교사평경3 | 01

[수학2] [01 극한, 연속성] 교사평경 최근 3개년

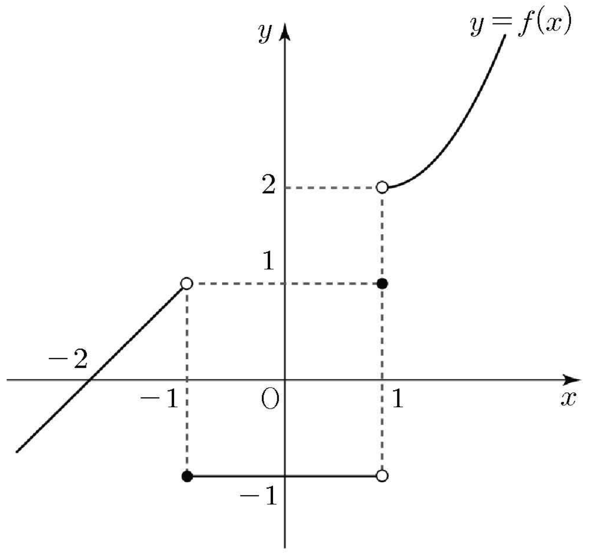
04 수2 01 함수의 극한

01 좌극한과 우극한

01 좌극한과 우극한1 (그래프 조건)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 09월 5

1. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

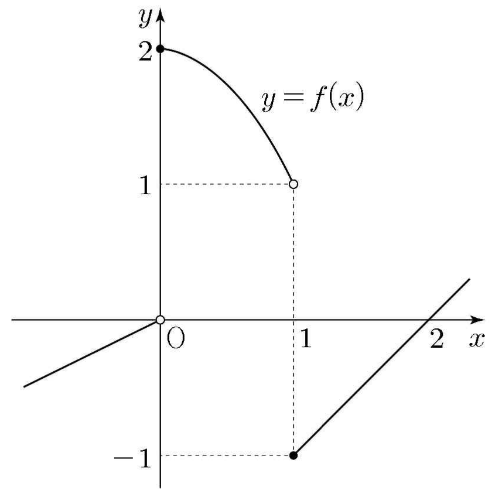


$\lim_{x\to -1-} f(x)+\lim_{x\to 1+} f(x)$의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 07월 7

2. 함수 $f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

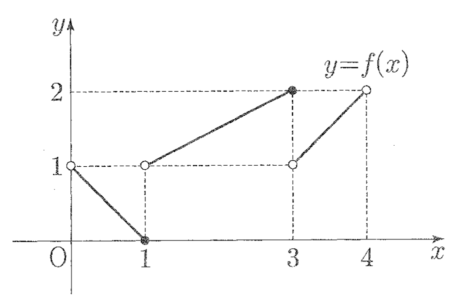


$\lim_{x\to 0-} f(x)+\lim_{x\to 1+} f(x)$의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 7

3. 열린구간 $(0,\ 4)$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

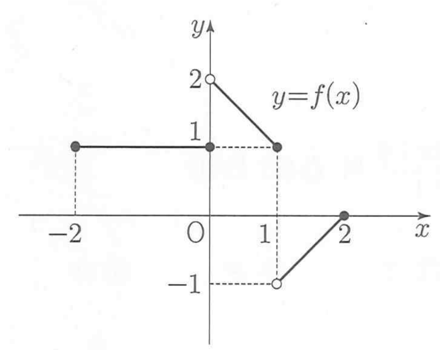


$\lim_{x\to 1+} f(x)-\lim_{x\to 3-} f(x)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 6

4. 닫힌구간 $[-2,\,2]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

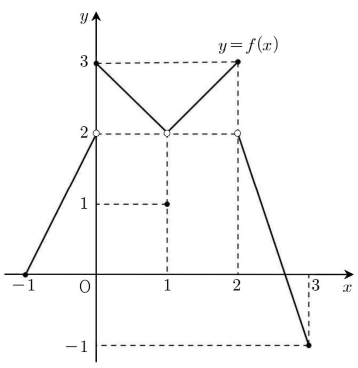


$\lim_{x \to 0+} f(x) + \lim_{x \to 2-} f(x)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 5

5. 닫힌구간 $[-1,\,3]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

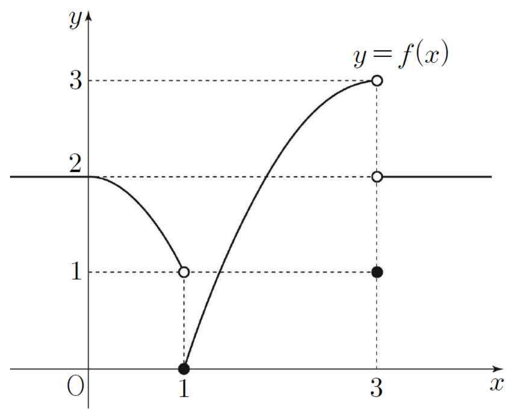


$\lim_{x \to 0-} f(x) + \lim_{x \to 2+} f(x)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 11월 4

6. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

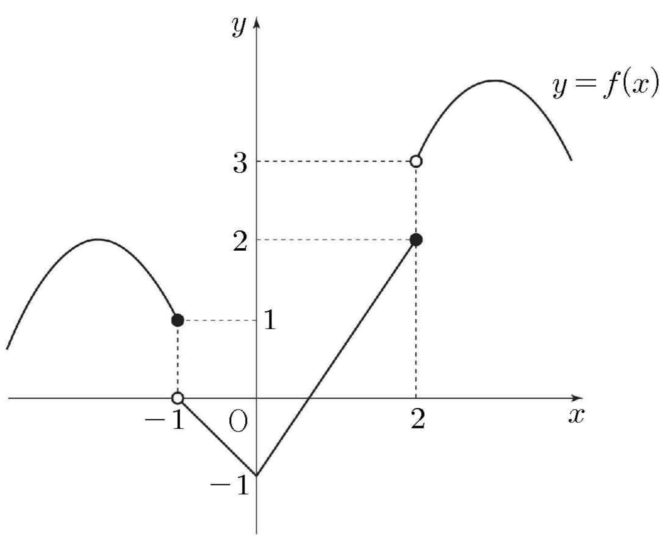


$f(3) + \lim_{x \to 1-} f(x)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 7

7. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

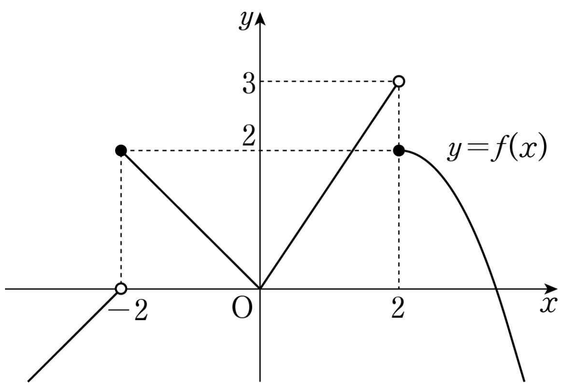


$f(-1) + \lim_{x \to 2+} f(x)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 03월 공통범위 5

8. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

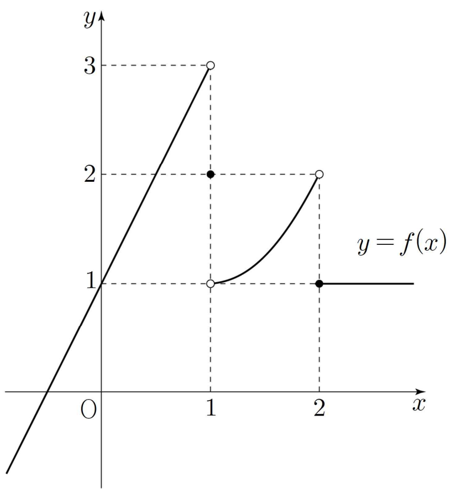


$\lim_{x\to-2+} f(x)+\lim_{x\to2-} f(x)$의 값은?

① 6 ② 5 ③ 4
④ 3 ⑤ 2

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 4

9. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

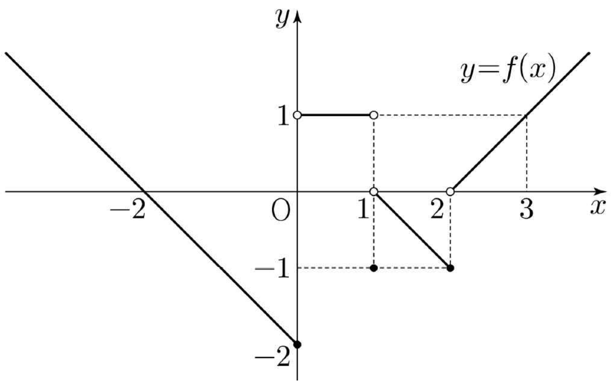


$\lim_{x\to1-} f(x)+\lim_{x\to2+} f(x)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 4

10. 함수 $f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

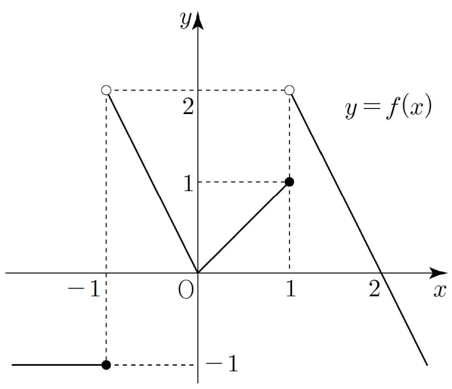


$\lim_{x\to0-} f(x)+\lim_{x\to2+} f(x)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 09월 5

11. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

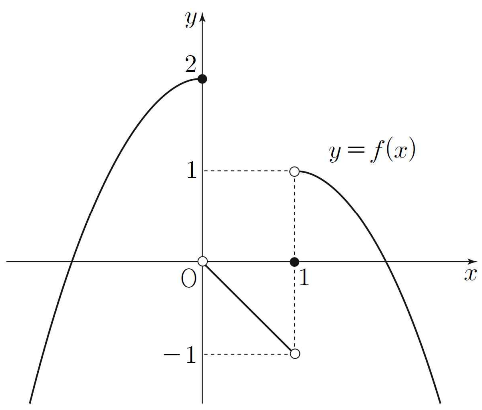


$\lim_{x\to-1+} f(x)+\lim_{x\to1-} f(x)$의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 11월 4

12. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

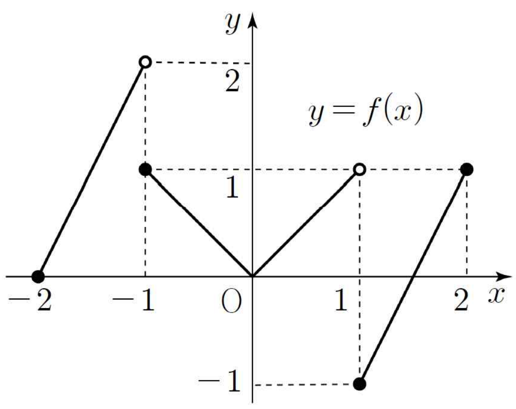


$\lim\limits_{x\to0-}f(x)\times\lim\limits_{x\to1+}f(x)$의 값은?

① -2　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 2

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 4

13. 닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

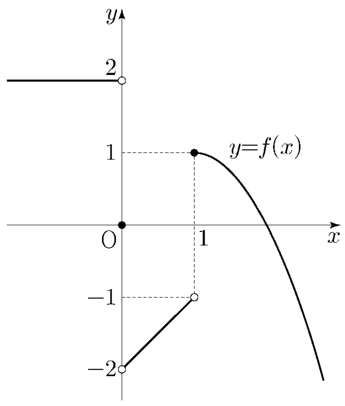


$\lim\limits_{x\to-1-}f(x)+\lim\limits_{x\to1+}f(x)$의 값은?

① -1　② 0　③ 1
④ 2　⑤ 3

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 공통범위 4

14. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

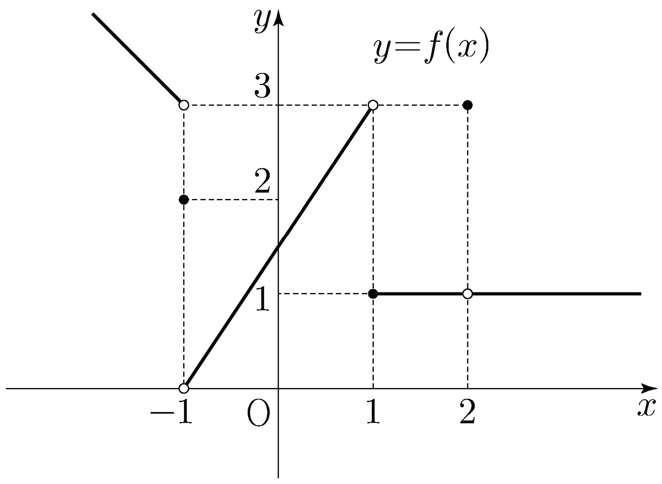


$\lim\limits_{x\to0-}f(x)-\lim\limits_{x\to1+}f(x)$의 값은?

① -2　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 2

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 4

15. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

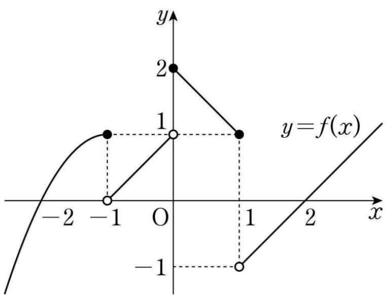


$\lim\limits_{x\to-1-}f(x)+\lim\limits_{x\to2}f(x)$의 값은?

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 03월 공통범위 4

16. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

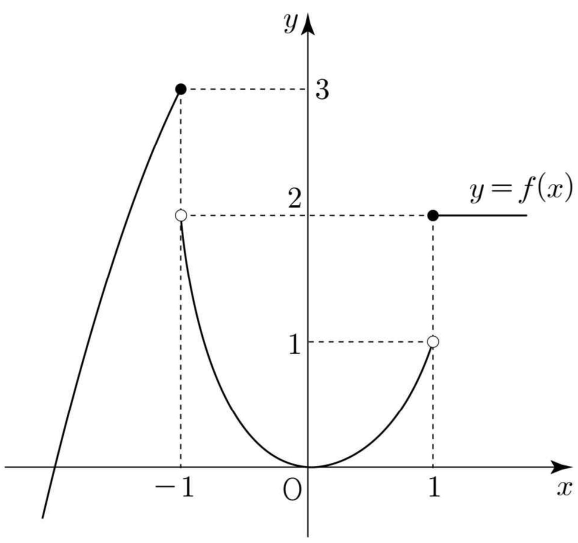


$\lim_{x \to -1+} f(x) + \lim_{x \to 1-} f(x)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고2 09월 5

17. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

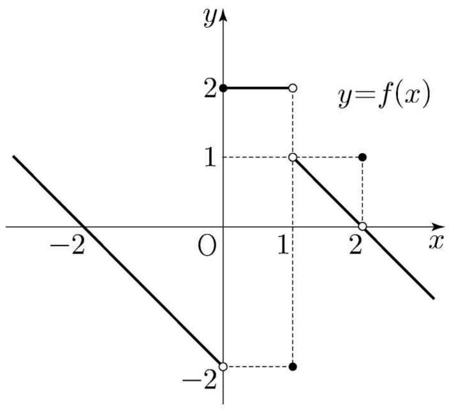


$\lim_{x \to -1+} f(x) + \lim_{x \to 1-} f(x)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 4

18. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

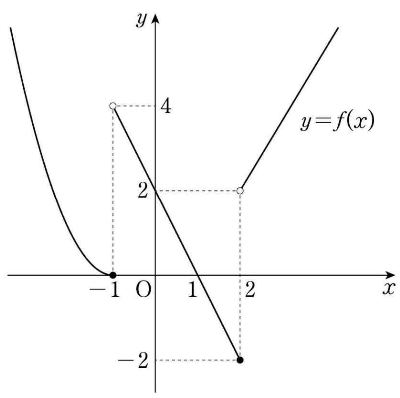


$\lim_{x \to 0-} f(x) + \lim_{x \to 1+} f(x)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 4

19. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

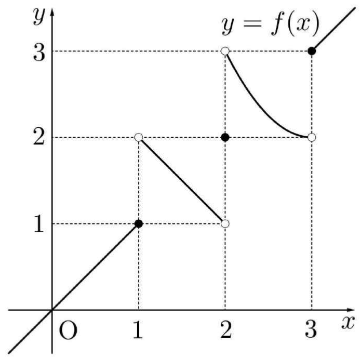


$\lim_{x \to -1+} f(x) + \lim_{x \to 2-} f(x)$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 4

20. 함수 $f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

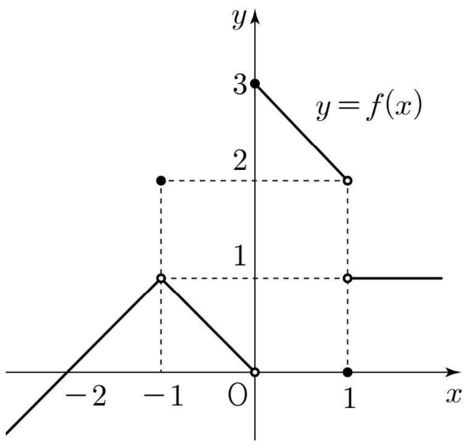


$\lim_{x\to1+} f(x) + \lim_{x\to3-} f(x)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 4

21. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to-1} f(x) + \lim_{x\to1+} f(x)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

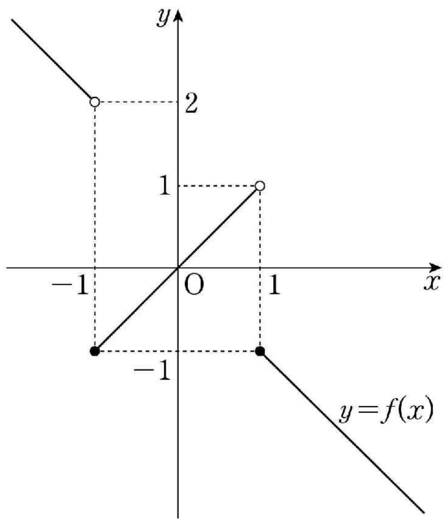
04 수2 01 함수의 극한

01 좌극한과 우극한

05 좌극한과 우극한5 (합성함수)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 8

22. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to0+} f(x-1) + \lim_{x\to1+} f(f(x))$의 값은?

① −2 ② −1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

04 수2 01 함수의 극한

01 좌극한과 우극한

07 좌극한과 우극한7 (추론)

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 12

23. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & (x \le 2) \\ ax+b & (x>2) \end{cases}$$

에 대하여 $f(\alpha)+\lim\limits_{x\to\alpha+} f(x)=4$를 만족시키는 실수 α의 개수가 4이고, 이 네 수의 합이 8이다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① $-\frac{7}{4}$ ② $-\frac{5}{4}$ ③ $-\frac{3}{4}$

④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

04 수2 01 함수의 극한

02 극한의 성질과 계산

01 극한의 성질을 이용한 연산

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 2

24. $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+2x+3)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 09월 2

25. $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2+2)$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7

④ 8 ⑤ 9

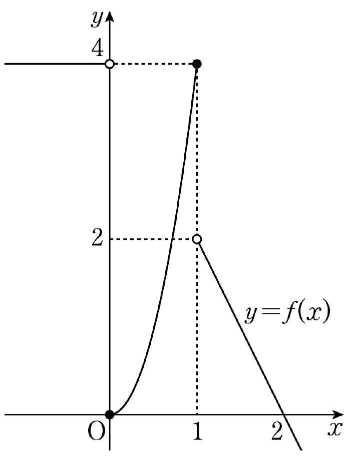
[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 1

26. $\lim_{x \to 2}(x^2+5)$의 값은?

