나는 점과 같다.

$A\left(\alpha,\ a^\alpha-\frac{5}{4}\right),\ B\left(\beta,\ a^\beta-\frac{5}{4}\right)$이라 하면 선분 AB의 중점의 좌표는 $\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \frac{a^\alpha+a^\beta}{2}-\frac{5}{4}\right)$ 선분 AB의 중점이 원점이므로

$$\beta=-\alpha,\ a^\alpha+a^\beta-\frac{5}{2}=0\Leftrightarrow a^\alpha+a^{-\alpha}-\frac{5}{2}=0,$$

$$2a^{2\alpha}-5a^\alpha+2=0,\ \Leftrightarrow(2a^\alpha-1)(a^\alpha-2)=0$$

$\therefore\ a^\alpha=\frac{1}{2}$ 또는 $a^\alpha=2$

ⅰ) $a^\alpha=\frac{1}{2}$일 때, $a^\alpha-\frac{5}{4}=\alpha$이므로 $\alpha=-\frac{3}{4}\ \therefore\ a=2\sqrt[3]{2}$

ⅱ) $a^\alpha=2$일 때, $a^\alpha-\frac{5}{4}=\alpha$이므로 $\alpha=\frac{3}{4}\ \therefore\ a=2\sqrt[3]{2}$

따라서 $a^3=16$

49) [정답] ③

[해설]

$x^{\log 2}=2^{\log x}$이므로 주어진 방정식은

$2^{\log x}\times 2^{\log x}-(2^{\log x}+5\times 2^{\log x})+8=0$,$t=2^{\log x}$로 놓으면

$t^2-6t+8=0\Leftrightarrow(t-2)(t-4)=0\therefore t=2$ 또는 $t=4$

즉 $2^{\log x}=2$ 또는 $2^{\log x}=4\Leftrightarrow\log x=1$ 또는 $\log x=2$

$\therefore x=10$ 또는 $x=10^2$

따라서 두 근의 곱은 $10\times 10^2=10^3$

<다른 풀이>

$2^{\log x}=x^{\log 2}$이므로 주어진 방정식은

$x^{\log 2}\times x^{\log 2}-(x^{\log 2}+5\times x^{\log 2})+8=0$, $t=x^{\log 2}$로 놓으면

$t^2-6t+8=0\Leftrightarrow(t-2)(t-4)=0\therefore t=2$ 또는 $t=4$

즉 $x^{\log 2}=2$ 또는 $x^{\log 2}=4$ 각 식의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x^{\log 2}=\log 2$ 또는 $\log x^{\log 2}=\log 4$

$\log 2\log x=\log 2$ 또는 $\log 2\log x=2\log 2$

각 식의 양변을 $\log 2$로 나누면 $\log x=1$ 또는 $\log x=2$

$x=10$ 또는 $x=10^2$ 따라서 두 근의 곱은 $10\times 10^2=10^3$

50) [정답] ③

[해설]

$\sqrt{2016}\,x^{\log_{2016}x}=x^2$의 양변에 밑이 2016인 로그를 취하면,

$\frac{1}{2}+(\log_{2016}x)^2=2\log_{2016}x$

$t=\log_{2016}x$라 하자.

$t^2-2t+\frac{1}{2}=0$이고 근과 계수와의 관계에 의하여

$\log_{2016}x_1+\log_{2016}x_2=2$

$\log_{2016}x_1x_2=2$

즉 $x_1x_2=2016^2$

이때, 끝 두자리수는 16^2의 끝의 두자리 수와 같으므로 56이다.

51) [정답] ②

[해설]

$(\log_3x)(\log_4y)=\frac{\log_2x}{\log_2 3}\frac{\log_3y}{\log_3 4}$, $\log_2x\log_3y=-3$

$\log_2x+\log_3y=2$이므로 $\log_2x$와 $\log_3y$를 두 근으로 하는 t에 관한 이차방정식은 $t^2-2t-3=0$

이를 풀면 $t=-1$ 또는 $t=3$

$a>1$이므로 $\log_2x=3$, $\log_3y=-1$이고

$x=a=8,\ y=b=\frac{1}{3}\ \therefore 3ab=8$

52) [정답] ③

[해설]

주어진 로그방정식을 정리하면

$\log_{10}(y+5)=\log_{10}x(y+1)$이므로

$y+5=xy+x$이다.

$xy+x-y-5=0,\ (x-1)(y+1)=4$이므로

$x>0,\ y>-1$인 정수 $x,\ y$의 순서쌍은

$(2,\ 3),\ (3,\ 1),\ (5,\ 0)$이다.

53) [정답] 23

[해설]

$\log_3x\cdot\log_2y=\frac{\log_2x}{\log_2 3}\cdot\frac{\log_3y}{\log_3 2}=6$

$\log_2x=X,\ \log_3y=Y$라 하면

$\begin{cases}X+Y=5\\XY=6\end{cases}$이므로

$\begin{cases}X=2\\Y=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}X=3\\Y=2\end{cases}$

즉, $\begin{cases}x=4\\y=27\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=8\\y=9\end{cases}$

따라서 $\beta-\alpha$의 최댓값은 23

54) [정답] 15

[해설]

$\log_2(x-2)-\log_2y=1$에서 $\log_2\frac{x-2}{y}=1$

$\frac{x-2}{y}=2,\ 2y=x-2 \cdots\cdots$ ㉠

$2^x-2\cdot 4^{-y}=7$에서 $2^x-2\cdot 2^{-2y}=7 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $(2^x)^2-7\cdot 2^x-8=0$

$2^x=t(t>0)$라 하면 $t^2-7t-8=0$

$(t+1)(t-8)=0,\ t=8(\because t>0)$

$2^x=8$이므로 $x=3$, ㉠에 대입하면 $y=\frac{1}{2}$

따라서 $\alpha=3,\ \beta=\frac{1}{2}$이므로 $10\alpha\beta=15$

55) [정답] ③

[해설]

$\log_2 x=X,\ \log_3 y=Y$라 하면

$\log_x y=\log_3 8$에서 $\frac{\log_3 y}{\log_3 x}=3\log_3 2$

$\log_3 y=3\log_3 2\cdot\log_3 x$

$=3\log_3 2\cdot\frac{\log_2 x}{\log_2 3}$

$=3(\log_3 2)^2\cdot\log_2 x \ \cdots\cdots$ ㉠

㉠을 $4(\log_2 x)(\log_3 y)=3$에 대입하면

$4(\log_2 x)\{3(\log_3 2)^2\cdot\log_2 x\}=3$

$(\log_2 x)^2=\frac{1}{4(\log_3 2)^2}=\left(\frac{\log_2 3}{4}\right)^2$

위의 방정식의 해 $\alpha>1$이므로 $\log_2\alpha>0$이다.

$\therefore\ \log_2 x=\frac{\log_2 3}{2}=\log_2\sqrt{3}$

따라서 $x=\sqrt{3}$, 즉 $\alpha=\sqrt{3}$이다.

$x=\sqrt{3}$을 ㉠에 대입하면

$\log_3 y=3(\log_3 2)^2\cdot\log_2\sqrt{3}$

$=\frac{3}{2}\log_3 2=\log_3 2\sqrt{2}$

따라서 $y=2\sqrt{2}$, 즉 $\beta=2\sqrt{2}$이다.

$\therefore\ \alpha\beta=\sqrt{3}\times 2\sqrt{2}=2\sqrt{6}$

56) [정답] ③

[해설]

(ⅰ) $0<t<1$일 때, $\frac{1}{t}>1$이므로

$f(t)+f\left(\frac{1}{t}\right)=0+\log_3\frac{1}{t}=2$에서 $t=\frac{1}{9}$이다.

(ⅱ) $t=1$일 때, $f(t)+f\left(\frac{1}{t}\right)=0\neq 2$

(ⅲ) $t>1$일 때, $0<\frac{1}{t}<1$이므로

$f(t)+f\left(\frac{1}{t}\right)=\log_3 t+0=2$에서 $t=9$이다.

따라서 $f(t)+f\left(\frac{1}{t}\right)=2$를 만족시키는 모든 양수 t의 값의 합은

$\frac{1}{9}+9=\frac{82}{9}$

57) [정답] ③

[해설]

$A=\{x\,|\,2^{x(x-3a)}<2^{a(x-3a)}\}=\{x\,|\,(x-a)(x-3a)<0\}$

$B=\{x\,|\,\log_3(x^2-2x+6)<2\}=\{x\,|\,-1<x<3\}$

$A\cap B=A$ 즉, $A\subset B$가 성립해야 하므로

(ⅰ) $a>0$일 때
$A=\{x\,|\,a<x<3a\}\subset\{x\,|\,-1<x<3\}=B$에서
$0<a\leq 1$

(ⅱ) $a=0$일 때 $A=\{x\,|\,x^2<0\}=\phi\subset B$ 이므로 $a=0$

(ⅲ) $a<0$일 때
$A=\{x\,|\,3a<x<a\}\subset\{x\,|\,-1<x<3\}=B$에서
$-\frac{1}{3}\leq a<0$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $-\frac{1}{3}\leq a\leq 1$이다.