① 5 ② 7 ③ 9
④ 11 ⑤ 13

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 10월 8

27. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to 1+} f(x) - \lim_{x \to 0-} \frac{f(x)}{x-1}$의 값은?

① -6 ② -3 ③ 0
④ 3 ⑤ 6

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 11월 9

28. 다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x \to 2}(x+1)f(x)=6$을 만족시킨다.

$$\lim_{x \to 2}(x^2+ax-1)f(x)=26$$

일 때, $a+f(2)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

04 수2 01 함수의 극한

02 극한의 성질과 계산

02 부정형1 (0

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 3

29. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{x-2}$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 11월 22

30. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+6x-7}{x-1}$의 값을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 07월 3

31. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+9x}{x}$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 4

32. $\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-6x}{x-2}$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 4

33. $\lim_{x \to -1} \frac{x^2+9x+8}{x+1}$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 3

34. $\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{2x-5}-1}{x-3}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

04 수2 01 함수의 극한

02 극한의 성질과 계산

03 부정형2 (무한대

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 11월 22

35. $\lim_{x \to \infty} \frac{9x^2+1}{3x^2+5x}$의 값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 11월

36. $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2-2}+3x}{x+5}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

04 수2 01 함수의 극한

02 극한의 성질과 계산

04 부정형3 (무한대-무한대꼴)

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 22

37. $\lim_{x \to \infty}\left(\sqrt{x^2+22x}-x\right)$의 값을 구하시오.

04 수2 01 함수의 극한

02 극한의 성질과 계산

07 부정형6 (함수의 극한의 대소 관계)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 11월 7

38. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$5x-1<\left(x^2+1\right)f(x)<5x+2$$

를 만족시킬 때, $\lim_{x \to \infty} xf(x)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 11월 13

39. 0이 아닌 모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$가

$$\frac{1}{2}x^2+2x<f(x)<x^2+2x$$

를 만족시킬 때, $\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)+5x}{2f(x)-x}$의 값은?

① $\frac{5}{3}$　② 2　③ $\frac{7}{3}$

④ $\frac{8}{3}$　⑤ 3

04 수2　01 함수의 극한

02 극한의 성질과 계산

08 부정형7 (부정형과 극한의 성질)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 9

40. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\{2f(x)-3g(x)\}=1,\ \lim_{x\to\infty}g(x)=\infty$$

를 만족시킬 때, $\lim_{x\to\infty}\frac{4f(x)+g(x)}{3f(x)-g(x)}$의 값은?

① 1　② 2　③ 3

④ 4　⑤ 5

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고2 09월 26

41. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=8,\ \lim_{x\to1}\frac{g(x)}{x^2-1}=\frac{1}{2}$$

을 만족시킬 때, $\lim_{x\to1}\dfrac{(x+1)f(x)}{g(x)}$의 값을 구하시오.

04 수2 01 함수의 극한

03 극한식의 해석

01 해석1 (미정계수 결정, 0

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 1

42. $\lim_{x\to2}\dfrac{x^2-x+a}{x-2}=b$일 때, $a+b$의 값은?

(단, a, b는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 16

43. 두 상수 a, b에 대하여 $\lim_{x\to-1}\dfrac{x^2+4x+a}{x+1}=b$일 때,

$a+b$의 값을 구하시오.

04 수2 01 함수의 극한

03 극한식의 해석

03 해석3 (차수를 이용한 다항식 결정)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 14

44. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 3, \ \lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{x^2 - x - 2} = 6$$

을 만족시킬 때, $f(0)$의 값은?

① -24 ② -21 ③ -18
④ -15 ⑤ -12

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 09월 26

45. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{2x^2} = 1, \ \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - 3}{(x-1)(x-2)} = 4$$

를 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 경찰대 고3 07월 4

46. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?
(단, a는 0이 아닌 상수이다.)

(가) $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x) - ax^2}{2x^2 + 1} = \frac{1}{2}$

(나) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2 - ax} = 2$

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 8

47. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 2,\ \lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = 3$$

을 만족시킬 때, $f(3)$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

04 수2 01 함수의 극한

03 극한식의 해석

04 해석4 (인수를 이용한 다항식의 결정)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 8

48. 삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 09월 30

49. 세 실수 $a(a\neq 0)$, b, k에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+(2b-3)x+a^2-3 & (x<k) \\ -\frac{1}{3}ax^2+(b+5)x+a^2-1 & (x\geq k) \end{cases}$$

라 하자. 함수

$$g(x)=\lim_{t\to x+}\frac{|f(t)|}{f(t)}-\lim_{t\to x-}\frac{|f(t)|}{f(t)}$$

에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 임의의 실수 α에 대하여 $\lim_{x\to\alpha}f(x)$가 존재한다.
>
> (나) 두 함수 $y=g(x)$와 $y=-4\left|\log_2\frac{x}{2}\right|+2$의 그래프의 서로 다른 교점의 개수는 5이다.

$k=p+q\sqrt{17}$일 때, $16(p+q)$의 값을 구하시오.
(단, p, q는 유리수이다.)

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 20

50. 최고차항의 계수가 1이고 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(5)$의 최댓값을 구하시오.

> (가) $\lim_{x\to 0}\frac{|f(x)-1|}{x}$의 값이 존재한다.
>
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $xf(x)\geq -4x^2+x$이다.

[출처] 2022 모의_공공 경찰대 고3 07월 19

51. 최고차항의 계수가 양수인 다항함수 $f(x)$와 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}$의 값이 존재한다.
>
> (나) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)}{(x-3)g(x)}=k$ (k는 0이 아닌 상수)
>
> (다) $\lim\limits_{x\to-3+}\dfrac{1}{g'(x)}=\infty$

$f(x)$의 차수의 최솟값이 m이다. $f(x)$의 차수가 최소일 때, $m+k$의 값은?

① $\dfrac{10}{3}$ ② $\dfrac{43}{12}$ ③ $\dfrac{23}{6}$ ④ $\dfrac{49}{12}$ ⑤ $\dfrac{13}{3}$

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고2 09월 29

52. 양수 m과 0이 아닌 실수 a에 대하여 두 함수

$$f(x)=\begin{cases}x^2+(a-1)x-a^2+2 & (x\le 2m)\\ -3x+4a & (x>2m)\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}ax-a & (x\le m+1)\\ x-a+1 & (x>m+1)\end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim\limits_{x\to\alpha-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to\alpha+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to\beta-}g(x)\neq\lim\limits_{x\to\beta+}g(x)$인 실수 α, β가 존재한다.
>
> (나) 모든 실수 k에 대하여 $\lim\limits_{x\to k}\dfrac{f(x)}{g(x)}$의 값이 존재한다.

$m+g(a^2)$의 값을 구하시오.

04 수2

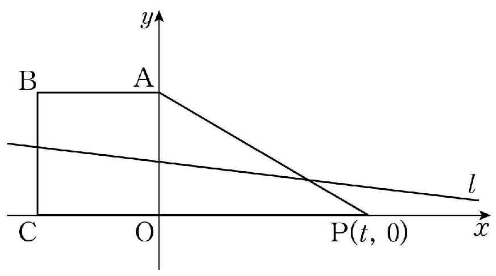
01 함수의 극한

04 극한의 활용

01 활용1 (좌표와 길이)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 20

53. 그림과 같이 좌표평면 위의 네 점 $\mathrm{O}(0, 0)$, $\mathrm{A}(0, 2)$, $\mathrm{B}(-2, 2)$, $\mathrm{C}(-2, 0)$과 점 $\mathrm{P}(t, 0)(t>0)$에 대하여 직선 l이 정사각형 OABC의 넓이와 직각삼각형 AOP의 넓이를 각각 이등분한다. 양의 실수 t에 대하여 직선 l의 y절편을 $f(t)$라 할 때, $\lim\limits_{t \to 0+} f(t)$의 값은?

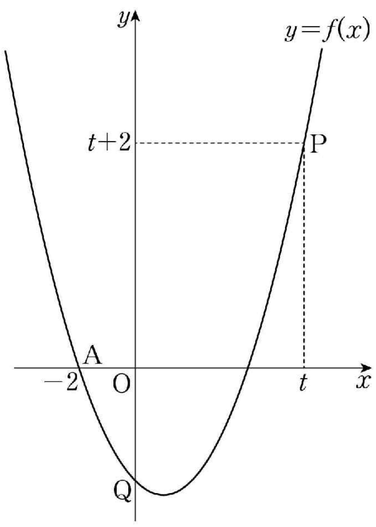


① $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ ② $2-\sqrt{2}$ ③ $\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$

④ 1 ⑤ $\dfrac{2+\sqrt{2}}{3}$

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 26

54. 최고차항의 계수가 1이고 두 점 $\mathrm{A}(-2, 0)$, $\mathrm{P}(t, t+2)$를 지나는 이차함수 $f(x)$가 있다. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축과 만나는 점을 Q라 할 때, $\lim\limits_{t \to \infty}(\sqrt{2} \times \overline{\mathrm{AP}} - \overline{\mathrm{AQ}})$의 값을 구하시오. (단, $t \neq -2$)

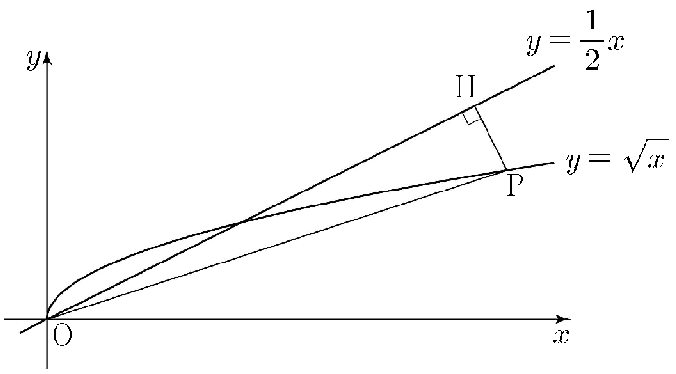


[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 07월 13

55. 곡선 $y=\sqrt{x}$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ \sqrt{t})(t>4)$에서 직선 $y=\frac{1}{2}x$에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\lim_{t\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{OH}}^2}{\overline{\mathrm{OP}}^2}$의 값은? (단, O는 원점이다.)

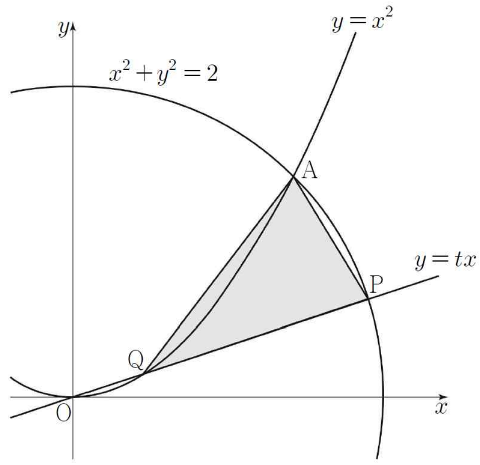
① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{11}{15}$

④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{13}{15}$



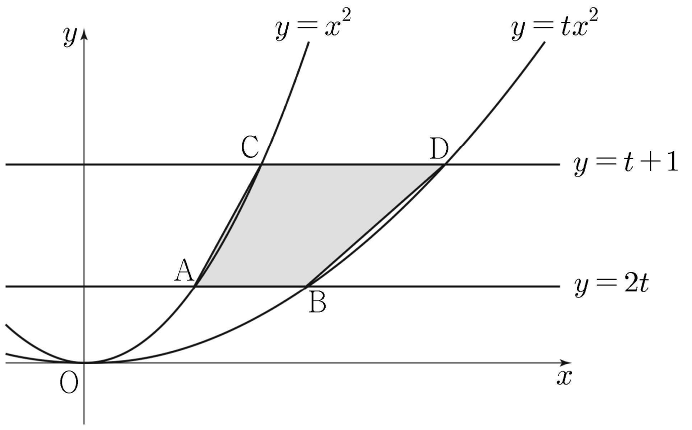
[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 11월 28

56. 그림과 같이 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=2$와 곡선 $y=x^2$이 제 1사분면에서 만나는 점을 A라 하자. 실수 t $(0<t<1)$에 대하여 직선 $y=tx$가 원 $x^2+y^2=2$, 곡선 $y=x^2$과 제 1사분면에서 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 삼각형 PAQ의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $\lim_{t\to 1-}\frac{S(t)}{(1-t)^2}=k$이다. $20k$의 값을 구하시오.



[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 11월 18

57. 그림과 같이 실수 $t\ (0<t<1)$에 대하여 직선 $y=2t$가 두 곡선 $y=x^2$, $y=tx^2$과 제1사분면에서 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=t+1$이 두 곡선 $y=x^2$, $y=tx^2$과 제1사분면에서 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 사각형 ABDC의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $\lim_{t\to1-}\frac{S(t)}{(1-t)^2}$의 값은?



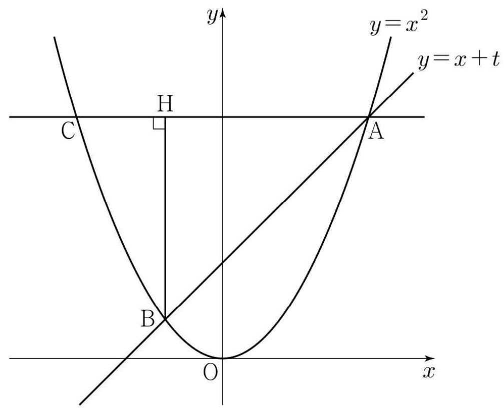
① $\frac{1}{4}$　② $\frac{\sqrt{2}}{4}$　③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$　⑤ 1

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 12

58. 실수 $t(t>0)$에 대하여 직선 $y=x+t$와 곡선 $y=x^2$이 만나는 두 점을 A, B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=x^2$과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C, 점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\lim_{t\to0+}\frac{\overline{AH}-\overline{CH}}{t}$의 값은? (단, 점 A의 x좌표는 양수이다.)

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5



04 수2 01 함수의 극한

04 극한의 활용

02 활용2 (원 관련)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 12

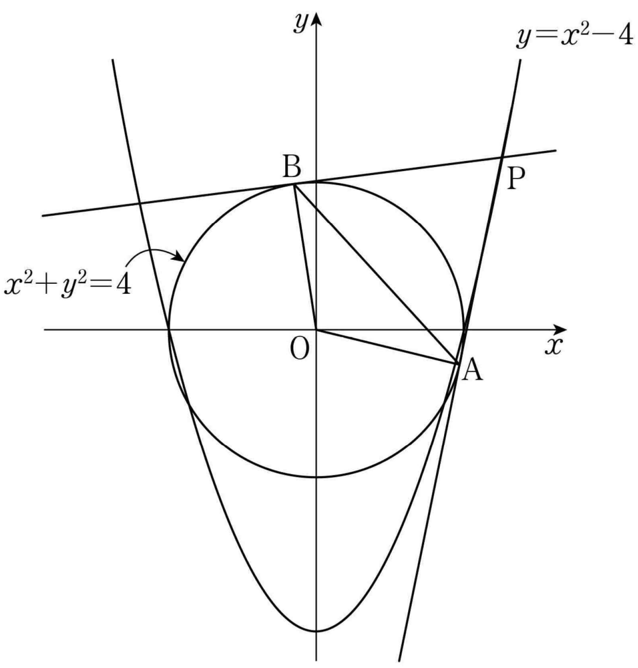
59. 곡선 $y=x^2-4$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ t^2-4)$에서 원 $x^2+y^2=4$에 그은 두 접선의 접점을 각각 A, B라 하자. 삼각형 OAB의 넓이를 $S(t)$, 삼각형 PBA의 넓이를 $T(t)$라 할 때,

$$\lim_{t\to 2+}\frac{T(t)}{(t-2)S(t)}+\lim_{t\to\infty}\frac{T(t)}{(t^4-2)S(t)}$$

의 값은? (단, O는 원점이고, $t>2$이다.)

① 1 ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{3}{2}$

④ $\frac{7}{4}$ ⑤ 2



04 수2 01 함수의 극한

04 극한의 활용

04 활용4 (정의된 함수)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 11월 20

60. 양수 k에 대하여 함수 $f(x)$를 $f(x)=\left|\frac{kx}{x-1}\right|$라 하자. 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가

$$\lim_{t\to 0+}g(t)+\lim_{t\to 2-}g(t)+g(4)=5$$

를 만족시킬 때, $f(3)$의 값은?

① 6 ② $\frac{15}{2}$ ③ 9

④ $\frac{21}{2}$ ⑤ 12

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 09월 30

61. 이차함수 $f(x)=x^2+2x+2$와 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<0) \\ |f(-x)-t| & (x\geq 0) \end{cases}$$

이다. 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{t}{3}$가 만나는 서로 다른 모든 점의 개수를 $h(t)$라 하자.

$$\lim_{t\to\alpha-}h(t)\neq\lim_{t\to\alpha+}h(t)$$

인 모든 실수 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_m$($m$은 자연수)라 할 때, $\sum_{k=1}^{m}\{4\alpha_k\times h(\alpha_k)\}$의 값을 구하시오.

04 수2　02 함수의 연속성

01 함수의 연속성

05 연속성5 (구간정의함수)

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 26

62. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2-10 & (x\leq a) \\ \dfrac{x^2+ax+4a}{x-a} & (x>a) \end{cases}$$

가 $x=a$에서 연속일 때, $f(2a)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 07월 6

63. 함수

$$f(x)=\begin{cases}-2x+1 & (x<1)\\ x^2-ax+4 & (x\ge 1)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은?

① -6 ② -3 ③ 0
④ 3 ⑤ 6

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 26

64. 함수

$$f(x)=\begin{cases}-3x+a & (x\le 1)\\ \dfrac{x+b}{\sqrt{x+3}-2} & (x>1)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 상수이다.)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 4

65. 함수

$$f(x)=\begin{cases}2x+a & (x\le -1)\\ x^2-5x-a & (x>-1)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 8

66. 함수

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3x+a}{x-2} & (x<2)\\ -x^2+b & (x\ge 2)\end{cases}$$

가 $x=2$에서 연속일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 03월 공통범위 6

67. 함수

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+ax+b}{x-3} & (x<3) \\ \dfrac{2x+1}{x-2} & (x \geq 3) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a-b$의 값은?
(단, a, b는 상수이다.)

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 공통범위 7

68. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x-4 & (x<a) \\ x+3 & (x \geq a) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은?

① -1 ② $-\dfrac{1}{2}$ ③ 0
④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ 1

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 5

69. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & (x<2) \\ x^2-ax+3 & (x \geq 2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 4

70. 함수

$$f(x)=\begin{cases}-2x+a & (x\le a)\\ ax-6 & (x>a)\end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은?

① -1 ② -2 ③ -3
④ -4 ⑤ -5

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 6

71. 두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}x+a & (x<-1)\\ x & (-1\le x<3)\\ bx-2 & (x\ge 3)\end{cases}$$

이다. 함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$의 값은?

① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ 3
④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

04 수2 02 함수의 연속성

01 함수의 연속성

06 연속성6 (점정의함수)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 8

72. 함수

$$f(x)=\begin{cases} ax+3 & (x \neq 1) \\ 5 & (x=1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

04 수2 02 함수의 연속성

01 함수의 연속성

07 연속성7 (조건항등식)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 6

73. 모든 실수에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$(x-1)f(x)=x^2-3x+2$$

를 만족시킬 때, $f(1)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

04 수2 02 함수의 연속성

01 함수의 연속성

08 연속성8 (주기함수)

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 11

74. 두 정수 a, b에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0 \leq x < 4$에서 $f(x)=ax^2+bx-24$이다.
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=f(x)$이다.

$1<x<10$일 때, 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 5이다. $a+b$의 값은?

① 18 ② 19 ③ 20
④ 21 ⑤ 22

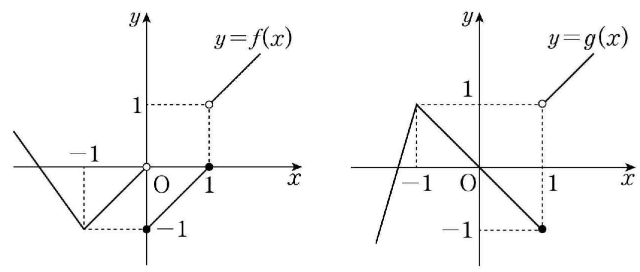
04 수2 02 함수의 연속성

01 함수의 연속성

09 연속성9 (함수의 사칙연산)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 12

75. 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같다.



<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

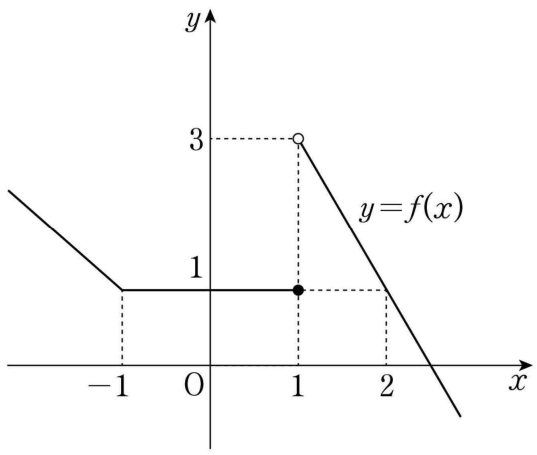
<보 기>

ㄱ. $\lim_{x \to 1-} f(x)g(x)=-1$
ㄴ. $f(1)g(1)=0$
ㄷ. 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 5

76. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



함수 $(x^2+ax+b)f(x)$가 $x=1$에서 연속일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 실수이다.)

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 10

77. 양의 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} x^2-5a & (x<a) \\ -2x+4 & (x\ge a) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $f(-x)f(x)$가 $x=a$에서 연속이 되도록 하는 모든 a의 값의 합은?

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

04 수2 02 함수의 연속성

01 함수의 연속성

11 연속성11 (추론과 해석)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 12

78. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\{f(x)\}^3-\{f(x)\}^2-x^2f(x)+x^2=0$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 최댓값이 1이고 최솟값이 0일 때, $f\left(-\frac{4}{3}\right)+f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

[출처] 2021 모의_공공 경찰대 고3 07월 8

79. 자연수 n과 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2}=2$인 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{f(x)} & (f(x)\neq 0)\\ \frac{1}{n} & (f(x)=0)\end{cases}$$

이다. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 n의 최솟값은?

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 11월

80. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하시오.

(가) 모든 실수 x에 대하여
$f(x)=f(1)+(x-1)f'(g(x))$이다.
(나) 함수 $g(x)$의 최솟값은 $\frac{5}{2}$이다.
(다) $f(0)=-3$, $f(g(1))=6$

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 22

81. 두 양수 a, $b(b>3)$과 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases}(x+3)f(x) & (x<0)\\(x+a)f(x-b) & (x\geq 0)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킬 때, $g(4)$의 값을 구하시오.

> $\lim_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|}{(x+3)^2}$의 값이 존재하지 않는 실수 t의 값은 -3과 6뿐이다.

04 수2 02 함수의 연속성

02 연속함수의 성질과 활용

02 불연속 후보군2 (연속X불연속)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 11월 29

82. 5이하의 두 자연수 a, b에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를

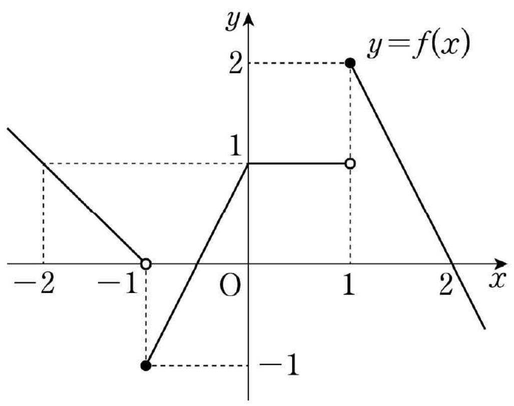
$$f(x)=x^2-2ax+a^2-a+1$$

$$g(x)=\begin{cases}x+b & (1<x<3)\\7-b & (x\leq 1 \text{ 또는 } x\geq 3)\end{cases}$$

이라 하자. 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 10월 24

83. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$에 대하여 함수 $h(x)=f(x)g(x)$가 구간 $(-2,\ 2)$에서 연속일 때, $g(5)$의 값을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 12

84. 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & (x<1) \\ \dfrac{1}{2x+1} & (x\geq 1) \end{cases}$$

$$g(x)=2x^3+ax+b$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $b-a$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 10 ② 9 ③ 8
④ 7 ⑤ 6

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 12

85. 다항함수 $f(x)$는 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2-3x-5}=2$을 만족시키고,

함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-3} & (x\neq 3) \\ 1 & (x=3) \end{cases}$$

이다. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $f(1)$의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 03월 공통범위 12

86. $a>2$인 상수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+3 & (x \le 2) \\ -x^2+ax & (x>2) \end{cases}$$

라 하자. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $h(1)+h(3)$의 값은?

(가) $x \ne 1$, $x \ne a$일 때, $h(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$이다.
(나) $h(1)=h(a)$

① $-\dfrac{15}{6}$ ② $-\dfrac{7}{3}$ ③ $-\dfrac{13}{6}$
④ -2 ⑤ $-\dfrac{11}{6}$

04 수2 02 함수의 연속성

02 연속함수의 성질과 활용

03 불연속 후보군3 (불연속X불연속)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 8

87. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -2x+6 & (x<a) \\ 2x-a & (x \ge a) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

04 수2 02 함수의 연속성

02 연속함수의 성질과 활용

06 활용1 (교점의 개수로 정의된 함수)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 03월 공통범위 20

88. 실수 m에 대하여 직선 $y=mx$와 함수

$$f(x)=2x+3+|x-1|$$

의 그래프의 교점의 개수를 $g(m)$이라 하자. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $h(x)$에 대하여 함수 $g(x)h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $h(5)$의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 11월 30

89. 두 자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=x^2-2ax+b$라 할 때, 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x+a) & (x \le a) \\ |f(x)| & (x > a) \end{cases}$$

라 하자. 실수 t에 대하여 직선 $y=t$와 함수 $y=g(x)$의 그래프가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $h(t)$라 할 때, 함수 $h(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

$k \ge 24$인 임의의 실수 k에 대해서만 함수 $\{h(t)-2\}h(t-k)$가 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$10a+b$의 값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 11월

90. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$g(x)=\begin{cases} x & (x<-1 \text{ 또는 } x>1) \\ f(x) & (-1 \le x \le 1) \end{cases}$$

함수 $h(x)=\lim_{t\to 0+} g(x+t)\times \lim_{t\to 2+} g(x+t)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $h(1)=3$

ㄴ. 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 감소하고 $g(-1)=-2$이면 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 최솟값을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

04 수2 02 함수의 연속성

02 연속함수의 성질과 활용

07 활용2 (기타 정의된 함수)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 21

91. 좌표평면에 세 점 $\mathrm{O}(0, 0)$, $\mathrm{A}(\sqrt{2}, 0)$, $\mathrm{B}(0, \sqrt{2})$가 있다.
점 O를 중심으로 하는 원 C의 반지름의 길이가 t일 때, 삼각형 ABP의 넓이가 자연수인 원 C 위의 점 P의 개수를 함수 $f(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, 점 P는 직선 AB 위에 있지 않다.)

<보 기>

ㄱ. $f\left(\frac{1}{2}\right)=2$

ㄴ. $\lim_{t\to 1+} f(t) \neq f(1)$

ㄷ. $0<a<4$인 실수 a에 대하여 함수 $f(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 개수는 3이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2021 모의_공공 경찰대 고3 07월 24

92. 좌표평면 위에 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 C와 두 점 A(3, 3), B(0, -1)이 있다.
실수 t $(0<t\le 4)$에 대하여 $f(t)$를 집합
$\{X|\ X$는 원 C 위의 점이고, 삼각형 ABX의 넓이는 $t\}$
의 원소의 개수라 하자. 함수 $f(t)$가 연속하지 않은 모든 t의 값의 합을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 경찰대 고3 07월 15

93. 좌표평면에서 정삼각형 ABC에 내접하는 반지름의 길이가 1인 원 S가 있다. 실수 t $(0\le t\le 1)$에 대하여 삼각형 ABC 위의 점 P와 원 S의 거리가 t인 점 P의 개수를 $f(t)$라 하자. 함수 $f(t)$가 $t=k$에서 불연속인 k의 개수를 a, $\lim_{t\to 1-} f(t)=b$라 할 때, $a+b$의 값은? (여기서, 점 P와 원 S 위의 점 X에 대하여 선분 PX의 길이의 최솟값이다.)

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

04 수2 02 함수의 연속성

03 사잇값 정리

03 사잇값 정리2 (활용)

[출처] 2020 모의_공공 경찰대 고3 07월 4

94. $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=4$, $\lim_{x\to 4}\frac{f(x)}{x-4}=2$를 만족시키는 다항함수 $f(x)$에 대하여 방정식 $f(x)=0$이 구간 $[2, 4]$에서 적어도 m개의 서로 다른 실근을 갖는다. m의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[수학2] [01 극한, 연속성] 교사평경 최근 3개년(빠른 정답)

년도별경향 2022.12.28

1. [정답] ⑤
2. [정답] ①
3. [정답] ②
4. [정답] ⑤
5. [정답] ④

6. [정답] ②
7. [정답] ④
8. [정답] ②
9. [정답] ④
10. [정답] ①

11. [정답] ⑤
12. [정답] ⑤
13. [정답] ③
14. [정답] ④
15. [정답] ④

16. [정답] ④
17. [정답] ③
18. [정답] ②
19. [정답] ④
20. [정답] ④

21. [정답] ②
22. [정답] ④
23. [정답] ①
24. [정답] ③
25. [정답] ①

26. [정답] ③
27. [정답] ⑤
28. [정답] ②
29. [정답] ③
30. [정답] 8

31. [정답] ⑤
32. [정답] ①
33. [정답] ②
34. [정답] ①
35. [정답] 3

36. [정답] ④
37. [정답] 11
38. [정답] ⑤
39. [정답] ①
40. [정답] ②

41. [정답] 16
42. [정답] ①
43. [정답] 5
44. [정답] ①
45. [정답] 9

46. [정답] ④
47. [정답] ④
48. [정답] ②
49. [정답] 28
50. [정답] 226

51. [정답] ④
52. [정답] 4
53. [정답] ②
54. [정답] 6
55. [정답] ④

56. [정답] 15
57. [정답] ④
58. [정답] ②
59. [정답] ②
60. [정답] ①

61. [정답] 141
62. [정답] 6
63. [정답] ⑤
64. [정답] 6
65. [정답] ④

66. [정답] ①
67. [정답] ⑤
68. [정답] ④
69. [정답] ③
70. [정답] ①

71. [정답] ⑤

72. [정답] ②
73. [정답] ②
74. [정답] ④
75. [정답] ⑤

76. [정답] ②
77. [정답] ①
78. [정답] ③
79. [정답] ①
80. [정답] 13

81. [정답] 19
82. [정답] **7**
83. [정답] **24**
84. [정답] ①
85. [정답] ①

86. [정답] ③
87. [정답] ④
88. [정답] 8
89. [정답] 44
90. [정답] ①

91. [정답] ⑤
92. [정답] **5**
93. [정답] ③
94. [정답] ③

[수학2] [01 극한, 연속성] 교사평경 최근 3개년(해설)

년도별경향 2022.12.28

1) [정답] ⑤

[해설]
$\lim_{x\to -1-} f(x)+\lim_{x\to 1+} f(x)=1+2=3$

2) [정답] ①

[해설]
$\lim_{x\to 0-} f(x)+\lim_{x\to 1+} f(x)=0+(-1)=-1$

3) [정답] ②

[해설]
$x\to 1+$일 때, $f(x)\to 1$이므로
$\lim_{x\to 1+} f(x)=1$
또, $x\to 3$일 때, $f(x)\to 2$이므로
$\lim_{x\to 3-} f(x)=2$
따라서,
$\lim_{x\to 1+} f(x)-\lim_{x\to 3-} f(x)=1-2=-1$

4) [정답] ⑤

[해설]
$\lim_{x\to 0+} f(x)=2,\quad \lim_{x\to 2-} f(x)=0$
이므로
$\lim_{x\to 0+} f(x)+\lim_{x\to 2-} f(x)$
$=2+0$
$=2$

5) [정답] ④

[해설]
$\lim_{x\to 0-} f(x)+\lim_{x\to 2+} f(x)=2+2=4$

6) [정답] ②

[해설]
$f(3)+\lim_{x\to 1-} f(x)=1+1=2$

7) [정답] ④

[해설]
$f(-1)+\lim_{x\to 2+} f(x)=1+3=4$

8) [정답] ②

[해설]
$\lim_{x\to -2+} f(x)+\lim_{x\to 2-} f(x)=2+3=5$

9) [정답] ④

[해설]
$\lim_{x\to 1-} f(x)+\lim_{x\to 2+} f(x)=3+1=4$

10) [정답] ①

[해설]
그래프에서 $x\to 0-$일 때 $f(x)\to -2$이므로
$\lim_{x\to 0-} f(x)=-2$
$x\to 2+$일 때 $f(x)\to 0$이므로 $\lim_{x\to 2+} f(x)=0$
$\therefore \lim_{x\to 0-} f(x)+\lim_{x\to 2+} f(x)=-2+0=-2$

11) [정답] ⑤

[해설]
$\lim_{x\to -1+} f(x)+\lim_{x\to 1-} f(x)=2+1=3$

12) [정답] ⑤

[해설]
$\lim_{x\to 0-} f(x)\times \lim_{x\to 1+} f(x)=2\times 1=2$

13) [정답] ③

[해설]

$$\lim_{x\to-1-}f(x)=2,\ \lim_{x\to1+}f(x)=-1$$

따라서 $\lim_{x\to-1-}f(x)+\lim_{x\to1+}f(x)=1$

14) [정답] ④

[해설]

$\lim_{x\to0-}f(x)-\lim_{x\to1+}f(x)=2-1=1$

15) [정답] ④

[해설]

$x\to-1-$일 때, $f(x)\to3$이므로 $\lim_{x\to-1-}f(x)=3$

또, $x\to2$일 때, $f(x)\to1$이므로 $\lim_{x\to2}f(x)=1$

따라서,

$\lim_{x\to-1-}f(x)+\lim_{x\to2}f(x)=3+1=4$

16) [정답] ④

[해설]

$\lim_{x\to-1+}f(x)+\lim_{x\to1-}f(x)=0+1=1$

17) [정답] ③

[해설]

$\lim_{x\to-1+}f(x)+\lim_{x\to1-}f(x)=2+1=3$

18) [정답] ②

[해설]

$x\to0-$일 때 $f(x)\to-2$이고

$x\to1+$일 때 $f(x)\to1$이므로

$\lim_{x\to0-}f(x)+\lim f(x)$

$=(-2)+1=-1$

19) [정답] ④

[해설]

$\lim_{x\to-1+}f(x)+\lim_{x\to2-}f(x)=4+(-2)=2$

20) [정답] ④

[해설]

$\lim_{x\to1+}f(x)=2,\ \lim_{x\to3-}f(x)=2$이므로

$\lim_{x\to1+}f(x)+\lim_{x\to3-}f(x)=2+2=4$

21) [정답] ②

[해설]

$\lim_{x\to-1}f(x)=1,\ \lim_{x\to1+}f(x)=1$

따라서 $\lim_{x\to-1}f(x)+\lim_{x\to1+}f(x)=2$

22) [정답] ④

[해설]

$x-1=t$라 하면 $x\to0+$일 때, $t\to-1+$이므로

$\lim_{x\to0+}f(x-1)=\lim_{t\to-1+}f(t)=-1$

$f(x)=s$라 하면 $x\to1+$일 때, $s\to-1-$이므로

$\lim_{x\to1+}f(f(x))=\lim_{s\to-1-}f(s)=2$

따라서

$\lim_{x\to0+}f(x-1)+\lim_{x\to1+}f(f(x))=(-1)+2=1$

23) [정답] ①

[해설]

(ⅰ) $\alpha=2$일 때,

$f(\alpha)=f(2)=5,\ \lim_{x\to\alpha+}f(x)=\lim_{x\to2+}(ax+b)=2a+b$

이므로 $5+(2a+b)=4$에서

$2a+b=-1$ …… ㉠

(ⅱ) $\alpha\neq2$일 때,

$f(\alpha)=\lim_{x\to\alpha+}f(x)$이므로 $f(\alpha)=2$

$\alpha<2$일 때, $f(\alpha)=\alpha^2+1=2$

$\therefore \alpha=-1$ 또는 $\alpha=1$

$\alpha>2$일 때, $f(\alpha)=a\alpha+b=2$ …… ㉡

이상에서 $f(\alpha)+\lim_{x\to\alpha+}f(x)=4$를 만족시키는 실수 α의 개수가 4이고, 이 네 수의 합이 8이어야 하므로 $\alpha>2$일 때의 α의 값은 6이어야 한다.