58) [정답] ①

[해설]

집합 $A=\{x\,|\,1\leq x\leq 4\}$

집합 B에서 $(\log_2 x-k+1)(\log_2 x-k-1)\leq 0$

$k-1 \le \log_2 x \le k+1$

$\therefore 2^{k-1} \le x \le 2^{k+1}$

$A \cap B \ne \varnothing$이 되려면

$2^{k+1} \ge 1$이고 $2^{k-1} \le 4$

$-1 \le k \le 3$

따라서 정수 k는 -1, 0, 1, 2, 3이므로 개수는 5

59) [정답] ③

[해설]

$x+1<3\log_2 x \Leftrightarrow 2^{x+1}<x^3$이고 이를 만족하는 x의 범위는 그래프에서 $2<x<8$이다.

한편, 구하는 부등식은 $y=2^{x+1}$, $y=x^3$을 각각 x축 방향으로 -1만큼 평행이동한 결과이므로

$2^{x+2}<(x+1)^3$를 만족시키는 x의 범위는

$1<x<7$이다.

$\therefore \alpha+\beta=8$

60) [정답] 12

[해설]

점 $\mathrm{A}(a, b)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 B라 하면 $\mathrm{B}(b, a)$이다.

조건 (가)에서 점 $\mathrm{A}(a, b)$가 곡선 $y=\log_2(x+2)+k$ 위의 점이므로

$b=\log_2(a+2)+k \cdots\cdots$ ㉠

조건 (나)에서 점 $\mathrm{B}(b, a)$가 곡선 $y=4^{x+k}+2$ 위의 점이므로

$a=4^{b+k}+2 \cdots\cdots$ ㉡

㉠에서

$b-k=\log_2(a+2)$, $2^{b-k}=a+2$

$a=2^{b-k}-2 \cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 정리하면

$4^{b+k}+2=2^{b-k}-2$

$4^k \times 4^b - 2^{-k} \times 2^b + 4 = 0$ ⋯⋯ ㉣

조건을 만족시키는 점 A가 오직 하나이므로 방정식 ㉣을 만족시키는 실수 b는 오직 하나이고

$2^b = t(t>0)$으로 놓으면 t에 대한 이차방정식

$4^k t^2 - 2^{-k} t + 4 = 0$ ⋯⋯ ㉤

은 오직 하나의 양의 실근을 갖는다. t에 대한 이차방정식

㉤의 두 근의 곱은 $\frac{4}{4^k}=4^{1-k}>0$이므로 t에 대한 이차방정식 ㉤이 오직 하나의 양의 실근을 가지려면 ㉤의 판별식을 D라 할 때 $D=0$이어야 한다.

$D=\left(-2^{-k}\right)^2-4\times4^k\times4$

$=4^{-k}-16\times4^k=0$

위의 방정식의 양변에 4^k을 곱하여 정리하면

$2^{4k+4}=1$, $k=-1$

㉤에 대입하여 정리하면

$\frac{1}{4}t^2-2t+4=0$, $\frac{1}{4}(t-4)^2=0$

$t=4$

즉, $2^b=4$에서 $b=2$이다.

$k=-1$, $b=2$를 ㉡에 대입하여 정리하면

$a=4^{2+(-1)}+2=6$

따라서 $a\times b=6\times2=12$

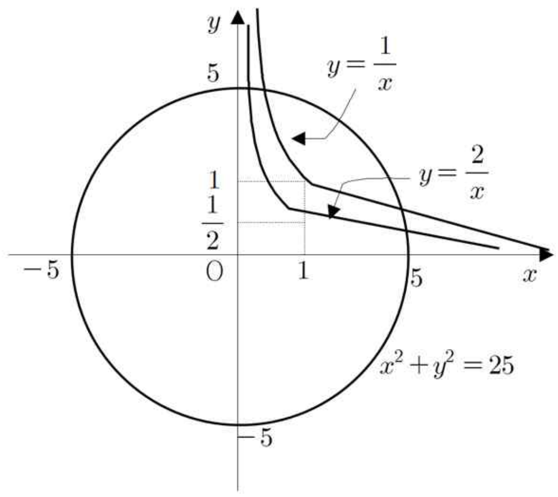
61) [정답] ④

[해설]

②에서 $\log_2 xy=(\log_2 xy)^2$

$\log_2 xy\,(\log_2 xy-1)=0$ $\therefore$ $\log_2 xy=0$ 또는 $\log_2 xy=1$

$\therefore$ $xy=1$ 또는 $xy=2$ ($x>0$, $y>0$) 이므로



$\therefore$ 각 교점의 개수는 4 (개)

62) [정답] ⑤

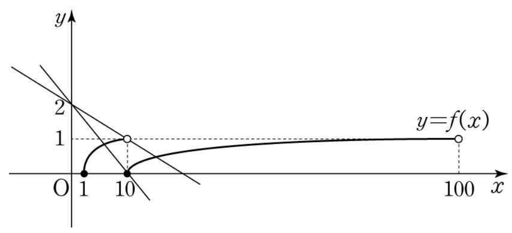
[해설]

$1 \le x < 100$에서 $f(x)$는 $\log x$의 소수부분이다.

$1 \le x < 100$일 때, $f(x)=\log x$

$10 \le x < 100$일 때, $f(x)=\log x - 1$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2-\dfrac{x}{n}$는 그림과 같다.



직선 $y=2-\dfrac{x}{n}$가 점 $(10, 0)$을 지날 때,

$$2-\frac{10}{n}=0 \qquad \therefore\ n=5$$

점 $(10, 1)$을 지날 때,

$$2-\frac{10}{n}=1 \qquad \therefore\ n=10$$

따라서 $5 \le n < 10$일 때, 직선 $y=2-\dfrac{x}{n}$와 곡선 $y=f(x)$가 두 점에서 만난다.

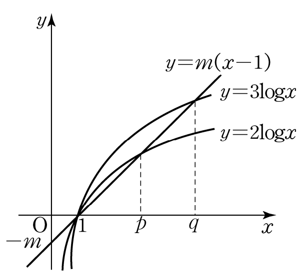
$$\therefore\ n=5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$$

즉, 자연수 n의 개수는 5이다.

63) [정답] ④

[해설]

ㄱ. (거짓) 문제의 조건들을 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



$\therefore\ p<q$

ㄴ. (참) 두 점 $(1, 0)$, $(0, -m)$을 지나는 직선은 $y=m(x-1)$이고, $(p,\ 2\log p)$와 $(q,\ 3\log q)$는 이 직선 위의 점이므로 다음 식이 성립한다.

$2\log p=m(p-1)$ ㉠

$3\log q=m(q-1)$ ㉡

㉡-㉠을 하면 $3\log q-2\log p=m(q-p)$

$$\therefore\ m=\frac{3\log q-2\log p}{q-p}$$

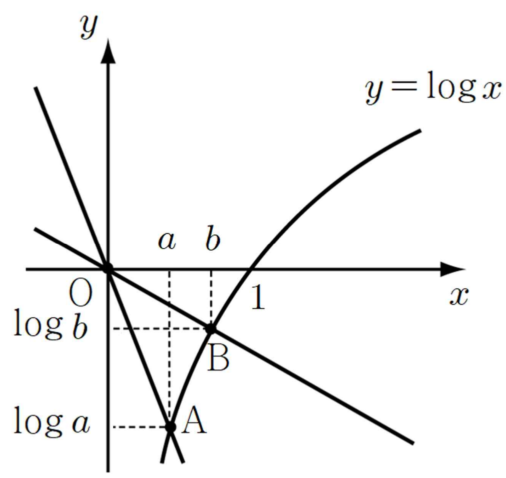
ㄷ. (참) $\dfrac{3\log q}{q}$는 원점과 점 $(q,\ 3\log q)$를 지나는 직선의 기울기이다. 이는 위의 그림에서 $(1, 0)$과 $(0, -m)$을 지나는 직선의 기울기 m보다 크다.

64) [정답] ③

[해설]

ㄱ. $0<a<b<1$이므로 $0<\log_a b<1$(참)

ㄴ. 세 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(a, \log a)$, $\mathrm{B}(b, \log b)$에 대하여 직선 OA의 기울기 $\dfrac{\log a}{a}$가 직선 OB의 기울기 $\dfrac{\log b}{b}$보다 작으므로 성립한다.(참)



ㄷ. $\log_a\left(\dfrac{a}{b}\right)=1-\log_a b$, $\log_b\left(\dfrac{b}{a}\right)=1-\log_b a$이고,

$0<\log_a b<1$, $\log_b a>1$이므로, $\log_a\left(\dfrac{a}{b}\right)>\log_b\left(\dfrac{b}{a}\right)$이다.