$a=6$을 ㉡에 대입하면 $6a+b=2$ …… ㉢

㉠, ㉢을 연립하면 $a=\frac{3}{4}$, $b=-\frac{5}{2}$

$\therefore a+b=-\frac{7}{4}$

24) [정답] ③

[해설]

$\lim_{x\to0}(x^2+2x+3)=3$

25) [정답] ①

[해설]

$\lim_{x\to1}(3x^2+2)=5$

26) [정답] ③

[해설]

$\lim_{x\to2}(x^2+5)=\lim_{x\to2}x^2+\lim_{x\to2}5=4+5=9$

27) [정답] ⑤

[해설]

$\lim_{x\to1+}f(x)=2$, $\lim_{x\to0-}f(x)=4$, $\lim_{x\to0-}(x-1)=-1$에서

$$\lim_{x\to1+}f(x)-\lim_{x\to0-}\frac{f(x)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1+}f(x)-\frac{\lim_{x\to0-}f(x)}{\lim_{x\to0-}x-1}$$

$$=2-\left(\frac{4}{-1}\right)=6$$

28) [정답] ②

[해설]

$f(x)$가 다항함수이므로

$$\lim_{x\to2}(x+1)f(x)$$

$$=\lim_{x\to2}(x+1)\times\lim_{x\to2}f(x)$$

$$=3\times\lim_{x\to2}f(x)=6$$

에서 $\lim_{x\to2}f(x)=2$이고 $f(2)=2$

$$\lim_{x\to2}(x^2+ax-1)f(x)$$

$$=\lim_{x\to2}(x^2+ax-1)\times\lim_{x\to2}f(x)$$

$$=(2a+3)\times2=26$$

에서 $a=5$

따라서 $a+f(2)=5+2=7$

29) [정답] ③

[해설]

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2+2x-8}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x+4)(x-2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}(x+4)$$

$$=6$$

30) [정답] 8

[해설]

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+6x-7}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+7)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}(x+7)$$

$$=8$$

31) [정답] ⑤

[해설]

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2+9x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x(x+9)}{x}=\lim_{x\to0}(x+9)=9$$

32) [정답] ①

[해설]

$$\lim_{x\to2}\frac{3x^2-6x}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{3x(x-2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}3x$$

$$=6$$

33) [정답] ②

[해설]

$\lim_{x \to -1} \frac{x^2+9x+8}{x+1}$

$= \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x+8)}{x+1}$

$= \lim_{x \to -1} (x+8)$

$=-1+8$

$=7$

34) [정답] ①

[해설]

$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{2x-5}-1}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{2x-6}{(x-3)(\sqrt{2x-5}+1)}$

$= \lim_{x \to 3} \frac{2}{\sqrt{2x-5}+1} = 1$

35) [정답] 3

[해설]

$\lim_{x \to \infty} \frac{9x^2+1}{3x^2+5x} = \lim_{x \to \infty} \frac{9+\frac{1}{x^2}}{3+\frac{5}{x}} = \frac{9+0}{3+0} = 3$

36) [정답] ④

[해설]

$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2-2}+3x}{x+5} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}+3}{1+\frac{5}{x}}$

$= \frac{\sqrt{1-0}+3}{1+0}$

$=4$

37) [정답] 11

[해설]

$\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x^2+22x}-x) = \lim_{x \to \infty} \frac{22x}{\sqrt{x^2+22x}+x} = \lim_{x \to \infty} \frac{22}{\sqrt{1+\frac{22}{x}}+1}$

$=11$

38) [정답] ⑤

[해설]

부등식 $5x-1 < (x^2+1)f(x) < 5x+2$에서

$\frac{5x-1}{x^2+1} < f(x) < \frac{5x+2}{x^2+1}$

$x>0$일 때, $\frac{x(5x-1)}{x^2+1} < xf(x) < \frac{x(5x+2)}{x^2+1}$이고

$\lim_{x \to \infty} \frac{x(5x-1)}{x^2+1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x(5x+2)}{x^2+1} = 5$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의해 $\lim_{x \to \infty} xf(x) = 5$

39) [정답] ①

[해설]

(ⅰ) 부등식 $\frac{1}{2}x^2+2x < f(x) < x^2+2x$에서

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}x^2+2x\right) = \lim_{x\to 0}(x^2+2x) = 0$이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의해 $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

(ⅱ) $x>0$일 때, $\frac{1}{2}x+2 < \frac{f(x)}{x} < x+2$이고

$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{2}x+2\right) = \lim_{x\to 0+}(x+2) = 2$이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의해 $\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{x} = 2$

$x<0$일 때, $x+2 < \frac{f(x)}{x} < \frac{1}{2}x+2$이고

$\lim_{x\to 0-}(x+2) = \lim_{x\to 0-}\left(\frac{1}{2}x+2\right) = 2$이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의해 $\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)}{x} = 2$

$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0-}\frac{f(x)}{x} = 2$이므로 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 2$

(ⅰ), (ⅱ)에 의해

$\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)+5x}{2f(x)-x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)+5}{2\times\frac{f(x)}{x}-1}$

$= \frac{0+5}{2\times 2-1} = \frac{5}{3}$

40) [정답] ②

[해설]

$h(x)=2f(x)-3g(x)$라 하면 $f(x)=\dfrac{3g(x)+h(x)}{2}$

$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}h(x)=1$이므로 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{h(x)}{g(x)}=0$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4f(x)+g(x)}{3f(x)-g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{4\left\{\frac{3g(x)+h(x)}{2}\right\}+g(x)}{3\left\{\frac{3g(x)+h(x)}{2}\right\}-g(x)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{14g(x)+4h(x)}{7g(x)+3h(x)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{14+4\times\frac{h(x)}{g(x)}}{7+3\times\frac{h(x)}{g(x)}}$$

$$=2$$

41) [정답] 16

[해설]

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{g(x)}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}$이므로 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{g(x)}=2$

$$\lim_{x\to1}\frac{(x+1)f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)}{x-1}\times\frac{x^2-1}{g(x)}\right\}$$

$$=8\times2=16$$

42) [정답] ①

[해설]

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-x+a}{x-2}$에서 $x\to2$일 때, (분모)$\to0$이므로

(분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to2}(x^2-x+a)=0$, $2+a=0$, $a=-2$

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-x+a}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x^2-x-2}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+1)}{x-2}=3$$

$\therefore\ a+b=(-2)+3=1$

43) [정답] 5

[해설]

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+4x+a}{x+1}=b$에서 (분모)$\to0$이고 극한값이

존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to-1}(x^2+4x+a)=0$이므로 $1-4+a=0$, $a=3$

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2+4x+3}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x+3)}{x+1}$$

$=\lim\limits_{x\to-1}(x+3)$

$=2=b$

따라서 $a+b=5$

44) [정답] ①

[해설]

$f(x)$가 다항함수이고 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}=3$이므로

$f(x)=3x^2+ax+b$ ($(a, b$는 실수$)$

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)}{x^2-x-2}=6$이고 $\lim\limits_{x\to2}(x^2-x-2)=0$

이므로 $\lim\limits_{x\to2}f(x)=f(2)=0$

$f(2)=12+2a+b=0$, $b=-2a-12$

$f(x)=3x^2+ax+(-2a-12)$

$=(x-2)(3x+6+a)$

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)}{x^2-x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(3x+6+a)}{(x-2)(x+1)}$

$a=\dfrac{6+6+a}{3}=6$

$a=6$, $b=-24$

$f(x)=3x^2+6x-24$, $f(0)=-24$

45) [정답] 9

[해설]

$f(x)$가 다항함수이고 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{2x^2}=1$이므로

$f(x)=2x^2+ax+b$ (a, b는 실수)

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-3}{(x-1)(x-2)}=4$이고 $\lim\limits_{x\to1}(x-1)(x-2)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to1}\{f(x)-3\}=0$

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}[\{f(x)-3\}+3]$$

$$=\lim_{x\to1}\{f(x)-3\}+\lim_{x\to1}3$$

$$=0+3=3$$

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=2+a+b=3$

즉, $b=-a+1$

$$f(x)-3=2x^2+ax-a-2$$

$$=(x-1)(2x+a+2)$$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-3}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(2x+a+2)}{(x-1)(x-2)}$$

$=\dfrac{2+a+2}{-1}=4$

따라서 $a=-8$, $b=9$이므로 $f(x)=2x^2-8x+9$

$\therefore f(4)=9$

46) [정답] ④

[해설]

(가) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-ax^2}{2x^2+1}=\frac{1}{2}$에 의해

$f(x)=(a+1)x^2+bx+c$

라 놓을 수 있다.

(나) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2-ax}=2$에서 $f(0)=0$이므로 $c=0$

식에 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{(a+1)x^2+bx}{x^2-ax}=\lim_{x\to 0}\frac{(a+1)x+b}{x-a}$$
$$=-\frac{b}{a}$$

따라서 $-\dfrac{b}{a}=2$이므로 $b=-2a$

즉, $f(x)=(a+1)x^2-2ax$

$\therefore f(2)=4(a+1)-4a=4$

47) [정답] ④

[해설]

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=2$이므로 $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이다.

$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=3$에서 $\displaystyle\lim_{x\to 1}(x-1)=0$이므로 $\displaystyle\lim_{x\to 1}f(x)=0$,

$f(1)=0$

$f(x)=(x-1)(2x+a)$(a는 상수)라 하면

$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(2x+a)}{x-1}=2+a=3$, $a=1$

$f(x)=(x-1)(2x+1)$

따라서 $f(3)=14$

48) [정답] ②

[해설]

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$에서 $x\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$ …… ㉠

$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=1$에서 $x\to 1$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 삼차함수 $f(x)$는 x, $x-1$을 인수로 가지므로

$f(x)=x(x-1)(ax+b)$(a, b는 상수, $a\neq 0$)이라 하면

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}(x-1)(ax+b)$

$=-b=1$ …… ㉢

$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}x(ax+b)$

$=a+b=1$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 $a=2$, $b=-1$

따라서 $f(x)=x(x-1)(2x-1)$이므로

$f(2)=2\times 1\times 3=6$

49) [정답] **28**

[해설]

$f_1(x)=ax^2+(2b-3)x+a^2-3$,

$f_2(x)=-\dfrac{1}{3}ax^2+(b+5)x+a^2-1$

이라 하면

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) & (x<k) \\ f_2(x) & (x\geq k)\end{cases}$$

$f(x)>0$이면 $\dfrac{|f(x)|}{f(x)}=1$,

$f(x)<0$이면 $\dfrac{|f(x)|}{f(x)}=-1$

임의의 실수 α에 대하여 $\displaystyle\lim_{x\to\alpha}f(x)$가 존재하므로

(i) $x_1<x<x_2$인 모든 x에 대하여 $f(x)\geq 0$일 때

$x_1<\alpha<x_2$인 임의의 α에 대하여

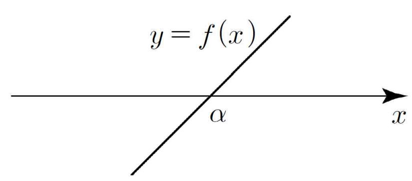
$$\lim_{t\to\alpha+}\frac{|f(t)|}{f(t)}=\lim_{t\to\alpha-}\frac{|f(t)|}{f(t)}=1,\ g(\alpha)=0$$

(ii) $x_3<x<x_4$인 모든 x에 대하여 $f(x)\leq 0$일 때

$x_3<\alpha<x_4$인 임의의 α에 대하여

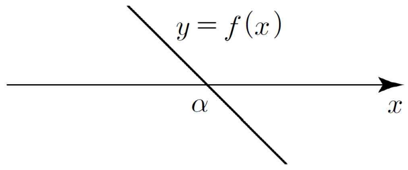
$$\lim_{t\to\alpha+}\frac{|f(t)|}{f(t)}=\lim_{t\to\alpha-}\frac{|f(t)|}{f(t)}=-1,\ g(\alpha)=0$$

(iii) $f(\alpha)=0$이고 $x=\alpha$의 좌우에서 $f(x)$의 함숫값의 부호가 음(-)에서 양(+)으로 변하는 경우



$\lim\limits_{t\to\alpha+}\dfrac{|f(t)|}{f(t)}=1$, $\lim\limits_{t\to\alpha-}\dfrac{|f(t)|}{f(t)}=-1$이므로 $g(\alpha)=2$

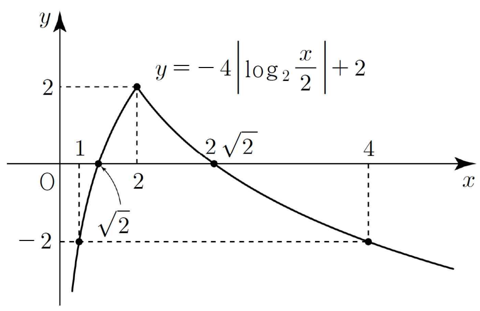
(iv) $f(\alpha)=0$이고 $x=\alpha$의 좌우에서 $f(x)$의 함숫값의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 변하는 경우



$\lim\limits_{t\to\alpha+}\dfrac{|f(t)|}{f(t)}=-1$, $\lim\limits_{t\to\alpha-}\dfrac{|f(t)|}{f(t)}=1$이므로 $g(\alpha)=-2$

(i), (ii), (iii), (iv)에 의하여 함수 $g(x)$의 함숫값이 될 수 있는 것은 -2, 0, 2

함수 $y=-4\left|\log_2\dfrac{x}{2}\right|+2$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수 $y=g(x)$의 그래프와 함수 $y=-4\left|\log_2\dfrac{x}{2}\right|+2$의 그래프의 교점의 y좌표는 -2, 0, 2만 가능하다.

방정식 $-4\left|\log_2\dfrac{x}{2}\right|+2=-2$의 해는

$x=1$ 또는 $x=4$

방정식 $-4\left|\log_2\dfrac{x}{2}\right|+2=0$의 해는

$x=\sqrt{2}$ 또는 $x=2\sqrt{2}$

방정식 $-4\left|\log_2\dfrac{x}{2}\right|+2=2$의 해는 $x=2$

함수 $g(x)$의 그래프와 함수 $y=-4\left|\log_2\dfrac{x}{2}\right|+2$의 그래프의 교점의 개수가 5이므로 교점은

$(1,\ -2)$, $(\sqrt{2},\ 0)$, $(2,\ 2)$, $(2\sqrt{2},\ 0)$, $(4,\ -2)$

이고 $g(1)=g(4)=-2$, $g(2)=2$, $f(1)=f(2)=f(4)=0$

$k\le 1$이면 $x\ge k$에서

$f(x)=f_2(x)=-\dfrac{1}{3}ax^2+(b+5)x+a^2-1$이므로

$f(1)=f(2)=f(4)=0$이 성립하지 않는다.

$k>4$이면 $x<k$에서

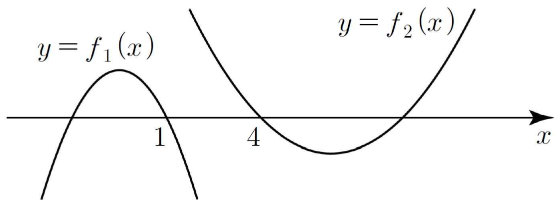
$f(x)=f_1(x)=ax^2+(2b-3)x+a^2-3$이므로

$f(1)=f(2)=f(4)=0$이 성립하지 않는다.

그러므로 $1<k\le 4$이고

$f(1)=f_1(1)$, $f(4)=f_2(4)$ …… ㉠

$a<0$이면 함수 $f_1(x)$의 그래프는 위로 볼록, 함수 $f_2(x)$의 그래프는 아래로 볼록이고 $g(1)=g(4)=-2$, $f_1(1)=f_2(4)=0$을 만족시키는 두 곡선 $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$의 개형은 다음과 같다.



이때, $f_1(2)\ne 0$이고 $f_2(2)\ne 0$이므로 $f(2)=0$이 성립하지 않는다.

그러므로 $a>0$

㉠에 의하여

$f(1)=f_1(1)=a+(2b-3)+a^2-3=0$

$f(4)=f_2(4)=-\dfrac{16}{3}a+(4b+20)+a^2-1=0$

에서 $a=-\dfrac{31}{3}$ 또는 $a=3$

$a>0$이므로 $a=3$, $b=-3$

$$f(x)=\begin{cases}3x^2-9x+6 & (x<k)\\ -x^2+2x+8 & (x\ge k)\end{cases}$$

조건 (가)에 의하여

$\lim\limits_{x\to k-}f(x)=\lim\limits_{x\to k+}f(x)$

$\lim\limits_{x\to k-}(3x^2-9x+6)=\lim\limits_{x\to k+}(-x^2+2x+8)$

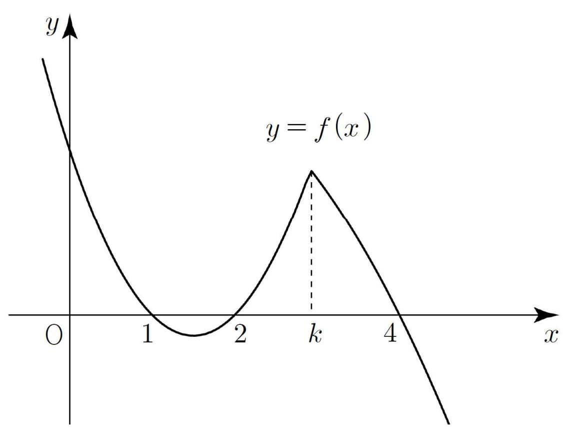
$4k^2-11k-2=0$, $k=\dfrac{11\pm3\sqrt{17}}{8}$

$1<k\le 4$이므로 $k=\dfrac{11+3\sqrt{17}}{8}$

따라서 $p=\dfrac{11}{8}$, $q=\dfrac{3}{8}$이므로 $16(p+q)=16\times\dfrac{14}{8}=28$

[참고]

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



50) [정답] 226

[해설]

조건 (가)에 의하여

$\lim_{x\to 0}|f(x)-1|=0$

이므로 삼차식 $f(x)-1$은 x를 인수로 갖는다.

이차식 $g(x)$에 대하여 $f(x)-1=xg(x)$라 하자.

$$\lim_{x\to 0+}\frac{|f(x)-1|}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{|xg(x)|}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0+}\frac{|x||g(x)|}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0+}|g(x)|=|g(0)|$$
$$\lim_{x\to 0-}\frac{|f(x)-1|}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{|xg(x)|}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0-}\frac{|x||g(x)|}{x}$$
$$=-\lim_{x\to 0-}|g(x)|=-|g(0)|$$

$|g(0)|=-|g(0)|$에서 $g(0)=0$

이차식 $g(x)$도 x를 인수로 가지므로

$f(x)-1=x^2(x+a)$ (a는 실수)라 하면

$f(x)=x^3+ax^2+1$

$xf(x)\ge -4x^2+x$에서

$x(x^3+ax^2+1)\ge -4x^2+x$

$x^4+ax^3+4x^2\ge 0$

$x^2(x^2+ax+4)\ge 0$

$x^2\ge 0$이므로 모든 실수 x에 대하여

$x^2+ax+4\ge 0$이 성립한다.

이차방정식 $x^2+ax+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-16\le 0$

$-4\le a\le 4$

$f(5)=25a+126$이므로 구하는 $f(5)$의 최댓값은

$a=4$일 때 226이다.

51) [정답] ④

[해설]

함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 함수가 $g(x)$이므로

$g(x)=f(-x)$ …… ㉠

조건 (가)에서 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}$의 극한값이 존재하고

(분모)→0이므로 (분자)→0이어야 한다.

따라서 $\lim_{x\to 1}f(x)=0$

함수 $f(x)$는 다항함수이므로 $f(1)=0$ …… ㉡

$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{(x-3)g(x)}=k$에서 $k\neq 0$이므로 $f(3)=0$ …… ㉢

$\lim_{x\to -3+}\frac{1}{g'(x)}=\infty$에서 $\lim_{x\to -3+}g'(x)=0$이므로

$\lim_{x\to 3-}f'(x)=0$ 즉, $f'(3)=0$ …… ㉣

㉡, ㉢, ㉣에서 $f(x)=(x-1)(x-3)^2Q(x)$라 할 수 있다.

$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{(x-3)g(x)}=k$에 대입하면

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-1)(x-3)^2Q(x)}{(x-3)(-x-1)(-x-3)^2Q(-x)}=k$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-1)(x-3)Q(x)}{(x+1)(x+3)^2Q(-x)}=k \quad\cdots\cdots ㉤$$

그런데 $k\neq 0$이므로 분모가 $(x-3)$이라는 인수를 가지고 있어야 한다. 따라서 $Q(-x)=(x-3)q_1(x)$

즉, $Q(x)=(x+3)q_2(x)$이어야 한다.

따라서 $f(x)=(x-1)(x-3)^2(x+3)q(x)$라 할 수 있다.

따라서 $f(x)$의 차수의 최솟값 m은 $q(x)$가 상수일 때이므로 $m=4$

㉤에 대입하면

$$\lim_{x\to 3}\frac{a(x-1)(x-3)(x+3)}{a(x+1)(x+3)^2(x-3)}=k$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-1)}{(x+1)(x+3)}=k$$

$\therefore k=\frac{1}{12}$

$\therefore m+k=4+\frac{1}{12}=\frac{49}{12}$

52) [정답] 4

[해설]

함수 $f(x)$는 $x=2m$을 제외한 모든 실수에서 극한값을 가지므로

$\lim_{x\to 2m-}f(x)\neq\lim_{x\to 2m+}f(x)$ ……㉠

조건 (가)에서 $\alpha=2m$

$\lim_{x\to 2m}g(x)$의 값이 존재한다고 가정하면

조건 (나)에 의하여

$$\lim_{x\to 2m}f(x)=\lim_{x\to 2m}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\times g(x)\right\}$$
$$=\lim_{x\to 2m}\frac{f(x)}{g(x)}\times\lim_{x\to 2m}g(x)$$

$\lim_{x\to 2m}f(x)$의 값이 존재하므로

㉠을 만족시키지 않는다.

따라서 $\lim_{x\to 2m}g(x)$의 값은 존재하지 않는다.