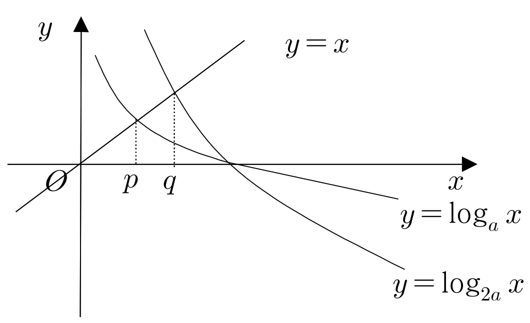
(거짓)

65) [정답] ⑤

[해설]

$0<a<\dfrac{1}{2}$ 에서 $0<a<2a<1$ 이므로

두 함수$y=\log_a x$, $y=\log_{2a} x$ 의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. $p=\dfrac{1}{2}$ 이면 $p=\log_a p$에서

$$a^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

양변을 제곱하면 $a=\frac{1}{4}$ (참)

ㄴ. 위의 그림에서

$p<q$ (참)

ㄷ. $p=\log_a p$, $q=\log_{2a} q$이므로

$a^p=p$, $(2a)^q=q$

즉, $a^p=p$, $a^q=\frac{q}{2^q}$

$\therefore\ a^{p+q}=a^p\cdot a^q=p\cdot\frac{q}{2^q}=\frac{pq}{2^q}$ (참)

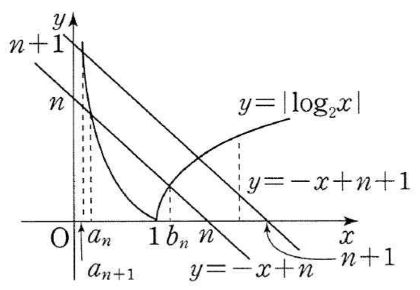
따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

66) [정답] ④

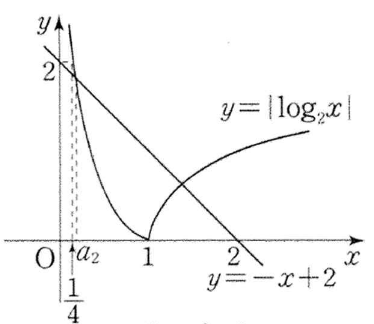
[해설]

그래프를 그려 a_n, b_n을 나타낸 후에 ㄱㄴ을 따져보자.

먼저 $y=-x+n$과 $y=|\log_2 x|$의 그래프를 그리면 다음과 같아.



[그림 1]



[그림 2]

ㄱ. a_2는 [그림2]와 같이 $y=-x+2$와 $y=|\log_2 x|$의 그래프의 교점의 x좌표라구.

또, $2=|\log_2 x|$에서 $\log_2 x=\pm 2\therefore\ x=\frac{1}{4},\ 4\ \ \therefore\ a_2>\frac{1}{4}$

(거짓)

ㄴ. [그림1]에서와 같이 a_{n+1}은 $y=-x+n+1$과 $y=|\log_2 x|$의 교점의 x좌표이므로 $0<a_{n+1}<a_n\ \ \therefore$

$0<\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ (참)

b_n의 범위와 b_n이 $y=-x+n$과 $y=\log_2 x$의 교점의 x좌표임을 활용해.

ㄷ. [그림1]에서 $1<b_n<n$이므로 $\frac{b_n}{n}<1$이지?

또, b_n은 $y=-x+n$과 $y=\log_2 x$의 교점의 좌표니까

$-b_n+n=\log_2 b_n\ \ \therefore\ b_n=n-\log_2 b_n$

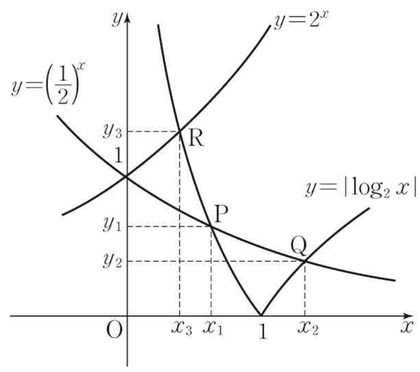
이때, $\log_2 b_n<\log_2 n$이므로

$\frac{b_n}{n}=1-\frac{\log_2 b_n}{n}>1-\frac{\log_2 n}{n}\ \ \therefore\ 1-\frac{\log_2 n}{n}<\frac{b_n}{n}<1$ (참)

따라서, 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이야..

67) [정답] ③

[해설]



ㄱ. (참) 위의 그림에서 $x_1<1$ ······ ㉠

$x<1$일 때, $|\log_2 x|=-\log_2 x=\log_{\frac{1}{2}} x$이므로

$y_1=\log_{\frac{1}{2}} x_1<1\therefore\ x_1>\frac{1}{2}$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{1}{2}<x_1<1$이다.

ㄴ. (참) $x>1$일 때, $|\log_2 x|=\log_2 x$이고 두 함수 $y=2^x$, $y=\log_2 x$는 역함수 관계이므로 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

이때, 두 곡선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$과 $y=\log_2 x$의 교점이 $\mathrm{Q}(\mathrm{x}_2,\ \mathrm{y}_2)$이고 두 곡선 $y=2^x$과 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$의 교점이 $\mathrm{R}(\mathrm{x}_3,\ \mathrm{y}_3)$이므로 두 점 Q, R도 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 즉, $x_2=y_3$, $y_2=x_3$

$\therefore\ x_2 y_2-x_3 y_3=0$

ㄷ. (거짓) A(1, 0)이라 하면

|$\overline{\mathrm{PA}}$의 기울기|<|$\overline{\mathrm{RA}}$의 기울기|이므로

$$\left|\frac{y_1-0}{x_1-1}\right| < \left|\frac{y_3-0}{x_3-1}\right|$$

그런데, $x_1<1$, $x_3<1$이고 $y_1>0$, $y_3>0$이므로

$$\frac{y_3}{x_3-1}<\frac{y_1}{x_1-1}$$

양변에 $(x_1-1)(x_3-1)$을 곱하면

$y_3(x_1-1)<y_1(x_3-1)$

ㄴ에서 $y_3=x_2$, $x_3=y_2$를 대입하면

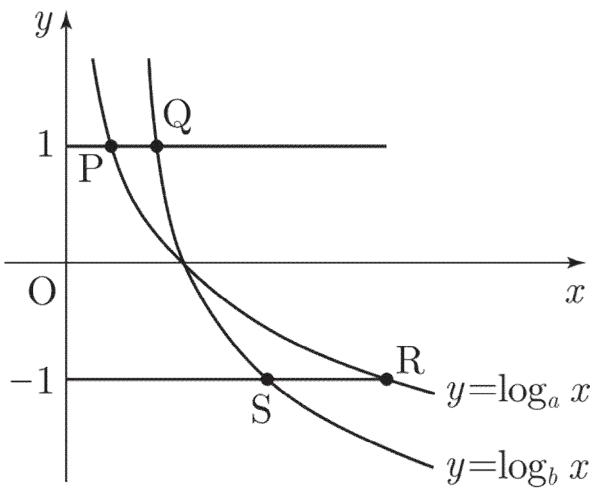
$x_2(x_1-1)<y_1(y_2-1)$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

68) [정답] ②

[해설]

함수 $y=\log_a x$, $y=\log_b x$의 그래프와 직선 $y=1$, $y=-1$를 그려 점 P, Q, R, S를 표시하면 다음과 같다.



위 그림에서 $\overline{\mathrm{PQ}}<\overline{\mathrm{SR}}$이므로 $\gamma<\alpha<\sigma<\beta$

69) [정답] ③

[해설]

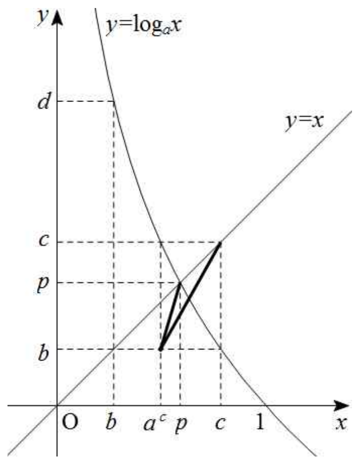
ㄱ. 곡선 $y=\log_a x$가 직선 $y=x$와 점 (p, p)에서 만나고 $p=\frac{1}{2}$이므로 $\frac{1}{2}=\log_a\frac{1}{2}$, $a^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$ ∴ $a=\frac{1}{4}$ (참)

ㄴ. 곡선 $y=\log_a x$가 두 점 (b, d), (c, b)를 지나므로

$\log_a b=d$, $\log_a c=b$, $a^d=b$, $a^b=c$이므로 $a^{b+d}=a^b\cdot a^d=bc$ (참)

ㄷ. $\frac{p-b}{p-a^c}$는 두 점 (p, p), (a^c, b)를 지나는 직선의 기울기이고, $\frac{c-b}{c-a^c}$는 두 점 (c, c), (a^c, b)를 지나는 직선의 기울기이다. (거짓)

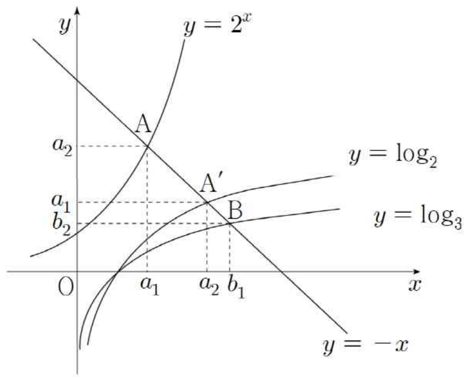
<반례>



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

70) [정답] ③

[해설]



ㄱ. $y=\log_2 x$와 $y=-x+5$가 만나는 점 $A'(a_2, a_1)$ ∴ $a_1>b_2$ (참)

ㄴ. 두 점 A, B는 $y=-x+5$ 위의 점이므로

$a_1+a_2=b_1+b_2=5$ (참)

ㄷ. 직선 OA′와 직선 OB의 기울기에 의해

$\frac{a_1}{a_2}>\frac{b_2}{b_1}$ (거짓)

71) [정답] ③

[해설]

(직선 QO 의 기울기) $=\frac{b}{\log(b+1)}=\frac{1}{\log(b+1)^{\frac{1}{b}}}$ ……㉠

(직선 PO의 기울기) $=\dfrac{a}{\log(a+1)}=\dfrac{1}{\log(a+1)^{\frac{1}{a}}}$ $\cdots\cdots$ ㉡

(직선 PQ의 기울기)

$=\dfrac{b-a}{\log(b+1)-\log(a+1)}=\dfrac{1}{\log\left(\dfrac{b+1}{a+1}\right)^{\frac{1}{b-a}}}$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉠ > ㉡ > ㉢ 이므로

$\log(b+1)^{\frac{1}{b}} < \log(a+1)^{\frac{1}{a}} < \log\left(\dfrac{b+1}{a+1}\right)^{\frac{1}{b-a}}$

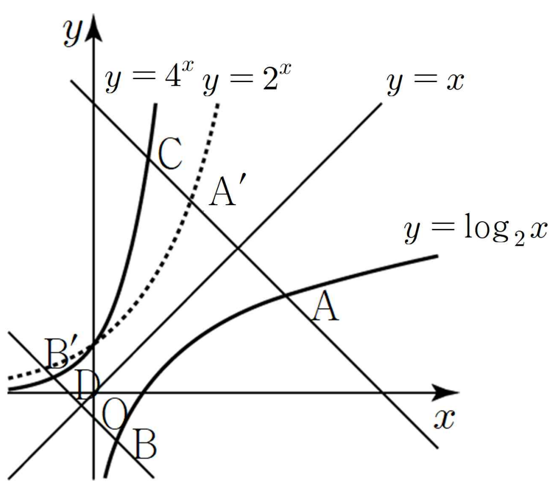
$(b+1)^{\frac{1}{b}} < (a+1)^{\frac{1}{a}} < \left(\dfrac{b+1}{a+1}\right)^{\frac{1}{b-a}}$ 따라서 $B<A<C$

72) [정답] ⑤

[해설]

그림과 같이 두 점 A, B를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 점을 각각 A$'(2,\ 4)$, B$'\left(-1,\ \dfrac{1}{2}\right)$ 이라 하면

$1<x_1<2,\ -1<x_2<0,\ y_1>4,\ \dfrac{1}{4}<y_2<\dfrac{1}{2}$



ㄱ. $x_1>1$이고 $x_2>-1$이므로 $x_1+x_2>0$ (참)

ㄴ. $y_1>4$이고 $y_2>\dfrac{1}{4}$ 이므로 $y_1y_2>1$ (참)

ㄷ. 두 점 C, D를 지나는 직선의 기울기가

$\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$이고 두 점 A$'$, B$'$을 지나는

직선의 기울기는 $\dfrac{7}{6}$이므로 $\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}>\dfrac{7}{6}$ (참)

73) [정답] ③

[해설]

함수 $f(x)=a^{x-k}\,(a>0,\ a\neq 1)$이므로 조건에 의하여

$f(2+x)f(2-x)=a^{2+x-k}\times a^{2-x-k}$

$=a^{4-2k}=1$

$4-2k=0,\ k=2$이므로

함수 $f(x)=a^{x-2}(a>0,\ a\neq 1)$

ㄱ. $f(2)=a^0=1$ (참)

ㄴ. $0<a<1$일 때,

함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 개수는 1이다. (거짓)

ㄷ. $\{f(t+2)-f(t+1)\}-\{f(t+1)-f(t)\}$

$=f(t+2)-2f(t+1)+f(t)$

$=a^t-2a^{t-1}+a^{t-2}$

$=a^{t-2}(a^2-2a+1)$

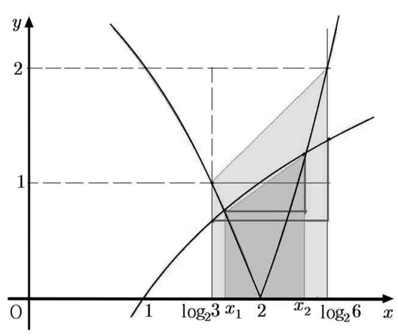
$=a^{t-2}(a-1)^2>0$

이므로 $f(t+1)-f(t)<f(t+2)-f(t+1)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

74) [정답] ②

[해설]



ㄱ. 그림에서 $\log_2 3<x_1<x_2<\log_2 6$이 성립한다. (참)

ㄴ. 그림에서 색칠한 사다리꼴의 넓이에서

$\dfrac{1}{2}(x_2-x_1)(2^{x_2}-2^{x_1})<\dfrac{3}{2}$ (참)

ㄷ. 그림에서 빨간 직각삼각형의 높이에서

$(2^{x_2}-4)-(4-2^{x_1})<\log_2(\log_2 6)-\log_2(\log_2 3)$

$2^{x_1}+2^{x_2}<8+\log_2(\log_3 6)$

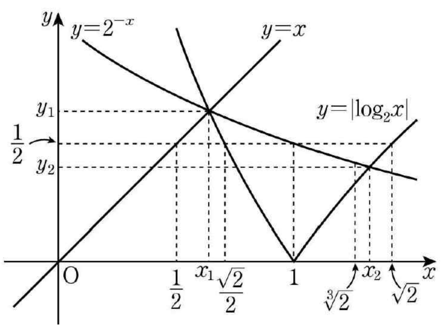
(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

75) [정답] ⑤

[해설]

$y=2^{-x}$, $y=|\log_2 x|$, $y=x$의 그래프는 그림과 같다.



ㄱ. $0<x<1$일 때,

두 곡선 $y=2^{-x}$, $y=-\log_2 x$의 교점은 직선 $y=x$위에 있으므로 $x_1=y_1$이고 $x_1<1$, $y_1<1$

그림에서 $y=2^{-x}$은 감소함수이므로

$2^{-1}<2^{-x_1}=y_1$

즉, $\frac{1}{2}<y_1=x_1$

한편, $-\log_2\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}<y_1=-\log_2 x_1$이고

$y=-\log_2 x$는 감소함수이므로 $x_1<\frac{\sqrt{2}}{2}$

그러므로 $\frac{1}{2}<x_1<\frac{\sqrt{2}}{2}$ (참)

ㄴ. $2^{-\sqrt[3]{2}}=\frac{1}{2^{\sqrt[3]{2}}}$이고 $\log_2\sqrt[3]{2}=\frac{1}{3}$

그런데 $8<9$이므로 $2^{\frac{3}{2}}<3$ …… ㉠

$\sqrt[3]{2}$와 $\frac{3}{2}$을 각각 세제곱하면 $(\sqrt[3]{2})^3<\left(\frac{3}{2}\right)^3$이므로

$\sqrt[3]{2}<\frac{3}{2}$ 즉, $2^{\sqrt[3]{2}}<2^{\frac{3}{2}}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $2^{\sqrt[3]{2}}<2^{\frac{3}{2}}<3$이므로

$\log_2\sqrt[3]{2}<2^{-\sqrt[3]{2}}$

그러므로 $\sqrt[3]{2}<x_2$

또, $\log_2\sqrt{2}=\frac{1}{2}$, $2^{-\sqrt{2}}=\frac{1}{2^{\sqrt{2}}}$

$\frac{1}{2}>\frac{1}{2^{\sqrt{2}}}$이므로 $\log_2\sqrt{2}>2^{-\sqrt{2}}$

그림에서 $x_2<\sqrt{2}$

그러므로 $\sqrt[3]{2}<x_2<\sqrt{2}$ (참)