조건 (가)에 의하여 $\beta=2m$

함수 $g(x)$는 $x=m+1$을 제외한 모든 실수에서

극한값을 가지므로 $2m=m+1$, $m=1$

$\lim_{x\to1}g(x)=\lim_{x\to1}(ax-a)=0$이고 조건 (나)에서

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}$의 값이 존재하므로

$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\{x^2+(a-1)x-a^2+2\}$

$=-a^2+a+2=-(a+1)(a-2)=0$

$a=-1$ 또는 $a=2$

(i) $a=-1$인 경우

$\lim_{x\to2-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to2-}\frac{x^2-2x+1}{-x+1}=-1$

$\lim_{x\to2+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to2+}\frac{-3x-4}{x+2}=-\frac{5}{2}$

$\lim_{x\to2-}\frac{f(x)}{g(x)}\neq\lim_{x\to2+}\frac{f(x)}{g(x)}$이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $a=2$인 경우

$\lim_{x\to2-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to2-}\frac{x^2+x-2}{2x-2}=2$

$\lim_{x\to2+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to2+}\frac{-3x+8}{x-1}=2$

$\lim_{x\to2-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to2+}\frac{f(x)}{g(x)}$이므로

조건 (나)를 만족시킨다.

(i), (ii) 에 의하여 $a=2$, $m=2-1=1$

$f(x)=\begin{cases}x^2+x-2 & (x\le2)\\ -3x+8 & (x>2)\end{cases}$

$g(x)=\begin{cases}2x-2 & (x\le2)\\ x-1 & (x>2)\end{cases}$

따라서 $m+g(a^2)=1+g(4)=1+3=4$

53) [정답] ②

[해설]

직선 l이 정사각형 OABC의 넓이를 이등분하므로 점 $(-1, 1)$을 지난다. 직선 l의 기울기를 m이라 하면 직선 l의 방정식은 $y=m(x+1)+1$, 즉 $y=mx+m+1$

직선 l과 y축이 만나는 점을 D라 하면 점 D의 좌표는 $D(0, m+1)$ 직선 l과 선분 AP가 만나는 점을 E라 하자.

직선 AP의 방정식이 $y=-\frac{2}{t}x+2$이므로

$mx+m+1=-\frac{2}{t}x+2$에서 $x=\frac{(1-m)t}{mt+2}$

그러므로 점 E의 x좌표는 $\frac{(1-m)t}{mt+2}$이다.

삼각형 ADE의 넓이가 삼각형 AOP의 넓이의 $\frac{1}{2}$이므로

$\frac{1}{2}\times(1-m)\times\frac{(1-m)t}{mt+2}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\times2\times t\right)$

$t\neq0$이므로 $(1-m)^2=mt+2$

$m^2-(2+t)m-1=0$

$m=\frac{t+2\pm\sqrt{(t+2)^2-4\times(-1)}}{2}$

$=\frac{t+2\pm\sqrt{t^2+4t+8}}{2}$

직선 l의 y절편이 $m+1$이고 $0<m+1<2$이므로

$f(t)=m+1=\frac{t+4-\sqrt{t^2+4t+8}}{2}$

따라서

$\lim_{t\to0+}f(t)=\lim_{t\to0+}\frac{t+4-\sqrt{t^2+4t+8}}{2}$

$=\frac{4-2\sqrt{2}}{9}=2-\sqrt{2}$

54) [정답] 6

[해설]

최고차항의 계수가 1이고 두 점 $A(-2, 0)$, $P(t, t+2)$를 지나는 이차함수 $f(x)$는 $f(x)=(x+2)(x-t+1)$

그러므로 점 Q의 좌표는 $Q(0, 2-2t)$

$\overline{AP}=\sqrt{\{t-(-2)\}^2+(t+2-0)^2}=|t+2|\sqrt{2}$,

$\overline{AQ}=\sqrt{\{0-(-2)\}^2+\{(2-2t)-0\}^2}=2\sqrt{t^2-2t+2}$

$\lim_{t\to\infty}(\sqrt{2}\times\overline{AP}-\overline{AQ})=\lim_{t\to\infty}\left(2|t+2|-2\sqrt{t^2-2t+2}\right)$

$=2\lim_{t\to\infty}\frac{|t+2|^2-(t^2-2t+2)}{|t+2|+\sqrt{t^2-2t+2}}$

$=2\lim_{t\to\infty}\frac{6t+2}{|t+2|+\sqrt{t^2-2t+2}}$

$=2\lim_{t\to\infty}\frac{6+\frac{2}{t}}{\left|1+\frac{2}{t}\right|+\sqrt{1-\frac{2}{t}+\frac{2}{t^2}}}$

$=2\times\frac{6+0}{1+1}$

$=6$

55) [정답] ④

[해설]

삼각형 PHO는 직각삼각형이므로

$P(t, \sqrt{t})$이므로 $\overline{OP}^2=t^2+t$

선분 PH의 길이는

점 P와 직선 $x-2y=0$사이의 거리와 같으므로

$\overline{\mathrm{PH}}=\dfrac{|t-2\sqrt{t}|}{\sqrt{5}}$

$\overline{\mathrm{OH}}^2=t^2+t-\dfrac{(t-2\sqrt{t})^2}{5}=\dfrac{4t^2+4t\sqrt{t}+t}{5}$

따라서 $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\overline{\mathrm{OH}}^2}{\overline{\mathrm{OP}}^2}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{4t^2+4t\sqrt{t}+t}{5(t^2+t)}$

$=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{4+\dfrac{4\sqrt{t}}{t}+\dfrac{1}{t}}{5+\dfrac{5}{t}}=\dfrac{4}{5}$

56) [정답] 15

[해설]

$y=x^2$과 $y=tx$를 연립하여 정리하면 $x(x-t)=0$이고 $x>0$이므로 $x=t$

그러므로 점 Q의 좌표는 Q(t, t^2)

원점을 O라 하면 $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{OQ}}=t\sqrt{1+t^2}$ 이므로

$$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{OP}}-\overline{\mathrm{OQ}}=\sqrt{2}-t\sqrt{1+t^2}$$

$x^2+y^2=2$와 $y=x^2$을 연립하여 정리하면 $(y+2)(y-1)=0$이고 $y>0$이므로 $y=1$

$x^2=1$에서 $x>0$이므로 $x=1$

그러므로 점 A의 좌표는 A$(1,\ 1)$

점 A에서 직선 $y=tx$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $0<t<1$이므로

$$\overline{\mathrm{AH}}=\frac{|t-1|}{\sqrt{t^2+1}}=\frac{1-t}{\sqrt{t^2+1}}$$

삼각형 PAQ의 넓이 $S(t)$는

$$S(t)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{AH}}$$
$$=\frac{1}{2}\times\left(\sqrt{2}-t\sqrt{1+t^2}\right)\times\frac{1-t}{\sqrt{1+t^2}}$$

이므로

$$k=\lim_{t\to1-}\frac{S(t)}{(1-t)^2}$$
$$=\lim_{t\to1-}\frac{\sqrt{2}-t\sqrt{1+t^2}}{2(1-t)\sqrt{1+t^2}}$$
$$=\lim_{t\to1-}\frac{2-t^2(1+t^2)}{2(1-t)\sqrt{1+t^2}\left(\sqrt{2}+t\sqrt{1+t^2}\right)}$$
$$=\lim_{t\to1-}\frac{(t^2+2)(1-t^2)}{2(1-t)\sqrt{1+t^2}\left(\sqrt{2}+t\sqrt{1+t^2}\right)}$$
$$=\lim_{t\to1-}\frac{(t^2+2)(1+t)}{2\sqrt{1+t^2}\left(\sqrt{2}+t\sqrt{1+t^2}\right)}$$
$$=\frac{3\times2}{2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)}=\frac{3}{4}$$

따라서 $20k=20\times\dfrac{3}{4}=15$

57) [정답] ④

[해설]

네 점 A, B, C, D의 좌표는 각각

A$(\sqrt{2t},\ 2t)$, B$(\sqrt{2},\ 2t)$, C$(\sqrt{t+1},\ t+1)$,

D$\left(\sqrt{\dfrac{t+1}{t}},\ t+1\right)$

이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}-\sqrt{2t}=\sqrt{2}(1-\sqrt{t})$

$\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{\dfrac{t+1}{t}}-\sqrt{t+1}=\sqrt{\dfrac{t+1}{t}}(1-\sqrt{t})$

점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{CH}}=(t+1)-2t=1-t$이므로

$S(t)=\dfrac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{CD}})\times\overline{\mathrm{CH}}$

$\quad=\dfrac{1}{2}\left\{\sqrt{2}(1-\sqrt{t})+\sqrt{\dfrac{t+1}{t}}(1-\sqrt{t})\right\}(1-t)$

$\quad=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{\dfrac{t+1}{t}}\right)(1-\sqrt{t})(1-t)$

따라서

$\lim\limits_{t\to1-}\dfrac{S(t)}{(1-t)^2}=\lim\limits_{t\to1-}\dfrac{1}{2(1+\sqrt{t})}\left(\sqrt{2}+\sqrt{\dfrac{t+1}{t}}\right)$

$\quad=\dfrac{1}{4}\times2\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

58) [정답] ②

[해설]

직선 $y=x+t$와 곡선 $y=x^2$의 두 교점의 x좌표를 각각 α, $\beta(\beta<0<\alpha)$라 하면 $x^2=x+t$,

즉 $x^2-x-t=0$의 두 근이 α, β이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에서

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-t$ ……㉠

점 H의 x좌표는 β, 점 C의 x좌표는 $-\alpha$이므로

$\overline{\mathrm{AH}}=\alpha-\beta$, $\overline{\mathrm{CH}}=\beta+\alpha$

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=1+4t$에서 $\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{4t+1}$,

$\overline{\mathrm{CH}}=\alpha+\beta=1$이므로

$\therefore \lim_{t\to0+}\frac{\overline{AH}-\overline{CH}}{t}=\lim_{t\to0+}\frac{\sqrt{1+4t}-1}{t}$

$=\lim_{t\to0+}\frac{(\sqrt{1+4t}-1)(\sqrt{1+4t}+1)}{t(\sqrt{1+4t}+1)}$

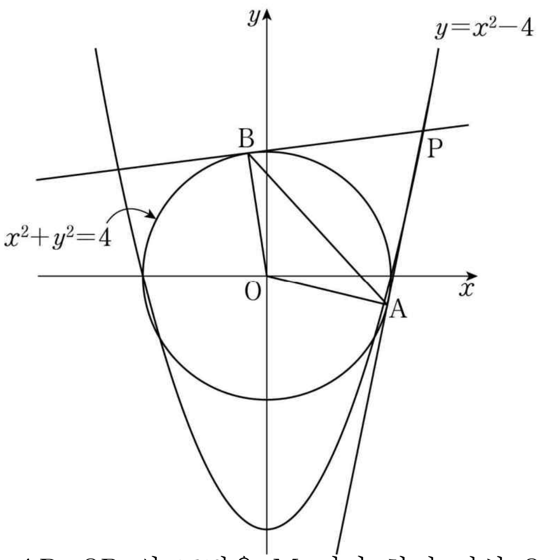
$=\lim_{t\to0+}\frac{1+4t-1}{t(\sqrt{1+4t}+1)}$

$=\lim_{t\to0+}\frac{4}{\sqrt{1+4t}+1}$

$=2$

59) [정답] ②

[해설]



두 선분 AB, OP 의 교점을 M 이라 하면 직선 OP는 선분 AB를 수직이등분하므로 직각삼각형 OAP와 직각삼각형 OMA는 서로 닮음이다.

삼각형 OAP와 삼각형 OMA의 닮음비는 $\overline{OP}:\overline{OA}$이므로 넓이의 비는 $\overline{OP}^2:\overline{OA}^2$이다.

삼각형 OAP의 넓이는 $\frac{S(t)+T(t)}{2}$,

삼각형 OMA의 넓이는 $\frac{S(t)}{2}$이므로

$\overline{OP}^2:\overline{OA}^2=\frac{S(t)+T(t)}{2}:\frac{S(t)}{2}$

$\overline{OA}^2\times\frac{S(t)+T(t)}{2}=\overline{OP}^2\times\frac{S(t)}{2}$,

$\frac{T(t)}{S(t)}=\frac{\overline{OP}^2-\overline{OA}^2}{\overline{OA}^2}$

$\overline{OA}=2$, $\overline{OP}=\sqrt{t^2+(t^2-4)^2}$ 이므로

$\frac{T(t)}{S(t)}=\frac{t^2+(t^2-4)^2-2^2}{2^2}=\frac{1}{4}(t+2)(t-2)(t^2-3)$

따라서

$\lim_{t\to2+}\frac{T(t)}{(t-2)S(t)}+\lim_{t\to\infty}\frac{T(t)}{(t^4-2)S(t)}$

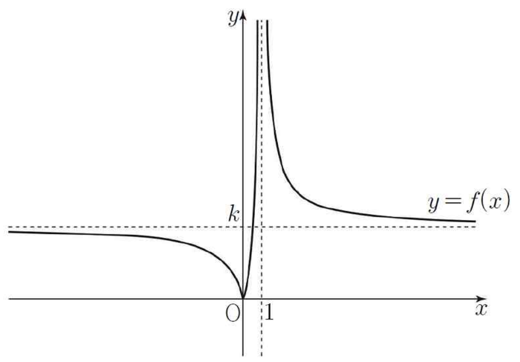
$=\lim_{t\to2+}\frac{(t+2)(t^2-3)}{4}+\lim_{t\to\infty}\frac{(t+2)(t-2)(t^2-3)}{4(t^4-2)}$

$=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$

60) [정답] ①

[해설]

$f(x)=\left|\frac{kx}{x-1}\right|=\left|\frac{k}{x-1}+k\right|$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



(ⅰ) $t<0$일 때
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$는 만나지 않으므로
$g(t)=0$

(ⅱ) $t=0$ 또는 $t=k$일 때
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$는 한 점에서 만나므로
$g(t)=1$

(ⅲ) $0<t<k$ 또는 $t>k$일 때
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$는 두 점에서 만나므로
$g(t)=2$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의해 함수 $g(t)$는

$$g(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 1 & (t=0 \text{ 또는 } t=k)\\ 2 & (0<t<k \text{ 또는 } t>k)\end{cases}$$

$\lim_{t\to0+}g(t)=2$이고, 모든 양수 a에 대하여 $\lim_{t\to a-}g(t)=2$이므로

$\lim_{t\to2-}g(t)=2$

$\lim_{t\to0+}g(t)+\lim_{t\to2-}g(t)+g(4)=5$에서 $g(4)=1$이므로

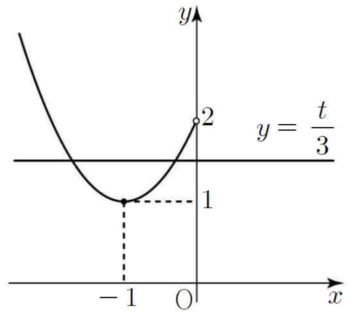
$k=4$

따라서 $f(3)=\left|\frac{4\times3}{3-1}\right|=6$

61) [정답] 141

[해설]

(i) 함수 $y=f(x)(x<0)$의 그래프와 직선 $y=\frac{t}{3}$가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $r(t)$라 하면



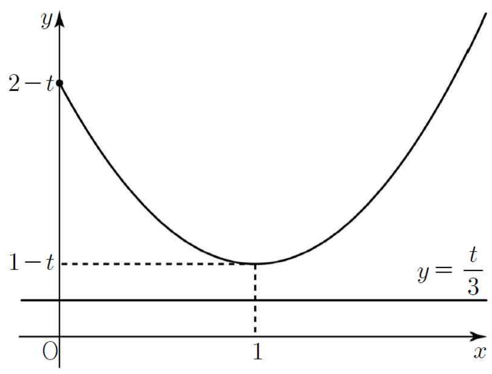
$$r(t)=\begin{cases}0 & (t<3)\\1 & (t=3)\\2 & (3<t<6)\\1 & (t\geq 6)\end{cases}$$

(ii) 함수 $y=|f(-x)-t|(x\geq 0)$의 그래프와 직선 $y=\frac{t}{3}$가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $s(t)$라 하자.

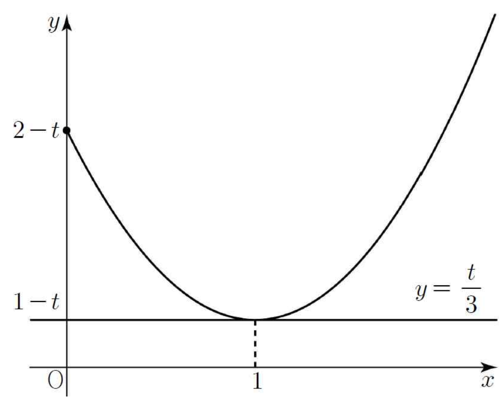
$$\begin{aligned}f(-x)-t&=x^2-2x+2-t\\&=(x-1)^2+1-t\end{aligned}$$

함수 $y=f(-x)-t$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(1,\ 1-t)$, y축과 만나는 점의 y좌표는 $2-t$

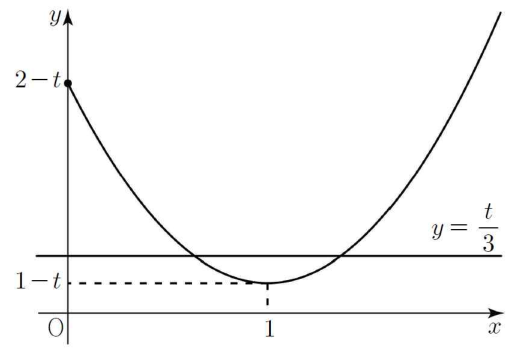
(1) $1-t>\frac{t}{3}\left(t<\frac{3}{4}\right)$일 때, $s(t)=0$

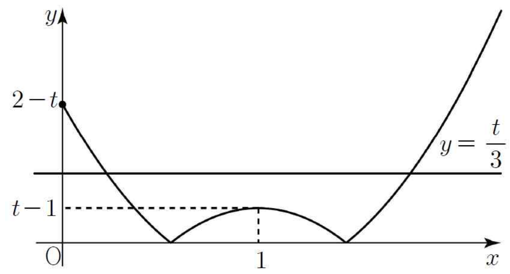


(2) $1-t=\frac{t}{3}\left(t=\frac{3}{4}\right)$일 때, $s(t)=1$

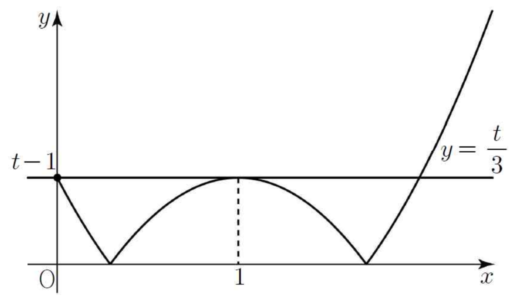


(3) $|1-t|<\frac{t}{3}<2-t\left(\frac{3}{4}<t<\frac{3}{2}\right)$일 때, $s(t)=2$

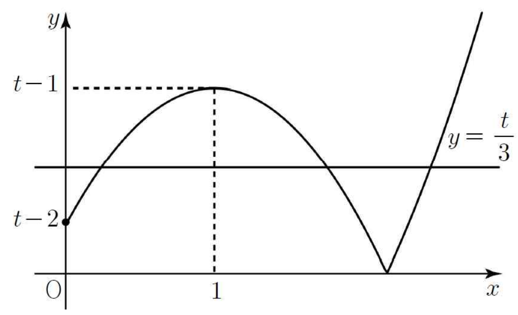




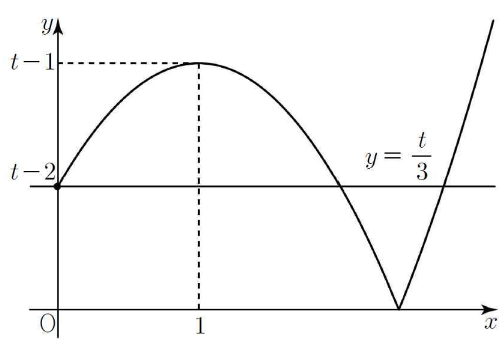
(4) $t-1=\frac{t}{3}=2-t\left(t=\frac{3}{2}\right)$일 때, $s(t)=3$