ㄷ. $y_1=x_1$이므로 ㄱ에서 $\frac{1}{2}<y_1<\frac{\sqrt{2}}{2}$

$y_2=\log_2 x_2$이고 $\sqrt[3]{2}<x_2<\sqrt{2}$,

$\log_2\sqrt[3]{2}<\log_2 x_2<\log_2\sqrt{2}$이므로

$\frac{1}{3}<y_2<\frac{1}{2}$

그러므로 $y_1-y_2<\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{3}<\frac{3\sqrt{2}-2}{6}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

76) [정답] ⑤

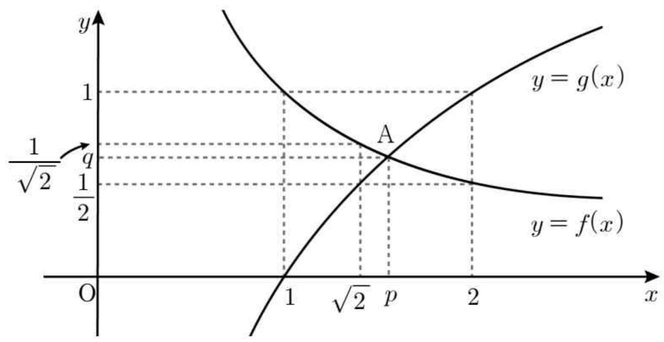
[해설]

$f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\log_a x$라 하자.

ㄱ. 점 $A(p,q)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로

$q=\frac{1}{p}$, 즉 $pq=1$ (참)

ㄴ. $f(x)>g(x)$이면 $0<x<p$이고 $f(x)<g(x)$이면 $x>p$이다.



$f(\sqrt{2})=\frac{1}{\sqrt{2}}$이고 $a=2$이므로 $g(\sqrt{2})=\frac{1}{2}$이다.

$f(\sqrt{2})>g(\sqrt{2})$이다.

따라서 $p>\sqrt{2}$ (참)

ㄷ. 점 $B(p+q,0)$에 대하여 삼각형 AOB의 넓이 $S(p)$는

$$S(p)=\frac{1}{2}\times(p+q)\times q=\frac{pq}{2}+\frac{q^2}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2p^2}$$

이다.

한편, $f(\sqrt{a})=\frac{1}{\sqrt{a}}$이고 $g(\sqrt{a})=\frac{1}{2}$이다.

$1<\sqrt{a}<2$이므로 $f(\sqrt{a})>g(\sqrt{a})$이다.

따라서 $p>\sqrt{a}$이고, $\frac{1}{p}<\frac{1}{\sqrt{a}}$이다.

그러므로 $S(p)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2p^2}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2a}=\frac{a+1}{2a}$ (참)

77) [정답] ①

[해설]

$|\log_x n| \le 2 \Leftrightarrow -2 \le \log_x n \le 2$

$\Leftrightarrow \log_x \dfrac{1}{x^2} \le \log_x n \le \log_x x^2$

따라서 $x>1$일 때, $\dfrac{1}{x^2} \le n \le x^2$이고 $x<1$일 때,

$x^2 \le n \le \dfrac{1}{x^2}$이므로 $f(x)$는 다음과 같다.

$$f(x)=\begin{cases}[x^2] & (x>1)\\ \left[\dfrac{1}{x^2}\right] & (0<x<1)\end{cases}$$

(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수)

ㄱ. $f(2)=[2^2]=4$

ㄴ. $0<x<y<1$이면 $1<\dfrac{1}{y}<\dfrac{1}{x}$ 즉, $\left[\dfrac{1}{y^2}\right]<\left[\dfrac{1}{x^2}\right]$이므로

$f(x) \ge f(y)$ (거짓)

ㄷ. $0<\dfrac{1}{x}<1$일 때, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=[x^2]$

$[x^2] \le 30$에서 $x^2<31$

따라서 $f\left(\dfrac{1}{x}\right) \le 30$을 만족하는 자연수 x는 $x=2,\ 3,\ 4,\ 5$의

4개가 존재한다. (거짓)

78) [정답] 9

[해설]

(나)에 의해 $\log_n \dfrac{m+1}{m} < \dfrac{1}{3}$에서 $\dfrac{m+1}{m} < n^{\frac{1}{3}}$

$\therefore (m+1)^3 < n \cdot m^3$

ⅰ) $n=3$일 때

$m=2$이면 $(2+1)^3 > 3 \cdot 2^3$이므로 성립하지 않음

$m=3$이면 $(3+1)^3 < 3 \cdot 3^3$이므로 $f(3)=3$

ⅱ) $n=4$일 때

$m=2$이면 $(2+1)^3 < 4 \cdot 2^3$이므로 $f(4)=2$

ⅲ) $n=5$일 때

$m=2$이면 $(2+1)^3 < 5 \cdot 2^3$이므로 $f(5)=2$

ⅳ) $n=6$일 때

$m=2$이면 $(2+1)^3 < 6 \cdot 2^3$이므로 $f(6)=2$

따라서 $f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=9$

<별해>

(나)에 의해 $\log_n \dfrac{m+1}{m} < \dfrac{1}{3}$에서

$\dfrac{m+1}{m} < n^{\frac{1}{3}} \therefore \left(\dfrac{m+1}{m}\right)^3 < n$

ⅰ) $m=2$일 때 $\left(\dfrac{2+1}{2}\right)^3 = \dfrac{27}{8} < n$이므로 $n=4,\ 5,\ 6,\ \cdots$

$\therefore f(4)=f(5)=f(6)=2$

ⅱ) $m=3$일 때 $\left(\dfrac{3+1}{3}\right)^3 = \dfrac{64}{27} < n$이므로 $n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots$

$\therefore f(3)=3$ 따라서 $f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=9$

79) [정답] ①

[해설]

$f(mn)=f(m)+f(n)$

ⅰ) m이 짝수, n이 짝수일 때

$\log_2 mn = \log_2 m + \log_2 n$

따라서, m과 n이 모두 짝수일 때는 항상 성립한다.

순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는 $10\times10=100$(개)

ⅱ) m이 짝수, n이 홀수일 때

$\log_2 mn = \log_2 m + \log_3 n$

$\log_2 n = \log_3 n \therefore n=1$

순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는 $10\times1=10$(개)

ⅲ) m이 홀수, n이 짝수

$\log_2 mn = \log_3 m + \log_2 n$

$\log_2 m = \log_3 m \therefore m=1$

순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는 $1\times10=10$(개)

ⅳ) m이 홀수, n이 홀수

$\log_3 mn = \log_3 m + \log_3 n$

따라서, m과 n이 모두 홀수일 때는 항상 성립한다.

순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는 $10\times10=10$(개)

ⅰ), ⅱ), ⅲ), ⅳ)에서 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는

$100+10+10+100=220$(개)

80) [정답] 55

[해설]

(i) $\log_3 \frac{m}{15} > 0 \Rightarrow m > 15$일 때,

$\left|\log_3 \frac{m}{15}\right| + \log_3 \frac{n}{3} \le 0 \Rightarrow 15 < m \le \frac{45}{n}$이며,

$n=1$일 때, $15 < m \le 45$ 30개

$n=2$일 때, $15 < m \le 22.5$ 7개

즉 37개다

(ii) $\log_3 \frac{m}{15} = 0 \Rightarrow m = 15$일 때,

$\left|\log_3 \frac{m}{15}\right| + \log_3 \frac{n}{3} \le 0 \Rightarrow \log_3 \frac{n}{3} \le 0 \Rightarrow n \le 3$이며,

따라서 3개다.

(iii) $\log_3 \frac{m}{15} < 0 \Rightarrow 0 < m < 15$일 때,

$\left|\log_3 \frac{m}{15}\right| + \log_3 \frac{n}{3} \le 0 \Rightarrow 5n < m \le 15$이며,

$n=1$일 때, $5 \le m < 15$ 10개

$n=2$일 때, $10 \le m < 15$ 5개

즉 15개다.

총 55개

81) [정답] 80

[해설]

$2 \le \log_n k < 3$에서 $n^2 \le k < n^3$이고, 로그의 밑 조건에 의해 $n > 1$이다.

1보다 큰 자연수 n에 대하여 $n^2 \le k < n^3$을 만족시키는 100이하의 자연수 k를 구하면 다음과 같다.

(i) $n=2$일 때, $4 \le k < 8$에서 $k=4,\ 5,\ 6,\ 7$

(ii) $n=3$일 때, $9 \le k < 27$에서 $k=9,\ 10,\ \cdots,\ 26$

(iii) $n=4$일 때, $16 \le k < 64$에서 $k=16,\ 17,\ \cdots,\ 63$

(iv) $n=5$일 때, $25 \le k < 125$에서 $k=25,\ 26,\ \cdots,\ 100$

(v) $n=6$일 때, $36 \le k < 216$에서 $k=36,\ 37,\ \cdots,\ 100$

(vi) $n=7$일 때, $49 \le k < 343$에서 $k=49,\ 50,\ \cdots,\ 100$

(vii) $n=8$일 때, $64 \le k < 512$에서 $k=64,\ 65,\ \cdots,\ 100$

(viii) $n=9$일 때, $81 \le k < 729$에서 $k=81,\ 82,\ \cdots,\ 100$

(ix) $n=10$일 때, $100 \le k < 1000$에서 $k=100$

그러므로 k의 값에 따라 조건을 만족시키는 $f(k)$를 구하면 다음과 같다.

(i) $k=1,\ 2,\ 3$일 때, $f(k)=0$

(ii) $k=4,\ 5,\ 6,\ 7$일 때, $f(k)=1$

(iii) $k=8$일 때, $f(k)=0$

(iv) $k=9,\ 10,\ \cdots,\ 15$일 때, $f(k)=1$

(v) $k=16,\ 17,\ \cdots,\ 24$일 때, $f(k)=2$

(vi) $k=25,\ 26$일 때, $f(k)=3$

(vii) $k=27,\ 28,\ \cdots,\ 35$일 때, $f(k)=2$

(viii) $k=36,\ 37,\ \cdots,\ 48$일 때, $f(k)=3$

(ix) $k=49,\ 50,\ \cdots,\ 80$일 때, $f(k)=4$

(x) $k=81,\ 82,\ \cdots,\ 99$일 때, $f(k)=5$

(xi) $k=100$일 때, $f(k)=6$

따라서 $f(k)=4$가 되도록 하는 k의 최댓값은 80이다.

82) [정답] ②

[해설]

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & (0 \le x < 1) \\ -2x+5 & (1 \le x \le 2) \end{cases}$$

$f(-x)=f(x)$, $f(x)=f(x+4)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고 주기는 4이다.

$1 \le f(x) \le 3$이므로

$\log_{2^n}(x+2n)=1$, $x+2n=2^n$, $x=2^n-2n$

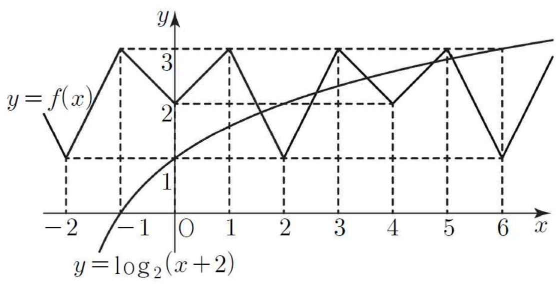
$\log_{2^n}(x+2n)=2$, $x+2n=2^{2n}$, $x=2^{2n}-2n$

$\log_{2^n}(x+2n)=3$, $x+2n=2^{3n}$, $x=2^{3n}-2n$

함수 $y=\log_{2^n}(x+2n)$의 그래프는 세 점 $(2^n-2n,\ 1)$, $(2^{2n}-2n,\ 2)$, $(2^{3n}-2n,\ 3)$을 지난다.

(i) $n=1$일 때, 함수 $y=\log_2(x+2)$의 그래프는 세 점 $(0,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $(6,\ 3)$을 지난다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=\log_2(x+2)$의 그래프가 만나는 점의 개수는 5

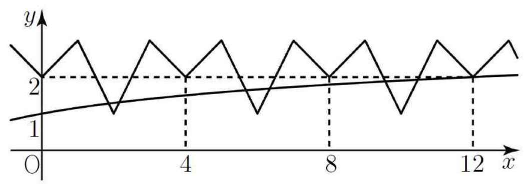


따라서 $a_1=5$

(ii) $n=2$일 때, 함수 $y=\log_4(x+4)$의 그래프는 세 점 $(0,\ 1)$, $(12,\ 2)$, $(60,\ 3)$을 지난다.

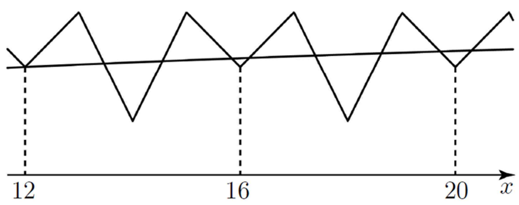
$1\le f(x)<2$일 때, $0\le x\le 4$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점의 개수는 2이고 함수 $y=f(x)$는 주기가 4이므로 $0\le x<12$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=\log_4(x+4)$의 그래프가 만나는 모든 점의 개수는

$$2\times\frac{12}{4}=6$$



$2\le f(x)\le 3$일 때, $12\le x\le 16$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=\log_4(x+4)$의 그래프가 만나는 점의 개수는 4이고 함수 $y=f(x)$는 주기가 4이므로 $12\le x\le 60$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=\log_4(x+4)$의 그래프가 만나는 모든 점의 개수는

$$4\times\frac{60-12}{4}=48$$



따라서 $a_2=6+48=54$

(iii) $n=3$일 때, 함수 $y=\log_8(x+6)$의 그래프는 세 점 $(2,\ 1)$, $(58,\ 2)$, $(506,\ 3)$을 지난다.

$1\le f(x)<2$일 때 $2\le x\le 6$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=\log_8(x+6)$의 그래프가 만나는 점의 개수는 2이고 함수 $y=f(x)$는 주기가 4이므로 $2\le x<58$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=\log_8(x+6)$의 그래프와 만나는 모든 점의 개수는

$$2\times\frac{58-2}{4}=28$$

$2\le f(x)\le 3$일 때, $58\le x\le 62$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=\log_8(x+6)$의 그래프가 만나는 점의 개수는 4이고 함수 $y=f(x)$는 주기가 4이므로 $58\le x\le 506$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=\log_8(x+6)$의 그래프가 만나는 모든 점의 개수는

$$4\times\frac{506-58}{4}=448$$

따라서 $a_3=28+448=476$

(i), (ii), (iii)에 의하여

$$a_1+a_2+a_3=5+54+448=476$$

83) [정답] ③

[해설]

정수 k에 대하여 $k<\log_3 f(n)<k+2$

밑 3이 1보다 크므로 $3^k<(n-3)^2+2<3^{k+1}$을 만족시키는 자연수 n의 개수가 $h(k)$이다.

(i) $k=0$인 경우

$1<(n-3)^2+2<9$, $-1<(n-3)^2<7$에서

$n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$이므로 $h(0)=5$

(ii) $k=3$인 경우

$27<(n-3)^2+2<243$, $25<(n-3)^2<241$에서

$n=9,\ 10,\ \cdots,\ 18$이므로 $h(3)=10$

따라서 $h(0)+h(3)=15$

84) [정답] ③

[해설]

ㄱ. $n=2$일 때, $\mathrm{A}(1,\ 1)$, $\mathrm{B}(3,\ 1)$이므로

$f(2)=2$ (참)

ㄴ. 점 B의 좌표는 $\left(\dfrac{6}{1+\log_2 n},\ 1\right)$이므로 $f(n)\ge 1$을 만족시키는 $f(n)$은 $f(n)=\dfrac{6}{1+\log_2 n}-1$이다.

$\dfrac{6}{1+\log_2 n}-1\ge 1$에서 $1+\log_2 n\le 3$이므로

$1\le n\le 4$이다. 따라서 $f(n)\ge 1$을 만족시키는 자연수 n의 개수는 4 (참)

ㄷ. $|f(n)-1|\ge\dfrac{2}{3}$에서 $f(n)\ge\dfrac{3}{5}$ 또는 $0\le f(n)\le\dfrac{1}{3}$이다.

(i) $f(n)\ge\dfrac{5}{3}$를 만족시키는 $f(n)$은

$f(n)=\dfrac{6}{1+\log_2 n}-1$이다. $\dfrac{6}{1+\log_2 n}-1\ge\dfrac{5}{3}$에서

$\dfrac{6}{1+\log_2 n} \geq \dfrac{8}{3}$이므로 $\log_2 n \leq \dfrac{5}{4}$이다. 따라서

$1 \leq n \leq 2^{\frac{5}{4}}$이고 $2 < 2^{\frac{5}{4}} < 3$이므로 자연수 n은 1, 2이다.

(ii) $0 \leq f(n) \leq \dfrac{1}{3}$을 만족시키는 $f(n)$은

$f(n) = \left| \dfrac{6}{1+\log_2 n} - 1 \right|$이다.

$0 \leq \left| \dfrac{6}{1+\log_2 n} - 1 \right| \leq \dfrac{1}{3}$에서

$\dfrac{2}{3} \leq \dfrac{6}{1+\log_2 n} \leq \dfrac{4}{3}$이므로 $\dfrac{7}{2} \leq \log_2 n \leq 8$이다.