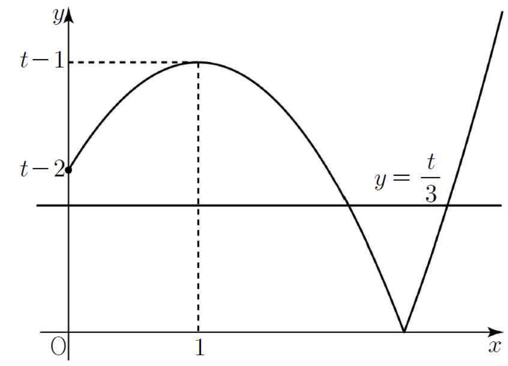
(5) $t-2<\frac{t}{3}<t-1\left(\frac{3}{2}<t<3\right)$일 때, $s(t)=3$



(6) $\frac{t}{3}=t-2(t=3)$일 때, $s(t)=3$



(7) $\frac{t}{3}<t-2(t>3)$일 때, $s(t)=2$

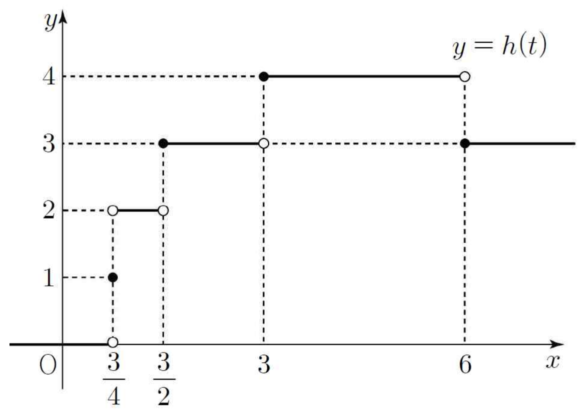


$$s(t)=\begin{cases} 0 & \left(t<\frac{3}{4}\right) \\ 1 & \left(t=\frac{3}{4}\right) \\ 2 & \left(\frac{3}{4}<t<\frac{3}{2}\right) \\ 3 & \left(\frac{3}{2}\le t\le 3\right) \\ 2 & (t>3) \end{cases}$$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{t}{3}$가 만나는 서로 다른 점의 개수 $h(t)=r(t)+s(t)$

$$h(t)=\begin{cases} 0 & \left(t<\frac{3}{4}\right) \\ 1 & \left(t=\frac{3}{4}\right) \\ 2 & \left(\frac{3}{4}<t<\frac{3}{2}\right) \\ 3 & \left(\frac{3}{2}\le t<3\right) \\ 4 & (3\le t<6) \\ 3 & (t\ge 6) \end{cases}$$



$\lim\limits_{t\to\alpha-}h(t)\neq\lim\limits_{t\to\alpha+}h(t)$인 α를 작은 수부터 크기순으로 나열하면

$\alpha_1=\frac{3}{4}$, $\alpha_2=\frac{3}{2}$, $\alpha_3=3$, $\alpha_4=6$이고

$h(\alpha_1)=1$, $h(\alpha_2)=3$, $h(\alpha_3)=4$, $h(\alpha_4)=3$

따라서

$$\sum_{k=1}^{m}\{4\alpha_k\times h(\alpha_k)\}$$
$$=4\times\left(\frac{3}{4}\times1+\frac{3}{2}\times3+3\times4+6\times3\right)$$
$$=141$$

62) [정답] 6

[해설]

$\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2+ax+4a}{x-a}$가 존재한다.

따라서 $a^2+a^2+4a=0$, 즉 $a=0$ 또는 $a=-2$

$a=0$이면 $f(0)=-10$, $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2+ax+4a}{x-a}=0$

이므로 연속이 아니다. 따라서 $a=-2$

$f(2a)=f(-4)=16-10=6$

63) [정답] ⑤

[해설]

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to1-}(-2x+1)=\lim\limits_{x\to1+}(x^2-ax+4)=f(1)$

$-1=5-a$

따라서 $a=6$

64) [정답] **6**

[해설]

$$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(-3x+a)$$
$$=-3+a \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)=\lim\limits_{x\to1+}\frac{x+b}{\sqrt{x+3}-2}$에서 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $1+b=0 \quad \therefore b=-1$

준식에 대입하면

$$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(x+3)-4}$$
$$=\lim_{x\to1+}(\sqrt{x+3}+2)$$
$$=2+2=4 \quad \cdots\cdots ㉡$$

$$f(1)=-3+a \quad \cdots\cdots ㉢$$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이어야 하므로 ㉠, ㉡에서

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)=\lim\limits_{x\to1+}f(x)=f(1)$를 만족해야 한다.

따라서 $-3+a=4$이므로 $a=7$

$\therefore a+b=7+(-1)=6$

65) [정답] ④

[해설]
함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$\lim_{x\to-1-} f(x)=\lim_{x\to-1+} f(x)=f(-1)$$

이 성립해야 한다. 이때,

$$\lim_{x\to-1-} f(x)=\lim_{x\to-1-}(2x+a)=-2+a$$

$$\lim_{x\to-1+} f(x)=\lim_{x\to-1+}(x^2-5x-a)=6-a$$

$$f(-1)=-2+a$$

이므로 $-2+a=6-a$

따라서 $a=4$

66) [정답] ①

[해설]

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$f(2)=\lim_{x\to2+} f(x)=\lim_{x\to2-} f(x)$

$f(2)=\lim_{x\to2+} f(x)=b-4$이므로

$$\lim_{x\to2-} f(x)=\lim_{x\to2-}\frac{x^2+3x+a}{x-2}=b-4$$

$\lim_{x\to2-}(x-2)=0$이므로 $\lim_{x\to2-}(x^2+3x+a)=0$

$a+10=0$에서 $a=-10$

$$\lim_{x\to2-}\frac{x^2+3x-10}{x-2}=\lim_{x\to2-}\frac{(x-2)(x+5)}{x-2}=7\text{이므로}$$

$b-4=7$, $b=11$

따라서 $a+b=-10+11=1$

67) [정답] ⑤

[해설]

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=3$에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x\to3-} f(x)=\lim_{x\to3+} f(x)=f(3)$

$\lim_{x\to3-}\dfrac{x^2+ax+b}{x-3}$의 값이 존재하고, $x\to3-$ 일 때

(분모)$\to0$ 이므로 (분자)$\to0$ 이다.

즉, $\lim_{x\to3-}(x^2+ax+b)=0$ 이므로

$9+3a+b=0$, $b=-3a-9$

$$\lim_{x\to3-}\frac{x^2+ax-3a-9}{x-3}=\lim_{x\to3-}\frac{(x-3)(x+3+a)}{x-3}$$

$=\lim_{x\to3-}(x+3+a)$

$=6+a$

한편, $\lim_{x\to3+} f(x)=f(3)=7$

그러므로 $6+a=7$

따라서 $a=1$, $b=-12$ 이므로 $a-b=13$

68) [정답] ④

[해설]

$|a-4|=|a+3|$, $a^2-8a+16=a^2+6a+9$

$14a=7$, $\therefore a=\dfrac{1}{2}$

69) [정답] ③

[해설]
함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to2-}(x-1)=\lim_{x\to2+}(x^2-ax+3)=f(2)$

$1=7-2a$

따라서 $a=3$

70) [정답] ①

[해설]

$f(x)=\begin{cases}-2x+a & (x\le a)\\ ax-6 & (x>a)\end{cases}$에서

$x=a$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to a+} f(x)=\lim_{x\to a-} f(x)=f(a)$이어야 한다.

$\lim_{x\to a+}(ax-6)=\lim_{x\to a-}(-2x+a)=-a$

$a^2-6=-a$, $(a+3)(a-2)=0$

$a=-3$ 또는 $a=2$이므로 모든 a의 값의 합은 -1이다.

71) [정답] ⑤

[해설]

함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=-1$, $x=3$에서도 연속이어야 한다.

(i) 함수 $|f(x)|$가 $x=-1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to -1-}|f(x)|=\lim_{x\to -1+}|f(x)|=|f(-1)|$$

이어야 한다. 이때

$$\lim_{x\to -1-}|f(x)|=\lim_{x\to -1-}|x+a|=|-1+a|$$

$$\lim_{x\to -1+}|f(x)|=\lim_{x\to -1+}|x|=1$$

$$|f(-1)|=|-1|=1$$

이므로

$$|-1+a|=1$$

$a>0$이므로 $\quad a=2$

(ii) 함수 $|f(x)|$가 $x=3$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 3-}|f(x)|=\lim_{x\to 3+}|f(x)|=|f(3)|$$

이어야 한다. 이때

$$\lim_{x\to 3-}|f(x)|=\lim_{x\to 3-}|x|=3,$$

$$\lim_{x\to 3+}|f(x)|=\lim_{x\to 3+}|bx-2|=|3b-2|$$

$$|f(3)|=|3b-2|$$

이므로

$$|3b-2|=3$$

$b>0$이므로 $\quad b=\dfrac{5}{3}$

(i), (ii)에 의하여

$$a+b=2+\frac{5}{3}=\frac{11}{3}$$

72) [정답] ②

[해설]

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서 연속이다.

$$\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$$

$a+3=5,\ a=2$

73) [정답] ②

[해설]

$x\neq 1$일 때 $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}=\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-1}=x-2$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$$f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}(x-2)=-1$$

74) [정답] ④

[해설]

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

조건 (가)와 (나)에서

$f(4)=\lim_{x\to 4-}f(x)=16a+4b-24$이고

$f(0)=f(4)$이므로 $-24=16a+4b-24$에서

$b=-4a \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$0\le x<4$에서 $f(x)=a(x-2)^2-4a-24$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=f(x)$이므로

$1<x<2$일 때 방정식 $f(x)=0$이 실근을 갖지 않으면

$1<x<10$일 때 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 4 이하이다.

$1<x<2$일 때 방정식 $f(x)=0$이 실근을 1개 가지면

$1<x<10$일 때 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 5이다.

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1,2]$에서 연속이므로

$$\begin{aligned}f(1)f(2)&=(-3a-24)(-4a-24)\\&=12(a+8)(a+6)<0\end{aligned}$$

$-8<a<-6$이고 a는 정수이므로 $a=-7$

㉠에 의하여 $b=28$

따라서 $a+b=-7+28=21$

75) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. $\lim_{x\to 1-}f(x)=0,\ \lim_{x\to 1-}g(x)=-1$이므로

$$\lim_{x\to 1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to 1-}f(x)\times\lim_{x\to 1-}g(x)=0\times(-1)=0$$

(거짓)

ㄴ. $f(1)=0,\ g(1)=-1$이므로 $f(1)g(1)=0\times(-1)=0$

(참)

ㄷ. $\lim_{x\to 1+}f(x)=1,\ \lim_{x\to 1+}g(x)=1$이므로

$$\lim_{x\to 1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to 1+}f(x)\times\lim_{x\to 1+}g(x)=1\times 1=1$$

$\lim_{x\to 1-}f(x)g(x)=0$에서

$\lim_{x\to 1+}f(x)g(x)\neq\lim_{x\to 1-}f(x)g(x)$이므로

극한값 $\lim_{x\to 1}f(x)g(x)$는 존재하지 않는다.

그러므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

(참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ

76) [정답] ②

[해설]

함수 $(x^2+ax+b)f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to1-}(x^2+ax+b)f(x)=\lim_{x\to1+}(x^2+ax+b)f(x)$$

그래프에서 $\lim_{x\to1-}f(x)=1$, $\lim_{x\to1+}f(x)=3$이므로

$$\lim_{x\to1-}(x^2+ax+b)f(x)=(1+a+b)\times1=1+a+b,$$

$$\lim_{x\to1+}(x^2+ax+b)f(x)=(1+a+b)\times3=3(1+a+b)$$

에서 $1+a+b=3(1+a+b)$

따라서 $a+b=-1$

77) [정답] ①

[해설]

$f(x)=\begin{cases}x^2-5a & (x<a)\\ -2x+4 & (x\ge a)\end{cases}$에서

$$\lim_{x\to a+}f(-x)f(x)=\{(-a)^2-5a\}\times(-2a+4)$$

$$\lim_{x\to a-}f(-x)f(x)=\{(-a)^2-5a\}\times(a^2-5a)$$

따라서 $a^2-5a=0$이거나 $-2a+4=a^2-5a$이므로

$a=4$ 또는 $a=5$($\because\ a>0$)

따라서 모든 a의 값의 합은 9

78) [정답] ③

[해설]

$\{f(x)\}^3-\{f(x)\}^2-x^2f(x)+x^2=0$에서

$\{f(x)-1\}\{f(x)+x\}\{f(x)-x\}=0$

이므로

$f(x)=1$, $f(x)=-x$, $f(x)=x$

이때, $f(0)=1$ 또는 $f(0)=0$이다.

(i) $f(0)=1$일 때,

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고, 최댓값이 1이므로

$f(x)=1$

이다. 이때, 함수 $f(x)$의 최솟값이 0이 아니므로 주어진 조건을 만족시키지 못한다.

(ii) $f(0)=0$일 때,

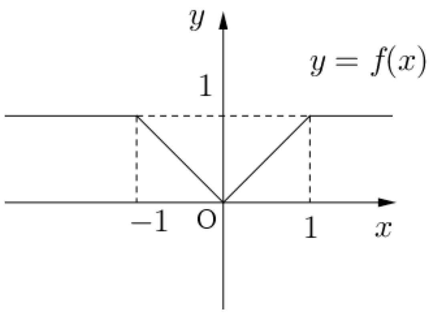
함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고, 최댓값이 1이므로

$f(x)=\begin{cases}|x| & (|x|\le1)\\ 1 & (|x|>1)\end{cases}$

이다.

(i), (ii)에서

$f(x)=\begin{cases}|x| & (|x|\le1)\\ 1 & (|x|>1)\end{cases}$



따라서

$f\left(-\frac{4}{3}\right)=1$, $f(0)=0$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

이므로

$$f\left(-\frac{4}{3}\right)+f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)=1+0+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

79) [정답] ①

[해설]

$g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면 $f(x)$는 $x-1$을 인수로 가지고 나머지는 허근이 존재해야 한다.

따라서 $f(x)=(x-1)(x^2+3x+a)$에서 $x^2+3x+a=0$의 판별식 $D<0$이어야 한다.

즉, $D=9-4a<0$이므로 $a>\frac{9}{4}$ …… ㉠

$f(x)=0$일 때 연속이어야 하므로 $\lim_{x\to1}\frac{x-1}{f(x)}=\frac{1}{n}$

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{f(x)}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x^2+3x+a)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2+3x+a}$$
$$=\frac{1}{4+a}$$

즉, $\frac{1}{4+a}=\frac{1}{n}$이므로 $4+a=n$

$\therefore a=n-4$

㉠에 대입하면 $n-4>\frac{9}{4}$이므로 $n>\frac{25}{4}$

따라서 자연수 n의 최솟값은 7

80) [정답] 13

[해설]

조건 (가)에서

$$f(x)=f(1)+(x-1)f'(g(x))$$

이므로 $x\neq 1$일 때,

$$f'(g(x))=\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때, 두 점 $(1,\ f(1))$, $(x,\ f(x))$를 지나는 직선의 기울기가 $f'(g(x))$이고, 조건 (나)에서 $g(x)\geq\frac{5}{2}$이므로 두 점 $(1,\ f(1))$, $\left(\frac{5}{2},\ f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$를 지나는 직선은 점 $\left(\frac{5}{2},\ f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$에서 접하는 직선이다.

두 점 $(1,\ f(1))$, $\left(\frac{5}{2},\ f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$를 지나는 직선의 방정식을 $y=mx+n$이라 하면

$$f(x)=(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+mx+n \quad \cdots\cdots ㉡$$

조건 (다)에서 $f(0)=-3$이므로

$$f(0)=-\frac{25}{4}+n=-3, \qquad n=\frac{13}{4}$$

㉠에서

$$\lim_{x\to 1}f'(g(x))=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$f'(g(1))=f'(1) \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+2(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)+m$$

$$=3x^2-12x+m+\frac{45}{4}$$

㉢에서 $g(1)\geq\frac{5}{2}$ 이므로 $\quad g(1)\neq 1$

따라서 함수 $y=f'(x)$의 그래프의 대칭축이 $x=2$이므로

$\frac{g(1)+1}{2}=2$에서 $\quad g(1)=3$

조건 (다)에서 $f(3)=6$이므로 ㉡에 대입하면

$$f(3)=\frac{1}{2}+3m+\frac{13}{4}=6, \qquad m=\frac{3}{4}$$

따라서 $f(x)=(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x+\frac{13}{4}$ 이므로

$$f(4)=13$$

[다른 풀이]

최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=-3$이므로

$$f(x)=x^3+ax^2+bx-3$$

이라 하면 $\quad f'(x)=3x^2+2ax+b$

조건 (가)에서

$$f(x)=f(1)+(x-1)f'(g(x))$$

이므로 $x\neq 1$일 때,

$$f'(g(x))=\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때, 두 점 $(1,\ f(1))$, $(x,\ f(x))$를 지나는 직선의 기울기가 $f'(g(x))$이고, 조건 (나)에서 $g(x)\geq\frac{5}{2}$이므로 두 점 $(1,\ f(1))$, $\left(\frac{5}{2},\ f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$를 지나는 직선은 점 $\left(\frac{5}{2},\ f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$에서 접하는 직선이다.

그러므로 직선 $y-f\left(\frac{5}{2}\right)=f'\left(\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)$는 점 $(1,\ f(1))$을 지난다. 즉,

$$1+a+b-3-\left\{\left(\frac{5}{2}\right)^3+a\left(\frac{5}{2}\right)^2+b\left(\frac{5}{2}\right)-3\right\}$$

$$=\left\{3\times\left(\frac{5}{2}\right)^2+5a+b\right\}\left(1-\frac{5}{2}\right)$$

이 식을 정리하면

$$-\frac{117}{8}-\frac{21}{4}a-\frac{3}{2}b=\left(\frac{75}{4}+5a+b\right)\left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$\frac{9}{4}a=-\frac{108}{8}$$

$$a=-6$$

따라서 $f(x)=x^3-6x^2+bx-3$이고,

$f'(x)=3x^2-12x+b$이다.

한편, ㉠에서

$$\lim_{x\to 1}f'(g(x))=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

이때, $g(x)$는 연속함수이므로 $g(1)=k$라 하면 좌변은

$$\lim_{x\to 1}f'(g(x))=\lim_{x\to 1}\{3\{g(x)\}^2-12g(x)+b\}$$

$$=3k^2-12k+b \quad \cdots\cdots ㉡$$

또, 우변은

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=3-12+b=b-9 \cdots\cdots ㉢$$

㉡, ㉢에서

$$3k^2-12k+b=b-9$$

$$k^2-4k+3=0, \qquad (k-1)(k-3)=0$$

$k=1$ 또는 $k=3$

$g(1)=1$ 또는 $g(1)=3$

이때, 조건 (나)에서 $g(x)$의 최솟값이 $\frac{5}{2}$이므로

$$g(1)=3$$

따라서 조건 (다)에서 $f(g(1))=f(3)=6$이므로

$$27-54+3b-3=6, \qquad b=12$$

따라서 $f(x)=x^3-6x^2+12x-3$이므로

$$f(4)=4^3-6\times 4^2+12\times 4-3=13$$

81) [정답] 19

[해설]

$$g(x)=\begin{cases}(x+3)f(x) & (x<0)\\(x+a)f(x-b) & (x\geq 0)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=0$에서 연속이어야 한다.

따라서

$$\lim_{x\to 0-}g(x)=\lim_{x\to 0+}g(x)=g(0) \quad \cdots\cdots ㉠$$

이 성립한다.