따라서 $2^{\frac{7}{2}} \leq n \leq 2^8$이고 $11 < 2^{\frac{7}{2}} < 12$이므로 자연수 n은 12, 13, 14, $\cdots$, 256이다.

(i), (ii)에서 $n = 1,\ 2,\ 12,\ 13,\ 14,\ \cdots,\ 256$이므로

$|f(n)-1| \geq \dfrac{2}{3}$를 만족시키는 자연수 n의 개수는 247

(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

85) [정답] 33

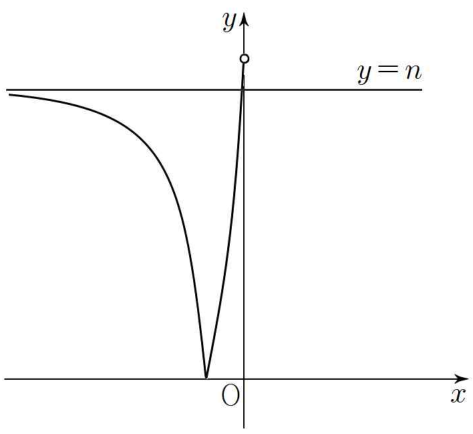
[해설]

(i) $x < 0$일 때

함수 $y = 3^{x+2} - n$의 그래프는 함수 $y = 3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 $-n$만큼 평행이동한 그래프이다.

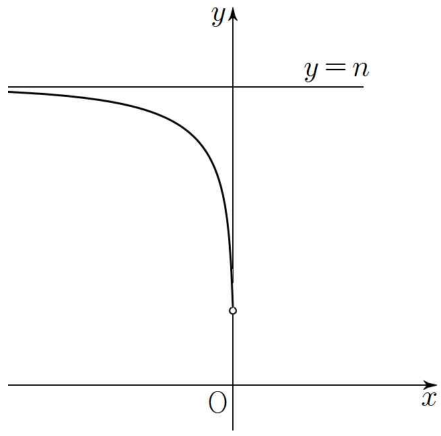
자연수 n의 값에 따른 함수 $y = |3^{x+2} - n|$의 그래프는 다음과 같다.

(1) $9-n > 0$일 때



따라서 방정식 $f(x) = t$의 실근의 개수의 최댓값은 2이다.

(2) $9-n \leq 0$일 때



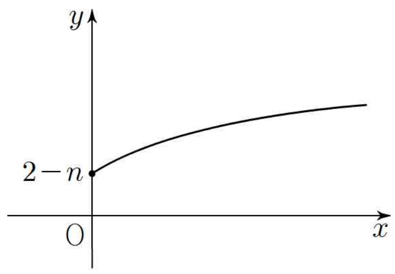
따라서 방정식 $f(x) = t$의 실근의 개수의 최댓값은 1이다.

(ii) $x \geq 0$일 때

함수 $y = \log_2(x+4) - n$의 그래프는 함수 $y = \log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 $-n$만큼 평행 이동한 그래프이다.

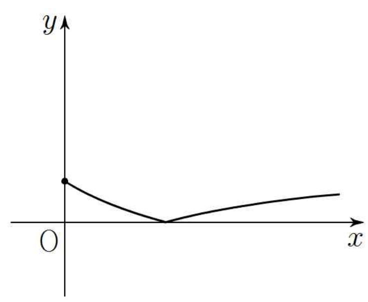
자연수 n의 값에 따른 함수 $y = |\log_2(x+4) - n|$의 그래프는 다음과 같다.

(1) $2-n \geq 0$일 때



따라서 방정식 $f(x) = t$의 실근의 개수의 최댓값은 1이다.

(2) $2-n < 0$일 때



따라서 방정식 $f(x) = t$의 실근의 개수의 최댓값은 2이다.

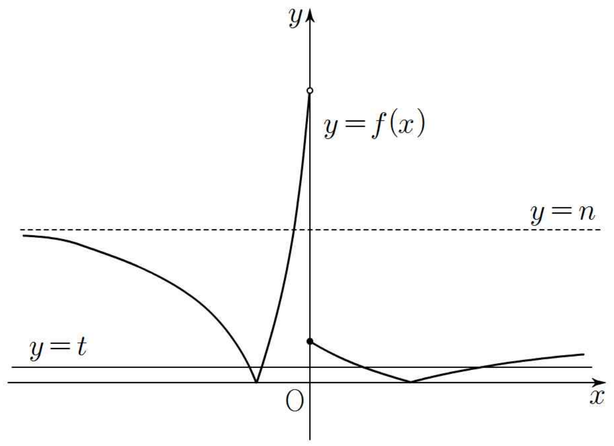
함수 $g(t)$의 최댓값이 4이므로 $9-n > 0$이고 $2-n < 0$이어야 한다.

즉, $2 < n < 9$이므로 자연수 n의 값은

3, 4, 5, 6, 7, 8

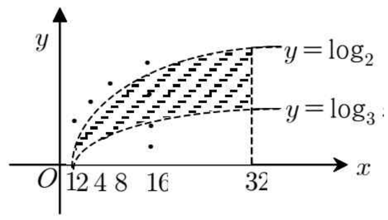
이고, 그 합은

$3+4+5+6+7+8 = 33$



86) [정답] ⑤

[해설]



그림의 $x=16$인 경우에 빗금 친 영역 내에 있는 정수 격자점의 수는

$[\log_2 16]-[\log_3 16]-1$

마지막 항은 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 격자점은 제외하는 것을 의미한다. 같은 방법을 이용하면 빗금 친 영역 내에 있는 정수 격자점의 수는

$\sum_{k=2}^{31}[\log_2 x]-\sum_{x=1}^{31}[\log_3 k]-4$

첫 번째 항은

$\sum_{k=1}^{31}[\log_2 k]=(1\times2)+(2\times4)+(3\times8)+(4\times16)=98$

두 번째 항은

$\sum_{x=1}^{31}[\log_3 k]=(1\times6)+(2\times18)+(3\times5)=57$

따라서, 정수 격자점의 수는

$98-57-4=37$

87) [정답] 39

[해설]

두 점 P, Q의 좌표는 $\mathrm{P}(\mathrm{t}, \mathrm{a}^{\mathrm{t}+1})$, $\mathrm{Q}(\mathrm{t}, \mathrm{b}^{\mathrm{t}})$이다.

(ⅰ) $a>b$일 때,

$\overline{\mathrm{PQ}}=\mathrm{a}^{\mathrm{t}+1}-\mathrm{b}^{\mathrm{t}}$

$t=1$일 때 $\overline{\mathrm{PQ}}$는 최솟값을 가지므로 $t=1$을 대입하면

$\overline{\mathrm{PQ}}=a^2-b\le 10$

이 부등식을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(3,\ 2)$의 1개이다.

(ⅱ) $a=b$일 때,

$\overline{\mathrm{PQ}}=\mathrm{a}^{\mathrm{t}+1}-\mathrm{b}^{\mathrm{t}}=a^{t+1}-a^t$

$t=1$일 때 $\overline{\mathrm{PQ}}$는 최솟값을 가지므로 $t=1$을 대입하면

$\overline{\mathrm{PQ}}=a^2-a\le 10$

$a^2-a-10\le 0$

이 부등식을 만족시키는 a는 2, 3의 2개이다.

그러므로 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(2,\ 2)$, $(3,\ 3)$의 2개이다.

(ⅲ) $a<b$일 때,

두 곡선 $y=a^{x+1}$, $y=b^x$은 $x>0$에서 한 점에서 만나므로 $\overline{\mathrm{PQ}}\le 10$인 t가 존재한다.

그러므로 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(2,\ 3)$, $(2,\ 4)$, $\cdots$, $(2,\ 10)$, $(3,\ 4)$, $(3,\ 5)$, $\cdots$, $(3,\ 10)$, $\cdots$, $(9,\ 10)$의 $\frac{8\times9}{2}=36$개다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 39이다.

88) [정답] 79

[해설]

함수 $y=\log 7x$의 그래프가 세 직선 $y=1$, $y=2$, $y=3$과 만나는 점의 x좌표는 각각 $\frac{10}{7}$, $\frac{100}{7}$, $\frac{1000}{7}$이고,

$1<\frac{10}{7}<2$, $14<\frac{100}{7}<15$, $142<\frac{1000}{7}<143$

이므로 함수 $y=\log 7x$의 그래프와 만나는 정사각형의 왼쪽 아래쪽 꼭짓점의 좌표는

$(1,\ 1)$, $(2,\ 1)$, $\cdots$, $(14,\ 1)$, $(14,\ 2)$, $(15,\ 2)$, $(16,\ 2)$, $\cdots$, $(99,\ 2)$

또, 함수 $y=\log 3x$의 그래프가 세 직선 $y=1$, $y=2$, $y=3$과 만나는 점의 x좌표는 각각 $\frac{10}{3}$, $\frac{100}{3}$, $\frac{1000}{3}$이고,

$3<\frac{10}{3}<4$, $33<\frac{100}{3}<34$, $333<\frac{1000}{3}<334$

이므로 함수 $y=\log 3x$의 그래프와 만나는 정사각형의 왼쪽 아래쪽 꼭짓점의 좌표는

$(3,\ 1)$, $(4,\ 1)$, $\cdots$, $(33,\ 1)$, $(33,\ 2)$, $(34,\ 2)$, $(35,\ 2)$, $\cdots$, $(99,\ 2)$

따라서 두 함수의 그래프와 모두 만나는 정사각형의 왼쪽

아래쪽 꼭짓점의 좌표는

(3, 1), (4, 1), $\cdots$, (14, 1), (33, 2), (34, 2), (99, 2)

이므로 그 개수는 $(14-2)+(99-32)=79$이다.

89) [정답] **120**

[해설]

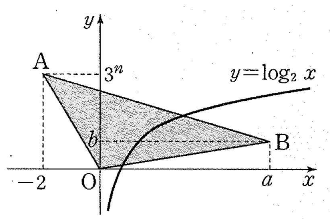
삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times(3^n+b)\times(a+2)-\frac{1}{2}\times a\times b-\frac{1}{2}\times 2\times 3^n$$

$$=\frac{3^n}{2}a+b$$

조건 (나)에서 $b \le \log_2 a$, 즉

$2^b \le a$



조건 (다)에서 넓이가

50이하이어야 하므로

$\frac{3^n}{2}a+b \le 50$

즉, $3^n a+2b \le 100$

(ⅰ) $n=1$일 때, $3a+2b \le 100$이고

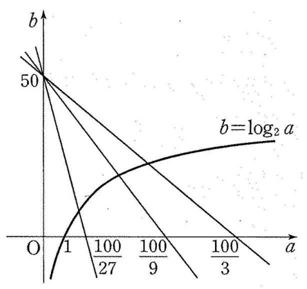
$2^b \le a$이므로

$b=1$일 때 $2 \le a \le \frac{98}{3}$, $b=2$일

때 $4 \le a \le 32$

$b=3$일 때 $8 \le a \le \frac{94}{3}$, $b=4$일

때 $16 \le a \le \frac{92}{3}$



$b \ge 5$일 때, 부등식을 만족시키는 자연수 a는 존재하지 않는다.

따라서 $f(1)=31+29+24+15=99$이다.

(ⅱ) $n=2$일 때, $9a+2b \le 100$이고 $2^b \le a$이므로

$b=1$일 때 $2 \le a \le \frac{98}{9}$, $b=2$일 때 $4 \le a \le \frac{96}{9}$,

$b=3$일 때 $8 \le a \le \frac{94}{9}$, $b \ge 4$일 때, 부등식을 만족시키는 자연수 a는 존재하지 않는다.

따라서 $f(2)=9+7+3=19$이다.

(ⅲ) $n=3$일 때, $27a+2b \le 100$이고 $2^b \le a$이므로

$b=1$일 때, $2 \le a \le \frac{98}{27}$

$b \ge 2$일 때, 부등식을 만족시키는 자연수 a는 존재하지 않는다.

따라서 $f(3)=2$이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

$$f(1)+f(2)+f(3)=99+19+2=120$$

90) [정답] **16**

[해설]

두 곡선 $y=3^x-n$, $y=\log_3(x+n)$은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점 (a, b)가 주어진 영역에 포함되면 점 (b, a)도 포함된다.

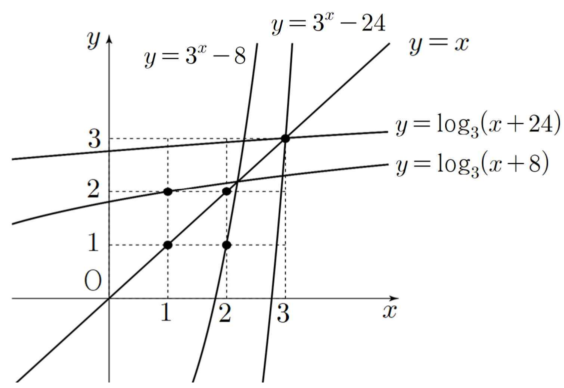
영역의 내부 또는 경계에 포함되는 점의 개수가 4일 때의 네 점은 (1, 1), (2, 2), (2, 1), (1, 2)이다.

$f(x)=3^x-n$이라 할 때, $f(2)\le 1$, $f(3)>3$이어야 한다.

$$3^2-n \le 1,\ 3^3-n>3$$

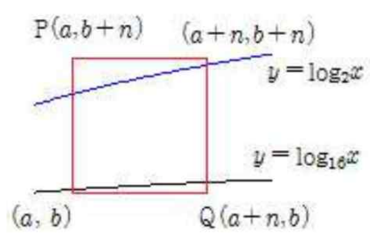
$$\therefore 8 \le n < 24$$

따라서 자연수 n의 개수는 16



91) [정답] ①

[해설]



한 변의 길이가 3이거나 4인 꼭짓점의 좌표가 모두 자연수인 정사각형의 변은 그림과 같이 좌표축에 평행인 것뿐이다.

네 꼭짓점의 좌표를 그림과 같이 두면,

P는 $y=\log_2 x$ 위에, Q는 $y=\log_{16} x$ 아래에 있을 때 조건 (나)를 만족한다.

따라서 $\log_2 a < b+n$, $b < \log_{16}(a+n)$

즉, $a < 2^{b+n}$, $a+n > 2^{4b}$이므로 $2^{4b}-n < a < 2^{b+n}$이다.

(i) $n=3$이면 $2^{4b}-3 < a < 2^{b+3}$에서

$b=1$이면 $16-3 < a < 16$

$a=14,\ 15$

$b \geq 2$이면 $2^{4b}-3 > 2^{b+3}$이므로 불가능

$\therefore\ a_3 = 2$

(ii) $n=4$이면 $2^{4b}-4 < a < 2^{b+4}$에서

$b=1$이면 $16-4 < a < 32$

$a=13,\ \cdots,\ 31$

$b \geq 2$이면 $2^{4b}-4 > 2^{b+4}$이므로 불가능

$\therefore\ a_4 = 19$

(i), (ii)에서

$\therefore\ a_3 + a_4 = 2+19 = 21$

92) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. $T=0$ 일 때

$P=4.8$ 이므로 $a+\dfrac{b}{c} = \log 4.8$ 이다.

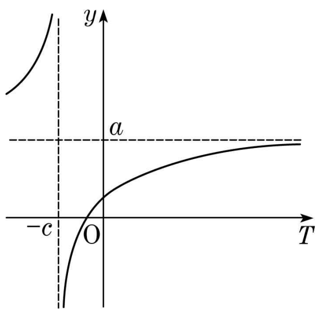
그런데 $\log 4 < \log 4.8 < \log 5$ 에서

$2\log 2 < \log 4.8 < 1-\log 2$ 이므로

$0.602 < a+\dfrac{b}{c} < 0.699$ (참)

ㄴ. $y=\log P$ 라 하면 $y=a+\dfrac{b}{c+T}$ 의 그래프는 점근선이 $T=-c,\ y=a$ 이다. 그런데 주어진 표를 이용하면 T 의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하므로 분수함수의 그래프는 그림과 같아야 한다.

$\therefore\ b<0$ (참)



ㄷ. ㄴ의 $y=a+\dfrac{b}{c+T}$ 의 그래프에서 $T > -c$ 인 모든 실수 T에 대하여 $y<a$이다. $\therefore\ \log P < a$

따라서 $P < 10^a$ 이다. (참)

93) [정답] ③

[해설]

직선 l_n이 점 $\left(3\left(\dfrac{3}{4}\right)^n,\ 0\right)$과 $\left(0,\ 4\left(\dfrac{3}{4}\right)^n\right)$을 지나므로 직선 l_n과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times 3\left(\dfrac{3}{4}\right)^n \times 4\left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 6\left(\dfrac{3}{4}\right)^{2n}$

이고 이 넓이가 $\dfrac{1}{10}$ 이하가 되어야 하므로

$6\left(\dfrac{3}{4}\right)^{2n} \leq \dfrac{1}{10}$

양변에 상용로그를 취하면

$\log 6 + 2n(\log 3 - 2\log 2) \leq -1$

$n \geq \dfrac{1+\log 2+\log 3}{2(2\log 2-\log 3)}$

$n \geq \dfrac{1+0.30+0.48}{2(0.60-0.48)}$

$n \geq \dfrac{1.78}{0.24} = 7.4\times\times$

따라서 자연수 n의 최솟값은 8이다.