이때

$$\lim_{x\to 0-}g(x)=\lim_{x\to 0-}(x+3)f(x)=3f(0)$$

$$\lim_{x\to 0+}g(x)=\lim_{x\to 0+}(x+a)f(x-b)=af(-b)$$

$$g(0)=af(-b)$$

이므로 ㉠에서

$$3f(0)=af(-b) \quad \cdots\cdots ㉡$$

한편,

$$\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|}{(x+3)^2}$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{|g(x)|}{(x+3)^2\left(\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\right)}$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{|(x+3)f(x)|}{(x+3)^2\left(\sqrt{0+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\right)}$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{|(x+3)f(x)|}{(x+3)^2\times 2|g(t)|} \quad \cdots\cdots ㉢$$

이때 $t\neq -3$이고 $t\neq 6$인 모든 실수 t에 대하여 ㉢의 값이 존재하므로

$$f(x)=(x+3)(x+k)(k\text{는 상수})$$

의 꼴이어야 하고, ㉢에서

$$\lim_{x\to -3}\frac{|(x+3)f(x)|}{(x+3)^2\times 2|g(t)|}$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{|(x+3)^2(x+k)|}{(x+3)^2\times 2|g(t)|}$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{|x+k|}{2|g(t)|} \quad \cdots\cdots ㉣$$

이때 $t=-3$과 $t=6$에서만 ㉣의 값이 존재하지 않으므로 방정식 $g(x)=0$이 모든 실근은 $x=-3$과 $x=6$뿐이다.

주어진 식에서 $g(-3)=0$이므로

$$g(6)=0,\ \text{즉}\ (6+a)f(6-b)=0$$

이어야 한다.

이때 $a>0$이므로 $f(6-b)=0$에서

$$6-b=-3\ \text{또는}\ 6-b=-k$$

따라서 $b=9$ 또는 $k-b=-6$

(i) $b=9$인 경우

$x<0$에서

$$g(x)=(x+3)f(x)=(x+3)^2(x+k)$$

이때 $x<0$에서 $g(x)=0$의 해는 -3뿐이므로

$$-k\geq 0\ \text{또는}\ k=3 \quad \cdots\cdots ㉤$$

$x\geq 0$에서

$$g(x)=(x+a)f(x-9)=(x+a)(x-6)(x-9+k)$$

이때 $x\geq 0$에서 $g(x)=0$의 해는 6뿐이므로

$$9-k<0\ \text{또는}\ 9-k=6 \quad \cdots\cdots ㉥$$

㉤, ㉥에서 $k=3$

따라서 $f(x)=(x+3)^2$이므로 ㉡에서

$$3\times 3^2=af(-9),\qquad 27=36a$$

$$a=\frac{3}{4}$$

따라서

$$g(4)=(4+a)f(4-b)$$

$$=\left(4+\frac{3}{4}\right)f(-5)$$

$$=\frac{19}{4}\times(-2)^2=19$$

(ii) $k-b=-6$인 경우

$x<0$에서

$$g(x)=(x+3)f(x)=(x+3)^2(x+k)$$

이때 $x<0$에서 $g(x)=0$의 해는 -3뿐이므로

$$-k\geq 0\ \text{또는}\ k=3$$

$x\geq 0$에서

$$g(x)=(x+a)f(x-b)$$

$$=(x+a)(x-b+3)(x-b+k)$$

$$=(x+a)(x-b+3)(x-6)$$

이때 $x\geq 0$에서 $g(x)=0$의 해는 6뿐이고, $b>3$이므로

$b-3=6$에서 $\quad b=9$

$k-b=-6$에서 $\quad k=3$

따라서 (i)과 같은 결과이므로 $g(4)=19$이다.

82) [정답] **7**

[해설]

함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는 $x=1$과 $x=3$에서 연속이어야 한다.

(i) 함수 $f(x)g(x)$가 $x=1$에서 연속일 때

$$f(1)g(1)=\lim_{x\to 1-}f(x)g(x)$$

$$=(a^2-3a+2)(7-b)$$

$$=(a-1)(a-2)(7-b)$$

$$\lim_{x\to 1+}f(x)g(x)=(a^2-3a+2)(1+b)$$

$$=(a-1)(a-2)(1+b)$$

$$f(1)g(1)=\lim_{x\to 1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to 1+}f(x)g(x)$$

이므로 $(a-1)(a-2)(7-b)=(a-1)(a-2)(1+b)$에서

$a=1$ 또는 $a=2$ 또는 $b=3$

(ii) 함수 $f(x)g(x)$가 $x=3$에서 연속일 때

$$f(3)g(3)=\lim_{x\to 3+}f(x)g(x)$$
$$=(a^2-7a+10)(7-b)$$
$$=(a-2)(a-5)(7-b)$$

$$\lim_{x\to 3-}f(x)g(x)=(a^2-7a+10)(3+b)$$
$$=(a-2)(a-5)(3+b)$$

$$f(3)g(3)=\lim_{x\to 3-}f(x)g(x)=\lim_{x\to 3+}f(x)g(x)$$

이므로 $(a-2)(a-5)(7-b)=(a-2)(a-5)(3+b)$에서

$a=2$ 또는 $a=5$ 또는 $b=2$

(i), (ii)에서 $a=1$인 경우

함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이고, $x=3$에서도 연속이기 위해서는 $b=2$

$a=2$인 경우

함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$과 $x=3$에서 모두 연속이므로

$b=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

$a=3$ 또는 $a=4$인 경우

함수 $f(x)g(x)$가 $x=1$과 $x=3$에서 모두 연속이 되도록 하는 b의 값은 존재하지 않는다.

$a=5$인 경우

함수 $f(x)g(x)$는 $x=3$에서 연속이고, $x=1$에서도 연속이기 위해서는 $b=3$

따라서 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2),\ (2,\ 3),$

$(2,\ 4),\ (2,\ 5),\ (5,\ 3)$

이고 그 개수는 7이다.

83) [정답] 24

[해설]

함수 $h(x)=f(x)g(x)$가 구간 $(-2,\ 2)$에서 연속이므로 함수 $h(x)$가 $x=-1$과 $x=1$에서 연속이다.

그러므로 이차함수 $g(x)$는 $g(-1)=0,\ g(1)=0$을 만족해야 한다.

이차함수 $g(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$$g(x)=(x+1)(x-1)=x^2-1$$

따라서 $g(5)=5^2-1=24$

84) [정답] ①

[해설]

$h(x)=f(x)g(x)$라 하자.

$x\neq 1$일 때, 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 연속이므로 함수 $h(x)$도 연속이다.

그러므로 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 함수 $h(x)$가 $x=1$에서 연속이어야 한다.

$\lim_{x\to 1-}h(x)=\lim_{x\to 1-}\dfrac{2x^3+ax+b}{x-1}$의 값이 존재하므로

$2+a+b=0$, 즉 $b=-a-2$

$$\lim_{x\to 1-}h(x)=\lim_{x\to 1-}\frac{2x^3+ax-a-2}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1-}\frac{(x-1)(2x^2+2x+a+2)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1-}(2x^2+2x+a+2)=a+6$$

$$\lim_{x\to 1+}h(x)=\lim_{x\to 1+}\frac{2x^3+ax-a-2}{2x+1}$$
$$=\lim_{x\to 1+}\frac{(x-1)(2x^2+2x+a+2)}{2x+1}=0$$

$\lim_{x\to 1+}h(x)=\lim_{x\to 1-}h(x)=h(1)$이므로

$a+6=0$, 즉 $a=-6$

$b=-a-2$에서 $b=4$

따라서 $b-a=10$

85) [정답] ①

[해설]

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2-3x-5}=2$이므로

$$f(x)=2x^2+ax+b$$

함수 $f(x)g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=3$에서 연속이다.

$$\lim_{x\to 3}f(x)g(x)=f(3)g(3)$$

$\lim_{x\to 3}\dfrac{2x^2+ax+b}{x-3}=18+3a+b$에서 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$

$\lim_{x\to 3}(2x^2+ax+b)=0$이므로 $18+3a+b=0$

$$\lim_{x \to 3} \frac{2x^2+ax+b}{x-3}=0$$

$b=-3a-18$이므로 $f(x)=(x-3)(2x+a+6)$

$$\lim_{x \to 3} \frac{2x^2+ax+b}{x-3}=\lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(2x+a+6)}{x-3}$$
$$=\lim_{x \to 3}(2x+a+6)=0$$

이므로 $a=-12,\ b=18$

$$f(x)=2x^2-12x+18$$

따라서 $f(1)=8$

86) [정답] ③

[해설]

함수 $f(x)$는 $f(1)=0,\ f(a)=0$이고, $\lim_{x \to 2-} f(x)=-1$, $\lim_{x \to 2+} f(x)=-4+2a$에서 $\lim_{x \to 2-} f(x) \neq \lim_{x \to 2+} f(x)$이므로 $x=2$에서 불연속이다.

함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $h(x)$는 $x=1,\ x=a,\ x=2$에서 연속이어야 한다.

$\lim_{x \to 1} \frac{g(x)}{f(x)}=h(1),\ \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)}=h(a)$에서

$\lim_{x \to 1} f(x)=f(1)=0,\ \lim_{x \to a} f(x)=f(a)=0$이므로

$$\lim_{x \to 1} g(x)=0,\ \lim_{x \to a} g(x)=0 \text{ 즉, } g(1)=0,\ g(a)=0$$

또, $\lim_{x \to 2-} \frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x \to 2+} \frac{g(x)}{f(x)},\ \frac{g(2)}{-1}=\frac{g(2)}{-4+2a}$이므로

$g(2)=0$이고 $g(x)=(x-1)(x-2)(x-a)$이다.

$$\lim_{x \to 1} h(x)=\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x-2)(x-a)}{(x-1)(x-3)}$$
$$=\lim_{x \to 1} \frac{(x-2)(x-a)}{x-3}$$
$$=\frac{1-a}{2}$$

$$\lim_{x \to a} h(x)=\lim_{x \to a} \frac{(x-1)(x-2)(x-a)}{-x(x-a)}$$
$$=\lim_{x \to a} \frac{(x-1)(x-2)}{-x}$$
$$=-\frac{(a-1)(a-2)}{a}$$

$h(1)=h(a)$이므로

$$\frac{1-a}{2}=-\frac{(a-1)(a-2)}{a}$$

$a>2$이므로 $\quad a=4$

따라서

$$h(x)=\frac{g(x)}{f(x)}=\begin{cases} \frac{(x-2)(x-4)}{x-3} & (x \le 2) \\ -\frac{(x-1)(x-2)}{x} & (x>2) \end{cases}$$

이므로

$$h(1)+h(3)=-\frac{3}{2}+\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{13}{6}$$

87) [정답] ④

[해설]

함수 $f(x)$가 $x=a$를 제외한 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $\{f(x)\}^2$이 $x=a$에서 연속이면 함수 $\{f(x)\}^2$은 실수 전체의 집합에서 연속이다.

함수 $\{f(x)\}^2$이 $x=a$에서 연속이려면

$$\lim_{x \to a-} \{f(x)\}^2=\lim_{x \to a+} \{f(x)\}^2=\{f(a)\}^2$$

이어야 한다.

이때

$$\lim_{x \to a-} \{f(x)\}^2=\lim_{x \to a-} (-2x+6)^2=(-2a+6)^2$$

$$\lim_{x \to a+} \{f(x)\}^2=\lim_{x \to a+} (2x-a)^2=a^2$$

$\{f(a)\}^2=(2a-a)^2=a^2$

이므로 $(-2a+6)^2=a^2$에서

$3a^2-24a+36=0,\ a^2-8a+12=0$

$(a-2)(a-6)=0,\ a=2$ 또는 $a=6$

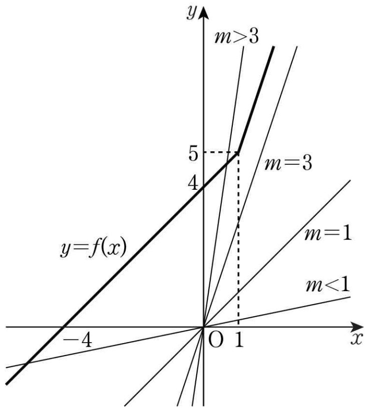
따라서 모든 상수 a의 값의 합은 $2+6=8$

88) [정답] 8

[해설]

직선 $y=mx$는 실수 m의 값에 관계없이 항상 원점을 지나므로 직선 $y=mx$와 함수

$f(x)=\begin{cases} x+4 & (x<1) \\ 3x+2 & (x \ge 1) \end{cases}$의 그래프는 다음과 같다.



그러므로 함수 $g(m)$은

$g(m)=\begin{cases}1 & (m<1 \text{ 또는 } m>3)\\ 0 & (1\le m\le 3)\end{cases}$

즉, 함수 $g(m)$은 $m=1$과 $m=3$에서 불연속이다.

그런데 함수 $g(x)h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$, $x=3$에서도 연속이 되어야 한다.

(i) $x=1$일 때

$\lim_{x\to1-}g(x)h(x)=1\times h(1)=h(1)$,

$\lim_{x\to1+}g(x)h(x)=0\times h(1)=0$

함수 $g(x)h(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1}g(x)h(x)$의 값이 존재한다.

즉, $\lim_{x\to1-}g(x)h(x)=\lim_{x\to1+}g(x)h(x)$에서 $h(1)=0$

(ii) $x=3$일 때

$\lim_{x\to3-}g(x)h(x)=0\times h(3)=0$,

$\lim_{x\to3+}g(x)h(x)=1\times h(3)=h(3)$

함수 $g(x)h(x)$는 $x=3$에서 연속이므로

$\lim_{x\to3}g(x)h(x)$의 값이 존재한다.

즉, $\lim_{x\to3-}g(x)h(x)=\lim_{x\to3+}g(x)h(x)$에서 $h(3)=0$

(i), (ii)에서 $h(1)=h(3)=0$이므로 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $h(x)$는 $h(x)=(x-1)(x-3)$

따라서 $h(5)=4\times2=8$

89) [정답] 44

[해설]

$f(x)=(x-a)^2-a^2+b$이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(a,\ -a^2+b)$

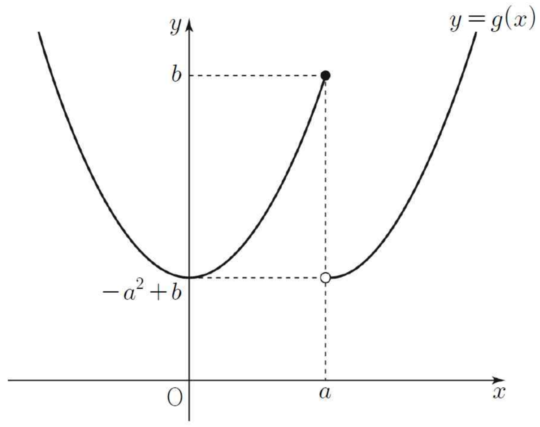
$f(x+a)=x^2-a^2+b$이므로 이차함수 $y=f(x+a)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(0,\ -a^2+b)$이고

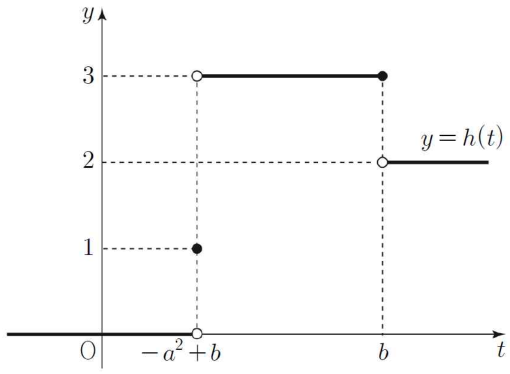
$g(a)=f(2a)=b$

(i) $a^2-b\le0$일 때

$-a^2+b\ge0$이므로

두 함수 $y=g(x)$, $y=h(t)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.





$t>b$일 때 $h(t)-2=0$이고

$t<-a^2+b+k$일 때 $h(t-k)=0$이다.

(a) $k>a^2$일 때

모든 실수 t에 대하여 $\{h(t)-2\}h(t-k)=0$이므로 함수 $\{h(t)-2\}h(t-k)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(b) $k=a^2$일 때

$\{h(t)-2\}h(t-k)=\begin{cases}0 & (t\ne b)\\ 1 & (t=b)\end{cases}$이므로

함수 $\{h(t)-2\}h(t-k)$는 $t=b$에서 불연속이다.

(c) $k<a^2$일 때

$\lim_{t\to b+}\{h(t)-2\}=0$이고

$\lim_{t\to b+}h(t-k)=\alpha_1$ $(\alpha_1=2,\ 3)$이므로

$\lim_{t\to b+}\{h(t)-2\}h(t-k)=0$

한편 $\lim_{t\to b-}\{h(t)-2\}=1$이고

$\lim_{t\to b-}h(t-k)=\beta_1$ $(\beta_1=2,\ 3)$이므로

$\lim_{t\to b-}\{h(t)-2\}h(t-k)\ne0$

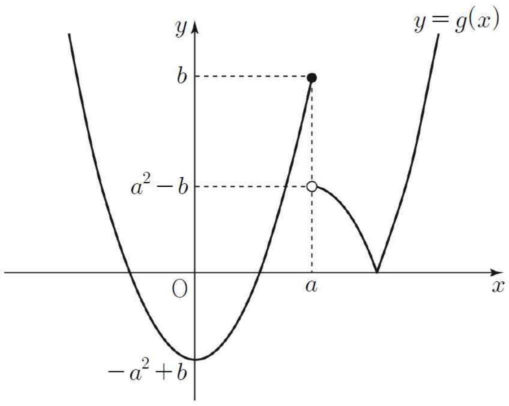
그러므로 함수 $\{h(t)-2\}h(t-k)$는 $t=b$에서 불연속이다.

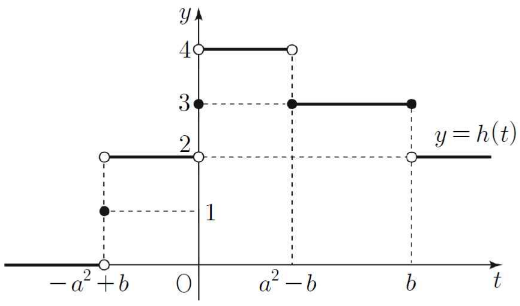
(a), (b), (c)에 의해 $k>a^2$인 임의의 실수 k에 대해서만 함수

$\{h(t)-2\}h(t-k)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(ii) $0<a^2-b<b$인 경우

두 함수 $y=g(x)$, $y=h(t)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.





$t>b$일 때 $h(t)-2=0$이고

$t<-a^2+b+k$일 때 $h(t-k)=0$이다.

(a) $k>a^2$일 때

모든 실수 t에 대하여 $\{h(t)-2\}h(t-k)=0$이므로 함수 $\{h(t)-2\}h(t-k)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(b) $k=a^2$일 때

$\{h(t)-2\}h(t-k)=\begin{cases}0 & (t\neq b)\\1 & (t=b)\end{cases}$이므로

함수 $\{h(t)-2\}h(t-k)$는 $t=b$에서 불연속이다.

(c) $k<a^2$

$\lim\limits_{t\to b+}\{h(t)-2\}=0$이고

$\lim\limits_{t\to b+}h(t-k)=\alpha_2$ $(\alpha_2=2,\ 3,\ 4)$이므로

$\lim\limits_{t\to b+}\{h(t)-2\}h(t-k)=0$

한편 $\lim\limits_{t\to b-}\{h(t)-2\}=1$이고

$\lim\limits_{t\to b-}h(t-k)=\beta_2$ $(\beta_2=2,\ 3,\ 4)$이므로

$\lim\limits_{t\to b-}\{h(t)-2\}h(t-k)\neq 0$

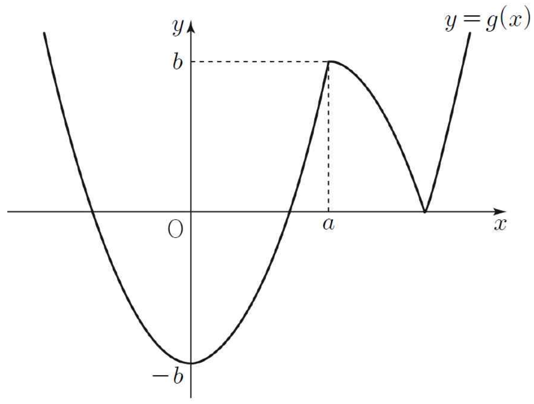
그러므로 함수 $\{h(t)-2\}h(t-k)$는 $t=b$에서 불연속이다.

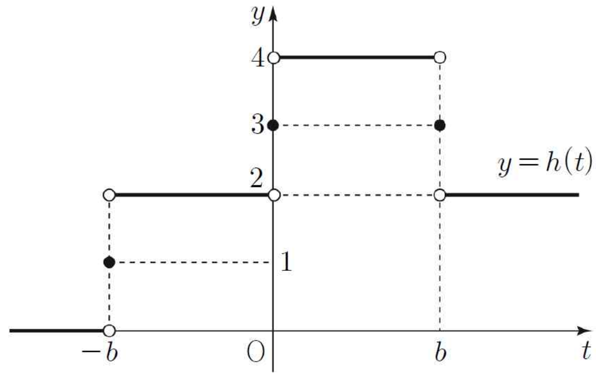
(a), (b), (c)에 의해 $k>a^2$인 임의의 실수 k에 대해서만 함수

$\{h(t)-2\}h(t-k)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(iii) $a^2-b=b$인 경우

두 함수 $y=g(x)$, $y=h(t)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.





$t>b$일 때 $h(t)-2=0$이고

$t<-b+k$일 때 $h(t-k)=0$이다.

(a) $k>2b$일 때

모든 실수 t에 대하여 $\{h(t)-2\}h(t-k)=0$이므로 함수 $\{h(t)-2\}h(t-k)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(b) $k=2b$일 때

$\{h(t)-2\}h(t-k)=\begin{cases}0 & (t\neq b)\\1 & (t=b)\end{cases}$이므로

함수 $\{h(t)-2\}h(t-k)$는 $t=b$에서 불연속이다.

(c) $k<2b$일 때

$\lim\limits_{t\to b+}\{h(t)-2\}=0$이고

$\lim\limits_{t\to b+}h(t-k)=\alpha_3$ $(\alpha_3=2,\ 4)$이므로

$\lim\limits_{t\to b+}\{h(t)-2\}h(t-k)=0$이다.

한편 $\lim\limits_{t\to b-}\{h(t)-2\}=2$이고

$\lim\limits_{t\to b-}h(t-k)=\beta_3$ $(\beta_3=2,\ 4)$이므로

$\lim\limits_{t\to b-}\{h(t)-2\}h(t-k)\neq 0$이다.

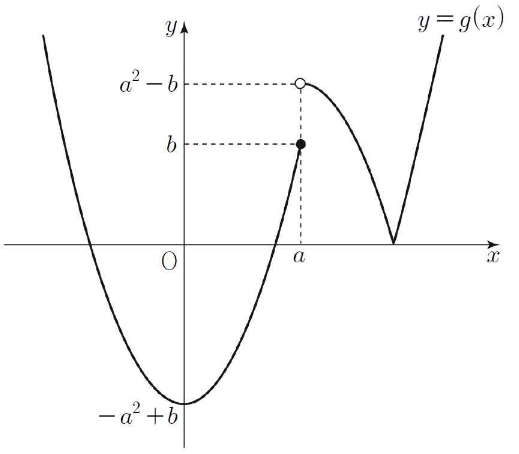
그러므로 함수 $\{h(t)-2\}h(t-k)$는 $t=b$에서 불연속이다.

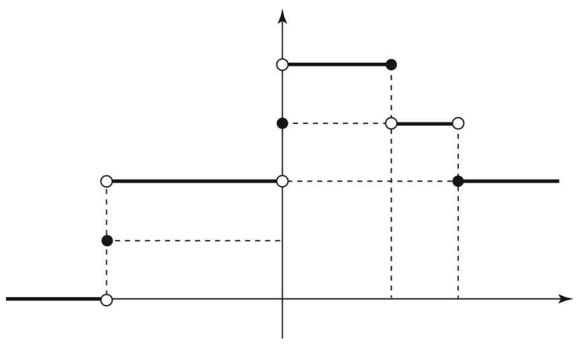
(a), (b), (c)에 의해 $k>2b$인 임의의 실수 k에 대해서만 함수

$\{h(t)-2\}h(t-k)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(iv) $a^2-b>b$인 경우

두 함수 $y=g(x)$, $y=h(t)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.





$t \geq a^2-b$일 때 $h(t)-2=0$이고

$t<-a^2+b+k$일 때 $h(t-k)=0$이다.

(a) $k \geq 2(a^2-b)$일 때

모든 실수 t에 대하여 $\{h(t)-2\}h(t-k)=0$이므로 함수 $\{h(t)-2\}h(t-k)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(b) $k<2(a^2-b)$일 때

$\displaystyle\lim_{t\to(a^2-b)+}\{h(t)-2\}=0$이고

$\displaystyle\lim_{t\to(a^2-b)+}h(t-k)=\alpha_4$ $(\alpha_4=2,\ 3,\ 4)$이므로

$\displaystyle\lim_{t\to(a^2-b)+}\{h(t)-2\}h(t-k)=0$이다.

한편 $\displaystyle\lim_{t\to(a^2-b)-}\{h(t)-2\}=1$이고

$\displaystyle\lim_{t\to(a^2-b)-}h(t-k)=\beta_4$ $(\beta_4=2,\ 3,\ 4)$이므로

$\displaystyle\lim_{t\to(a^2-b)-}\{h(t)-2\}h(t-k)\neq 0$이다.

그러므로 함수 $\{h(t)-2\}h(t-k)$는 $t=a^2-b$에서 불연속이다.

(a), (b)에 의해 $k \geq 2(a^2-b)$인 임의의 실수 k에 대해서만 함수

$\{h(t)-2\}h(t-k)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(ⅰ)~(ⅳ)에서 조건을 만족시키는 경우는 (ⅳ)이므로

$2(a^2-b)=24$

$a^2-b=12$에서

$b=a^2-12>0$이므로 $a^2>12$

$a^2-b>b$에서 $a^2-2b=a^2-2(a^2-12)$

$=24-a^2>0$

이므로 $a^2<24$

그러므로 $12<a^2<24$

a는 자연수이므로 $a=4$, $b=4$

따라서 $10a+b=44$

90) [정답] ①

[해설]

$g(x)=\begin{cases} x & (x<-1 \text{ 또는 } x>1) \\ f(x) & (-1\leq x\leq 1)\end{cases}$에서

$$h(x)=\lim_{t\to 0+}g(x+t)\times\lim_{t\to 2+}g(x+t)$$

$$=\begin{cases} x(x+2) & (x\geq 1) \\ (x+2)f(x) & (-1\leq x<1) \\ xf(x+2) & (-3\leq x<-1) \\ x(x+2) & (x<-3)\end{cases}$$

ㄱ. $h(1)=1\times 3=3$ (참)

ㄴ. $\displaystyle\lim_{x\to 1-}h(x)=\lim_{x\to 1-}(x+2)f(x)=3f(1)$

$\displaystyle\lim_{x\to 1+}h(x)=h(1)=3$

이므로 $f(1)\neq 1$이면 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 불연속이다. 따라서 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이라 할 수 없다. (참)

ㄷ. $g(-1)=f(-1)=-2$이고, 함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[-1,1]$에서 감소하므로 $f(1)<-2$

$-3\leq x<-1$에서 $h(x)=xf(x+2)$이고,

$x<0$, $f(x+2)<0$이므로 $h(x)>0$

$-1<x<1$에서 $h(x)=(x+2)f(x)$이므로

$h'(x)=f(x)+(x+2)f'(x)$

$f'(x)<0$, $x+2>0$, $f(x)<0$이므로 $h'(x)<0$

따라서 $-1<x<1$에서 함수 $h(x)$는 감소하므로

$\displaystyle\lim_{x\to 1-}h(x)=\lim_{x\to 1-}(x+2)f(x)=3f(1)<-6$

한편, ㄱ에서 $h(1)=3$이므로 함수 $h(x)$는 최솟값을 갖지 않는다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ 뿐이다.

[다른 풀이]

ㄷ. [반례] $f(x)=-x-3$이라 하자.

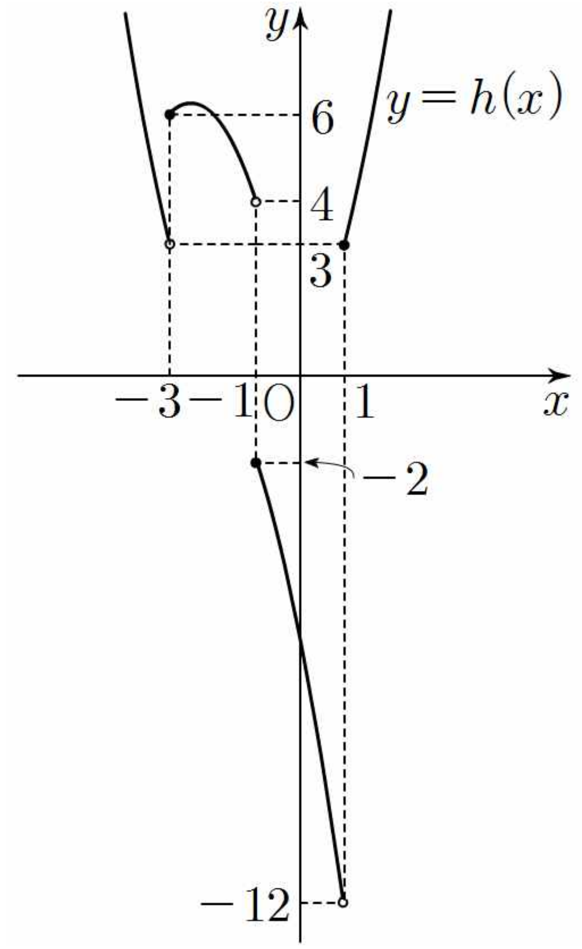
$x<-3$일 때, $h(x)=x(x+2)$

$-3\leq x<-1$일 때, $h(x)=-x(x+5)$

$-1\leq x<1$일 때, $h(x)=-(x+3)(x+2)$

$x\geq 1$일 때, $h(x)=x(x+2)$

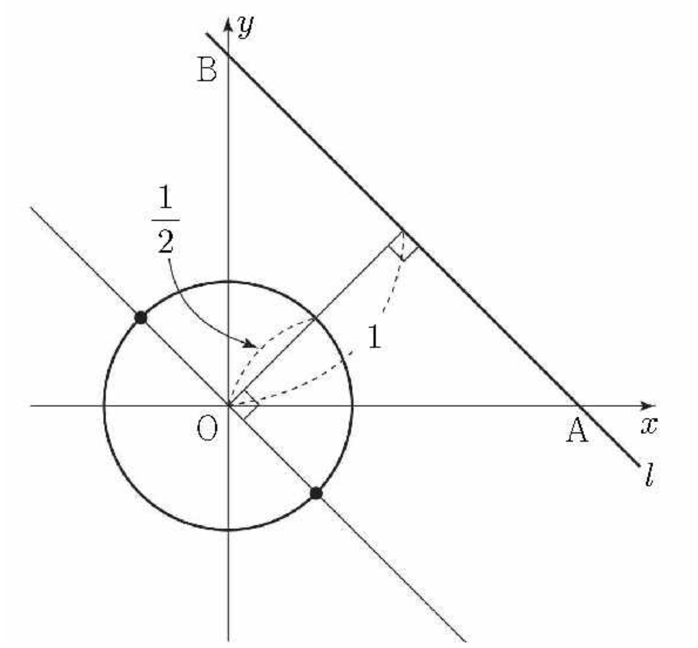
이때, $\displaystyle\lim_{x\to 1-}h(x)=-12$, $h(1)=3$이므로 함수 $h(x)$의 최솟값은 없다. (거짓)



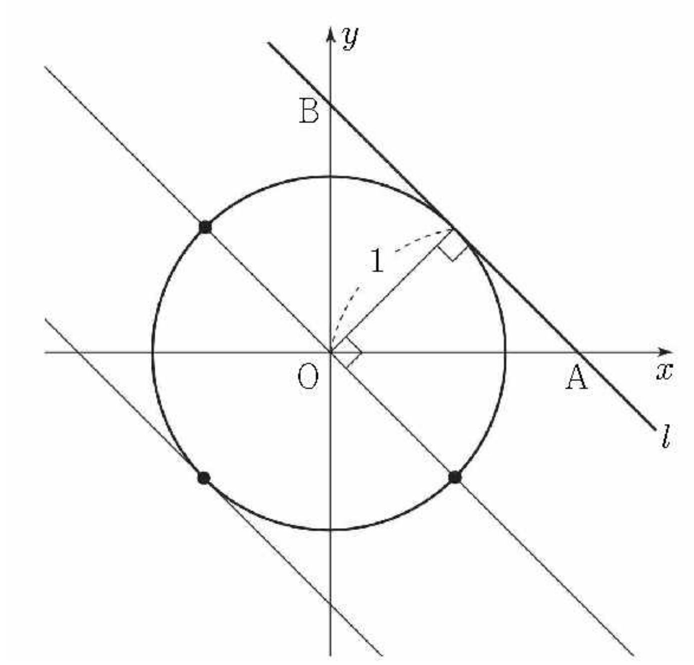
91) [정답] ⑤

[해설]
두 점 A($\sqrt{2}$, 0), B(0, $\sqrt{2}$)를 지나는 직선을 l이라 할 때,
직선 l의 방정식은 $x+y-\sqrt{2}=0$이고
원의 중심 O와 직선 l사이의 거리는 1이다.
$\overline{\mathrm{AB}}=2$이므로 원 위의 한 점 P와 직선 l사이의
거리를 h라 하면 삼각형 ABP의 넓이는
$\frac{1}{2}\times 2\times h=h$
따라서 삼각형 ABP의 넓이가 자연수가 되도록
하는 점 P의 개수는 h가 자연수가 되도록 하는
점 P의 개수와 같다.
ㄱ. $t=\frac{1}{2}$일 때,

중심이 원점이고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}$인 원 위의 점 중
h가 자연수가 되는 경우는 $h=1$인 경우뿐이다. $h=1$이
되는 원 위의 점의 개수는 2이므로
$f\left(\frac{1}{2}\right)=2$(참)



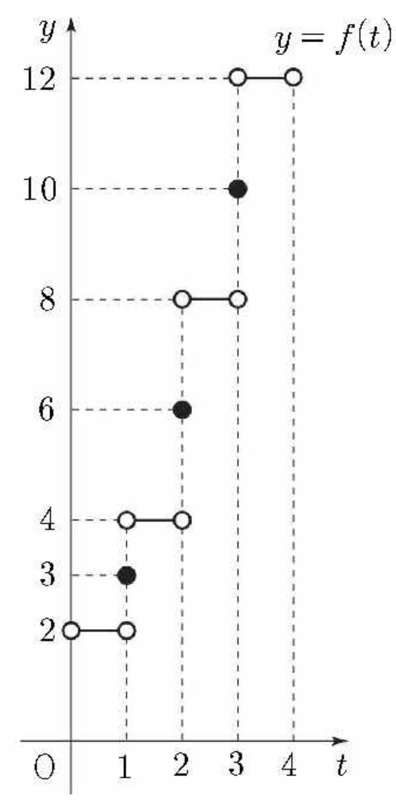
ㄴ. $t=1$일 때,
중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점 중
h가 자연수가 되는 경우는 $h=1$인 경우와 $h=2$인
경우이다.
$h=1$이 되는 원 위의 점의 개수는 2이고
$h=2$가 되는 원 위의 점의 개수는 1이므로 $f(1)=3$



$1<t<2$일 때,
중심이 원점이고 반지름의 길이가 t인 원 위의 점 중 h가
자연수가 되는 경우는 $h=1$인 경우와 $h=2$인 경우이다.
$h=1$이 되는 원 위의 점의 개수는 2이고
$h=2$가 되는 원 위의 점의 개수는 2이므로
$\lim_{t\to 1+} f(t)=4$
$\lim_{t\to 1+} f(t)\neq f(1)$(참)
ㄷ. ㄴ과 같은 방법으로 구간 (0, 4)에서 함수 $f(t)$를 구하면

$$f(t)=\begin{cases}2 & (0<t<1)\\ 3 & (t=1)\\ 4 & (1<t<2)\\ 6 & (t=2)\\ 8 & (2<t<3)\\ 10 & (t=3)\\ 12 & (3<t<4)\end{cases}$$

함수 $f(t)$의 그래프는 다음과 같다.



$0<a<4$인 실수 a에 대하여 함수 $f(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값은 1, 2, 3이므로 a의 개수는 3이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

92) [정답] 5

[해설]

직선 AB에서 가장 먼 원 위의 점 X까지의 거리는 $\frac{8}{5}$이고 그때의 넓이는 4이다.

반대편의 가장 먼 점 X까지의 거리는 $\frac{2}{5}$이고, 그때의 넓이는 1이다.

즉, 선분 $\overline{AB}=\sqrt{3^2+4^2}=5$이고 삼각형 ABX의 넓이의 최댓값이 4, 최솟값이 1이므로 원 위의 모든 점이 집합의 원소가 될 수 있다.

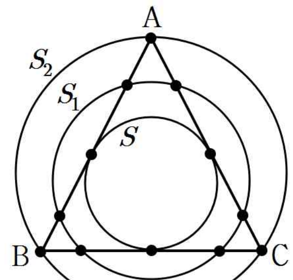
따라서 t의 범위에 따라 $f(t)$를 구하면 다음과 같다.

$$f(t)=\begin{cases}4 & (0<t<1)\\ 3 & (t=1)\\ 2 & (1<t<4)\\ 1 & (t=4)\end{cases}$$

따라서 불연속이 되는 점은 $t=1$, 4이므로 불연속인 모든 t의 합은 $1+4=5$

93) [정답] ③

[해설]



원에서 거리가 t $(0\le t\le 1)$인 삼각형 ABC 위의 점 P의 개수를 $f(t)$라 하므로 다음과 같이 나누어볼 수 있다.

(i) $t=0$일 때
위의 그림에서 원 S와 삼각형 ABC의 교점의 개수와 같으므로 $f(t)=3$

(ii) $0<t<1$일 때
위의 그림과 같이 중심이 원 S와 같고, 반지름이 $1+t$인 원 S_1과 삼각형 ABC의 교점의 개수와 같으므로 $f(t)=6$

(iii) $t=1$일 때
위의 그림과 같이 중심이 원 S와 같고, 반지름이 2인 원 S_2와 삼각형 ABC의 교점의 개수와 같으므로 $f(t)=3$

이상에서 $f(t)=\begin{cases}3 & (t=0)\\ 6 & (0<t<1)\\ 3 & (t=1)\end{cases}$

따라서 함수 $f(t)$는 $t=0$ 또는 $t=1$에서 불연속이므로 불연속점의 개수 a는 $a=2$

또, $\lim_{t\to 1-}f(t)=6$이므로 $b=6$

$\therefore a+b=2+6=8$

94) [정답] ③

[해설]

극한값이 존재하면 $f(x)=(x-2)(x-4)g(x)$

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=4$에서 $g(2)=-2$

$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)}{x-4}=2$에서 $g(4)=1$

다항식 $g(x)$에 대하여 구간 $[2, 4]$에서 방정식 $g(x)=0$는 적어도 한개의 실근을 갖는다.

한편 $x=2$, $x=4$는 방정식 $f(x)=0$의 실근이므로 구간 $[2, 4]$에서 방정식 $f(x)=0$은 적어도 3개의 실근을 갖는다.

$\therefore$ $m=3$